HAL
open science

Échelles de temps pour l'évolution quantique à petite constante de Planck

Thierry Paul

To cite this version:

Thierry Paul. Échelles de temps pour l'évolution quantique à petite constante de Planck. 2007. hal-00354478

HAL Id: hal-00354478

https://hal.science/hal-00354478v1

Preprint submitted on 20 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCHELLES DE TEMPS POUR L'ÉVOLUTION QUANTIQUE À PETITE CONSTANTE DE PLANCK

T. PAUL
CNRS ET D.M.A., ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Table des matières

1. Introduction 0
2. Le problème 2
3. Résultats généraux 3
4. Un cas très simple 5
5. Le cas stable 7
5.1. Cas général 7
5.2. La reconstruction des états comprimés 8
5.3. Le cas de la trajectoire périodique stable 9
6. Le cas instable 9
6.1. Le 8 10
6.2. Interprétation 12
6.3. Le cas hétérocline quelconque 12
6.4. Le pendule 13
6.5. Le cas Harper 14
7. Généralisations 15
8. Indéterminisme quantique et sensibilité aux conditions initiales 15
9. Conclusion : périodes semiclassiques 16
Références 17

1. Introduction

La limite semiclassique pour l'équation de Schrödinger est née dès le début de la mécanique quantique. Elle l'a même précédé si l'on considère que les théories de Heisenberg et Schrödinger ont précisément été inventées pour donner un cadre dynamique aux conditions de Bohr-Sommerfeld. Appelée "principe de correspondance" en physique et attachée au théorème d'Egorov en

Exposé au séminaire X-EDP 27-12-2007.

analyse microlocale, l'approximation semiclassique assure donc la transition quantique-classique, pour ce qui concerne la partie "équation de Schrödinger" de l'évolution quantique. Il faut tout de suite remarquer que la partie "mesure quantique" de l'évolution, indéterministe et intrinsèquement aléatoire, n'a pas de "correspondant" classique. Nous discuterons brièvement à la fin de cet article un lien possible entre "mesure" et limite semiclassique, précisément pour la limite à temps long.

La mécanique quantique contient dans son formalisme une constante dimensionnée, la constante de Planck $\hbar$, qui a la dimension d'une action (position $\times$ impulsion) et qui assure ainsi l'homogénéité nécessaire à la transformée de Fourier. C'est aussi $\hbar$ qui contrôle la taille des oscillations inhérentes à la théorie car il ne faut pas oublier que la limite semiclassique se réalise par oscillations et, de ce point de vue, est beaucoup plus subtile que la limite non-relativiste.

Dans ce texte nous présentons quelques résultats récents concernant l'approximation semiclassique à temps long, c'est-à-dire que nous allons considérer l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\partial_t\psi = (-\hbar^2\Delta + V(x))\psi \tag{1}$$

pour des temps $t \leq T(\hbar)$ avec diverses fonctions $T(\hbar) \to +\infty$ lorsque $\hbar \to 0$. Les formes explicites des fonctions $T(\hbar)$ vont dépendre des propriétés dynamiques des flots classiques correspondants, mais nous allons, dans les cas considérés, exhiber trois échelles de temps qui donneront une limite différente.

- $T_1(\hbar)$ pour laquelle la limite semiclassique est exactement la mécanique classique
- $T_2(\hbar)$ pour laquelle la limite semiclassique ne sera plus classique, mais pourra néanmoins se comprendre à partir des propriétés dynamiques de celle-ci, en particulier celles de stabilité (c'est l'échelle de temps pour laquelle les paquets d'ondes se délocalisent).
- $T_3(\hbar)$ pour laquelle des phénomènes typiquement quantiques vont perdurer à la limite classique (et permettent des reconstructions et phénomènes d'ubiquité).

La physique récente (celle des atomes froids) nous apprend que la correspondance quantique/classique $\Leftrightarrow$ micro/macroscopique n'est plus systématiquement d'actualité. On arrive maintenant à garder excités des atomes dont la taille est de l'ordre de celle d'une bactérie. De plus les échelles de temps pendant lesquelles on est capable de maintenir des systèmes quantiques simples dans de tels états est de l'ordre de la seconde [9]. De plus la reconstruction de paquets d'ondes observée expérimentalement dans des supraconducteurs

constitue une branche très active de la physique moderne [3], en particulier en vue d'applications a l'information et le calcul quantique [18].

Pour corroborer ces remarques signalons que la limite semiclassique ne correspond pas toujours à faire arbitrairement varier la "constante" de Planck. Donnons deux exemples :

– le cas des systèmes atomiques, avec des "scalings" qui redonne la limite semiclassique. L'exemple le plus simple est bien sûr l'atome d'hydrogène :
$$-\hbar^2\Delta - \frac{1}{|x|}$$
unitairement équivalent (par une dilatation par $\hbar^{-\frac{2}{3}}$) à
$$\hbar^{\frac{2}{3}}\left(-\Delta - \frac{1}{|x|}\right),$$
et donc pour lequel la limite à hauts états excités est bien la limite semiclassique.
– le cas des spins. On peut montrer en effet que l'espace des états de n spins $\frac{1}{2}$ en interaction invariante par permutation peut être réalisé par celui d'un seul spin n. la limite $n \to \infty$ correspond alors à la limite à grand spin d'une seule particule, c'est-à-dire la limite semiclassique.

La limite semiclassique est donc bien contenue dans la mécanique quantique, elle en constitue un "bord".

L'approximation semiclassique à temps long a été étudiée dans [5] pour les états cohérents, et dans [1] puis [4] en ce qui concerne le théorème d'Egorov. Les éléments de matrice diagonaux entre états cohérents, dans le cas monodimensionnel stable pour le propagateur et instable pour la propagation d'observables ont été considérés dans [16] et [6] respectivement.

2. Le problème

Nous allons considérer l'équation de Schrödinger dépendant du temps
$$i\partial_t\psi = H\psi \tag{2}$$
sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ avec une condition initiale sous la forme d'un état cohérent. Ici H sera un opérateur pseudo-différentiel à petit paramètre (semiclassique) de symbole de Weyl $h(x,\xi)$,

Les états cohérents, inventés par Schrödinger lui-même dans l'un des articles originaux de 1926, [17], constituent un ensemble surcomplet de vecteurs de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Nous allons considérer ici des états cohérents de "forme" quelconque (pas seulement gaussienne), pour plusieurs raisons. Tout d'abord les

résultats présentés sont valables dans ce cadre général. Ensuite parce que nous verrons que la forme gaussienne, qui perdure pour des temps "raisonnables", n'est plus suffisante pour les échelles de temps que nous allons considérer.

Définition 2.1. soit $(q,p) \in \mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (la classe de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$) avec $||a||_{L^2} = 1$. On définit

$$\psi^a_{qp}(x) = \hbar^{-n/4} a\left(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) e^{i\frac{px}{\hbar}}. \tag{3}$$

on dit que ψ^a_{qp} est un état cohérent "en (q,p)" et de "symbole a".

Rappelons quelques propriétés des états cohérents :

- complétion : $\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\psi^a_{qp} >< \psi^a_{qp}| \frac{dqdp}{\hbar^{2n}} = \mathrm{Id}_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$ au sens faible
- mesure de Wigner : *la $\hbar$-transformée de Wigner de ψ^a_{qp} en (x,ξ) est égale à la ($\hbar = 1$)-transformée de Wigner de a en $(\frac{x-q}{\sqrt{\hbar}}, \frac{\xi-p}{\sqrt{\hbar}})$*
- quantification de Töplitz : *(presque) tout opérateur pseudo-différentiel s´écrit (modulo $\hbar^\infty$)sous la forme $\int_{\mathbb{R}^{2n}} h(q,p)|\psi^a_{qp} >< \psi^a_{qp}| \frac{dqdp}{\hbar^{2n}}$.*

Un des avantages à travailler avec des états cohérents est que l'on reste toujours local. Les hypothèses suffisantes sur le hamiltonien quantique H sont donc qu'il soit essentiellement auto-adjoint, et de domaine contenant les états cohérents. Par exemple H donné par la quantification de Weyl de h, c'est à dire de noyau intégral :

$$H(x,y) = \int h\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i\frac{\xi(x-y)}{\hbar}} \frac{d\xi}{\hbar^n}$$

et $h(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$, V polynôme croissant à l'infini, ou bien h C^∞ uniformément borné sur $\mathbb{R}^{2n}$ ainsi que toutes ses dérivées [11].

3. Résultats généraux

Commençons par rappeler le lemme fondamental :

Lemme 3.1. *Soit H auto-adjoint et soit ψ^t et ϕ^t tels que :*

$$i\hbar\partial_t\psi^t = H\psi^t + R^t,$$
$$i\hbar\partial_t\phi^t = H\phi^t,$$
$$\psi^0 - \phi^0 = \alpha(0).$$

Alors, pour $t \geq 0$,

$$||\psi^t - \phi^t|| = O(||\alpha(0)||) + O\left(\frac{\int_0^t ||R^s||ds}{\hbar}\right) = O\left(||\alpha(0)|| + t\frac{sup_{0\leq s\leq t}||R^s||}{\hbar}\right).$$

en particulier, si $\alpha_0 = 0$,

$$||\psi^t - \phi^t|| = \left(t \frac{sup_{0\leq s\leq t}||R^s||}{\hbar} \right).$$

Démonstration. On obtient facilement des équations précédentes :

$$i\hbar\partial_t(\psi^t - \phi^t) = H(\psi^t - \phi^t) + R^t.$$

Dénotant $\psi^t - \phi^t := e^{-itH/\hbar}\alpha(t)$ on a :

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{isH/\hbar}R^s ds.$$

□

L'importance des états cohérents en analyse semiclassique provient du résultat suivant, énoncé par Schrödinger dans le cas de l'oscillateur harmonique.

Soit Φ^t le flot hamiltonien associé au symbole principal h du hamiltonien quantique H. A Φ^t on peut associer sa dérivée $d\Phi^t_{x\xi}$ au point (x, ξ), c'est-à-dire :

$$d\Phi^t_{x\xi} : \quad T_{(x,\xi)}(T^*\mathcal{M}) \to T_{\Phi^t(x,\xi)}(T^*\mathcal{M})$$

$d\Phi^t_{x\xi}$ est, pour tout temps, une matrice symplectique et donc, par la représentation métaplectique, on peut lui associé un opérateur unitaire ds L^2, M^t, d'ailleurs défini par l'équation :

$$i\dot{M}^t = H^2(\Phi^t(x, \xi))M^t$$

où $H^2(\Phi^t(x, \xi))$ est le (Weyl) quantifié du hessien de H en $\Phi^t(x, \xi)$.

Nous allons supposer que, pour tout $t \geq 0$:

$$||d\Phi^t_{x\xi}|| \leq e^{\mu(x,\xi)t}$$

où $||.||$ est la norme opérateur et :

$$\mu(.) \geq 0 \text{ est une fonction } \alpha\text{-höldérienne pour un } \alpha > 0.$$

Un candidat naturel pour $\mu(x, \xi)$ est le supremum, sur la surface d'énergie de (q, p), du hessien du hamiltonien. Mais l'intérêt du résultat qui va suivre est de considérer les plus petits $\mu(x, \xi)$ possibles.

Soit finalement

$$l(t) = \int_0^t (\xi\dot{x} - h)ds \quad \text{l'action lagrangienne du flot}$$

Théorème 3.2. [14] *il existe une constante C, ne dépendant que du symbole h autour de $h(x,\xi) = h(q,p)$ telle que, pour tout $t \geq 0$,*

$$||e^{-i\frac{tH}{\hbar}}\psi^a_{x\xi} - e^{i\frac{l(t)}{\hbar}}\psi^{M(t)a}_{\Phi^t(x,\xi)}||_{L^2} \leq Cte^{3\mu(x,\xi)t}\hbar^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

On voit donc apparaître une première échelle de temps, celle pour laquelle la propagation quantique "suit" la mécanique classique. Cette échelle est donnée par la condition que

$$te^{3\mu(x,\xi)t} < C\hbar^{-\frac{1}{2}},$$

condition remplie pour $t \leq T_1(\hbar)$ avec, pour $\epsilon > 0$,

$$T_1(\hbar) = (\frac{1}{6} - \epsilon)\log\hbar^{-1}.$$

Remarque 3.1. *dans le cas où le flot est stable, on a que $||d\Phi^t_{x\xi}|| \leq C \times t$ (il suffit de penser au flot libre de hamiltonien ξ^2 pour s'en convaincre, en notant que, dans ce cas, $d\Phi^t_{x\xi} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$). On se convainc alors aisément que l'échelle T_1 est donnée par*

$$T_1(\hbar) = C\hbar^{-\frac{1}{6}}.$$

Nous allons dans le reste de cet article considérer plusieurs cas particuliers où l'on pourra aller beaucoup plus loin dans les grands temps. mais commençons par un cas d'école.

4. Un cas très simple

Considérons une particule libre sur le cercle. c'est-à-dire le cas où l'équation de Scrôdinger se réduit à

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^t = -\hbar^2\Delta\psi^t \quad \text{sur } L^2(S^1). \tag{5}$$

Une simple décomposition en série de Fourier de la condition initiale $\psi^0(x) = \sum c_j e^{ijx}$ montre facilement que le flot quantique est périodique avec période $T = \frac{2\pi}{\hbar}$. En effet on a immédiatement que $\psi^t(x) = \sum c_j e^{-it\hbar j^2}e^{ijx}$. Cette période est typiquement quantique et n'a pas d'équivalent classique, le flot classique n'ayant pas de période globale.

Précisons un peu. Puisque le spectre de l'opérateur $-\hbar\frac{d^2}{dx^2}$ sur le cercle est $\{\hbar^2 n^2,\ n \in \mathbb{Z}\}$, si l'on décompose la condition initiale sur la base de Fourier :

$$\psi^0(x) = \sum c_n e^{inx} \tag{6}$$

on obtient immédiatement :

$$\psi^t(x) = \sum c_n e^{-it\hbar n^2} e^{inx} \tag{7}$$

et donc $\psi^{k\frac{2\pi}{\hbar}} = \psi^0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Le flot quantique est donc globalement périodique, de période $T_Q = \frac{2\pi}{\hbar}$, alors que le flot classique

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\xi} & = & 0 \\ \dot{x} & = & 2\xi \end{array} \right. \tag{8}$$

est périodique (puisque sur le cercle) mais de période variant avec la condition initiale.

Remarque 4.1. *cependant on peut remarquer que, si l'on réduit l'espace de phases aux impulsions quantifiées, c'est-à-dire de la forme $\xi = n\hbar$, $n \in \mathbb{Z}$, alors le flot classique restreint est globalement périodique. Mais la période (minimale) est égale à $T_C = \frac{\pi}{\hbar}$, c'est-à-dire moitié de la période quantique. Il est amusant de remarquer que le même phénomène se produit pour l'oscillateur harmonique (à cause de l'indice de Maslov) :*

$$T_Q = 2T_C$$

Prenons maintenant le cas d'un état cohérent (gaussien) centré à l'origine. Un état cohérent (gaussien) sur le tore est simplement la périodisation d'un état cohérent habituel, ce qui donne, par la formule de Poisson et dans la cas $(q,p) = (0,0)$:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{1/4} \sum e^{-\frac{n^2}{2}\hbar} e^{inx}. \tag{9}$$

Le résultat précédent s'applique bien sûr. Mais considérons l'évolution quantique pour un temps multiple rationnel de T_Q de la forme :

$$t_{\frac{q}{p}} := \frac{p}{q}\frac{2\pi}{\hbar}. \tag{10}$$

Quelques manipulations de congruence donnent :

$$\begin{array}{rcl} \psi^{t_{\frac{q}{p}}}(x) & = & \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{1/4} \sum e^{i2\pi\frac{p}{q}n^2} e^{-fracn^2 2\hbar} e^{inx} \\ & = & \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{1/4} \sum_{l\in\mathbb{Z}, k=1\ldots q} e^{i2\pi\frac{p}{q}(lq+k)^2} e^{-\frac{(lq+k)^2}{2}\hbar} e^{i(lq+k)x} \\ & = & \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{1/4} \sum_{k=1\ldots q} e^{i2\pi\frac{p}{q}k^2}]\frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} \psi_{j\frac{2\pi}{q}} \end{array}$$

où $\psi_{j\frac{2\pi}{q}}$ est un état cohérent en $(q = j\frac{2\pi}{q}, \xi = 0)$.

On obtient donc un phénomène cette fois exclusivement quantique, sans correspondant classique : une reconstruction du paquet d'onde en plusieurs cites. Une ubiquité classique, trace de la persistance à la limite classique d'effets quantiques.

Remarquons aussi que, si l'on considère (formellement) des temps $t_{\frac{q}{p}}$ avec $q \to \infty$, les points de reconstruction s'accumulent sur le cercle. En particulier, lorsque $q \sim \hbar^{-\frac{1}{2}}$, la distance entre les points est du même ordre que la largeur des états correspondants. On n'a donc plus de localisation, et l'état du système est totalement dispersé, ce que l'on peut montrer rigoureusement (voir aussi [7] pour une étude non-semiclassique).

La question naturelle est maintenant de se demander si les résultats précédents perdurent pour des hamiltoniens plus généraux. En particulier pour l'extension la plus immédiate qui consiste à rajouter au symbole *libre* ξ^2 des termes d'ordre supérieur, à commencer par ξ^3. Si l'on reprend la formule (9), on s'aperçoit que les nombres n signifiants sont ceux de l'ordre de $|n| \leq \hbar^{-\frac{1}{2}}$. Si l'on considère, par exemple, un hamiltonien contenant des termes cubiques dans les impulsions, on aura :

$$\psi_0^{\frac{2\pi}{\hbar}}(x) = \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{1/4} \sum e^{i2\pi(n^2+\hbar n^3)} e^{-\frac{n^2}{2}\hbar} e^{inx} = \sum e^{i2\pi n^2(1+\hbar n)} e^{-\frac{n^2}{2}\hbar} e^{inx}. \tag{11}$$

Pour $|n| \leq \hbar^{-\frac{1}{2}}$, on a $|\hbar n| \leq \hbar^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1+\hbar n \sim 1$. On pourrait donc penser que les termes cubiques (et d'ordres supérieurs) ne troublent pas la reconstruction. Nous allons voir qu'il n'en est rien, car la reconstruction d'un paquet d'onde est une affaire de cohérence de phases, et donc c'est la distance des n^2, n^3 etc.... au réseau périodique qui importe et non leur taille.

5. Le cas stable

5.1. **Cas général.** Considérons le cas d'un hamiltonien de symbole hC^∞, $h = h(\xi) = \frac{\xi^2}{2} + c\xi^3 + d\xi^4 + 0(\xi^5)$, c'est-à-dire $H := h(-i\hbar\partial_x)$, toujours sur le cercle. Et prenons toujours pour condition initiale un état cohérent à l'origine, donné par (9) :

On obtient immédiatement que

$$\psi^t(x) := e^{-i\frac{tH}{\hbar}}\psi_0(x) = \left(\frac{\pi}{\hbar}\right)^{1/4} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{m^2\hbar}{2}} e^{-i\frac{tH(m\hbar)}{\hbar}} e^{imx}. \tag{12}$$

Le résultat est le suivant :

Proposition 5.1. [12]. *Soit $t = \frac{s2\pi}{\hbar}, s \in \mathbb{N}$ fixé non nul. Alors pour $0 < x \leq 2\pi$,*

$$\psi^t(x) \;=\; \frac{\pi^{1/4}}{(sc)^{1/4}} \sum_{k\geq 0} \frac{e^{-\frac{x+k2\pi}{sc}+i\frac{d}{s}(\frac{x+k2\pi}{c})^2}}{(x+k2\pi+\pi/4)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{2}{3}\left(\frac{x+k2\pi+\pi/4}{sc}\right)^{3/2}\right) + 0(\hbar^{\frac{1}{2}}).$$

On a en fait un développement asymptotique complet en puissance de $\hbar^{\frac{1}{2}}$. De plus pour $x \sim 0$, $x = 0(\hbar^{\frac{1}{3}})$

$$\psi^t(x) \;=\; \frac{\hbar^{-1/12}}{(sc)^{1/3}} Air(\frac{x}{(sc)^{1/3}}) + 0(\hbar^{1/6})$$

Signalons aussi que l'on peut calculer de même pour des conditions initiales états cohérents de symbole a quelconque. Enfin on peut remarquer que lorsque s augmente la localisation exponentielle diminue, les effets dispersifs redeviennent actifs.

Ce qu'il faut retenir de cette formule un peu compliquée est le fait que la localisation a disparue, au moins dans le sens semiclassique : l´état ne se localise pas mieux lorsque $\hbar \to 0$. Il y a deux manières de "retrouver"la localisation

- lorsque la constante c tend vers 0 : c'est la limite où la partie cubique du hamiltonien disparaît et l'on retrouve le résultat précédent, modulé par le terme quartique.
- lorsque l'on part d´états "comprimés" (en Fourier). C'est ce que nous allons voir maintenant.

5.2. **La reconstruction des états comprimés.** Considérons maintenant pour condition initiale un état comprimé de la forme, pour $\epsilon > 0$:

$$\psi^\epsilon(x) := \left(\frac{\pi}{\hbar^{1-\epsilon}}\right)^{1/4} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2\hbar^{1-\epsilon}}{2}} e^{inx}. \tag{13}$$

Alors on a :

Théorème 5.2. [12]. *Soit* $t = \frac{s2\pi}{\hbar}$, $s \in \mathbb{N}$ *fixé non nul. Alors pour* $0 < x < 2\pi$,

$$e^{i\frac{tH}{\hbar}}\psi(x) \;=\; \frac{1}{\hbar^{\epsilon/2}(sc/4)^{1/4}} e^{-\frac{x}{sc\hbar^\epsilon}} + O(\hbar^{\frac{1}{2}}) \tag{14}$$

(autour de 0 l'asymptotisme ne change pas par rapport au cas non-comprimé).

Ce résultat est apparemment surprenant puisqu'il indique qu'il faut partir d'une condition initiale *moins* bien localisée pour obtenir une reconstruction. La raison en est que, étant moins bien localisée en position, la condition initiale l'est mieux en Fourier, et donc est moins sensible au effets non-linéaires créés par les termes d'ordre au moins cubique du hamiltonien. C'est là une particularité de l'approximation semiclassique que de jouer avec les aspects quantiques (inégalités de Heisenberg) et classiques (flots non-linéaires), afin de produire des effets contrintuitifs.

5.3. **Le cas de la trajectoire périodique stable.** Montrons brièvement comment les résultats précédent se généralisent au cas multidimensionnel d'une trajectoire périodique classique linéairement stable non-dégénérée.

La théorie des formes normales (quantiques), [10], [8], nous apprend que, près d'une trajectoire classique elliptique γ d'un hamiltonien sur $T^*\mathcal{M}$, où $\mathcal{M}$ est une variété à n dimensions, et sous une condition de non résonance, on peut construire un opérateur Fourier integral qui, microlocalement autour de γ, entrelace le hamiltonien quantique original sur $L^2(\mathcal{M})$ à un hamiltonien sur $L^2(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1})$ de la forme

$$H' = H'(-i\partial_x, h_1, \ldots, h_{n-1})$$

où les h_j sont des oscillateurs harmoniques dans les variables y_j. Présentons le résultat dans le cas de la dimension 2. Écrivons :

$$H'(\tau, h_1) = \tau + h_1 + a\tau h_1 + b\tau^2 + c\tau^3 + d\tau^4 + H"$$

On peut clairement ne pas considérer les termes τ et h_1 (changement de repère, voir [12]) et prendre :

$$H'(\tau, h_1) = a\tau h_1 + b\tau^2 + c\tau^3 + d\tau^4 + H"$$

Alors on a :

Théorème 5.3. [12]. *Soit* $\psi_0(x,y) = \hbar^{-1/2+\epsilon/2} g(\frac{x}{\hbar^{1/2-\epsilon}}, \frac{y}{\sqrt{\hbar}})$ *où* g *est Schwartz, et* $\frac{2\pi}{\sqrt{\hbar}}$ *périodique en* x. *Supposons que, dans (**??**),* $a = \alpha + k2\pi$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. *Alors, si* $t := \frac{s2\pi}{b\hbar}$,

$$e^{i\frac{tH'}{\hbar}}\psi(x,y) = \frac{1}{(\hbar^{1+e\epsilon}sc/4)^{1/4}} g'(|\frac{x}{sc\hbar^{\epsilon/2}}|^{\frac{1}{2}}, \frac{y}{\sqrt{\hbar}}) + O(\hbar^{\epsilon})$$

où, si l'on décompose $g(\theta,\eta) := \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\theta) H_j(\eta)$, *les* H_j *étant les fonctions d'Hermite,*

$$g'(|\frac{x}{\hbar^{\epsilon/2}}|^{\frac{1}{2}}, \eta) = \sum_{j\geq 0} c_j(|\frac{x+j\alpha}{sc\hbar^{\epsilon/2}}|^{\frac{1}{2}}) H_j(\eta).$$

En d'autres termes l'état cohérent se relocalise sur la trajectoire en plusieurs sites, générés par les interactions avec les degrés de liberté transverses.

6. Le cas instable

Dans cette section nous allons considérer des évolutions à temps suffisamment long pour provoquer des "reconstructions" comme dans la section précédente, mais cette fois dans le cas où la dynamique sous-jacente est instable.

6.1. **Le** 8. Considérons le cas d'une trajectoire homocline : soit $h(x,\xi)$ une fonction C^∞ telle que la courbe $\Omega := \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^2, h(x,\xi) = 0\}$ possède un seul point fixe (x_0,ξ_0) , $dh(x_0,\xi_0) = 0$, et que celui-ci soit non-dégénéré de type hyperbolique. On peut sans perte de généralité se ramener au cas où (x_0,ξ_0) est à l'origine. De plus il est bien connu qu'un changement de coordonnées symplectique linéaire (en fait une simple rotation dans l'espace de phases) permet de se ramener au cas où $h(x,\xi) \sim x\xi$ près de 0. L'exemple "typique"est le hamiltonien :

$$h(x,\xi) = \xi^2 + x^2(x^2-1).$$

Il est bien connu aussi qu'au niveau quantique, à la fois la translation $(x_0,\xi_0) \to 0$ et la rotation qui donne $h(x,\xi) \to h(x,\xi) \sim x\xi$ près de 0, sont réalisés par des opérateur unitaires explicites (voir la section (6.3)). On traitera donc seulement le cas $h(x,\xi) \sim x\xi$ près de 0.

Dénotons encore une fois par H l'opérateur de symbole de Weyl $h(x,\xi)$. Nous allons considérer l'équation de Schrödinger avec pour condition initiale un état cohérent de "symbole" a et centré à l'origine :

$$\left\{ \begin{array}{c} i\partial_t\psi = H\psi \\ \psi^{t=0} = \psi^a_{(0,0} := \psi^a \end{array} \right.$$

Soit maintenant $(x(s),\xi(s))$ une paramétrisation hamiltonienne de Ω, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(s) & = & \partial_\xi h(x(s),\xi(s)) \\ \dot{\xi}(s) & = & -\partial_x h(x(s),\xi(s)) \end{array} \right. , \ (x(0),\xi(0)) := (x_0,\xi_0).$$

On a donc $x(s),\xi(s) \to 0$ quand $s \to \pm\infty$. Soit t_0 défini par $e^{t_0} = \lim_{s\to+\infty} x(-s)\xi(s)e^{2s}$.

Lemme 6.1. *t_0 ne dépend pas de (x_0,ξ_0).*

La preuve est immédiate.

Théorème 6.2. [13]. *Soit $0 < \gamma < \frac{1}{5}$ et soit $t_\hbar := log\frac{1}{\hbar} - t_0$, alors*

$$e^{-i\frac{t_\hbar H}{\hbar}}\psi^a = e^{i(S^+ + \pi/2)/\hbar}\psi^{b_+} + e^{i(S^- + \pi/2)/\hbar}\psi^{b_-} + O(\hbar^{\gamma/2})$$

où

$$b_\pm(\eta) := \int_0^{\pm\infty} a(1/\mu)\frac{1}{\mu}\rho(\pm\mu\hbar^\gamma)e^{i\eta\mu}d\mu$$

et ρ est une fonction de "cut-off", c'est-à-dire que

$$\rho \in C^\infty([0,1]), \ \rho(y) = 1, \ pour \ 0 \le y \le 1, \rho(y) = 0, \ pour \ |y| > 2$$

.

Ce théorème indique donc que le paquet d'onde se reforme à l'origine au bout d'un temps logarithmique dans la constante de Planck. De plus il nous indique comment un tel paquet d'onde re relocalise, en nous donnant la forme de son symbole.

Lemme 6.3. [13]. *Définissons sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'opérateur U par, pour $\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} U\alpha(\eta) &:= e^{i(S^+ + \pi/2)/\hbar} \int_0^{+\infty} \alpha(1/\mu) \tfrac{1}{\mu} \rho(\mu\hbar^\gamma) e^{i\eta\mu} d\mu \\ &+ e^{i(S^- + \pi/2)/\hbar} \int_0^{-\infty} \alpha(1/\mu) \tfrac{1}{\mu} \rho(-\mu\hbar^\gamma) e^{i\eta\mu} d\mu. \end{aligned}$$

Alors U est unitaire modulo $\hbar^{\gamma/2}$,

$$||U\alpha||_{L^2} = ||\alpha||_{L^2} + o(\hbar^{\gamma/2}).$$

Le résultat suivant nous permet d'itérer :

Théorème 6.4. [13] *Fixons $C > 0$. Alors pour tout $n \leq C \frac{log\frac{1}{\hbar}}{loglog\frac{1}{\hbar}}$,*

$$e^{-i\frac{nt_\hbar H}{\hbar}} \psi_a = \psi_{U^n a} + O(\hbar^{\gamma/2} (log \frac{1}{\hbar})^{n/2}).$$

Donc la reconstruction semiclassique est valide pour des temps de l'ordre de

$$t \sim C \frac{log^2 \frac{1}{\hbar}}{loglog\frac{1}{\hbar}}.$$

Pour des temps intermédiaires, l´état du système est un distribution lagrangienne associée à Ω. La propriété de localisation-delocalisation peut être mieux vue sur les éléments de matrice d'observables :

Théorème 6.5. [13]. *Soit $(p(s), q(s))$ une paramétrisation de $h(p,q) = 0$ comme précédemment telle que $q(s) \sim e^s (resp. p(s) \sim e^{-s})$ quand $s \to -\infty$ $(resp. + \infty)$, et soit P une observable of symbole (principal) de Weyl $P(p,q)$. Alors, uniformément pour $t \leq (1+\epsilon) log\frac{1}{\hbar}$, $0 \leq \epsilon < 1/2$,*

$$\begin{aligned} < \psi^t, P\psi^t > &= < \psi_a, e^{i\frac{tH}{\hbar}} P e^{-i\frac{tH}{\hbar}} \psi_a > \\ &= \hbar^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} |a(e^{s-t}/\hbar)|^2 P(p(s), q(s)) e^{s-t} ds + O(\hbar^{11/2}) \end{aligned}.$$

En particulier, pour t borné :

$$< \psi^t, P\psi^t >= P(0,0) + O(\hbar^{1/2}),$$

pour $t \sim log\frac{1}{\hbar}$:

$$< \psi^t, P\psi^t >= P(0,0) + O(\hbar^{\gamma/2}),$$

et pour $t = \frac{1}{2} log\frac{1}{\hbar} - t'$:

$$< \psi^t, P\psi^t >= \int_{h(p,q)=0} P(p,q) d\mu^{t'} + O(\hbar^{1/2})$$

où la mesure $d\mu^{t'}$ *est donnée par la densité* $|a(e^{s-t'})|^2 e^{s-t'}$*, c'est-à-dire* $d\mu^{t'} = |a(e^{s-t'}|^2 e^{s-t'} ds$*. De plus les même résultats restent valides après* n *itérations* $(n \leq C\frac{log\frac{1}{\hbar}}{loglog\frac{1}{\hbar}})$ *: on a, pour* $t \sim nlog\frac{1}{\hbar}$ *:*

$$< \psi^t, P\psi^t >= P(0,0) + O(\hbar^{\gamma/2}(log\frac{1}{\hbar})^{n/2}),$$

et pour $t = \frac{n}{2}log\frac{1}{\hbar} - t'$ *:*

$$< \psi^t, P\psi^t >= \int_{h(p,q)=0} P(p,q)d\mu^{t'} + O(\hbar^{\gamma/2}(log\frac{1}{\hbar})^{n/2}),$$

où la mesure $d\mu^{t'}$ *est donnée par la densité* $|U^n a(e^{s-t'})|^2 e^{s-t'}$

6.2. **Interprétation.** Nous voyons donc apparaître, à la limite semiclassique, des oscillations en temps entre états localisés pour des temps multiples de $\log\frac{1}{\hbar}$ et des états nonlocalisés pour des temps intermédiaires. De plus l'application qui fait passer du symbole de l'état cohérent original à celui reconstruit après une itération joue le rôle de la quantification (métaplectique) du flot linéarisé.

6.3. **Le cas hétérocline quelconque.** Dans cette section nous indiquons comment traiter le cas général d'une jonction hétérocline entre deux points fixes hyperboliques. Considérons un hamiltonien $h(p,q)$ tel que la surface d'énergie $\{h = 0\}$ contienne deux points fixes hyperboliques reliés par une courbe régulière. On peut considérer sans perte de généralité que h est tel que :

$$h(p,q) = pq + O(|(p,q)|^3)$$

et

$$dh(p_0,q_0) = 0$$

avec $dh \neq 0$ sur la courbe Λ entre l'origine et (p_0,q_0). Supposons de plus que le hessien de h à (p_0,q_0), $Hess(h)_{p_0,q_0}$, est de type hyperbolique, c'est-à-dire qu'il existe une matrice 2×2 symplectique M telle que

$$M^T Hess(h)_{p_0,q_0} M = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_0} \end{pmatrix}.$$

Il est bien connu que M est une rotation dans l'espace de phases. Soit θ_0 l'angle de cette rotation. A M on peut associer l'opérateur (métaplectique) $\tilde{M}$ unitaire sur $L^2(\mathbb{R}, d\eta)$ défini par :

$$\tilde{M} = e^{i\frac{\theta_0}{2}(-\frac{d^2}{d\eta^2}+\eta^2)}$$

(notons que le noyau intégral de $\tilde{M}$ est calculable explicitement). Considérons une condition initiale qui est un état cohérent à $(0,0)$, ψ^a, nous allons calculer

l'évolution de la partie ψ^{a+} qui correspond à la partie de la condition initiale "vers (p_0, q_0)", c'est-à-dire moralement :

$$\psi^{a+}(x) = \psi^a(x),\ x > 0 : \quad \psi^{a+}(x) = 0,\ x < 0.$$

dans le cas où la partie Λ de la surface d'énergie reliant l'origine à (x_0, ξ_0) est tangente à l'origine à $\mathbb{R}^+$. ψ^{a+} est trop singulière pour que l'on puisse calculer semiclassiquement $e^{-i\frac{t_\hbar H}{\hbar}}\psi_{a+}$, il faut régulariser un peu : écrivons, pour $\epsilon > 0$,

$$a = a_\epsilon^+ + a_\epsilon^-$$

avec $||a_\epsilon^\pm||_{L^2(\mathbb{R}^\mp)} = O(\epsilon)$ et $a_\epsilon^\pm$ dans la classe de Schwartz.

Théorème 6.6. [13]. *Soit H la quantification de Weyl de h. Alors il existe t_0 tel que, si $t_\hbar := (\frac{1}{2} + \frac{1}{\mu_0}) \log \frac{1}{\hbar} - t_0$, on a*

$$e^{-i\frac{t_\hbar H}{\hbar}}\psi^{a_\epsilon^+} = e^{i(S^+ + \sigma\pi/2)/\hbar}\psi^{b_+} + O(\hbar^{\gamma/2}) + O(\epsilon),$$

où σ est l'indice de Maslov de la courbe Λ, $S^+ := \int_\Lambda pdq$ et

$$b_+ = \tilde{M}a(\frac{1}{\cdot})\frac{1}{\cdot}\rho(.\hbar^\gamma).$$

Le théorème précédent permet clairement de considérer une jonction hétérocline quelconque. Regardons quelques exemples.

6.4. **Le pendule.** Considérons le hamiltonien suivant

$$h^{PENDULE}(p, q) = \frac{p^2}{2} + cosq - 1$$

Nous le transformerons tout d'abord, comme précédemment, en :

$$h(p, q) = \frac{(p+q)^2}{4} + cos\frac{(p-q)}{\sqrt{2}} - 1$$

Donc $h(p, q) \sim pq$ près de l'origine.

Soit $\Lambda := \{m(1, 1) \in \mathbb{Z}^2, m \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{O}^n$ l'ensemble de tous les chemins connexes dans Λ partant de l'origine et de longueur n. Un élément de $\mathcal{O}$ est une suite $(\lambda_i)_{i=0\ldots n}/\lambda_0 = (0, 0),\ |\lambda_{i+1} - \lambda_i| = \sqrt{2}$. Soit encore une fois $\psi^a_{(q,p)}$ défini par (3).

Théorème 6.7. [13].

$$e^{-i\frac{nt_\hbar H}{\hbar}}\psi^a_{(0,0)} = \sum_{\lambda\in\mathcal{O}^n} e^{iS_\lambda/\hbar}\psi^{a_\lambda}_{\lambda_n} + O(\hbar^{\gamma/2}(log\frac{1}{\hbar})^{n/2}),$$

où $S_\lambda = \int_{\tilde{\lambda}} pdq$, avec $\tilde{\lambda}$ la courbe dans $\{h(p, q) = 0\}$ joignant les points de λ, et

$$a_\lambda = \Pi_{i=1}^n T_{\lambda_i} := T_\lambda a$$

avec

$$T_{\lambda_i} b(\eta) = \int_0^{+\infty} e^{-i\mu\eta} a(\frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu}\rho(\mu\hbar^\gamma)d\mu$$

if $\lambda_{i+1} - \lambda_i > 0$ *et*

$$T_{\lambda_i} b(\eta) = \int_0^{-\infty} e^{+i\mu\eta} a(\frac{1}{\mu})\frac{1}{\mu}\rho(-\mu\hbar^\gamma)d\mu$$

si $\lambda_{i+1} - \lambda_i < 0$.

6.5. **Le cas Harper.** Le modèle de Harper est donné par le hamiltonien

$$h^{HARPER}(p,q) := cos(p) - cos(q)$$

Par un simple changement de variable il peut être ramené à :

$$h(p,q) := \pi^2(cos((p+q)/2\pi) - cos((p-q)/2\pi))$$

avec $h(p,q) \sim pq$ près de zéro.

Théorème 6.8. [13]. *Soit* Œ^n *(pour Œdipe) l'ensemble des chemins* Γ *sur* $\mathbb{Z}^2$ *partant de* $(0,0)$ *et ne contenant aucune segment de longueur plus grande que* 1. *Soit* $\Gamma(n)$ *l'extrémité de* Γ *et* Γ_i *un vertex de* Γ. *Soit* $t_\hbar = log\frac{1}{\hbar}\hbar$. *Alors*

$$e^{-i\frac{nt_\hbar H}{\hbar}}\psi^a_{(0,0)} = \sum_{\Gamma\in\text{Œ}^n} e^{iS_\Gamma/\hbar}\psi^{a_\Gamma}_{\Gamma(n)} + O(\hbar^{\gamma/2}(log\frac{1}{\hbar})^{n/2}),$$

où $S_\Gamma = \frac{1}{2}\int_{\tilde\Gamma} pdq - qdp$, *où* $\tilde\Gamma$ *est chemin dans* $\mathbb{R}^2$ *consistant en les segments joignant les points de* Γ *et*

$$a^\Gamma = \Pi_{i=1}^n V^{\Gamma_i} a := V_\Gamma a$$

où :

- $V^{\Gamma_i}a(\eta) = a(1/\eta)\frac{1}{\eta}\rho(\eta\hbar^\gamma)$ *si* (Γ_{i-1},Γ_i) *est horizontal orienté à droite,* $V^{\Gamma_i}a(\eta) = -a(-1/\eta)\frac{1}{\eta}\rho(-\eta\hbar^\gamma)$ *si* (Γ_{i-1},Γ_i) *est horizontal orienté à gauche,*
- $V^{\Gamma_i}a(\eta) = \int_0^\infty e^{-i\eta\mu}a(1/\mu)\rho(\mu\hbar^\gamma)\frac{d\mu}{\mu}$ *si* (Γ_{i-1},Γ_i) *est vertical orienté vers le haut,*
- $V^{\Gamma_i}a(\eta) = \int_0^{-\infty} e^{i\eta\mu}a(1/\mu)\rho(-\mu\hbar^\gamma)\frac{d\mu}{\mu}$ *si* (Γ_{i-1},Γ_i) *est horizontal orienté à droite.*

Une autre manière d´énoncer le même phénomène est le résultat suivant, inspiré par les "intégrales de chemins" de Feynman.

Corollaire 6.9. [13]. *Soit* $n \leq C\frac{log\frac{1}{\hbar}}{loglog\frac{1}{\hbar}}$. *Considérons éléments de matrice*

$$< \psi^a_{(0,0)}, e^{-i\frac{nt_\hbar H}{\hbar}}\psi^b_{(p,q)} > .$$

Ceux-ci aurons une limite semiclassique non-nulle seulement si $(p,q) = (i,j) \in \mathbb{Z}^2$ *et*

$$< \psi^a_{(0,0)}, e^{-i\frac{nt_\hbar H}{\hbar}} \psi^b_{(i,j)} >= \sum_{\Gamma \in \text{Œ},\ \Gamma(n)=(i,j)} e^{iS_\Gamma/\hbar} < a, V_\Gamma b > + O(\hbar^{\gamma/2}(log\frac{1}{\hbar})^{n/2}).$$

la somme devant être comprise comme étant nulle s'il n'y pas de chemin satisfaisant $\Gamma(n) = (i,j)$.

7. Généralisations

Les exemples traités plus haut se généralisent à des espaces de Hilbert qui ne sont pas du type L^2. C'est le cas, par exemple, des spins. L'espace de Hilbert (de la partie "spin") d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ est $\mathbb{C}^2$. C'est un des espaces de représentation du groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$.

Un autre généralisation qui nous semble plausible est le cas de systèmes intégrables. Dans le cas d'un système intégrable quantique où l'on peut écrire le hamiltonien comme fonction d'opérateurs qui commutent entre eux et de spectres linéaires, alors le résultat doit être immédiat, et la généralisation des résultats de la section 5 facile.

L'autre cas est celui de tores singuliers, présentant des points hyperboliques. Un exemple est traité dans [2].

8. Indéterminisme quantique et sensibilité aux conditions initiales

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, le processus de mesure de la mécanique quantique est aussi une façon de "retrouver" le monde classique. Rappelons brièvement que la mesure quantique est associée à une observable quantique $\mathcal{O}$ (opérateur auto-adjoint) et que le résultat d'une mesure effectuée peut être un quelconque point λ du spectre de $\mathcal{O}$, la probabilité d'obtenir λ étant égale à $| < \psi|\phi_\lambda > |^2$, où ψ est l'état du système au moment où la mesure est effectuée, et ϕ_λ le vecteur propre (éventuellement généralisé si le spectre n'est pas ponctuel) associé à λ, supposée non-dégénérée. Dans le cas où $\mathcal{O} = Q$, où Q est l'opérateur de multiplication par la variable x, on obtient l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde : la probabilité qu'a une particule quantique d'être dans la position x est égale à $|\psi(x)|^2$.

Cet aspect non-déterministe est à opposer au caractère fondamentalement déterministe de la mécanique classique, intrinsèquement associée à un flot sur un espace géométrique absolu. Cependant la remarque, par Poincaré, de l'importance de la sensibilité aux conditions initiales rend souvent inapplicable ce déterminisme. On sait par exemple que pour savoir si, dans un million d'années, la terre sera encore dans le système solaire, il faudrait connaître

avec un précision de quelques centaines de mètres la position de toutes les planètes du système solaire : une mesure classique tout simplement invraisemblable à obtenir. Dans l'asymptotisme du temps infini cette remarque prend un sens tout à fait particulier : bien que le flot classique associé à un hamiltonien (régulier) est défini univoquement pour tout temps, le flot à temps infini n'existe pas (en tant que flot). Il intervient néanmoins partout dans la théorie des systèmes dynamiques (ergodicité, sensibilité aux conditions initiales, propriété de mélange etc), mais de façon indirecte. Faible pour l'ergodicité :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\phi^t(x))dt = \mu(x)$$

et implicite pour la sensibilité aux conditions initiales (le flot étant continu pour chaque $t < \infty$) :

$$\exists I \in \mathbb{R}^+, \forall \epsilon > 0,\ \exists t = t(I,\epsilon) \text{ tel que } \exists x, |x-y| \leq \epsilon,\ |\Phi^t(x) - \Phi^t(y)| \geq I.$$

Il y a pourtant une situation où le flot à temps infini peut être partiellement défini : il s'agît de la situation d'un point fixe hyperbolique (et plus généralement d'une trajectoire instable dans un système chaotique) : la variété instable d'un point fixe z_0, $\Lambda^-_{z_0}$ est en effet définie comme l'ensemble des points z tels que $\phi^{+\infty}(z) = z_0$:

$$\Lambda^-_{z_0} = \{z/\phi^{+\infty}(z) = z_0\}.$$

On pourrait donc être tenté de "définir" le flot inverse de la manière suivante :

$$\phi^{-\infty}(z_0) = z,\ \forall z \in \Lambda_{z_0},$$

c'est-à-dire de manière non-déterministe.

Cette définition n'a bien sûr pas de sens à l'intérieur du paradigme classique, mais se retrouve prendre une signification dans le cadre semiclassique : la délocalisation de la fonction d'onde pour une échelle de temps logarithmique, couplée à l'interprétation probabiliste de celle-ci, donne précisément un sens non-déterministe au flot limite à temps infini (voir [15] pour une discussion plus détaillée).

9. Conclusion : périodes semiclassiques

Nous avons vu comment la mémoire des phases permet la reconstruction de paquets d'ondes et induit donc un flot *périodique* dans le temps infini semiclassique.

Nous avons aussi vu que les échelles de temps, pour cette reconstruction, sont différentes pour les cas stable/instable.

$$\begin{cases} \hbar^{-1} \text{ pour le cas table} \\ \log \frac{1}{\hbar} \text{ pour le cas instable} \end{cases}$$

Ces échelles de temps, lorsque $\hbar \to 0$ "disparaissent" dans le point à l'infini du temps classique. Les exemples que nous avons traités font donc appréhender une approche du temps infini en mécanique classique dans laquelle le "point" à l'infini est décomposé en différentes échelles, suggérant un nouveau système dynamique (vraiment semiclassique et non-classique).

Nous avons enfin vu la nécessité pour les états cohérents de n'être plus gaussien, les reconstructions ne préservant pas cette propriété. De plus les symboles des états reconstruits sont, dans tous les cas, singuliers lorsque considérés ponctuellement.

Références

[1] D. Bambusi, S. Graffi et T. Paul, "Long tine semiclassical approximation of quantum flows : A proof of the Ehrenfest time", Asymp. Analysis, **21**,149-160, 1999.

[2] O. Babelon, B. Douçot et T. Paul, en préparation.

[3] I. Bloch "Exploring quantum matter with ultracold atoms in optical lattices", J. Phys. B **38**, 629-643, 2005.

[4] A. Bouzouina et D.Robert, "Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables", Duke Math. J. **111**, 223-252, 2002.

[5] M. Combescure et D. Robert, "Semiclassical spreading of quantum wave packets and applications near unstable fixed points of the classical flow", Asymptotic Anal. **14**, 377-404 1997.

[6] S.De Bièvre et D. Robert, "Semiclassical propagation on $|\log \hbar|$ time scales" Int. Math. Res. Not. **12**, 667-696 (2003).

[7] F. Golse, "Equation de Schrôdinger, dispersion et analyse numérique", Matapli **68**, 59-67, 2002.

[8] V. Guillemin and T. Paul "Some remarks about semiclassical trace invariants and quantum normal forms", preprint, 2008.

[9] S. Harochhe et J-M. Raimond, "Exploring the quantum : atoms, cavities and photons", Oxfrod University Press, 2007.

[10] A. Iantchenko, J. Sjöstrand, and M. Zworski, "Birkhoff normal forms in semi-classical inverse problems". Math. Res. Lett. **9**, 337-362, 2002.

[11] A. Martinez, "An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis", Springer, 2001.

[12] T. Paul, "Reconstruction and non-reconstruction of wave packets", preprint, 2008.

[13] T. Paul, "Reconstruction of wave-packets on an hyperbolic trajectory", preprint, 2008.

[14] T. Paul, "Non-linear coherent states and long time semclassical evolution", preprint, 2008.

[15] T. Paul, "Semiclassical analysis and sensitivity to initial conditions", Information and Computation, à paraître.

[16] D. Robert, "Revivals of wavw packets and Bohr-Sommerfeld quantization rules", Contemprary Math., **447**, 219-235, 2007.

[17] E. Schrödinger, "Quantizierung als Eigenwertproblem", Annalen der Physik (1926) **79** 361-376 et 489-527, **80** 437-490 et **81** 109-139, 1926.

[18] B.Yurke and D.Soler, "Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion", Phys. Rev. Letters, **57**, 13-16, 1986.

DMA, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05
E-mail address: paul@dma.ens.fr, http ://www.dma.ens.fr/∼paul