Optimisation du théorème d'Ax-Sen-Tate et application à un calcul de cohomologie galoisienne p-adique

Jérémy Le Borgne

▶ **To cite this version:**

Jérémy Le Borgne. Optimisation du théorème d'Ax-Sen-Tate et application à un calcul de cohomologie galoisienne p-adique. 2009. hal-00350374v1

HAL Id: hal-00350374

https://hal.science/hal-00350374v1

Preprint submitted on 6 Jan 2009 (v1), last revised 10 Nov 2009 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Optimisation du théorème d'Ax-Sen-Tate et application à un calcul de cohomologie galoisienne p-adique.

Jérémy Le Borgne

Table des matières

1 Optimisation du théorème d'Ax. 2
1.1 Extensions APF. 2
1.2 Etude de l'extension K_∞/K. 4
1.3 Optimisation du théorème d'Ax. 6

2 Application au calcul de la cohomologie de G dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. 6
2.1 Cas non ramifié. 7
2.2 Le cas ramifié. 10
2.2.1 Cas $e \leq p-1$. 10
2.2.2 Cas général. 10

Introduction

Soit p un nombre premier, k un corps parfait de caractéristique p, et $F = \mathrm{Frac}\ \mathrm{W}(k)$. Soit K une extension finie totalement ramifiée de F. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{m}_K$ son unique idéal maximal, et π_K (ou π s'il n'y a pas de confusion possible) une uniformisante de K. L'indice de ramification de K sur F est noté e (c'est le degré de K sur F). Enfin, on note $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, et C le complété de $\bar{K}$, auquel on étend la valuation de F notée v, et normalisée par $v(p) = 1$. Le théorème d'Ax-Sen-Tate dit que les points fixes de C sous l'action de $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sont exactement les éléments de K. La démonstration d'Ax de ce théorème s'appuie sur le résultat suivant :

Théorème (Ax)**.** *Soit $x \in C$. On suppose que pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma x - x) \geq A$. Alors, il existe $y \in K$ tel que $v(x-y) \geq A - \frac{p}{(p-1)^2}$.*

Ax pose sans y répondre la question de l'optimalité de la constante $\frac{p}{(p-1)^2}$ intervenant dans le théorème précédent. Pour traiter cette question nous introduisons ici l'extension K_∞ de K par les racines d'ordre une puissance de p de l'uniformisante. La première partie est consacrée à l'étude de cette extension. Dans sa démonstration du théorème d'Ax-Sen-Tate (voir [Tat]), Tate présente des calculs de la cohomologie galoisienne à coefficients dans l'extension cyclotomique de K. Dans cet article, nous démontrons des résultats du même type pour lorsque K_∞ est une extension arithmétiquement profinie (APF) de K en nous appuyant sur les travaux de Fontaine et Wintenberger (voir [Win]) sur lé théorie du corps des normes. Ces résultats s'appliquent à l'extension K_∞, et une étude *ad hoc* de l'extension K_∞/K, qui constitue la partie essentiellement originale de cet article, nous permettra de démontrer le :

Théorème (Théorème 2)**.** *Soit $x \in C$. On suppose que pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma x - x) \geq A$. Alors, il existe $y \in K$ tel que $v(x-y) \geq A - \frac{1}{p-1}$.*

On obtient en fait une description un peu plus précise des éléments vérifiant les hypothèses du Théorème 2, ce qui nous permet de décrire la structure de $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$. La deuxième partie est dédiée à cette étude. Dans le cas où $K = F$, on montre que $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ est isomorphe au sous-espace de $k^{\mathbb{N}}$ formée des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire tordue par le Frobenius, introduites par Kedlaya sous le nom de suites *twist-récurrentes*. On donne finalement sans les détailler des descriptions analogues dans le cas ramifié.

1 Optimisation du théorème d'Ax.

Nous étudions ici des propriétés de cohomologie galoisienne des extensions APF de la théorie de Fontaine-Wintenberger. Nous introduisons l'extension de K par les racines d'ordre une puissance de p de π, et nous lui appliquons les résultats de la partie précédente. Nous étudions en détail les propriétés de K_∞, et nous en déduisons une caractérisation des éléments de K_∞ vérifiant une condition du type "Pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma x - x) \geq A$". Nous concluons en montrant la version optimisée du théorème d'Ax présentée dans l'introduction.

1.1 Extensions APF.

Soit K_∞ une extension infinie, arithmétiquement profinie (APF) (cf. [Win], §1) de K. On se propose dans cette partie de décrire la cohomologie de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K_\infty)$ à coefficients dans C, en cherchant à généraliser les résultats de [Tat] concernant l'extension cyclotomique de K. On utilise la numérotation supérieure des groupes de ramification, voir par exemple [Ser68]. Pour $\mu \geq -1$, si M est une extension finie de K, on pose

$$M^\mu = M \cap \bar{K}^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^\mu}.$$

On sait d'après [Col] que

$$v(\mathfrak{d}_{M/K}) = \int_{-1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{[M : M^\mu]}\right) d\mu.$$

Proposition 1. *Soit L_∞ une extension galoisienne finie de K_∞. Alors $Tr_{L_\infty/K_\infty}(\mathcal{O}_{L_\infty}) \subset \mathfrak{m}_{K_\infty}$.*

Démonstration. Suivant [Win], nous notons $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la tour des extensions élémentaires de K_∞. On définit la suite μ_n comme la suite strictement croissante des $\mu \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^\mu \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_\infty) \neq \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^{\mu+\varepsilon} \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_\infty).$$

Soit L une extension finie de K telle que $L_\infty = LK_\infty$. Suivons pas à pas la méthode de Colmez ([Col]) : pour tout $\mu \geq -1$, $[K_n : K_n^\mu] = [K_n L_n^\mu : L_n^\mu]$ (car $K_n^\mu = K_n \cap L_n^\mu$). Ainsi,

$$v(\mathfrak{d}_{L_n/K_n}) = \int_{-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{[K_n : K_n^\mu]} - \frac{1}{[L_n : L_n^\mu]}\right) d\mu = \frac{1}{[K_n : K]} \int_{-1}^{+\infty} [K_n^\mu : K] \left(1 - \frac{1}{[L_n : K_n L_n^\mu]}\right) d\mu.$$

Soit n_0 entier tel que $L^{n_0} = L$. Si $\mu \geq n \geq n_0$, alors $L^\mu = L \subset L_n^\mu$, et donc $[L_n : K_n L_n^\mu] = 1$. L'extension K_∞/K étant APF, la suite μ_n tend vers $+\infty$, on a donc :

$$[K_n : K] v(\mathfrak{d}_{L_n/K_n}) = \int_{-1}^{n_0} [K_n^\mu : K] \left(1 - \frac{1}{[L_n : K_n L_n^\mu]}\right) d\mu.$$

Pour $\mu \leq \mu_n$, et pour $m \leq n$, $K_n^\mu = K_m^\mu$.

$$\int_{-1}^{n_0} [K_n^\mu : K] d\mu = \int_{-1}^{n_0} [K_{n_0}^\mu : K] d\mu.$$

Par conséquent, $v(\mathfrak{d}_{L_n/K_n}) = O\left(\frac{1}{[K_n:K]}\right)$. Quitte à remplacer K par l'un des K_n, on sait d'après [Ser68], Chap V, §4, Lemme 6, qu'il existe une extension L de K telle que $L_\infty = LK_\infty$. Appliquons la proposition précédente à L (en posant $L_n = LK_n$). On a alors $v(\mathfrak{d}_{L_n/K_n}) = O([K_n : K]^{-1})$. On a alors ([Ser68], Chap V, §3, Lemme 4) :

$$v(Tr_{L_n/K_n}(\mathfrak{m}_{L_n})) = O([K_n : K]^{-1}),$$

et donc un élément de $\mathfrak{m}_{K_\infty}$ se trouve dans $Tr_{L_n/K_n}(\mathfrak{m}_{L_n})$ pour n assez grand, et par conséquent dans $Tr_{L_\infty/K_\infty}(\mathcal{O}_{L_\infty})$. □

Il résulte immédiatement de cette proposition le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $y_\varepsilon \in \mathcal{O}_L$ tel que $v(Tr_{L/K_\infty}(y_\varepsilon)) > \varepsilon$.*

Corollaire 2. *Soit L une extension galoisienne finie de K_∞ de groupe de Galois G, et soit $x \in L$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $y \in L$ tel que*

$$v(x - Tr_{L/K_\infty}(y)) \geq \min_{\sigma \in G} v(\sigma x - x) - \varepsilon \text{ et } v(y) \geq v(x) - \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $y_\varepsilon \in \mathcal{O}_L$ comme dans le Corollaire 1.
On pose $y = \frac{1}{z} y_\varepsilon$. Alors $v(y) \geq v(x) - \varepsilon$ et

$$Tr_{L/K\infty}(y) = \frac{1}{z} \sum_{\sigma \in G} \sigma(y_0)\sigma(x) = \frac{1}{z} \sum_{\sigma \in G} \sigma(y_0)(\sigma x - x + x) = x + \sum_{\sigma \in G} \sigma(y_0)(\sigma x - x).$$

Ainsi, $v(Tr_{L/K_\infty}(y) - x) \geq \min_{\sigma \in G} v(\sigma x - x) - \varepsilon$. □

Corollaire 3. *Soit L/K_∞ une extension galoisienne infinie, de groupe G. Soit $r \geq 1$ et f une r-cochaîne de G à coefficients dans L, et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une $(r-1)$-cochaîne g de G dans L telle que*

$$v(f - dg) \geq v(df) - \varepsilon \text{ et } v(g) \geq v(f) - \varepsilon.$$

Démonstration. On suit le plan de la démonstration de [Tat]. On se donne y_ε comme dans le Corollaire 1, et on définit une $(r-1)$-cochaîne par

$$y \cup f(s_1, \ldots, s_{r-1}) = (-1)^r \sum_{s \in G} s_1 \ldots s_{r-1} sy \cdot f(s_1, \cdots, s).$$

On vérifie facilement l'identité $Tr_{L/K_\infty}(y) f - d(y \cup f) = y \cup df$, et en divisant par $Tr_{L/K_\infty}(y)$, il vient

$$f - dg = \frac{1}{Tr_{L/K_\infty}(y)} (y \cup df),$$

avec $g = \frac{1}{Tr_{L/K_\infty}(y)} y \cup f$. La $(r-1)$-cochaîne g vérifie bien les propriétés demandées. □

On note $\mathcal{H} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_\infty)$, et $\widehat{K_\infty}$ la fermeture de K_∞ dans C. La démonstration de [Tat], Proposition 10, s'adapte immédiatement pour obtenir le résultat suivant :

Proposition 2.

$$H^0(\mathcal{H}, C) = \widehat{K_\infty} \text{ et } H^r(\mathcal{H}, C) = 0 \text{ pour } r \geq 1$$

On peut maintenant appliquer le résultat précédent à une extension APF bien choisie. On définit $\pi_0 = \pi$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, π_{n+1} une racine p-ième de π_n, $K_n = K(\pi_n)$, et $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. L'extension K_∞, étudiée par Breuil dans [Bre] est APF. Nous redonnons ici une démonstration plus élémentaire (dans le sens ou elle n'a pas recours aux groupes de Lie p-adiques) de ce résultat, qui est le Lemme 2.1.1 de *loc. cit.*.

Proposition 3. *L'extension K_∞/K est APF.*

Démonstration. On remarque que si $m \geq n$, $K_n^\mu = K_n \cap K_m^\mu$ (c'est évident, car $K_m \supset K_n$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n = \inf\{\mu \geq -1 \ / \ \bar{K}^{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)^\mu} \supset K_n\}$ (μ_n existe car K_n est une extension finie de K). Alors, si $r \geq n$, $K_n^{\mu_r} = K_r$. En effet, $K_n^{\mu_r}$ contient K_r et est contenu dans K_{r+1} ; comme $[K_{r+1} : K_r] = p$ est premier, il n'y a pas d'extensions intermédiaires, d'où $K_n^{\mu_r} = K_r$. Ainsi, $[K_n : K_n^{\mu_r}] = p^{n-r}$. D'autre part, on sait que $v(\mathfrak{d}_{K_n/K}) = e(n+1) - \frac{e}{p^n}$. Un rapide calcul à partir de l'expression intégrale de $v(\mathfrak{d}_{K_n/K})$ et une récurrence immédiate montrent alors que pour tout $n \geq 1$,

$$\mu_n = ne - 1 + \frac{pe}{p-1}.$$

La suite μ_n tend vers $+\infty$, il résulte de [Win], 1.4.2. que K_∞/K est APF et que (K_n) est la tour d'extensions élémentaires de K_∞. □

On a le corollaire suivant :

Corollaire 4. *Soit $\varepsilon > 0$, soit $x \in \bar{K}$ tel que pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma x - x) \geq A$. Il existe $y_\varepsilon \in K_\infty$ tel que $v(x - y_\varepsilon) \geq A - \varepsilon$.*

Démonstration. On note M la clôture galoisienne de $K_\infty(x)$, alors $\mathrm{Gal}(\bar{K}/M)$ agit trivialement sur x, et donc pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K)$, $v(\sigma x - x) \geq A$, et en particulier pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(M/K_\infty)$, $v(\sigma x - x) \geq A$. D'après le Corollaire 2, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un $z_\varepsilon \in K_\infty$ tel que

$$v(x - z_\varepsilon) \geq A - \varepsilon \text{ et } v(z_\varepsilon) \geq v(x) - \varepsilon. \quad \square$$

1.2 Etude de l'extension K_∞/K.

Théorème 1. *Soit $x \in K_\infty$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall \sigma \in G = Gal(\bar{K}/K)$, $v(\sigma x - x) \geq A$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists y_m \in K_m$ *tel que* $v(x - y_m) \geq A - \frac{1}{p^m(p-1)}$.

En particulier, si x vérifie (i), il existe $y \in K$ tel que $v(x - y) \geq A - \frac{1}{p-1}$.

On sépare la démonstration de ce théorème en deux, en commençant par le sens $(i) \Rightarrow (ii)$, puis l'autre implication. Pour simplifier l'écriture, on notera $A_m = A - \frac{1}{p^m(p-1)}$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in K_n \setminus K_{n-1}$. x s'écrit

$$x = \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i \pi_n^i,$$

avec les a_i dans K. Pour $\sigma \in G$, $\sigma\pi_n$ est de la forme $\zeta\pi_n$, avec ζ racine p^n-ième de l'unité. De plus, il existe $\sigma \in G$ tel que ζ soit une racine *primitive* p^n-ième de l'unité. Fixons un tel σ.

$$\sigma x - x = \sum_{i=1}^{p^n-1} a_i \pi_n^i (\zeta^i - 1).$$

L'ordre de ζ^i en tant que racine de l'unité est $p^{n-v(i)}$. En effet, écrivant $i = p^{v(i)}d$ avec d non divisible par p. Alors $\zeta^i = (\zeta^d)^{p^{v(i)}}$, ζ^d est une racine primitive p^n-ième de 1, donc $(\zeta^d)^{p^{v(i)}}$ est une racine primitive $p^{n-v(i)}$-ième de 1.

Par conséquent, pour $i \in \{1, \ldots, p^n - 1\}$, on a

$$v(a_i \pi_n^i (\zeta^i - 1)) = v(a_i) + \frac{i}{ep^n} + \frac{1}{p^{n-v(i)-1}(p-1)}.$$

Soient $i, j \in \{1, \ldots, p^n - 1\}$ tels que $v(a_i \pi_n^i (\zeta^i - 1)) = v(a_j \pi_n^j (\zeta^j - 1))$. Alors

$$\frac{i-j}{ep^n} + \frac{p^{v(i)} - p^{v(j)}}{p^{n-1}(p-1)} = v(a_j) - v(a_i) \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}.$$

$v(i)$ et $v(j)$ sont inférieurs à $n-1$, on peut de plus supposer que $v(i) \leq v(j)$. On a alors $(i-j)(p-1) - ep^{v(i)+1}(1 - p^{v(j)-v(i)}) \in p^n(p-1)\mathbb{Z}$. Si $v(i) < v(j)$, alors

$$v((i-j)(p-1)) = v(i), \text{ et } v(ep^{v(i)+1}(1 - p^{v(j)-v(i)})) = v(e) + v(i) + 1.$$

Par conséquent, $v((i-j)(p-1) - ep^{v(i)+1}(1 - p^{v(j)-v(i)})) = v(i) < n - 1$.

On a donc nécessairement $v(i) = v(j)$. Ainsi, $\frac{i-j}{p^n} \in \mathbb{Z}$, et comme i et j sont inférieurs à p^n, $i = j$. Finalement,

$$v(a_i \pi_n^i (\zeta^i - 1)) = v(a_j \pi_n^j (\zeta^j - 1)) \Leftrightarrow i = j.$$

En particulier,

$$v(\sigma x - x) = \min_{1 \leq i \leq p^n - 1} \left(v(a_i) + \frac{i}{ep^n} + \frac{p^{v(i)}}{p^{n-1}(p-1)} \right).$$

Par conséquent, si $i \in \{1, \ldots, p^{n-1}\}$ et $v(i) < n - m$, on a sous les hypothèses du théorème :

$$v(a_i) + \frac{i}{ep^n} \geq A - \frac{p^{n-m-1}}{p^{n-1}(p-1)} \geq A_m.$$

D'autre part,

$$y_m = \sum_{j=0}^{p^m-1} a_{p^{n-m}j}\pi_m^j \in K_m.$$

Finalement, on a

$$v(x-y_m) = \min_{0\le j\le p^m-1} v(a_{p^{n-m}j}\pi_m^j) = \min_{0\le j\le p^m-1}\left(v(a_{p^{n-m}j}) + \frac{j}{ep^m}\right) \ge A_m,$$

avec $y_m \in K_m$.

Réciproquement, $(ii) \Rightarrow (i)$: On suppose que $x \in K_n \setminus K_{n-1}$. On écrit $x = \sum_{i=0}^{p^n-1} a_i\pi_n^i$. On fixe $\sigma_0 \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ tel que $\sigma_0 x = \zeta x$ avec ζ racine primitive p^n-ième de l'unité. On pose pour tout $m < n$:

$$z_m = \sum_{j=0}^{p^m-1} a_{p^{n-m}j}\pi_m^j.$$

La démonstration comporte trois étapes : tout d'abord, on montre que $v(\sigma x - x) \ge v(\sigma_0 x - x)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$. Ensuite, on vérifie que $v(x-z) \le v(x-z_m)$ pour tout $z \in K_m$. Enfin, on montre qu'il existe $m < n$ tel que $v(x-z_m) \le v(\sigma_0 x - x) - \frac{1}{p^m(p-1)}$, et on conclut.

Soit $\sigma \in G$. Il existe une racine p^n-ième de l'unité ω telle que $\sigma\pi_n = \omega\pi_n$. Notons p^r l'ordre de ω en tant que racine de l'unité. On a alors $\sigma x - x = \sum_{i=1}^{p^n-1} a_i\pi_n^i(\omega^i - 1)$. Pour tout $i \in \{1,\dots,p-1\}$, $v(a_i\pi_n^i(\omega^i-1)) = v(a_i) + \frac{i}{ep^n} + \frac{p^{v(i)}}{p^{r-1}(p-1)}$. Or $r \le n$, donc

$$\forall i \in \{1,\dots,p-1\},\ v(a_i\pi_n^i(\omega^i-1)) \ge v(a_i) + \frac{i}{ep^n} + \frac{p^{v(i)}}{p^{n-1}(p-1)}.$$

Or on sait que $v(\sigma_0 x - x) = \min_{1\le i\le p^n-1}\left(v(a_i) + \frac{i}{ep^n} + \frac{p^{v(i)}}{p^{n-1}(p-1)}\right)$, et donc

$$v(\sigma x - x) \ge \min_{1\le i\le p^n-1}\left(v(a_i\pi_n^i(\omega^i-1))\right) \ge v(\sigma_0 x - x).$$

Soit $z \in K_m$. On va montrer que $v(z-z_m) \ne v(x-z_m)$. Tout d'abord, comme z et z_m sont dans K_m, $v(z-z_m) \in \frac{1}{ep^m}\mathbb{Z}$. D'autre part, $v(x-z_m) = \min_{v(i)<n-m}\left(v(a_i) + \frac{i}{ep^n}\right)$. Ainsi,

$$ep^m v(x-z_m) = \min_{v(i)<n-m}\left(ep^m v(a_i) + \frac{i}{p^{n-m}}\right).$$

Si $v(i) < n-m$, $\frac{i}{p^{n-m}} \notin \mathbb{Z}$. Comme $ev(a_i) \in \mathbb{Z}$ pour tout i, on en déduit que $ep^m v(x-z_m) \notin \mathbb{Z}$, et donc que $v(z-z_m) \ne v(x-z_m)$. Par conséquent, $v(x-z) = \min(v(x-z_m), v(z-z_m)) \le v(x-z_m)$.

On sait que $v(\sigma_0 x - x) = \min_{1\le i\le p^n-1}\left(v(a_i) + \frac{i}{ep^n} + \frac{p^{v(i)}}{p^{n-1}(p-1)}\right)$. Notons i_0 l'indice pour lequel ce minimum est atteint ; soit $m \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $v(i_0) = n-1-m$. On a

$$v(x-z_m) = \min_{v(i)<n-m}\left(v(a_i) + \frac{i}{ep^n}\right) \le v(a_{i_0}) + \frac{i_0}{ep^n}.$$

Or, par définition de i_0, $v(\sigma_0 x - x) = v(a_{i_0}) + \frac{i_0}{ep^n} + \frac{1}{p^m(p-1)}$, et donc $v(x-z_m) \le v(\sigma_0 x - x) - \frac{1}{p^m(p-1)}$.

Fixons-nous maintenant $\sigma \in G$. D'après les hypothèses de la Proposition, il existe un $y_m \in K_m$ tel que $v(x-y_m) \ge A_m$. On fixe un tel y_m, a en particulier $v(x-z_m) \ge A_m$. Ainsi,

$$v(\sigma x - x) \ge v(\sigma_0 x - x) \ge v(x-z_m) + \frac{1}{p^m(p-1)} \ge A. \quad \square$$

1.3 Optimisation du théorème d'Ax.

Dans cette partie, on utilise les résultats de la partie précédente et de l'étude menée sur les extensions APF pour donner la constante optimale dans le théorème d'Ax. Remarquons d'emblée que la constante optimale est minorée par $\frac{1}{p-1}$. En effet, $v(\sigma\pi_1-\pi_1) = v(\pi_1)+\frac{1}{p-1}$, et $\inf_{y\in K} v(\pi_1 - y) = v(\pi_1)$. On va montrer que $\frac{1}{p-1}$ est en fait la constante optimale.

Théorème 2. *Soit $x \in C$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\forall \sigma \in G = Gal(\bar{K}/K)$, $v(\sigma x - x) \geq A$

(ii) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists y_m \in K_m$ *tel que* $v(x - y_m) \geq A - \frac{1}{p^m(p-1)}$.

En particulier, si x vérifie (i), il existe $y \in K$ tel que $v(x-y) \geq \frac{1}{p-1}$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ On commence par supposer $x \in \bar{K}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on fixe $z_\varepsilon \in K_\infty$ tel que tel que $v(x - z_\varepsilon) \geq A - \varepsilon$, comme dans le Corollaire 4. On a $v(\sigma z_\varepsilon - z_\varepsilon) \geq A - \varepsilon$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. D'après le Théorème 1, il existe $y_\varepsilon \in K_m$ tel que $v(z_\varepsilon - y_\varepsilon) \geq A_m - \varepsilon$. Fixons un tel y_ε, on a alors $v(x - y_\varepsilon) \geq A_m - \varepsilon$.
Si $0 < \varepsilon' < \varepsilon$,

$$v(y_\varepsilon - y_{\varepsilon'}) \geq A_m - \varepsilon.$$

Mais $ep^m v\left(y_{k,\varepsilon} - y_{k,\varepsilon'}\right) \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour ε suffisamment petit (de manière à ce que les entiers immédiatement supérieurs à $ep^m(A_m - \varepsilon)$ et à $ep^m A_m$ soient égaux), on a $v(y_\varepsilon - y_{\varepsilon'}) \geq A_m$. Fixons un tel ε et posons $y_m = y_\varepsilon$. Alors, pour tout $0 < \varepsilon' < \varepsilon$,

$$v(x - y_m) \geq \min(v(x - y_{\varepsilon'}), v(y_{\varepsilon'} - y_m)) \geq A_m - \varepsilon'.$$

Cette minoration étant valable pour tout ε', on a $v(x - y_m) \geq A_m$. Maintenant, lorsque $x \in C$, soit $y \in \bar{K}$ tel que $v(x - y) \geq A$. On a alors pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma y - y) \geq A$. Par conséquent, il existe pour tout m un $y_m \in K_m$ tel que $v(y - y_m) \geq A_m$, et on a pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$v(x - y_m) \geq A - \frac{1}{p^m(p-1)}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons d'abord $x \in \bar{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $m < n$ on pose $z_m = y_m$, et pour $m \geq n$, on pose $z_m = y_n$. On a alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $z_m \in K_m$ et $v(y_n - z_m) \geq A_m$. D'après le Théorème 1, pour tout $\sigma \in G$, on a $v(\sigma y_n - y_n) \geq A$. On en déduit immédiatement que pour tout $\sigma \in G$,

$$v(\sigma x - x) \geq \min(v(\sigma y_n - y_n), v(\sigma(x - y_n) - (x - y_n))) \geq A_n.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en résulte que $v(\sigma x - x) \geq A$ quel que soit $\sigma \in G$. On en déduit le résultat pour $x \in C$ comme précédemment. □

Le Théorème 2 peut se reformuler de la manière suivante :

Corollaire 5. *Soit $x \in C$. Alors :*

$$\inf_{\sigma\in G} v(\sigma x - x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{y\in K_n} \left\{ v(x-y) + \frac{1}{p^n(p-1)} \right\}.$$

2 Application au calcul de la cohomologie de G dans $\mathcal{O}_{\bar{K}}$.

On a la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_{\bar{K}} \to \bar{K} \to \bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}} \to 0$. En passant aux points fixes par $G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, on a :

$$0 \to K/\mathcal{O}_K \to \left(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}}\right)^G \to H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}}) \to 0$$

car $H^1(G, \bar{K}) = 0$. Il en résulte que $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ est isomorphe au quotient $\left(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}}\right)^G / \left(K/\mathcal{O}_K\right)$, identification que l'on fera par la suite. On a déjà le résultat suivant :

Proposition 4. *Soit n un entier $\geq \frac{e}{p-1}$. Alors $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ est tué par π^n.*

Démonstration. Soit $x \in \left(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}}\right)^G$. C'est l'image modulo $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ d'un élément ξ de $\bar{K}$ vérifiant pour tout $\sigma \in G$, $v(\sigma\xi - \xi) \geq 0$. Il existe $y \in K$ tel que $v(\xi - y) \geq -\frac{1}{p-1}$. On a alors $v(\pi^n\xi - \pi^n y) \geq \frac{n}{e} - \frac{1}{p-1} \geq 0$, donc $\pi^n\xi = 0$ dans $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$, c'est à dire $\pi^n x = 0$. □

Remarque. On a en particulier $pH^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}}) = 0$ lorsque $K = F$. Dans le cas p impair, ce résultat était déjà connu de Sen, voir [Tat].

Dans la suite, on note

$$\mathfrak{a}_n = \left\{ z \in \bar{K} \ / \ v(z) \geq -\frac{1}{p^n(p-1)} \right\}.$$

2.1 Cas non ramifié.

Dans cette sous-partie, on suppose que $K = F$, c'est à dire K/F non absolument ramifiée. On rappelle que l'on identifie $\left(\bar{K}/\mathcal{O}_{\bar{K}}\right)^G / (K/\mathcal{O}_K)$ et $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$. On va montrer que l'on peut associer à $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ une suite d'éléments de k dont nous étudierons ensuite les propriétés. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\eta_n = \pi_n^{-1}$.

Proposition 5. *Soit $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$, il existe un antécédent ξ de x dans $\bar{K}$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in k^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} [x_i]\eta_i \mod \mathfrak{a}_n,$$

où pour tout i, $[x_i]$ est le représentant de Teichmüller de x_i. De plus, la suite (x_n) est unique et ne dépend que de x.

Démonstration. Soit ξ un antécédent de x dans $\bar{K}$. D'après le Théorème 2, il existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ un $y_m \in K_m$ tel que $\xi = y_m \mod \mathfrak{a}_m$. On fixe une telle famille (y_m). Comme $v(\xi - y_0) \geq -\frac{1}{p-1}$, on peut supposer, quitte à remplacer ξ par $\xi - y_0$, que $v(\xi) \geq -\frac{1}{p-1}$. On construit la suite $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence. Le cas $n = 0$ est trivial.
On suppose construite la suite jusqu'à l'indice n, et on écrit :

$$\xi = [x_1]\eta_1 + \cdots + [x_n]\eta_n + z, \text{ avec } z \in \mathfrak{a}_n, \text{ et } y_{n+1} = \sum_{i \geq -n_0} c_i' \pi_{n+1}^i,$$

où les c_i' sont pris parmi les représentants de Teichmuller des éléments de k et $n_0 \geq 0$. En posant $c_i = c_{-i}'$, on a $y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n_0} c_i \eta_{n+1}^i \mod \mathcal{O}_{\bar{K}}$. Il en résulte que $\xi = \sum_{i=1}^{n_0} c_i \eta_{n+1}^i + z'$, avec $z' \in \mathfrak{a}_{n+1}$. Pour $k \geq 1$,

$$\eta_{n+1}^k \in \mathfrak{a}_n \Leftrightarrow (p \geq 3 \text{ et } k = 1) \text{ ou } (p = 2 \text{ et } k \in \{1, 2\}).$$

Ainsi, pour $p \geq 3$, en réduisant modulo $\mathfrak{a}_n$, on a $\sum_{i=2}^{n_0} c_i \eta_{n+1}^i = \alpha_1\eta_1 + \cdots + \alpha_n\eta_n \mod \mathfrak{a}_n$. Par conséquent, en identifiant les coefficients dans K_{n+1}, on a

$$x = [x_1]\eta_1 + \cdots + [x_n]\eta_n + c_1\eta_{n+1} + z',$$

ce qui achève la récurrence en posant $x_{n+1} = c_1 \mod p$.
Lorsque $p = 2$, on a (toujours en réduisant modulo $\mathfrak{a}_n$) , $\sum_{i=3}^{n_0} c_i \eta_{n+1}^i = [x_1]\eta_1 + \cdots + [x_{n-1}]\eta_{n-1}$. Ainsi, $\xi = c_1\eta_{n+1} + c_2\eta_{n+1}^2 + [x_1]\eta_1 + \cdots + [x_{n-1}]\eta_{n-1} + z'$. Mais $\eta_{n+1}^2 = \eta_n$, et donc ξ s'écrit encore $\xi = [x_1]\eta_1 + \cdots + [x_n]\eta_n \mod \mathfrak{a}_{n+1}$ (car $\eta_{n+1} \in \mathfrak{a}_{n+1}$).
La suite $([x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi associée à $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ ne dépend pas de $\xi \in \mathfrak{a}_0$. De plus si $\xi \mod \mathfrak{a}_n = \sum_{i=1}^{n} [x_i]\eta_i = \sum_{i=1}^{n} [x_i']\eta_i$, alors en réduisant modulo $\mathfrak{a}_i$, on a

$$\sum_{j=1}^{i} [x_j]\eta_j = \sum_{j=1}^{i} [x_j']\eta_j \text{ si } p \geq 3, \text{ et } \sum_{j=1}^{i-1} [x_j]\eta_j = \sum_{j=1}^{i-1} [x_j']\eta_j \text{ si } p = 2.$$

On en déduit par récurrence sur i que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $v([x_i] - [x_i']) \geq \frac{1}{p^i} > 0$. Comme les $[x_i]$ sont dans K, ils sont égaux modulo p, et la suite (x_n) est correctement définie. □

On peut donc définir l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi \ : & H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}}) & \longrightarrow & k^{\mathbb{N}^*} \\ & x & \mapsto & (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{array}$$

telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x - \sum_{i=1}^{n}[x_i]\eta_i \in \mathfrak{a}_n$. C'est un morphisme $\mathcal{O}_K$-linéaire (ou k-linéaire puisque $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est tué par p), injectif. Il nous reste à identifier son image. On va adapter à notre cas des constructions proposées par Kedlaya (voir [Ked99]) dans un cadre une peu différent, notamment avec k algébriquement clos mais des séries à support plus compliqué. Compte tenu du fait que nous étudions des objets plus simples, nous avons préféré réécrire l'étude de Kedlaya dans le langage de notre problème, pour éviter d'introduire les séries de puissances généralisées.

Définition 1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in k^{\mathbb{N}^*}$. On dit que la suite (x_n) est* twist-récurrente *s'il existe $d_0,\dots,d_r \in k$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_0x_n + d_1x_{n+1}^p + \cdots + d_rx_{n+r}^{p^r} = 0.$$

Proposition 6. *L'application ψ définie précédemment induit un isomorphisme de $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ sur le sous-espace de $k^{\mathbb{N}^*}$ formé des suites twist-récurrentes.*

Démonstration. On commence par montrer que si $x \in H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$, alors $\psi(x)$ est twist-récurrente. L'élément x provient d'un élément $\xi_0 \in \bar{K}$, que l'on peut supposer de valuation $\geq -\frac{1}{p-1}$. Calculons ξ_0^p lorsque $\psi(x) = (x_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, écrivons $\xi_0 = \sum_{i=1}^{n}[x_i]\eta_i + z$, avec $z \in \mathfrak{a}_n$ et les $[x_i]$ les représentants de Teichmüller. Alors $\xi_0^p = \sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}]^p\eta_i + \tilde{z}$, avec $\tilde{z} = \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\left(\sum_{i=1}^{n}[x_i]\eta_i\right)^{p-j} z^j$. Or pour tout $j \in \{1,\dots,p-1\}$,

$$v\left(\binom{p}{j}\left(\sum_{i=1}^{n}[x_i]\eta_i\right)^{p-j} z^j\right) \geq 1 - \frac{j}{p^n(p-1)} - \frac{p-j}{p^n} \geq 0.$$

Ainsi, $\xi_0^p = [x_1]^p\eta_0 + \sum_{i=1}^{n-1}[x_{i+1}]^p\eta_i \mod \mathfrak{a}_{n-1}$. En particulier, ξ_0^p vérifie $v(\sigma\xi_0^p - \xi_0^p) \geq 0$ pour tout $\sigma \in G$, et se réduit dans $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ sur un élément dont l'image par ψ est (x_{n+1}^p). Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on pose $\xi_{s+1} = \xi_s^p - [x_s]^{p^s}\eta_0$. On vérifie facilement que $v(\sigma\xi_s^p - \xi_s^p) \geq 0$ pour tout $\sigma \in G$, et que la réduction dans $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ a pour image par ψ la suite $[x_{n+s}]^{p^s}$. Comme par ailleurs tous les ξ_s sont dans $K(\xi_0)$, ils forment une famille liée sur K. Il existe donc $\delta_0,\dots,\delta_r \in K$ tels que $\delta_0\xi_0 + \cdots + \delta_r\xi_r = 0$. Quitte à multiplier par une puissance de p, on peut supposer que les δ_s sont dans $\mathcal{O}_K$ et qu'au moins l'un d'entre eux est non divisible par p. L'application ψ étant $\mathcal{O}_K$-linéaire, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_0x_n + d_1x_{n+1}^p + \cdots + d_rx_{n+r}^{p^r} = 0,$$

où d_s désigne la réduction de δ_s modulo p. Donc (x_n) est twist-récurrente.

Réciproquement, il nous reste à prouver que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est twist-récurrente, alors c'est l'image par ψ d'un élément de $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$. Soit donc $(x_n)_{n\in N^*}$ twist-récurrente et soient $d_0,\dots,d_r \in k$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_0x_n + \cdots + d_rx_{n+r}^{p^r} = 0.$$

On note $\delta_0,\dots,\delta_r$ des relevés des d_k dans $\mathcal{O}_K$, pour $n \geq 1$, on note $[x_n]$ un relevé de x_n dans $\mathcal{O}_K$, et on considère le polynôme

$$P = -\left(\delta_r[x_r]^{p^r}\eta_1 + \cdots + (\delta_1[x_r]^p + \cdots + \delta_r[x_{2r-1}]^{p^r})\eta_r\right) + \delta_0X + \cdots + \delta_rX^{p^r}.$$

On va montrer qu'il admet une racine dans $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ dont l'image par ψ est (x_{n+r}). On fixe $n \geq 1$ et on cherche une racine ξ de P sous la forme $\xi = [x_{r+1}]\eta_{r+1} + \cdots + [x_{n+r}]\eta_{n+r} + y\eta_{n+r+1}$ avec $y \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$.
Tout d'abord, on a pour $0 \leq s \leq r$,

$$\xi^{p^s} = \left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p^s} + \eta_{n+r+1}^{p^s}y^{p^s} + \sum_{j=1}^{p^s-1}\binom{p^s}{j}\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p^s-j}\eta_{n+r+1}^j y^j.$$

Comme $P(\xi)=0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{r}\delta_k\left[\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p^k}+\sum_{j=1}^{p^k-1}\binom{p^k}{j}\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p^k-j}\eta_{n+r+1}^{j}y^j+\eta_{n+r+1}^{p^k}y^{p^k}\right]$$
$$=\delta_r[x_r]^{p^r}\eta_1+\cdots+(\delta_1[x_r]^p+\cdots+\delta_r[x_{2r-1}]^{p^r})\eta_r.$$

y est donc annulé par un polynôme Q de degré p^r, dont le coefficient constant est

$$\sum_{k=0}^{r}\delta_k\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p^k}-(\delta_r[x_r]^{p^r}\eta_1+\cdots+(\delta_1[x_r]^p+\cdots+\delta_r[x_{2r-1}]^{p^r})\eta_r),$$

et dont le coefficient dominant est $\delta_r\eta_{n+r+1}^{p^r}=\delta_r\eta_{n+1}$. Par ailleurs, on a :

$$\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p}=\sum_{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n=p}\frac{p!}{\varepsilon_1!\dots\varepsilon_n!}[x_{r+1}]^{\varepsilon_1}\dots[x_{n+r}]^{\varepsilon_n}\eta_{r+1}^{\varepsilon_1}\dots\eta_{n+r}^{\varepsilon_n}.$$

On remarque que si tous les ε_i sont $<p$, $v(\frac{p!}{\varepsilon_1!\dots\varepsilon_n!})=1$ et $v(\eta_{r+1}^{\varepsilon_1}\dots\eta_{n+r}^{\varepsilon_n})=-\frac{\varepsilon_1}{p^{r+1}}-\cdots-\frac{\varepsilon_n}{p^{n+r}}>-1$. Donc tous les termes correspondants de la somme sont nuls modulo $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, et donc

$$\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p}=[x_{r+1}]^p\eta_r+[x_{r+2}]^p\eta_{r+1}+\cdots+[x_{n+r}]^p\eta_{n+r-1}\mod\mathcal{O}_{\bar{K}}.$$

Le fait que la série commence à $[x_{r+1}]\eta_{r+1}+\cdots$ permet de montrer, par un calcul analogue, que pour tout $s\in\{1,\dots,r\}$, on a :

$$\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p^s}=[x_{r+1}]^p\eta r+1-s1+[x_{r+2}]^p\eta_{r+2-s}+\cdots+[x_{n+r}]^p\eta_{r+n-s}\mod\mathcal{O}_{\bar{K}}.$$

En additionnant, on a donc :

$$\sum_{s=0}^{r}\delta_s\left(\sum_{i=r+1}^{n+r}[x_i]\eta_i\right)^{p^s}=\delta_r[x_r]^{p^r}\eta_1+\cdots+(\delta_1[x_r]^p+\cdots+\delta_r[x_{2r-1}]^{p^r})\eta_r+\eta_{n+1}z,$$

avec $z\in\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Le coefficient constant de Q est donc de valuation $\geq-\frac{1}{p^{n+1}}$ qui est la valuation de son coefficient dominant. En traçant son polygone de Newton, on en déduit que ce polynôme a une racine de valuation positive. P a donc bien une racine de la forme $x=[x_{r+1}]\eta_{r+1}+\cdots+[x_{n+r}]\eta_{n+r}+y\eta_{n+r+1}$ avec $y\in\mathcal{O}_{\bar{K}}$. P ayant p^r racines, il y a au moins l'une d'entre elles qui est obtenue pour une infinité de n à l'aide de la construction précédente. Notons ξ_0 cette racine. En réduisant modulo $\mathfrak{a}_n$, on voit que pour *tout* $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\xi_0-\sum_{i=r+1}^{r+n}[x_i]\eta_i\in\mathfrak{a}_n$. On a donc $\xi_0\in H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$, et $\psi(\xi_0)=(0,0,\dots,0,x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n,\dots)$. Comme $(x_1,\dots,x_r,0,0,\dots)$ est l'image de $\sum_{i=1}^{r}[x_i]\eta_i\in H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$, on en déduit que (x_n) est dans l'image de ψ. □

Corollaire 6. *Si $K=F$, $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est un k-espace vectoriel de dimension infinie. Plus précisément, si k est fini, la dimension de $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est dénombrable. Si k est infini, elle est égale à la cardinalité de k.*

Démonstration. $H^1(G,\mathcal{O}_{\bar{K}})$ est l'ensemble des suites twist-récurrentes à valeurs dans k. Pour $d_0,\dots,d_r$ fixés, l'ensemble des suites vérifiant la relation de twist-récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N},\ d_0x_n+\cdots+d_rx_{n+r}^{p^r}=0$$

forme un k-espace vectoriel de dimension finie. La réunion des espaces déterminés par l'ensemble des $(d_0,\dots,d_r)\in k^{r+1}$, pour $r\geq0$, est de dimension dénombrable si k est fini, et de dimension la cardinalité de k si k est infini. □

2.2 Le cas ramifié.

Dans cette partie, on propose une étude analogue à la précédente, en ne supposant plus cette fois-ci que $e = 1$.

2.2.1 Cas $e \leq p-1$.

On étudie ici le cas où $e \leq p-1$, pour lequel les constructions proposées dans le cas non ramifié s'adaptent facilement. La proposition précédente nous dit que $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ est tué par π, en particulier il a une structure naturelle de k-espace vectoriel. On peut en fait associer à un élément de $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ une suite d'éléments de k comme dans le cas non ramifié.

Proposition 7. *Soit $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$, il existe e suites $(x_{1,n}), \dots, (x_{e,n})$ d'éléments de k telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{e} [x_{j,i}]\eta_i^j \mod \mathfrak{a}_n$, $[x_{j,n}]$ désignant le représentant de Teichmüller de $x_{j,n}$.*

Démonstration. On procède comme dans le cas non ramifié, la différence ici étant que la réduction modulo $\mathfrak{a}_n$ de y_{n+1} ne tue plus seulement $c_1\eta_{n+1}$ mais la somme $c_1\eta_{n+1} + \dots + c_e\eta_{n+1}^{\rho}$ lorsque $e < p-1$. Le cas $e = p-1$ entraîne la même modification que dans le cas $e = 1, p = 2$. □

On a donc comme précédemment une application :

$$\begin{array}{rccc} \psi \ : & H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}}) & \longrightarrow & \left(k^{\mathbb{N}^*}\right)^e \\ & x & \mapsto & ((x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}^*}, \dots, (x_{e,n})_{n\in\mathbb{N}^*}) \end{array}$$

Théorème 3. *L'application qui à $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ associe $((x_{1,n}), (x_{2,n}), \dots, (x_{e,n}))$ est injective, et son image est l'ensemble des e-uplets de suites twist-récurrentes à valeurs dans k, qui est donc isomorphe à $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$.*

Démonstration. Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce résultat, les idées sont similaires à celles de la preuve dans le cas non ramifié. □

2.2.2 Cas général.

Il nous reste à traiter le cas $e \geq p$. $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ n'est pas tué par π. On note $\tau = \left\lfloor \frac{e}{p-1} \right\rfloor$ et $\rho = \left\lfloor \frac{ep}{p-1} \right\rfloor$ (où $\lfloor t \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à t). Un calcul direct montre que $\rho - \tau = e$. Soit $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$. On dispose d'une suite (y_n) avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in K_n$ et $x = y_n \mod \mathfrak{a}_n$. On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $y_n = \sum_{j=1}^{N_n} c_{j,n}\eta_n^j$, avec les $c_{j,n}$ pris dans une famille de représentants des éléments de k dans $\mathcal{O}_K$ de valuation nulle ou infinie (attention, il ne s'agit plus ici de représentants de Tiechmüller). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $z_n \in \mathfrak{a}_n$ tel que $x = \sum_{j=1}^{N_n} c_{j,n}\eta_n^j + z_n$. On remarque que $\eta_n^j \in \mathfrak{a}_n$ si et seulement si $j \leq \tau$, on peut donc supposer que la somme commence à $j = \tau + 1$.
Réduisons modulo $\mathfrak{a}_n$ l'égalité précédente écrite aux rangs n et $n+1$. On a pour $j \geq 1$:

$$\eta_{n+1}^j \in \mathfrak{a}_n \Leftrightarrow \frac{j}{ep^{n+1}} \leq \frac{1}{p^n(p-1)} \Leftrightarrow j \leq \frac{ep}{p-1} \Leftrightarrow j \leq \rho.$$

Par conséquent,

$$\sum_{j=\tau+1}^{N_n} c_{j,n}\eta_n^j = \sum_{j=\rho+1}^{N_{n+1}} c_{j,n+1}\eta_{n+1}^j \mod \mathfrak{a}_n$$

Il découle de ces calculs la proposition suivante :

Proposition 8. *Soit $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$. Il existe e suites d'éléments de $\mathcal{O}_K$ $(\alpha_{n,\tau+1}), \dots, (\alpha_{n,\rho})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\tau+1}^{\rho} \alpha_{i,j}\eta_i^j \mod \mathfrak{a}_n$.*

Démonstration. On procède par récurrence, en conservant les notations précédentes. Le cas $n = 1$ est immédiat, compte tenu du fait que pour $j \geq \rho$, $\eta_1^j \in K$.

Pour $n \geq 1$, on a $\sum_{j=\rho+1}^{N_{n+1}} c_{j,n+1}\eta_{n+1}^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=\tau+1}^{\rho} \alpha_{i,j}\eta_i^j \mod \mathfrak{a}_n$ par hypothèse de récurrence, et donc

$$x = \sum_{k=\tau+1}^{\rho} c_{k,n+1}\eta_i^k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=\tau+1}^{\rho} \alpha_{i,k}\eta_i^k + z_{n+1},$$

ce qui prouve la proposition en posant $\alpha_{n+1,j} = c_{j,n+1}$. □

Remarquons que dans cette écriture, un η_i^j n'apparaît qu'une fois ; autrement dit, il n'existe pas de couples (i,j), (i',j') distincts d'indices dans cette somme tels que $\eta_i^j = \eta_{i'}^{j'}$. En effet, on a :

$$p(\tau+1) > p\frac{e}{p-1} \geq \rho.$$

En conséquence, si $j, j' \in \{\tau+1, \ldots, \rho\}$ et $j < j'$, on a $pj > j'$, et donc $p^{i'}j \neq p^i j'$ pour tous i, i'. De plus, comme on calcule modulo K, on peut supprimer de cette somme les $\alpha_{j,i}$ tels que $j|p^i$; on peut également regrouper les termes indexés par $(i, j-\lambda p^i)$ pour $\lambda \in \mathbb{N}$ car alors $\eta_i^{j-\lambda p^i} = \pi^\lambda \eta_i^j$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{\tau+1, \ldots, \rho\}, j \nmid p^i$, on note $\gamma_{i,j} = \max\{s \in \{\tau+1, \ldots, \rho\} \ / \ p^i \mid s-j\}$ et $I = \{(i, \gamma_{i,j}) \ / \ i \in \mathbb{N}^*, j \in \{\tau+1, \ldots, \rho\}, p^i \nmid \gamma\}$. On peut encore écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x = \sum_{(i,\gamma)\in I, i\leq n} \beta_{i,\gamma}\eta_i^\gamma \mod \mathfrak{a}_n,$$

en regroupant les termes comme expliqué précédemment. Une telle écriture est alors unique : il n'y a aucune sous-somme finie de $\sum_{(i,\gamma)\in I} \beta_{i,\gamma}\eta_i^\gamma$ égale à un élément non nul de K, et aucun $\beta_{i,\gamma}\eta_i^\gamma$ non nul n'est de valuation positive. En effet, si $\gamma - \lambda p^i \in \{\tau+1, \ldots, \rho\}$ et $\gamma - (\lambda+1)p^i \notin \{\tau+1, \ldots, \rho\}$, alors dès que $\beta_{i,\gamma}$ est non nul, on a $ev(\beta_{i,\gamma}) \leq \lambda$, et donc $ev(\beta_{i,\gamma}) < \lambda + \frac{\tau}{p^i} \leq ev(\eta_i^\gamma)$. On peut donc bien définir une application de $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ vers $\mathcal{O}_K^I$, qui à x associe les $\beta_{i,\gamma}$.

Proposition 9. *Soit $r \geq 1$ et H_{π^r} le sous-module de π^r-torsion de $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$, alors $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})/H_{\pi^r}$ est un $\mathcal{O}_K$-module de type fini engendré par au plus $e\left(1 + \frac{p^2}{r(p-1)^2}\right)$ éléments.*

Démonstration. On note $I_r = \{(i,\gamma) \in I, \ rp^i + e < \gamma\}$. La π^r-torsion de $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ est l'ensemble des $x \in H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$ tels que $\pi^r x = 0$, c'est à dire $v(\pi^r x) \geq 0$. En associant à x la famille des $\beta_{i,\gamma}$ et en considérant les valuations, $\pi^r x = 0$ si et seulement si pour tout $(i,\gamma) \in I$, $\frac{r}{e} + v(\beta_{i,\gamma}) \geq \frac{\gamma}{ep^i}$. Notons H_{π^r} le sous-module de π^r-torsion de $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})$, la proposition et les calculs précédents (avec le fait que $v(\beta_{i,\gamma}) \leq 1$) montrent que l'application composée

$$\mathcal{O}_K^{I_r} \to \sum_{(i,\gamma)\in I_r} \eta_i^\gamma \mathcal{O}_K \to H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})/H_{\pi^r}$$

est surjective. Le $\mathcal{O}_K$-module $H^1(G, \mathcal{O}_{\bar{K}})/H_{\pi^r}$ est donc de type fini, engendré par des éléments en nombre fini majoré par le cardinal de I_r. Á i fixé, il y a au plus $\min(p^i, e)$ éléments de la forme (i,γ) dans I. De plus, si $(i,\gamma) \in I_r$, $p^i < \frac{\rho}{r}$ et donc $i \leq \log_p(\rho/r)$. Le cardinal de I_r est donc majoré par $\sum_{1\leq i\leq \log_p(\rho/r)} \min(p^i, e)$. De plus, pour $j \leq \log_p(\rho/r) - 1$, on a $p^j \leq e/r \leq e$, et la majoration devient alors $e\left(1 + \frac{p^2}{r(p-1)^2}\right)$. □

Remarque. Dans le cas où $e = p^n(p-1)$, le calcul du cardinal de I_1 se fait explicitement, et l'on trouve *ne* comme majorant du nombre de générateurs, ce qui est meilleur que ce que donne la proposition. D'autre part, H_π a une structure naturelle de k-espace vectoriel, on a un morphisme injectif $H_\pi \to k^{\mathbb{N}}$, et il semble possible d'espérer que les résultats de Kedlaya s'adaptent pour montrer que l'image de cette injection peut se décrire en terme de suites twist-récurrentes dans leur définition la plus générale (voir [Ked99] et [Ked08]). Nous ne ferons pas ici cette interprétation.

Remerciements.

Je tiens à remercier ici Xavier Caruso [1] pour ses nombreuses et pertinentes remarques, ses relectures constructives de ma prose, et en particulier pour la suggestion qui est la clé de ce travail, à savoir le fait de s'intéresser aux extensions par des racines de l'uniformisante.

[1] Xavier Caruso, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

Références

[Bre] Breuil, C., Une application du corps des normes, Compositio Math. 117, 1999, 189-203.

[Col] Colmez, P., Notes du cours de M2, Corps locaux,
`http://people.math.jussieu.fr/~colmez/`

[Ked99] Kedlaya, K., The algebraic closure of the power series field in positive characteristic,
`http://arxiv.org/abs/math/9810142`

[Ked08] Kedlaya, K., Power Series and p-adic Algebraic Closures,
`http://arxiv.org/abs/math/9906030`

[Ser68] Serre, J.-P., Corps Locaux, Hermann, 1968.

[Tat] Tate, J., p-Divisible groups, Proc. conf. Local Fields, 1966.

[Win] Wintenberger, J.-P., Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, Ann. Sc. de l'ENS, 4ème série, t.16, 1983.