

**This document must be cited according to its final version
which is published in a conference proceeding as:
E. Courtial¹, P. Dufour², Y. Touré³,
"Commande prédictive non linéaire sous contraintes :
Une condition de faisabilité",
Proceedings of the 3rd IEEE Conference Internationale Francophone
d'Automatique (CIFA) 2004,
paper 223, Douz, Tunisia,
november 22-24,2004.**

**All open archive documents of Pascal Dufour are available at:
<http://hal.archives-ouvertes.fr/DUFOUR-PASCAL-C-3926-2008>**

**The professional web page (Fr/En) of Pascal Dufour is:
<http://www.lagep.univ-lyon1.fr/signatures/dufour.pascal>**

1

Université de Picardie Jules Verne,
EA 3699 CREA (Centre de Robotique, d'Electrotechnique et d'Automatique d'Amiens),
7 rue du moulin neuf, 80029 Amiens Cedex 1, France
<http://www.crea.u-picardie.fr/>

2

Université de Lyon, Lyon, F-69003, France; Université Lyon 1;
CNRS UMR 5007 LAGEP (Laboratoire d'Automatique et de GENie des Procédés),
43 bd du 11 novembre, 69100 Villeurbanne, France
Tel +33 (0) 4 72 43 18 45 - Fax +33 (0) 4 72 43 16 99
<http://www.lagep.univ-lyon1.fr/> <http://www.univ-lyon1.fr> <http://www.cnrs.fr>

3

Université d'Orléans,
UPRES EA 2078 LVR (Laboratoire de Vision et de Robotique),
63 Av de Lattre de Tassigny, 18020 Bourges Cedex, France
<http://www.bourges.univ-orleans.fr/rech/lvr/>



CIFA 2004 - Douz - 22 au 24 novembre 2004 -

Commande prédictive non linéaire sous contraintes:

Une condition de faisabilité

E. Courtial, P. Dufour, Y. Touré



Amiens



Lyon



Bourges

la commande prédictive

Avantage : prise en compte explicite des **contraintes**

⇒ large implantation dans le milieu industriel

Préoccupations « temps réel » :

- Satisfaction des contraintes à tout moment
- Temps de calcul $< T_e$

Contexte

Mise en œuvre d'une CP :

Est-ce que l'algorithme d'optimisation, pièce maîtresse de l'approche, peut trouver une solution au problème ?



Condition de faisabilité

Convergence de l'algorithme d'optimisation

Remarque : le problème est bien posé si l'objectif de poursuite de trajectoire est compatible avec les contraintes.

La commande prédictive

Le modèle

Le modèle considéré est **un modèle discret non linéaire**:

$$\begin{cases} x_m(k+1) = f_m(x_m(k), u(k)) \\ y_{\text{mod}}(k) = h_m(x_m(k)) \end{cases}$$

Avec $x_m \in \mathfrak{R}^n$, $u \in \mathfrak{R}^m$, $y \in \mathfrak{R}^p$

$f_m : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$, $h_m : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$: fonctions continuellement différentiables

La commande prédictive

Le modèle

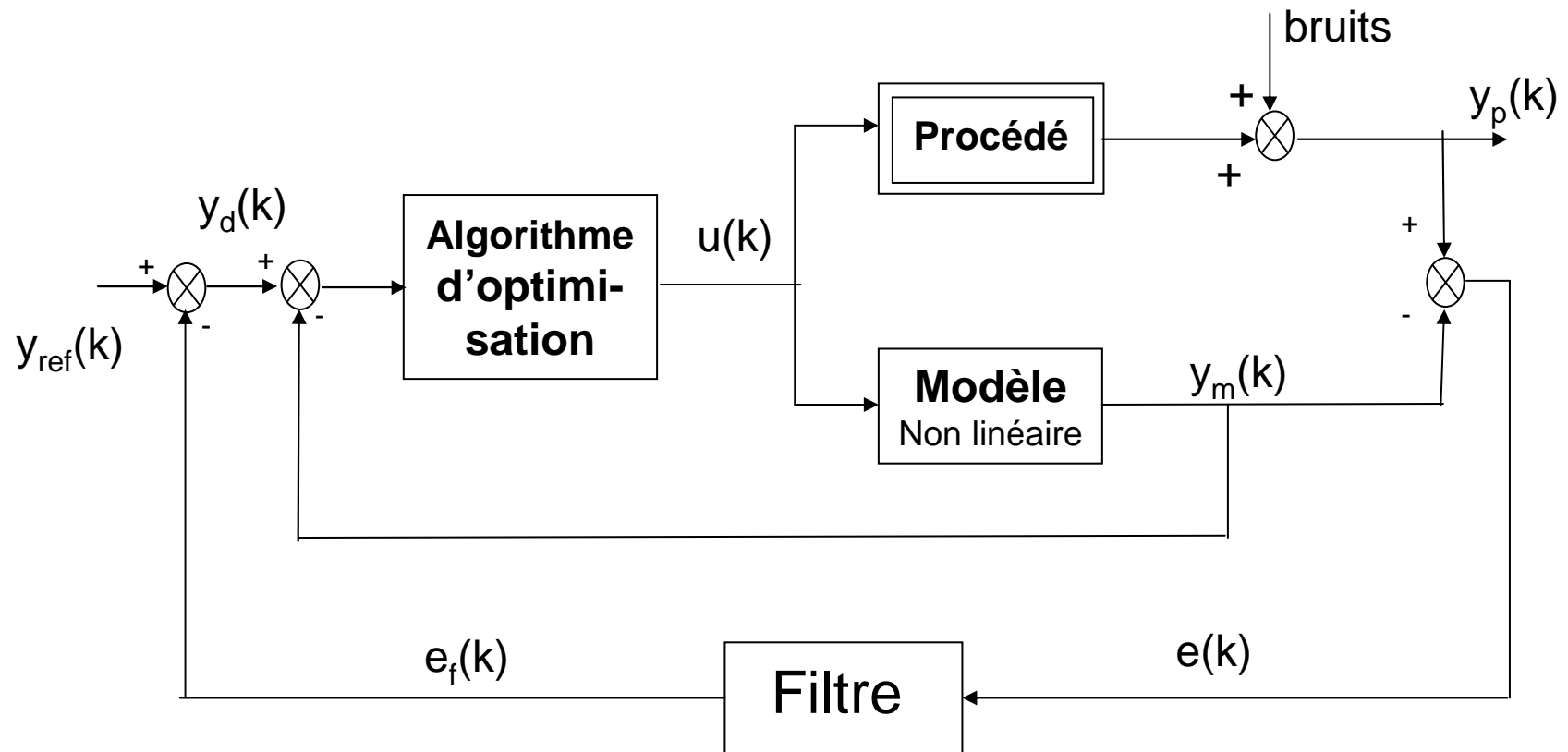
L'objectif de commande

une poursuite de trajectoire connue a priori

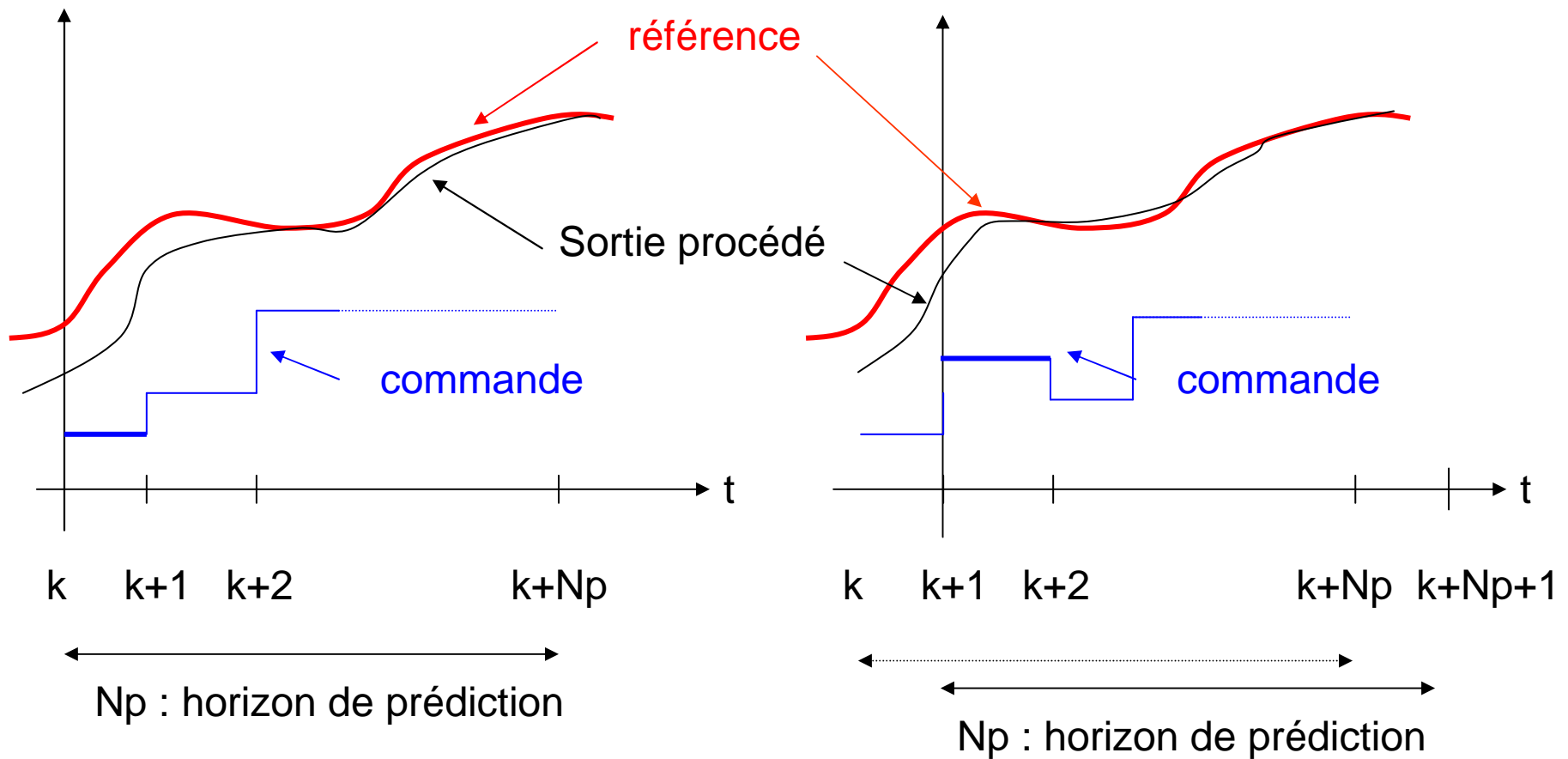
Le critère d'optimisation

- **Structure de commande à modèle interne**

La commande prédictive



La commande prédictive



La commande prédictive

Le modèle

L'objectif de commande

Le critère d'optimisation

- Structure de commande à modèle interne
- **Formulation mathématique**

La commande prédictive

$$\min_{\tilde{u}} \left\{ J(\tilde{u}) = \sum_{j=k+1}^{k+N_p} (y_d(j) - y_{\text{mod}}(j))^T Q (y_d(j) - y_{\text{mod}}(j)) \right\}$$

$$\tilde{u} = \{u(k), u(k+1), \dots, u(k + N_c - 1)\}$$

N_c : horizon de commande

Q : matrice symétrique définie positive

Ce problème de minimisation est soumis à des **contraintes** :

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq u(j) \leq u_{\max} \\ \Delta u_{\min} &\leq u(j) - u(j-1) \leq \Delta u_{\max} \\ x_{\min} &\leq x_m(j+1) \leq x_{\max} \end{aligned} \quad (\text{Eq.c})$$

La commande prédictive

Le modèle

L'objectif de commande

Le critère d'optimisation

La résolution du problème d'optimisation

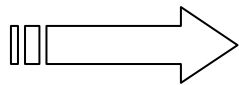
**Algorithme d'optimisation = clé de voûte
de l'approche de commande prédictive**

La commande prédictive

Exigences :

La solution calculée doit être admissible à tout instant.

- ✓ le temps de calcul doit être inférieur à T_e ,
- ✓ les contraintes doivent être vérifiées à tout moment.



Robustification d'un algorithme

Optimisation NL sous contraintes

Préliminaires

Toutes les contraintes (Eq.c) peuvent se mettre sous la forme :

$$g_i(\tilde{u}) \leq 0 \quad i \in I = \{1 \text{ à } nbc\}$$

Soit $K = \{ \tilde{u} \text{ tel que } g_i(\tilde{u}) \leq 0, i \in I \}$

le domaine des contraintes ou des solutions admissibles.

Hypothèses :

- K est un ensemble fermé borné non vide de $\mathbb{R}^{m.Nc}$
- $\text{Dom}(J) = \{u \text{ tel que } J(u) < \infty\}$ est non vide.

Optimisation NL sous contraintes

Le problème d'optimisation sous contraintes s'écrit alors :

$$(Pc) \begin{cases} \min_{\tilde{u}} J(\tilde{u}) \\ g_i(\tilde{u}) \leq 0 \quad i \in I = \{1 \text{ à } nbc\} \end{cases}$$

Méthodes de résolution :

- Méthodes directes (primales)
- Méthodes indirectes (duales)

Optimisation NL sous contraintes

Les méthodes de pénalités intérieures

Problème **contraint** \Rightarrow Problème **pénalisé**

$$\min_{\tilde{u} \in K} J(\tilde{u})$$

$$(Pp) \begin{cases} \min J_{tot}(\tilde{u}, p) = J(\tilde{u}) + J_{int}(\tilde{u}, p) \\ \tilde{u} \in \mathcal{R}^{m.Nc} \end{cases}$$

$$J_{int}(\tilde{u}, p) = \sum_{i=1}^{nbc} -p \cdot \left(\sum_{j=k+1}^{k+Np} \frac{1}{g_i(\tilde{u})} \right)$$

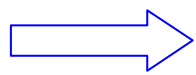
Fonction barrière : $B(\tilde{u})$

Optimisation NL sous contraintes

Algorithme de Levenberg-Marquardt

$$\begin{aligned}(\tilde{u}^{l+1} - \tilde{u}^l) &= - (\nabla^2 J_{tot}^l + \lambda . I_{\mathbb{R}^{m.Nc}})^{-1} . \nabla J_{tot}^l \\ &= d(\lambda_l) \quad \text{avec } \lambda_l \geq 0\end{aligned}$$

Il faut alors s'assurer que, lors des déplacements successifs, la **solution reste interne** au domaine des contraintes



$$(\tilde{u}^{l+1} - \tilde{u}^l) = \theta . d(\lambda_l)$$

Le **paramètre** $\theta \geq 0$ permet d'adapter le déplacement.

Optimisation NL sous contraintes

Proposition :

Supposons que les fonctions des contraintes vérifient $g_i(u)$ soient C^2 dans K . Si pour les contraintes saturées indicées ($i \in I_s$), on a :

$\nabla g_i(u)$ sont linéairement indépendants ($i \in I_s$)

alors les solutions intermédiaires **restent à l'intérieur du domaine des contraintes** et l'algorithme d'optimisation modifié conserve la propriété de **convergence globale**.

Optimisation NL sous contraintes

La démonstration se base sur :

- la **propriété de fermeture** de l'application multivoque,
- Le fait que les **solutions sont réalisables** si elles sont **dans le domaine des contraintes** ,
- il doit exister un chemin ou **direction admissible** cad qu'en tout point il est possible de se déplacer à l'intérieur du domaine des contraintes.

Optimisation NL sous contraintes

Admissibilité des points :

Un arc de courbe Γ est dit **admissible** en u et est défini par une fonction continuellement différentiable $\varphi (\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m)$ du paramètre $\theta \geq 0$, $\varphi(\theta) = [\varphi_1(\theta), \dots, \varphi_m(\theta)]$ et telle que :

a) $\varphi(0) = u^0$

b) Pour θ suffisamment petit, $\varphi(\theta) \in K$.

On appelle **direction admissible** en u^0 , tout vecteur y tangent à l'arc de courbe $\varphi(\theta)$, admissible en u^0 .

$$y = \frac{d\varphi}{d\theta}(0) = \left[\frac{d\varphi_1}{d\theta}(0), \frac{d\varphi_2}{d\theta}(0), \dots, \frac{d\varphi_m}{d\theta}(0) \right]^T$$

Optimisation NL sous contraintes

Soit l'application : $V = U_{\theta} \circ D_{\lambda}$

D_{λ} définit la direction réalisable,

U_{θ} définit le point intérieur au domaine des contraintes.

- ✓ $D_{\lambda} = d \circ \Lambda_{\lambda}$, composition d'applications fermées, est une application fermée.
- ✓ U_{θ} fermée si l'ensemble des directions réalisables n'est pas vide (en tout point, il est possible de se déplacer à l'intérieur de K).

Optimisation NL sous contraintes

❖ Pour les contraintes **non saturées** telles que :

$$g_i(\tilde{u}) < 0 \quad (i \in I - I_s)$$

Il existe toujours un θ suffisamment petit tel que $g_i(\Phi(\theta)) \leq 0$.

❖ Pour les contraintes **saturées**, $g_i(\tilde{u}) = 0 \quad (i \in I_s)$

Il doit exister un θ suffisamment petit tel que $g_i(\Phi(\theta)) \leq 0$.

Développement de Taylor au voisinage de $\theta = 0$:

$$g_i(\varphi(\theta)) = \varphi(\tilde{u}) + \theta \cdot \nabla g_i^T(\tilde{u}) \cdot \frac{d\varphi}{d\theta}(0) + \theta \cdot \sigma(\theta)$$

Une condition suffisante pour avoir $g_i(\varphi(\theta)) \leq 0$ est

l'indépendance des vecteurs

$$\nabla g_i \text{ en } \tilde{u}.$$

Un exemple temps réel

Test du critère de faisabilité

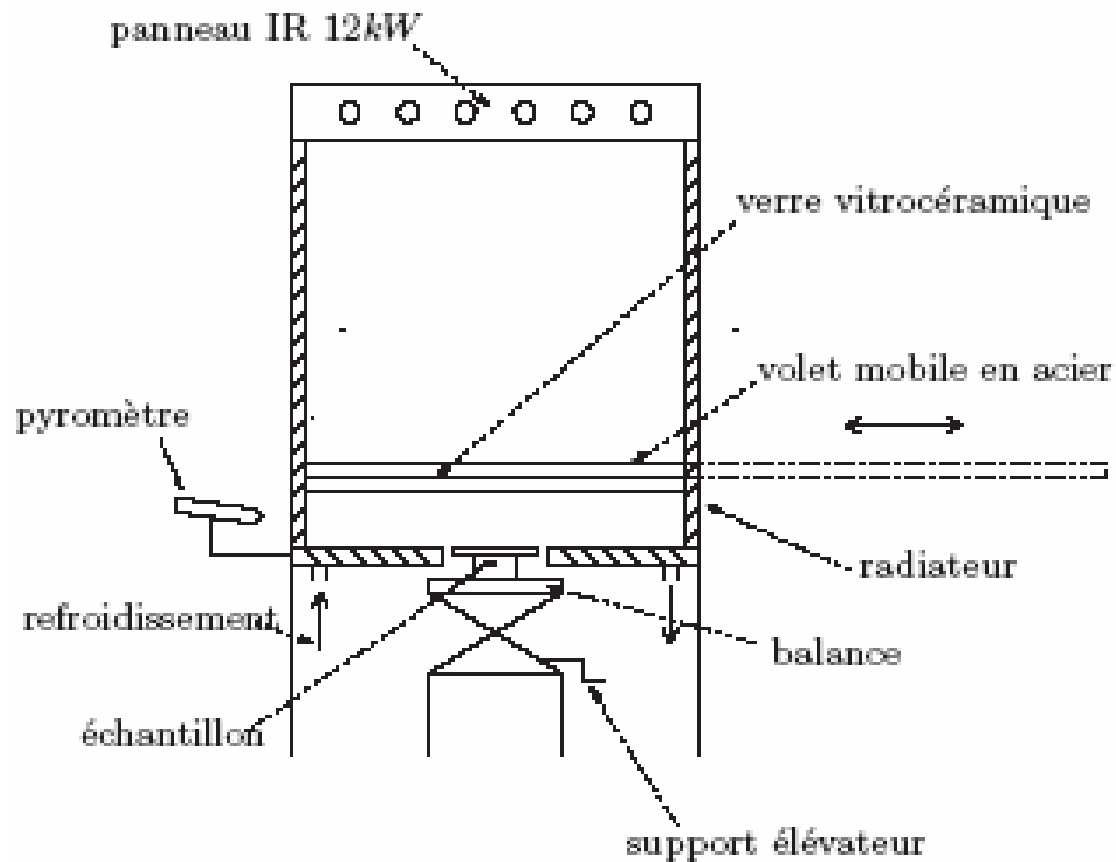
- ✓ Pour les contraintes de type borne ou vitesse, la condition de faisabilité est automatiquement vérifiées pour les variables de commandes indépendantes.
- ✓ Pour les contraintes sur les états : condition de sensibilité

$$\text{rang} \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial x_{\text{mod}}(j)}{\partial u_1(j)} & \frac{\partial x_{\text{mod}}(j)}{\partial u_2(j)} & \dots & \frac{\partial x_{\text{mod}}(j)}{\partial u_m(j)} \end{array} \right] \text{ soit maximal}$$

Remarque : les contraintes min et max ne peuvent jamais être saturées en même temps.

Un exemple temps réel

Procédé de séchage de peinture



Un exemple temps réel

➤ Le modèle initial d'équations aux dérivées partielles est discrétisé par la méthode des volumes finis.

➤ Les contraintes sont :

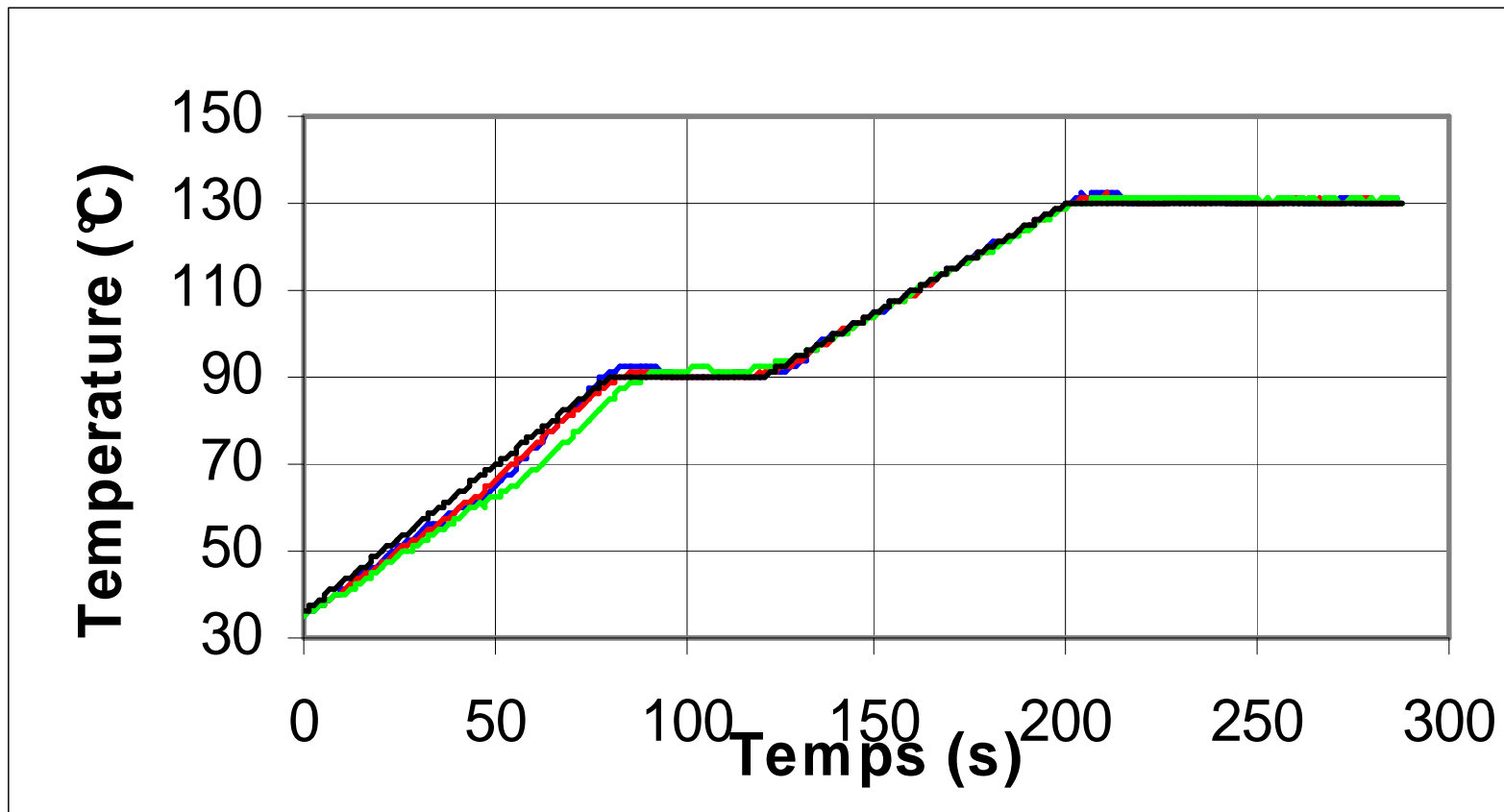
$$\begin{aligned} 0 \text{ W.m}^{-2} &\leq u(j) \leq 12 \text{ kW.m}^{-2} \\ -500 \text{ W.m}^{-2}.\text{s}^{-1} &\leq u(j) - u(j-1) \leq +500 \text{ W.m}^{-2}.\text{s}^{-1} \\ \chi_{\min} &\leq \chi_{\text{moy}}(t) = 1/e_{\text{sec}} \int x(z,t) dz \leq \chi_{\max} \end{aligned}$$

➤ Influence du choix de l'horizon de prédiction N_p .

➤ Temps de calcul : moins de 100ms pour la résolution du modèle non linéaire et du problème d'optimisation non linéaire sous contraintes (CPU de 2.6 Ghz).

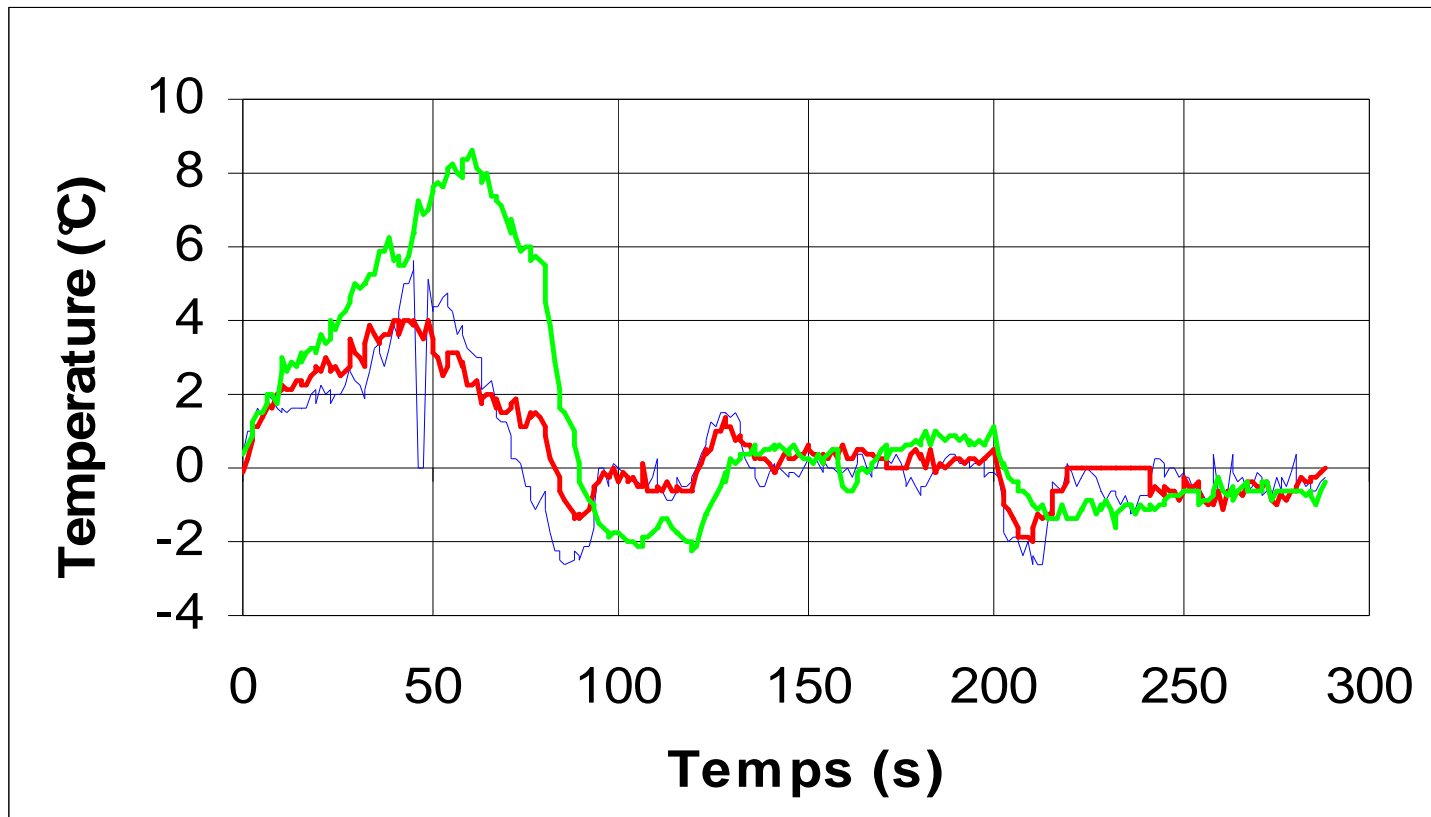
Un exemple temps réel

Poursuite de trajectoire : $N_p = 3, 6, 12$



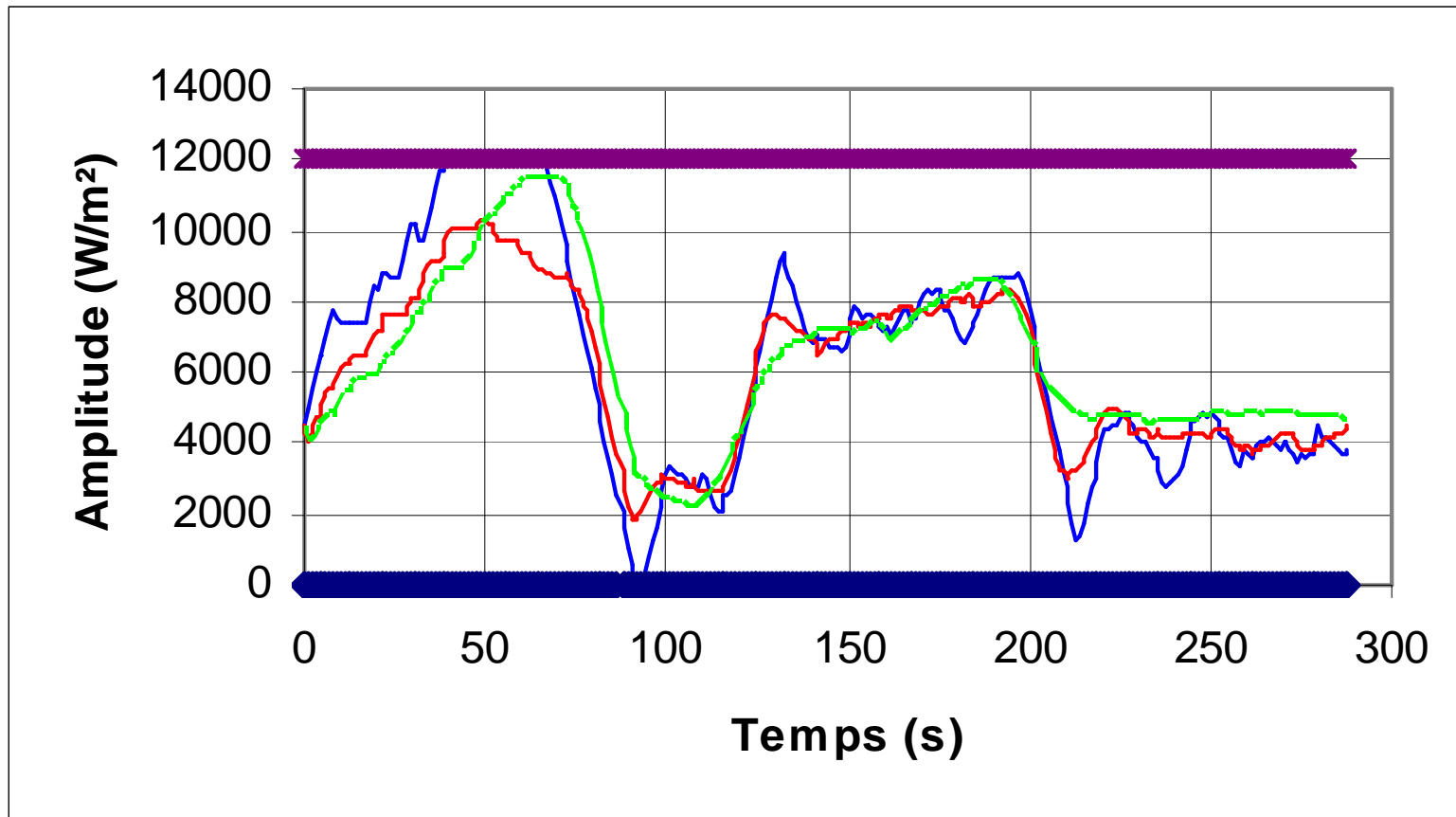
Un exemple temps réel

Erreur de poursuite de trajectoire : $N_p = 3,6,12$



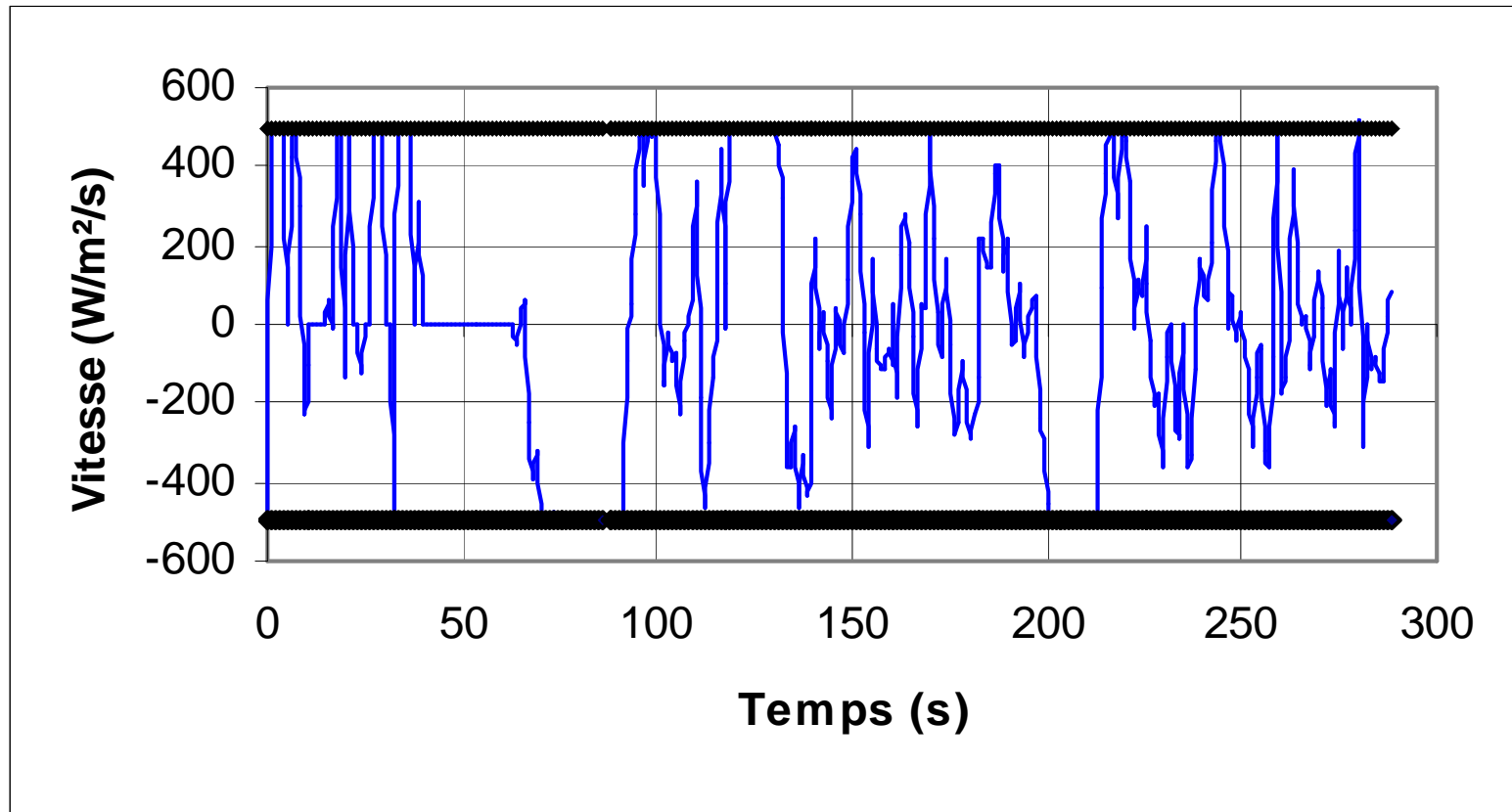
Un exemple temps réel

Amplitude de la commande : $N_p = 3,6,12$



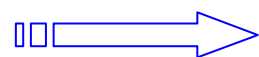
Un exemple temps réel

Vitesse de la commande : $N_p = 3$



Conclusions et perspectives

- **Amélioration structurelle** d'un algorithme d'optimisation
- **Condition suffisante sur les contraintes** traduisant leur compatibilité
- **Test préalable de faisabilité** de la commande prédictive
- **Résultat générique**



Etude de la **stabilité**