



**HAL**  
open science

## Etude des modes normaux non linéaires d'un arbre rotatif par la méthode des surfaces invariantes

Mathias Legrand, Dongying Jiang, Christophe Pierre

► **To cite this version:**

Mathias Legrand, Dongying Jiang, Christophe Pierre. Etude des modes normaux non linéaires d'un arbre rotatif par la méthode des surfaces invariantes. 16e Congrès Français de Mécanique, May 2003, Nice, France. hal-00354489

**HAL Id: hal-00354489**

**<https://hal.science/hal-00354489>**

Submitted on 20 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

## Étude des modes normaux non linéaires d'un arbre rotatif par la méthode des surfaces invariantes

<sup>a</sup>Mathias Legrand, <sup>b</sup>Dongying Jiang & <sup>b</sup>Christophe Pierre

<sup>a</sup>*Laboratoire de Mécanique et Matériau  
École Centrale de Nantes, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes*

<sup>b</sup>*Vibrations and Acoustics Laboratory  
University of Michigan, Ann Arbor, U.S.A.*

### Abstract

For rotating shaft systems, the mechanism representing the supporting hydraulic bearings is inherently nonlinear even though the deformation of the rotating shaft can be modelled linearly. Complicated behaviors can occur in the whole system and an efficient reduced order model is important for the vibration analysis. In this paper, a rotating shaft supported by two short hydraulic bearings is studied in details. A simplify model of the bearings is applied so that the supporting forces can be expressed analytically. The shaft and the bearings are coupled by Craig-Bampton method to ensure a minimal degrees-of-freedom system model. A very new formulation for the manifolds is applied here to get the nonlinear normal modes of such a system with general damping, gyroscopic and stiffness matrices. Once those nonlinear modes are constructed the motion on the nonlinear manifolds is compared to a direct time simulation.

### Résumé

Dans les systèmes intégrant des structures en rotation, les non linéarités proviennent des paliers hydrauliques. Même si l'hypothèse de déformations linéaires est permise, le comportement de l'ensemble est non linéaire et un modèle simple et approprié est important pour la compréhension des phénomènes vibratoires. Ce travail étudie le comportement d'un arbre en rotation supporté par deux paliers lisses. L'utilisation d'une formule de Reynolds simplifiée pour le comportement des paliers permet d'exprimer analytiquement les forces qu'ils engendrent. La méthode de Craig-Bampton discrétise les équations du mouvement avec un nombre minimal de degrés de liberté. Une toute nouvelle formulation permet de générer les modes normaux non linéaires d'un tel système ayant des matrices gyroscopique, d'amortissement et de raideur tout à fait générales et une simulation directe en temps est comparée aux résultats obtenus par la méthode des surfaces invariantes.

**Mots clés :** arbre rotatif ; modes normaux non linéaires ; méthode des surfaces invariantes

## 1 Introduction

Dans le domaine de la mécanique, la plupart des systèmes en rotation à grande vitesse intègrent des paliers lisses ou des roulements à billes. Ce type de structures est fortement non linéaire et rend particulièrement difficile l'analyse du comportement de l'ensemble. Même des outils modernes comme la méthode des éléments finis peuvent parfois s'affranchir de certains effets dynamiques et sont souvent trop chers en temps de calcul pour prédire des solutions de systèmes très fortement non linéaires. L'objectif de ce travail est de construire un modèle simple d'un système comprenant un arbre tournant et des paliers lisses à ses extrémités en utilisant l'approche des surfaces invariantes

pour obtenir les modes normaux non linéaires de la structure. La première partie présente le système étudié et établit les équations de la mécanique qui en découlent. La deuxième partie concerne l'étude des équations linéarisées de la structure. La méthode des surfaces invariantes est présentée et appliquée à notre système dans une troisième et dernière partie.

## 2 Modélisation d'un système arbre rotatif - paliers lisses

### 2.1 Présentation de la structure

Cette étude concerne un arbre rotatif avec deux paliers lisses à ses extrémités, auquel s'ajoute en son milieu, un disque rigide. Les termes non linéaires proviennent des forces hydrauliques dans les

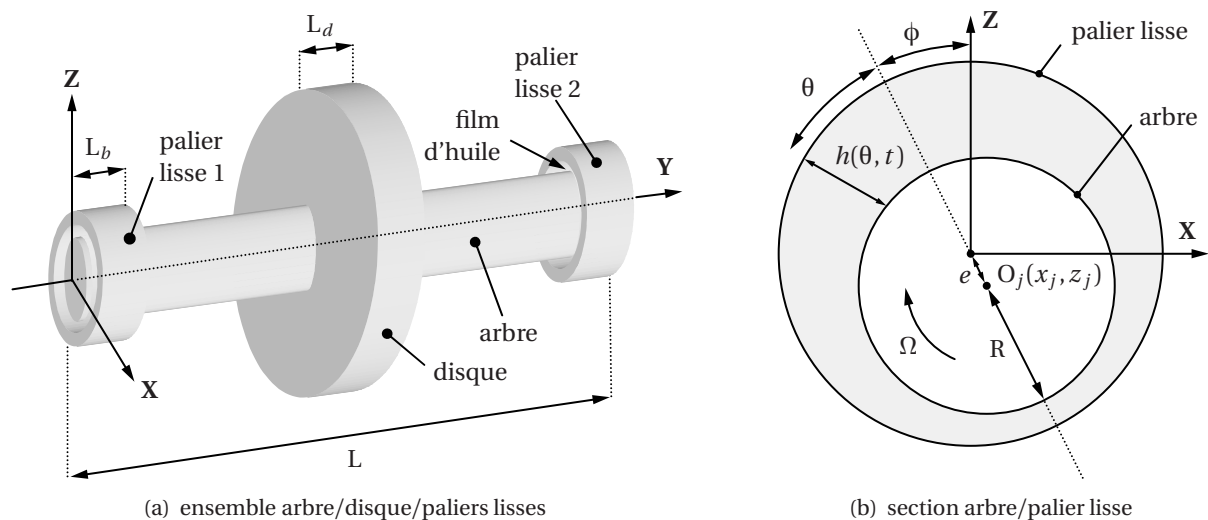


FIGURE 1 - Système étudié

paliers et interviennent comme conditions aux limites d'une simple poutre de type Euler-Bernoulli qui sert à modéliser l'arbre rotatif. Les déformations de cette structure sont donc considérées linéaires.

### 2.2 Mise en équations

La mise en équations, qui suit le travail de [Lalanne *et al.*(1990)], nécessite le calcul de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation ainsi que du travail virtuel des forces non linéaires créées par le film d'huile situé entre l'arbre et les paliers lisses et du champ de pesanteur. L'énergie cinétique de l'arbre s'écrit :

$$E_c = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left( \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} \right)^2 \right) dy + \rho I L \Omega^2 - 2\rho I \Omega \int_0^L \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dy \quad (1)$$

où  $S$  est la surface de la section de l'arbre,  $I$ , le moment quadratique de la section,  $\rho$ , la masse volumique du matériau,  $L$ , la longueur de l'arbre et  $\Omega$  la vitesse de rotation. L'énergie cinétique du disque est similaire : il suffit d'intégrer sur le segment  $\left[ \frac{L-L_d}{2}, \frac{L+L_d}{2} \right]$  ( $L_d$  : longueur du disque) et de remplacer la surface de la section, le moment quadratique, la longueur et la masse volumique de l'arbre par ceux du disque. Ce dernier étant rigide, il reste l'énergie de déformation de l'arbre :

$$E_d = \frac{EI}{2} \int_0^L \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (2)$$

Le travail virtuel des forces de pesanteur s'écrit sous la forme :

$$\delta W_1 = -\rho g S \int_0^L \delta w(y, t) dy - \rho_d g S_d \int_{\frac{L-L_d}{2}}^{\frac{L+L_d}{2}} \delta w(y, t) dy \quad (3)$$

et celui des forces non linéaires créées par le film d'huile dans les paliers lisses :

$$\delta W_2 = Fx_1 \delta u(0, t) + Fx_2 \delta u(L, t) + Fz_1 \delta w(0, t) + Fz_2 \delta w(L, t) \quad (4)$$

où  $x$  et  $z$  indiquent la direction de la force et les indices 1 et 2, les numéros des paliers.

Pour simplifier les équations, une procédure de réduction de Craig-Bampton est appliquée à la structure. Du fait de l'hypothèse de paliers lisses courts, les fonctions de forme conservées sont :

$$[\Phi(y)] = \left[ \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \frac{y}{L}, 1 - \frac{y}{L} \right] \quad (5)$$

À partir des énergies, des travaux virtuels et de la discrétisation des déplacements, le principe d'Hamilton permet d'écrire un système matriciel régissant le comportement de l'ensemble arbre rotatif - paliers lisses.

### 2.3 Calcul des forces hydrauliques non linéaires

Le modèle retenu pour le comportement du fluide dans un palier lisse est basé sur l'équation de Reynolds :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (6)$$

avec  $h$ , la distance entre l'arbre et le palier lisse,  $\mu$ , la viscosité du fluide,  $\Omega$ , la vitesse angulaire de l'arbre,  $R$ , le rayon externe de l'arbre et  $p$ , la pression du film d'huile. Un rapide calcul montre que  $h = c - z_j \cos(\theta + \phi) + x_j \sin(\theta + \phi)$  où  $c$ , est le jeu entre l'arbre et le palier et  $e$ , l'excentricité de l'axe de rotation de l'arbre dans le palier. En remplaçant l'expression de  $h$  dans l'équation de Reynolds puis en intégrant le champs de pression ainsi calculé sur la surface de contact entre le fluide et le palier lisse, il vient d'après [Lee (1993)] :

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\mu R L b^3 \Omega}{2c^2} \int_0^\pi \frac{G(Z_j, X_j, \dot{Z}_j, \dot{X}_j, \theta, \phi)}{H_j^3} \sin(\theta + \phi) d\theta \\ F_z &= \frac{\mu R L b^3 \Omega}{2c^2} \int_0^\pi \frac{G(Z_j, X_j, \dot{Z}_j, \dot{X}_j, \theta, \phi)}{H_j^3} \cos(\theta + \phi) d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

avec :

$$G(Z_j, X_j, \dot{Z}_j, \dot{X}_j, \theta, \phi) = Z_j \sin(\theta + \phi) + X_j \cos(\theta + \phi) - 2(\dot{Z}_j \cos(\theta + \phi) - \dot{X}_j \sin(\theta + \phi))$$

Dans les équations précédentes, les termes sont sans dimension :

$$\epsilon = \frac{e}{c}, \quad Z_j = \frac{z_j}{c}, \quad X_j = \frac{x_j}{c}, \quad \dot{Z}_j = \frac{\dot{z}_j}{c\Omega}, \quad \dot{X}_j = \frac{\dot{x}_j}{c\Omega}, \quad H_j = 1 - Z_j \cos(\theta + \phi) + X_j \sin(\theta + \phi)$$

Afin de construire les modes normaux non linéaires, les équations doivent être linéarisées autour de la position d'équilibre de la structure.

### 3 Étude du modèle linéaire

#### 3.1 Linéarisation des forces hydrauliques

À l'équilibre, l'excentricité sans dimension  $\epsilon_e$  est solution de l'équation non linéaire (8) :

$$\frac{\mu \text{NRL}_b^3}{2f_p c^2} = \frac{(1 - \epsilon_e^2)^2}{\pi \epsilon_e \sqrt{\pi^2 (1 - \epsilon_e^2) + 16\epsilon_e^2}} \quad (8)$$

et la position d'équilibre adimensionnelle est alors donnée par (9) :

$$Z_e = -\epsilon_e \cos(\phi_e); \quad X_e = \epsilon_e \sin(\phi_e); \quad \phi_e = \arctan\left(\frac{\pi \sqrt{1 - \epsilon_e^2}}{4\epsilon_e}\right) \quad (9)$$

où N est la fréquence de rotation,  $f_p$ , le poids de l'ensemble arbre/disque, R, le rayon extérieur de l'arbre et  $L_b$ , la longueur du palier. La linéarisation des forces hydrauliques autour de la position d'équilibre fait apparaître une nouvelle matrice raideur et une nouvelle matrice gyroscopique complètement générales.

#### 3.2 Analyse modale du système linéaire

Dans l'espace des phases, les équations du mouvement du système autonome découlant de la linéarisation peuvent s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$\mathbf{x}$  est le vecteur des coordonnées généralisées et  $\mathbf{M}$  est la matrice masse du système. La matrice  $\mathbf{C}$  contient tous les termes linéaires d'amortissement et gyroscopiques et la matrice  $\mathbf{K}$ , tous les termes linéaires de raideur du système. Posons :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

On recherche les solutions de la forme  $\mathbf{z}(t) = \bar{\mathbf{z}}e^{\lambda t}$ . Les équations du mouvement ne peuvent être découplées que dans l'espace des phases parce que les matrices  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{C}$  sont arbitraires. Les vecteurs propres et les valeurs propres sont complexes ou réels. Puisque la théorie des modes normaux non linéaires est établie dans l'espace des réels, une transformation linéaire réelle entre l'espace des phases et l'espace modal est requise. On construit une matrice  $\mathbf{Z}'$  dont les colonnes contiennent successivement les parties réelles puis imaginaires des modes complexes et ensuite les modes réels, comme suit :

$$\mathbf{Z}' = [\Re \bar{\mathbf{z}}_1 \quad \Im \bar{\mathbf{z}}_1 \quad \cdots \quad \Re \bar{\mathbf{z}}_p \quad \Im \bar{\mathbf{z}}_p \quad \bar{\mathbf{z}}_{2p+1} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{z}}_{2N}] \quad (12)$$

En écrivant :

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}' \boldsymbol{\eta}(t) \quad (13)$$

l'équation (10) est transformée en :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}' \boldsymbol{\eta}(t) \quad (14)$$

avec :

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \alpha_{2N-1} & \beta_{2N-1} \\ & & & & \beta_{2N} & \alpha_{2N} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha_{2k-1} = \alpha_{2k} = \Re \lambda_{2k-1} \\ \beta_{2k-1} = -\beta_{2k} = \Im \lambda_{2k-1} & k = 1, \dots, p \\ \alpha_k = \lambda_k \\ \beta_k = 0 & k = 2p + 1, \dots, 2N \end{cases} \quad (15)$$

Les valeurs propres associées aux modes propres ainsi calculés sont notées  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}\}$ . Dans cet espace modal réel, les équations sont au plus couplées par paire. Ces dernières correspondent à des mouvements oscillants. Les équations qui ne sont pas couplées correspondent à des modes sur-amortis qui n'oscillent pas.

## 4 Modes normaux non linéaires

### 4.1 Concept des modes normaux non linéaires

Pour un système linéaire, lorsque la structure se déplace selon un de ses modes, il suffit de connaître le mouvement d'une seule coordonnée généralisée pour en déduire celui des autres. Cette propriété importante est utilisée dans le cas non linéaire : un mode normal non linéaire est un mouvement "en accord" de tous les degrés de liberté du système. [Shaw *et al.*(1991)] ont défini les modes normaux non linéaires comme des mouvements qui prennent appui sur une surface dans l'espace des phases (au lieu d'un plan, dans le cas linéaire).

### 4.2 Construction des surfaces invariantes

L'équation du mouvement est prise sous sa forme modale :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \Lambda' \boldsymbol{\eta}(t) + \mathbf{f} \quad (16)$$

où  $\mathbf{f}$  est un vecteur ne contenant que les termes non linéaires des forces hydrauliques et projeté dans l'espace modal selon l'équation (13). Dans un premier temps, certaines paires de coordonnées généralisées du système (celles impliquées dans une résonance interne par exemple) sont choisies comme coordonnées maîtres et subissent une transformation en coordonnées polaires comme défini par [Pesheck (2000)] et [Legrand *et al.*(2002)] :

$$\begin{cases} s_k = a_k \cos \phi_k \\ t_k = a_k \sin \phi_k \end{cases} \quad k \in S_M \quad (17)$$

où  $S_M$  est l'ensemble des coordonnées maîtres. Ensuite, toutes les paires esclaves sont écrites comme fonctions des paires maîtres :

$$\begin{cases} s_i = P_i(a_k, \phi_k) \\ t_i = Q_i(a_k, \phi_k) \end{cases} \quad i \notin S_M, \quad k \in S_M \quad (18)$$

En tenant compte du vecteur des forces non linéaires, les équations de cohérence sont :

$$\begin{cases} \dot{s}_k = \dot{a}_k \cos \phi_k - \dot{\phi}_k a_k \sin \phi_k = \alpha_{2k-1} a_k \cos \phi_k + \beta_{2k-1} a_k \sin \phi_k + f_{2k-1} \\ \dot{t}_k = \dot{a}_k \sin \phi_k + \dot{\phi}_k a_k \cos \phi_k = \beta_{2k} a_k \cos \phi_k + \alpha_{2k} a_k \sin \phi_k + f_{2k} \end{cases} \quad k \in S_M \quad (19)$$

Une manipulation des équations (19) conduit à :

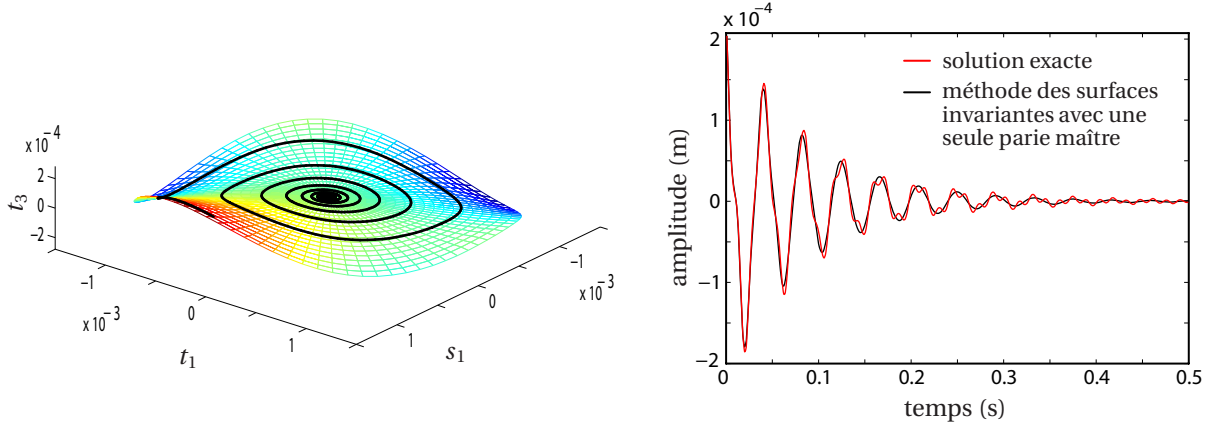
$$\begin{cases} \dot{a}_k = \alpha_{2k-1} a_k \cos^2 \phi_k + \alpha_{2k} a_k \sin^2 \phi_k + f_{2k-1} \cos \phi_k + f_{2k} \sin \phi_k \\ \dot{\phi}_k = \beta_{2k} + (\alpha_{2k} - \alpha_{2k-1}) \cos \phi_k \sin \phi_k - \frac{f_{2k-1} \sin \phi_k}{a_k} + \frac{f_{2k} \cos \phi_k}{a_k} \end{cases} \quad k \in S_M \quad (20)$$

Les équations de cohérence sont calculées pour les paires esclaves :

$$\begin{cases} \dot{s}_i = \sum_{k \in S_M} \frac{\partial P_i}{\partial a_k} \dot{a}_k + \frac{\partial P_i}{\partial \phi_k} \dot{\phi}_k = \alpha_{2i-1} s_i + \beta_{2i-1} t_i + f_{2i-1} \\ \dot{t}_i = \sum_{k \in S_M} \frac{\partial Q_i}{\partial a_k} \dot{a}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial \phi_k} \dot{\phi}_k = \beta_{2i} s_i + \alpha_{2i} t_i + f_{2i} \end{cases} \quad i \notin S_M \quad (21)$$

Dans (21),  $\dot{a}_k$  et  $\dot{\phi}_k$  doivent être remplacés par les expressions (20). Ensuite, les équations différentielles (21) sont résolues numériquement et la forme des surfaces invariantes est déterminée.

Lors de cette étude, la formulation avec une seule paire maître, utilisée lors des calculs ne permet pas de prendre en compte une résonance interne. Une étude approfondie indique pourtant que ce phénomène apparaît entre les modes 1, 3 et 4 pour une vitesse de rotation de 300 rad/s : c'est ce qui explique la légère différence sur la figure 2(b). Pour des cas plus simples, la méthode des surfaces invariantes et une intégration directe des équations différentielles du mouvement par une méthode de Runge-Kutta donnent des résultats identiques (voir figure 2(a)).



(a) cas sans résonance interne : trajectoire de l'oscillateur sur le quatrième surface invariante du premier mode non linéaire. Intégration temporelle directe du système complet avec conditions initiale sur le mode non linéaire et intégration temporelle directe du système réduit : pas de différence discernable

(b) cas avec résonance interne : trajectoire du centre de rotation de l'arbre au niveau du disque en fonction du temps

**FIGURE 2** - Comparaison entre une intégration directe et la méthode des surfaces invariantes avec et sans résonance interne

## 5 Conclusions

Le concept de mode normal non linéaire permet de construire des modèles réduits de structures non linéaires. La méthode des surfaces invariantes pour générer ce type de modes a été généralisée aux cas où les matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  ont une forme arbitraire. On a démontré la puissance de cette méthode si aucune résonance interne n'apparaît pendant la simulation. Dans le cas contraire, les équations sont établies et la prochaine étape du travail est de les intégrer dans un code de calcul.

## Références

- [Lalanne *et al.*(1990)] Lalanne, M. & Ferraris, G. 1990 Rotordynamics : Prediction in Engineering.
- [Lee (1993)] Lee, C-W. 1993 Vibration Analysis of Rotors.
- [Legrand *et al.*(2002)] Legrand, M., Jiang, D., Pierre, C. & Shaw, S. H. 2002 nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the invariant manifold method. *ISROMAC-9, Honolulu, Hawaii, February 10-14, 2002*.
- [Pesheck (2000)] Pesheck, E. 2000 Reduced Order Modeling of Nonlinear Structural Systems using Nonlinear Normal Modes and Invariant Manifolds. PhD Thesis, The University of Michigan.
- [Shaw *et al.*(1991)] Shaw, S. W. & Pierre, C. 1991 Nonlinear Normal Mode and Invariant Manifolds. In *Journal of sound and Vibration* **150**, 170–173.