

Sur un problème aux limites associé à l'équation différentielle $f''' + ff'' + 2f'^2 = 0$

BERNARD BRIGHI

Résumé

Nous nous intéressons à l'équation différentielle $f''' + ff'' + 2f'^2 = 0$, qui apparaît en Mécanique des Fluides et en Magnétohydrodynamique. Cette équation différentielle, qui est un cas particulier d'une équation plus générale, possède une intégrale première qui permet d'obtenir bon nombre de résultats de manière élémentaire, avec notamment des valeurs explicites pour certaines constantes. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ donnés, nous étudierons également les solutions de cette équation différentielle définies sur $[0, +\infty)$ et vérifiant les conditions aux limites $f(0) = a$, $f'(0) = b \geq 0$ et $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Abstract

We are interested by the differential equation $f''' + ff'' + 2f'^2 = 0$, arising in fluid mechanics and in magnetohydrodynamics. This differential equation, that is a particular case of a more general one, has a first integral which allows to obtain several results by elementary means, and explicit constants. In addition, for given $a, b \in \mathbb{R}$, we will study the solutions of the above differential equation, satisfying the boundary conditions $f(0) = a$, $f'(0) = b \geq 0$ and $f'(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$.

1 Introduction

Considérons l'équation différentielle du troisième ordre :

$$f''' + ff'' + 2f'^2 = 0. \quad (1)$$

Cette équation est une forme réduite de l'équation différentielle suivante, qui apparaît en Mécanique des Fluides et en Magnétohydrodynamique

$$\hat{f}''' + \frac{m+1}{2}\hat{f}\hat{f}'' - m\hat{f}'^2 = 0 \quad (2)$$

dans le cas particulier où $m = -1/2$. Pour le voir, il suffit de remarquer que, si $m > -1$, alors

$$f(t) = \frac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{2}} \hat{f}\left(\frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{m+1}}\right),$$

est une solution de l'équation différentielle $f''' + ff'' - \frac{2m}{m+1}f'^2 = 0$ si et seulement si \hat{f} est une solution de (2).

Le plus souvent, on associe à l'équation différentielle (1) (ou plus généralement à (2)) le problème aux limites :

$$(\mathcal{P}_{a,b}) \quad \begin{cases} f''' + ff'' + 2f'^2 = 0 & \text{sur } [0, +\infty), \\ f(0) = a, \\ f'(0) = b, \\ f'(t) \rightarrow 0, & \text{quand } t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Ce problème fournit ce que l'on appelle des solutions auto-semblables de certains problèmes d'équations aux dérivées partielles de la Physique. Ainsi, dans l'étude de la convection libre au voisinage d'une plaque immergée dans un milieu poreux saturé d'un fluide, sous certaines conditions de chauffage de cette plaque, on obtient le problème $(\mathcal{P}_{a,b})$ avec $b > 0$. Lorsqu'une couche mince de métal liquide subit de la part d'un champ magnétique une excitation à haute fréquence, on peut l'obtenir avec $b < 0$.

D'un point de vue mathématique, la condition à l'infini assure, en un certain sens, que le problème $(\mathcal{P}_{a,b})$ est bien posé; en effet, si f est une solution sur un intervalle du type $[t_0, +\infty)$ de l'équation plus générale

$$f''' + ff'' + \mathbf{g}(f') = 0,$$

et si $f'(t) \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ quand $t \rightarrow +\infty$, alors $\mathbf{g}(\lambda) = 0$ (cf. [10] et [6]). Ainsi, dans notre cas, la condition $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ s'impose pour espérer que $(\mathcal{P}_{a,b})$ ait une solution.

Pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_{a,b})$ on emploie la *méthode du tir*. Pour cela, on note f_c la solution du problème aux valeurs initiales $(\mathcal{Q}_{a,b,c})$ qui consiste en l'équation (1) avec les conditions initiales $f(0) = a$, $f'(0) = b$ et $f''(0) = c$, et on note $[0, T_c)$ l'intersection avec $[0, +\infty)$ de l'intervalle maximal d'existence de f_c . Ainsi, obtenir une solution du problème aux limites $(\mathcal{P}_{a,b})$ revient à trouver une valeur de c pour laquelle $T_c = +\infty$ et $f'_c(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Nous nous concentrerons, dans cet article, sur le problème $(\mathcal{P}_{a,b})$ avec $b \geq 0$. Le cas $b < 0$ est étudié dans [12].

Dans la situation plus générale de l'équation (2), le problème aux limites correspondant à $(\mathcal{P}_{a,b})$ avec $b \geq 0$ est étudié dans bon nombre d'articles, comme [2], [3], [5], [8], [11], [14] et [15], d'une part par des méthodes directes, et d'autre part en associant à l'équation (2) un champ de vecteurs du plan qui permet de dépasser les difficultés rencontrées par les méthodes directes.

Une des particularités de l'équation (1) est que l'on est capable d'en déterminer une *intégrale première*; cette propriété permet de retrouver les résultats des articles mentionnés ci-dessus d'une manière élémentaire, et surtout de les compléter, en obtenant des valeurs explicites de certaines constantes, comme celles intervenant dans les comportements asymptotiques des solutions de $(\mathcal{P}_{a,b})$, et celles caractérisant l'ensemble des réels c pour lesquels f_c est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$.

Dans certains contextes physiques, le problème aux limites $(\mathcal{P}_{a,b})$ est remplacé par un autre problème dans lequel on substitue à la condition en 0 portant sur f' , une condition portant sur f'' ; cf. [1] et [7] pour l'étude de ce type de problème pour l'équation (2). Il y a fort à parier que dans le cas de l'équation (1), l'utilisation de l'intégrale première permet, comme ici, une amélioration des résultats et une simplification des preuves.

Dans le paragraphe 2, nous donnerons des résultats très généraux sur les solutions de (1) et, notamment, nous établirons des identités fondamentales que nous utiliserons largement ensuite. Dans le paragraphe 3, nous commencerons par mettre en évidence certaines propriétés que doivent vérifier les solutions du problème aux limites $(\mathcal{P}_{a,b})$, nous étudierons ensuite les solutions du problème aux valeurs initiales $(\mathcal{Q}_{a,b,c})$, et nous finirons par résoudre complètement le problème $(\mathcal{P}_{a,b})$, et par donner le comportement asymptotique de ses solutions.

2 Résultats préliminaires

2.1 Changement de concavité

Lemme 2.1 *Soit f une solution non constante de (1) sur un intervalle I . Si, pour un $t_0 \in I$, on a $f''(t_0) \leq 0$, alors $f''(t) < 0$ pour tout $t \in I \cap (t_0, +\infty)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $t \in I \cap (t_0, +\infty)$ et soit F la primitive de f telle que $F(t) = 0$. De l'équation (1) on déduit que $(f''e^F)' = -2f'^2e^F$, et donc que

$$f''(t) = f''(t_0)e^{F(t_0)} - 2 \int_{t_0}^t f'(s)^2 e^{F(s)} ds < 0,$$

puisque, f étant une solution non constante de (1), f' ne peut être identiquement nulle sur l'intervalle $[t_0, t]$. □

2.2 Une intégrale première

Pour toute fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I , posons :

$$H_f := ff'' - \frac{1}{2}f'^2 + f^2f'. \quad (3)$$

Lemme 2.2 [PREMIÈRE IDENTITÉ FONDAMENTALE] *Si f est une solution de (1) sur un intervalle I , alors la fonction H_f est constante sur I . Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall t \in I, \quad f(t)f''(t) - \frac{1}{2}f'(t)^2 + f(t)^2f'(t) = \lambda. \quad (4)$$

DÉMONSTRATION. On a

$$(H_f)' = ff''' + f'f'' - f'f'' + 2ff'^2 + f^2f'' = (f''' + f'f'' + 2f'^2)f = 0,$$

et le résultat s'ensuit. □

Lemme 2.3 Soit f une solution positive de (1) sur un intervalle I . Si $H_f = 0$ sur I , alors il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que

$$f' + \frac{2}{3}f^2 = \kappa\sqrt{f} \quad \text{sur } I. \quad (5)$$

DÉMONSTRATION. Posons $g = f'f^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}$. On a :

$$g' = f''f^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}f'^2f^{-\frac{3}{2}} + f'f^{\frac{1}{2}} = f^{-\frac{3}{2}}H_f = 0.$$

Par suite, il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $g = \kappa$ sur I , et (5) s'en déduit. \square

Lemme 2.4 [DEUXIÈME IDENTITÉ FONDAMENTALE] Soit f une solution de (1) sur un intervalle I . Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall t \in I, \quad \frac{3}{2}f''(t) + \frac{5}{2}f(t)f'(t) + \frac{1}{3}f(t)^3 = \lambda t + \mu. \quad (6)$$

DÉMONSTRATION. Le Lemme 2.2 nous assure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $H_f = \lambda$ sur I . En remarquant que $ff'' = (ff')' - f'^2$, on déduit de cette identité et de (1) les égalités

$$(ff')' - \frac{3}{2}f'^2 + f^2f' = \lambda \quad \text{et} \quad f''' + (ff')' + f'^2 = 0.$$

D'où :

$$\frac{3}{2}f''' + \frac{5}{2}(ff')' + f^2f' = \lambda.$$

L'existence d'une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que (6) ait lieu s'en déduit par une intégration. \square

Lemme 2.5 Soit f une solution (1) sur l'intervalle maximal $I = (T_-, T_+)$.

(A) Si $T_+ < +\infty$, alors $f''(t) \rightarrow -\infty$, $f'(t) \rightarrow -\infty$ et $f(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow T_+$.

(B) Si $T_- > -\infty$, alors $f''(t) \rightarrow +\infty$, $f'(t) \rightarrow -\infty$ et $f(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow T_-$.

DÉMONSTRATION. Montrons (A). Si T_+ est fini, alors la quantité $|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)|$ est non bornée quand $t \rightarrow T_+$. D'où, nécessairement $f''(t)$ est non bornée quand $t \rightarrow T_+$, et grâce à l'identité fondamentale (6) on voit aisément qu'il en est de même de $f'(t)$. Soit $t_0 \in I$. En intégrant la relation (6), on obtient qu'il existe une constante $\nu \in \mathbb{R}$, dépendant de t_0 , telle que

$$\forall t \in I, \quad \frac{3}{2}f'(t) + \frac{5}{4}f(t)^2 + \frac{1}{3} \int_{t_0}^t f(s)^3 ds = \frac{\lambda}{2}t^2 + \mu t + \nu,$$

d'où il découle que $f(t)$ est non bornée quand $t \rightarrow T_+$. Ensuite, compte tenu du Lemme 2.1, la fonction f est convexe ou concave au voisinage de T_+ , de sorte que l'on se trouve dans l'alternative suivante :

- ou bien $f > 0$, $f' > 0$ et $f'' > 0$ au voisinage de T_+ ,
- ou bien $f < 0$, $f' < 0$ et $f'' < 0$ au voisinage de T_+ .

Dans les deux cas, on a $f''' = -ff'' - 2f'^2 < 0$ au voisinage de T_+ , et donc nécessairement $f''(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow T_+$, ce qui exclut le premier cas. Le résultat s'ensuit aisément. Pour l'assertion (B), on applique le résultat de (A) à la fonction $t \mapsto -f(-t)$ qui est une solution de (1) sur l'intervalle maximal $I = (-T_+, -T_-)$. \square

La proposition suivante précise le comportement asymptotique des solutions non globales de (1). L'utilisation des identités fondamentales permet d'en obtenir une démonstration extrêmement courte; cf. [4] pour la preuve de ce résultat dans le cas de (2).

Proposition 2.6 *Soit f une solution de (1) sur l'intervalle maximal $I = (T_-, T_+)$.*

(A) *Si $T_+ < +\infty$, alors on a*

$$f''(t) \sim \frac{-3}{(T_+ - t)^3}, \quad f'(t) \sim \frac{-3}{2(T_+ - t)^2} \quad \text{et} \quad f(t) \sim \frac{-3}{2(T_+ - t)} \quad \text{quand } t \rightarrow T_+.$$

(B) *Si $T_- > -\infty$, alors on a*

$$f''(t) \sim \frac{3}{(t - T_-)^3}, \quad f'(t) \sim \frac{-3}{2(t - T_-)^2} \quad \text{et} \quad f(t) \sim \frac{3}{2(t - T_-)} \quad \text{quand } t \rightarrow T_-.$$

DÉMONSTRATION. Montrons (A). Compte tenu des Lemmes 2.2, 2.4 et 2.5, il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $t_0 \in I$ tels que, pour tout $t \in (t_0, T_+)$, on a

$$f''(t)f(t)^{-3} - \frac{1}{2}f'(t)^2f(t)^{-4} + f'(t)f(t)^{-2} = \lambda f(t)^{-4} \quad (7)$$

et

$$\frac{3}{2}f''(t)f(t)^{-3} + \frac{5}{2}f'(t)f(t)^{-2} + \frac{1}{3} = (\lambda t + \mu)f(t)^{-3}. \quad (8)$$

En multipliant (7) par $\frac{3}{2}$ et en la soustrayant à (8), on obtient

$$\left(f'(t)f(t)^{-2} + \frac{2}{3}\right)^2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow T_+,$$

et donc

$$f'(t)f(t)^{-2} \sim -\frac{2}{3} \quad \text{quand } t \rightarrow T_+. \quad (9)$$

En intégrant, on en déduit que

$$f(t)^{-1} \sim -\frac{2}{3}(T_+ - t) \quad \text{quand } t \rightarrow T_+.$$

La troisième relation de (A) en découle; la seconde s'obtient en revenant à (9), puis la première à l'aide de (8). Pour (B), comme dans la preuve du lemme précédent, on utilise le fait que la fonction $t \mapsto -f(-t)$ est une solution de (1) sur l'intervalle maximal $I = (-T_+, -T_-)$. \square

Lemme 2.7 *Soit f une solution de (1) sur l'intervalle maximal $I = (T_-, T_+)$. Si $f'' > 0$ sur I , alors $T_+ = +\infty$ et $f' < 0$ sur I .*

DÉMONSTRATION. Le fait que $T_+ = +\infty$ résulte du Lemme 2.5. Supposons ensuite qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $f'(t_1) \geq 0$. Fixons $t_2 > t_1$. Comme $f'' > 0$, on a $f'(t_2) = \alpha > 0$ et $f(t) > \alpha(t - t_2) + f(t_2)$ pour tout $t > t_2$, et en particulier f est positive pour t assez grand. Mais par ailleurs, l'identité (6) donne

$$\frac{1}{3}f(t)^3 \leq \lambda t + \mu - \frac{5}{2}f(t)f'(t).$$

Par conséquent, pour t suffisamment grand, on obtient

$$\alpha(t - t_2) + f(t_2) < f(t) < \sqrt[3]{3(\lambda t + \mu)}$$

et une contradiction en faisant tendre t vers $+\infty$. □

Remarque 2.8 Si f est une solution de (1) sur l'intervalle maximal $I = (T_-, T_+)$ et si $f'' < 0$ sur I , alors en appliquant le résultat du lemme précédent à la fonction $t \mapsto -f(-t)$ qui est une solution de (1) sur l'intervalle maximal $I = (-T_+, -T_-)$, on obtient que $T_- = -\infty$ et $f' < 0$ sur I .

3 Le problème aux limites $(\mathcal{P}_{a,b})$ lorsque $b \geq 0$

Dans cette section nous allons considérer le problème aux limites $(\mathcal{P}_{a,b})$ avec $b \geq 0$. Nous allons commencer par mettre en évidence certaines conditions nécessaires que doit satisfaire toute solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$ lorsque $b \geq 0$.

Ensuite, afin de résoudre complètement le problème $(\mathcal{P}_{a,b})$, nous considérerons le problème aux valeurs initiales

$$(\mathcal{Q}_{g;a,b,c}) \quad \begin{cases} f''' + f f'' + 2f'^2 = 0, \\ f(0) = a, \\ f'(0) = b \geq 0, \\ f''(0) = c, \end{cases}$$

et nous déterminerons toutes les valeurs de $c \in \mathbb{R}$, pour lesquelles la solution f_c de $(\mathcal{Q}_{g;a,b,c})$ existe sur $[0, +\infty)$ et est telle que $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$.

Nous finirons cette section en donnant des précisions sur le comportement asymptotique à l'infini des solutions de $(\mathcal{P}_{a,b})$.

3.1 Propriétés des solutions de $(\mathcal{P}_{a,b})$

Lemme 3.1 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. Si f est une solution non constante de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors f' est positive sur $[0, +\infty)$. De plus

(A) si $f''(0) \leq 0$ alors $f'' < 0$ sur $(0, +\infty)$;

(B) si $f''(0) > 0$, alors il existe $t_0 > 0$ tel que $f'' > 0$ sur $[0, t_0)$, $f''(t_0) = 0$ et $f'' < 0$ sur $(t_0, +\infty)$.

Dans le premier cas, on dira que f est une solution concave de $(\mathcal{P}_{a,b})$, et dans le second, que f est une solution convexe-concave de $(\mathcal{P}_{a,b})$.

DÉMONSTRATION. Supposons que f est une solution non constante de $(\mathcal{P}_{a,b})$.

(A) Si $f''(0) \leq 0$, alors le Lemme 2.1 montre que $f'' < 0$ sur $(0, +\infty)$. Par conséquent, f' est strictement décroissante, et comme $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ on obtient que $f' > 0$ sur $[0, +\infty)$.

(B) Si $f''(0) > 0$, alors on déduit du Lemme 2.7 qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $f'' > 0$ sur $[0, t_0)$ et $f''(t_0) = 0$, et grâce au Lemme 2.1, on obtient que $f'' < 0$ sur $(t_0, +\infty)$. Comme dans le cas précédent, on en déduit que $f' > 0$ sur $[t_0, +\infty)$, et puisque $f' \geq b$ sur $[0, t_0]$, on a $f' > 0$ sur $[0, +\infty)$. \square

Lemme 3.2 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. Si f est une solution non constante de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors il existe $t_1 \geq 0$ tel que $f(t) > 0$ pour tout $t \in (t_1, +\infty)$.

DÉMONSTRATION. Si ce n'était pas le cas, on aurait $f < 0$ sur $[0, +\infty)$, et donc, grâce au Lemme 3.1, pour t assez grand, on aurait

$$f'''(t) = -f(t)f''(t) - 2f'(t)^2 < 0.$$

Par suite f' serait concave à l'infini, ce qui contredirait la positivité de f' et le fait que $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. \square

Remarque 3.3 Des Lemmes 3.1 et 3.2, on déduit que si f est une solution non constante de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors $f(t)$ possède une limite dans $(0, +\infty]$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Lemme 3.4 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. Si f est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f''(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f'''(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)f''(t) = 0. \quad (10)$$

DÉMONSTRATION. C'est clair si f est constante. Supposons donc que f est une solution non constante de $(\mathcal{P}_{a,b})$. Multiplions l'équation (1) par f'' , et intégrons de 0 à $t > 0$. On obtient :

$$\frac{1}{2}f''(t)^2 - \frac{1}{2}f''(0)^2 + \int_0^t f(s)f''(s)^2 ds + \frac{2}{3}f'(t)^3 - \frac{2}{3}b^3 = 0. \quad (11)$$

Le Lemme 3.2 nous dit qu'il existe $t_1 \geq 0$ tel que $f(t) > 0$ pour $t > t_1$. On en déduit que la fonction

$$t \longmapsto \int_0^t f(s)f''(s)^2 ds$$

est croissante sur $[t_1, +\infty)$, et donc possède une limite (éventuellement égale à $+\infty$) quand $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent, l'identité (11) entraîne que $f''(t)^2$ a une limite quand $t \rightarrow +\infty$, et cette limite ne peut être que 0, puisque $f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Ensuite, en dérivant (1), on obtient $f'''' + f f'''' + 5f' f'' = 0$, et en multipliant cette égalité par f''' , puis en intégrant entre 0 et $t > 0$, on arrive à :

$$\frac{1}{2}f'''(t)^2 - \frac{1}{2}f'''(0)^2 + \int_0^t f(s)f'''(s)^2 ds + \frac{5}{2}f'(t)f''(t)^2 - \frac{5}{2}bf''(0)^2 - \frac{5}{2} \int_0^t f''(s)^3 ds = 0. \quad (12)$$

Grâce aux Lemmes 3.1 et 3.2, on obtient que la fonction

$$t \mapsto \int_0^t (f(s)f'''(s)^2 - \frac{5}{2}f''(s)^3) ds$$

possède une limite quand $t \rightarrow +\infty$. Comme, par ce qui précède, $f'(t)f''(t)^2 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, l'identité (12) entraîne que $f'''(t)^2$ a une limite quand $t \rightarrow +\infty$, et cette limite est nécessairement 0, puisque $f''(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Finalement, en revenant à (1), on obtient que $f(t)f''(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. \square

Lemme 3.5 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. Si f est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors $f(t)f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. De plus*

$$\forall t \geq 0, \quad f''(t) + f(t)f'(t) = \int_t^{+\infty} f'(s)^2 ds. \quad (13)$$

DÉMONSTRATION. Si f est bornée, il est évident que $f(t)f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Supposons donc que $f(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Le Lemme 2.2 permet d'écrire, pour t assez grand,

$$f''(t) - \frac{1}{2}f'(t)^2 f(t)^{-1} + f(t)f'(t) = \lambda f(t)^{-1}$$

ce qui, avec le Lemme 3.4, entraîne que $f(t)f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Ensuite, en intégrant (1) de t à $s > t$, on obtient

$$f''(s) - f''(t) + f(s)f'(s) - f(t)f'(t) + \int_t^s f'(\xi)^2 d\xi = 0$$

et (13) s'en déduit en faisant tendre s vers $+\infty$. \square

Remarque 3.6 En reprenant les arguments de la preuve précédente, on voit sans peine que $f'(t)f(t)^{2-\epsilon} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, pour tout $\epsilon > 0$.

Lemme 3.7 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. Si f est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors $H_f(t) = H_f(0) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. Le résultat est évident si f est constante. Supposons donc que f est une solution non constante de $(\mathcal{P}_{a,b})$. Du Lemme 2.2 il découle que $H_f(t) = H_f(0)$ pour tout $t \geq 0$. D'où :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t)^2 f'(t) = H_f(0) - f(t)f''(t) + \frac{1}{2}f'(t)^2.$$

Grâce au Lemme 3.4, on obtient alors

$$H_f(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)^2 f'(t).$$

La conclusion résulte alors du Lemme 3.1. □

3.2 Propriétés des solutions de $(\mathcal{Q}_{a,b,c})$

Le lemme suivant est une forme de réciproque du Lemme 3.1.

Lemme 3.8 *Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Si $f'_c > 0$ sur $(0, T_c)$, alors $T_c = +\infty$ et f_c est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$.*

DÉMONSTRATION. Comme $b \geq 0$, les Lemmes 2.7 et 3.1 montrent qu'il existe $t_0 \in [0, T_c)$ tel que $f''_c < 0$ sur (t_0, T_c) . On en déduit que $f'_c(t) \rightarrow l \geq 0$ quand $t \rightarrow T_c$, et que $T_c = +\infty$ en vertu du Lemme 2.5. Nous affirmons maintenant que $l = 0$; en effet, si l était non nul, on déduirait de (6) que $f''_c(t) \sim -\frac{2}{9}(lt)^3$ quand $t \rightarrow +\infty$, ce qui contredirait le fait que $f'_c(t) \rightarrow l$ quand $t \rightarrow +\infty$. Ainsi, $l = 0$ et f_c est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$. □

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que f_c n'est pas une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$. On peut préciser le comportement de f_c ; en particulier, en remarquant que la fonction

$$h_\tau : t \mapsto -\frac{3}{2(\tau - t)}$$

est une solution de (1) sur chacun des intervalles $(-\infty, \tau)$ et $(\tau, +\infty)$, et en comparant f_c à une solution de ce type, on montre que T_c est fini.

Proposition 3.9 *Soit $c \in \mathbb{R}$. Si f_c n'est pas une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors $T_c < +\infty$ et on a*

$$f''_c(t) \sim \frac{-3}{(T_c - t)^3}, \quad f'_c(t) \sim \frac{-3}{2(T_c - t)^2} \quad \text{et} \quad f_c(t) \sim \frac{-3}{2(T_c - t)} \quad \text{quand} \quad t \rightarrow T_c.$$

DÉMONSTRATION. Notons $f = f_c$ et $T = T_c$. Compte tenu de la Proposition 2.6, il suffit de montrer que $T < +\infty$. Comme f n'est pas une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$ et que $b \geq 0$, on déduit du Lemme 3.8 que f' s'annule en un point $t_1 \geq 0$, et que, nécessairement, on a $f''(t_1) < 0$. Par conséquent, du Lemme 2.1, on déduit que $f'' < 0$ et $f' < 0$ sur $(t_1, +\infty)$,

et donc $f'(t) \rightarrow -\infty$ et $f(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow T$. Soit donc $t_2 \geq t_1$ tel que $f, f', f'' < 0$ sur $[t_2, T)$, et choisissons $\tau \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tau > t_2 + \max \left\{ \frac{3}{-2f(t_2)} ; \sqrt{\frac{3}{-2f'(t_2)}} ; \sqrt[3]{\frac{3}{-f''(t_2)}} \right\}.$$

Montrons que $T \leq \tau$. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons, au contraire, que $T > \tau$, puis posons $w = f - h_\tau$; w est définie sur $[0, \tau)$. Le choix de τ que nous avons fait entraîne que $w(t_2) < 0$, $w'(t_2) < 0$ et $w''(t_2) < 0$. Supposons maintenant que w'' s'annule sur (t_2, τ) . Alors il existe t_3 dans cet intervalle tel que $w''(t_3) = 0$, $w'' < 0$ sur $[t_2, t_3)$ et $w'''(t_3) \geq 0$. Mais, puisque $w(t_3) < 0$ et $w'(t_3) < 0$, on obtient

$$\begin{aligned} w'''(t_3) &= -f(t_3)f''(t_3) + h_\tau(t_3)h_\tau''(t_3) - 2f'(t_3)^2 + 2h_\tau'(t_3)^2 \\ &= -f''(t_3)w(t_3) - 2(f'(t_3) + h_\tau'(t_3))w'(t_3) < 0, \end{aligned}$$

et une contradiction. Par conséquent, w'' ne s'annule pas, et donc $f'' < h_\tau''$, d'où l'on déduit que $f''(t) \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \tau$. Ceci contredit le fait que f est définie sur $[0, \tau]$. Ainsi $T \leq \tau$ et la démonstration est terminée. \square

3.3 Le problème aux limites $(\mathcal{P}_{a,b})$: existence de solutions

Théorème 3.10 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$.

- (A) Si $a \leq 0$ et $b > 0$, alors $(\mathcal{P}_{a,b})$ n'a pas de solution.
- (B) Si $a \leq 0$ et $b = 0$, alors $(\mathcal{P}_{a,b})$ a une unique solution : la fonction constante $t \mapsto a$.
- (C) Si $a > 0$, alors f_c est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$ si et seulement si $c \geq c_* := \frac{b(b-2a^2)}{2a}$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, remarquons que $(\mathcal{P}_{a,b})$ possède une solution constante si et seulement si $b = 0$. Soit ensuite $a \leq 0$. S'il existait une solution non constante f de $(\mathcal{P}_{a,b})$, alors on déduirait des Lemmes 3.1 et 3.2 l'existence de $t_1 \geq 0$ tel que $f(t_1) = 0$ et $f'(t_1) > 0$. Par conséquent, on aurait

$$H_f(t_1) = -\frac{1}{2}f'(t_1)^2 < 0$$

et une contradiction avec le Lemme 3.7. Les assertions (A) et (B) en résultent.

Supposons maintenant que $a > 0$. Soit $c \in \mathbb{R}$. Notons $H_c := H_{f_c}$. On a

$$H_c(0) = ac - \frac{1}{2}b^2 + a^2b = a(c - c_*).$$

Le Lemme 3.7 montre alors que, si $c < c_*$, alors f_c n'est pas solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$. Si $b = 0$ alors $c_* = 0$ et $f_0 : t \mapsto a$ est solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$. Soit ensuite $c \geq c_*$ si $b > 0$ et $c > 0$ si $b = 0$. On a $f'_c > 0$ sur $[0, T_c)$; en effet, dans le cas contraire, puisque $a > 0$, il existerait $t_1 \in (0, T_c)$ tel que $f'_c(t_1) = 0$, $f_c(t_1) > 0$ et $f''_c(t_1) < 0$, et donc on aurait $H_c(t_1) = f_c(t_1)f''_c(t_1) < 0$ et une contradiction. Ainsi, $f'_c > 0$ sur $[0, T_c)$, et le Lemme 3.8 entraîne que $T_c = +\infty$ et que f_c est une solution de $(\mathcal{P}_{a,b})$. La preuve est ainsi terminée. \square

3.4 Comportement asymptotique des solutions de $(\mathcal{P}_{a,b})$

Pour $c \in \mathbb{R}$, comme précédemment, notons $H_c = H_{f_c} = f_c f_c'' - \frac{1}{2} f_c'^2 + f_c^2 f_c'$. Dans les deux propositions suivantes, nous allons préciser le comportement asymptotique des solutions non constantes de $(\mathcal{P}_{a,b})$.

Proposition 3.11 *Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c_* = \frac{b(b-2a^2)}{2a}$. Il existe une constante positive A telle que, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$f_{c_*}''(t) = -\ell^2 A e^{-\ell t} (1 + o(e^{-(\ell-\epsilon)t})), \quad f_{c_*}'(t) = \ell A e^{-\ell t} (1 + o(e^{-(\ell-\epsilon)t})), \quad (14)$$

$$f_{c_*}(t) = \ell - A e^{-\ell t} (1 + o(e^{-(\ell-\epsilon)t})) \quad (15)$$

quand $t \rightarrow +\infty$, où $\ell = \left(\frac{3b+2a^2}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

DÉMONSTRATION. Notons $f_* = f_{c_*}$. Nous allons commencer par montrer que $f_*(t)$ possède une limite finie quand $t \rightarrow +\infty$. Comme $f_*' > 0$, il suffit de montrer que $f_*(t)$ ne peut pas tendre vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Comme $H_{c_*} = 0$ et que $f_* > 0$, il résulte du Lemme 2.3 qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que

$$f_*' f_*^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} f_*^{\frac{3}{2}} = \kappa \quad \text{sur } [0, +\infty). \quad (16)$$

On en déduit aisément, que l'on obtiendrait une contradiction, si $f_*(t)$ tendait vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$. Notons alors ℓ la limite de f_* en l'infini, et passons à la limite quand $t \rightarrow +\infty$ dans (16); on obtient

$$\ell^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \kappa = \frac{3}{2} f_*'(0) f_*(0)^{-\frac{1}{2}} + f_*(0)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} b a^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}},$$

et $\ell = \left(\frac{3b+2a^2}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{2}{3}}$. Maintenant, comme f_*' est positive et décroissante, on déduit de (13) que

$$0 \leq \frac{f_*''(t)}{f_*'(t)} + f_*(t) = \frac{1}{f_*'(t)} \int_t^{+\infty} f_*'(s)^2 ds \leq \int_t^{+\infty} f_*'(s) ds = \ell - f_*(t),$$

et donc,

$$0 \leq \ell - f_*(t) \leq \frac{f_*''(t)}{f_*'(t)} + \ell \leq 2(\ell - f_*(t)). \quad (17)$$

D'où

$$f_*''(t) \sim -\ell f_*'(t) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty,$$

et, en utilisant la règle de L'Hôpital, on obtient

$$f_*'(t) \sim \ell(\ell - f_*(t)) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

En intégrant, on arrive finalement à

$$\ell - f_*(t) = e^{-\ell t(1+o(1))} \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Cette dernière relation montre que, pour tout $\epsilon > 0$, on a $\ell - f_*(t) = o(e^{-(\ell-\epsilon)t})$ quand $t \rightarrow +\infty$. En revenant à (17), on voit que $\ln f'_*(t) + \ell t$ possède une limite finie quand $t \rightarrow +\infty$, et que, si ν est cette limite, on a

$$\ln f'_*(t) + \ell t = \nu + o(e^{-(\ell-\epsilon)t}) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty;$$

cf. [13], (10.2) page 93. Cela donne facilement la seconde relation de (14) avec $A = e^\nu/\ell$, et la relation (15) s'ensuit par une intégration. La première relation de (14) s'obtient en revenant à (17) et en utilisant (15). \square

Proposition 3.12 Soient $a > 0$, $b \geq 0$ et $c_* = \frac{b(b-2a^2)}{2a}$. Pour $c > c_*$, on a

$$f'_c(t) \sim \lambda^{\frac{1}{3}}(3t)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad f_c(t) \sim (3\lambda t)^{\frac{1}{3}} \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty, \quad (18)$$

où $\lambda = H_c(0) = ac - \frac{1}{2}b^2 + a^2b = a(c - c_*) > 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $c > c_*$; notons $f = f_c$. Du Lemme 2.4, on déduit que

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{3}{2}f''(t) + \frac{5}{2}f(t)f'(t) + \frac{1}{3}f(t)^3 = \lambda t + \mu,$$

où $\lambda = H_c(0) = a(c - c_*) > 0$ et $\mu = \frac{3}{2}c + \frac{5}{2}ab + \frac{1}{3}a^3$. Par conséquent, puisque $f''(t) \rightarrow 0$ et $f(t)f'(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{1}{3}f(t)^3 \sim \lambda t \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty,$$

et la seconde relation de (18) en découle; la première se déduit alors aisément de (4). \square

Remarque 3.13 Il est naturel de s'attendre à ce que l'on ait, en plus de (18), la relation

$$f''_c(t) \sim -2\lambda^{\frac{1}{3}}(3t)^{-\frac{5}{3}} \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Au regard de l'équation (1), ceci est équivalent à : $f''_c(t) = o(t^{-\frac{4}{3}})$ quand $t \rightarrow +\infty$. Or, même si là aussi il est légitime de penser que cette dernière estimation puisse être exacte, il semble, à première vue, qu'il ne soit nullement évident de l'obtenir.

Remarque 3.14 Le résultat de la Proposition 3.12 est plus précis que celui obtenu, dans des cadres plus généraux, dans [9] et [15], puisque nous avons des constantes explicites dans les équivalents (18). La preuve en est également bien plus élémentaire.

Références

- [1] M. Aïboudi et B. Brighi, *On the solutions of a boundary value problem arising in free convection with prescribed heat flux*, prépublication. Disponible en ligne à l'adresse : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00161672>
- [2] Z. Belhachmi, B. Brighi et K. Taous, *Solutions similaires pour un problème de couche limite en milieux poreux*, C. R. Mécanique **328** (2000), 407-410.
- [3] Z. Belhachmi, B. Brighi et K. Taous, *On a family of differential equations for boundary layer approximations in porous media*, European J. Appl. Math. **12** (2001), no. 4, 513-528.
- [4] M. Benlahsen, A. Gmira et M. Guedda, *On singular solutions of a magnetohydrodynamic nonlinear boundary layer equation*, Electron. J. Differential Equations **78** (2007), 15 pp. (électronique).
- [5] B. Brighi, *On a similarity boundary layer equation*, Z. Anal. Anwendungen **21** (2002), no. 4, 931-948.
- [6] B. Brighi, *On the differential equation $f''' + ff'' + \mathbf{g}(f') = 0$ and the associated boundary value problems*, en préparation.
- [7] B. Brighi et J.-D. Hoernel, *On similarity solutions for boundary layer flows with prescribed heat flux*, Math. Methods Appl. Sci. **28** (2005), no. 4, 479-503.
- [8] B. Brighi et J.-D. Hoernel, *Recent advances on similarity solutions arising during free convection*, in Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **63** Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland 2005, 83-92.
- [9] B. Brighi et J.-D. Hoernel, *Asymptotic behavior of the unbounded solutions of some boundary layer equation*, Arch. Math. (Basel) **85** (2005), no. 2, 161-166.
- [10] B. Brighi et J.-D. Hoernel, *On a general similarity boundary layer equation*, Acta Math. Univ. Comenian. **77** (2008), no. 1, 9-22. Disponible en ligne à l'adresse : http://www.emis.de/journals/AMUC/_vol-77/_no-1/_brighi/brighi.pdf
- [11] B. Brighi et T. Sari, *Blowing-up coordinates for a similarity boundary layer equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (Serie A) **12** (2005), no. 5, 929-948.
- [12] B. Brighi et J.-C. Tsai, *Similarity solutions arising from a model in high frequency excitation of liquid metal with an antisymmetric magnetic field*, en préparation.
- [13] J. Dieudonné, Calcul Infinitésimal, Hermann, Paris, 1980.
- [14] M. Guedda, *Nonuniqueness of solutions to differential equations for boundary layer approximations in porous media*, C. R. Mécanique, 330 (2002), pp. 279-283.
- [15] M. Guedda, *Similarity solutions of differential equations for boundary layer approximations in porous media*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) **56** (2005), 749-762.

BERNARD BRIGHI, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE ET APPLICATIONS, FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES, UNIVERSITÉ DE HAUTE ALSACE, 4, RUE DES FRÈRES LUMIÈRE, 68093 MULHOUSE CEDEX, FRANCE

Bernard.Brighi@uha.fr