



**HAL**  
open science

# Sur un critère de Baez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann

Michel Balazard, Anne de Roton

► **To cite this version:**

Michel Balazard, Anne de Roton. Sur un critère de Baez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann. International Journal of Number Theory, 2010, 6, p. 883-903. hal-00345313

**HAL Id: hal-00345313**

**<https://hal.science/hal-00345313>**

Submitted on 8 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur un critère de Báez-Duarte pour l'hypothèse de Riemann

Michel Balazard et Anne de Roton

8 décembre 2008

*Pour Luis Báez-Duarte, à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire.*

## ABSTRACT

Define  $e_n(t) = \{t/n\}$ . Let  $d_N$  denote the distance in  $L^2(0, \infty; t^{-2}dt)$  between the indicator function of  $[1, \infty[$  and the vector space generated by  $e_1, \dots, e_N$ . A theorem of Báez-Duarte states that the Riemann hypothesis (RH) holds if and only if  $d_N \rightarrow 0$  when  $N \rightarrow \infty$ . Assuming RH, we prove the estimate

$$d_N^2 \leq (\log \log N)^{5/2+o(1)} (\log N)^{-1/2}.$$

## KEYWORDS

Riemann zeta function, Riemann hypothesis, Báez-Duarte criterion, Möbius function.

MSC classification : 11M26

## 1 Position du problème et énoncé du résultat principal

L'étude de la répartition des nombres premiers se ramène à la recherche d'approximations de la fonction

$$\chi(x) = [x \geq 1] \tag{1}$$

par des combinaisons linéaires

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^N c_n \{x/n\} \quad (N \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

de dilatées de la fonction « partie fractionnaire ». Ce fait est connu depuis Tchebychev (cf. [15]). En choisissant

$$\varphi(x) = -\{x\} + \{x/2\} + \{x/3\} + \{x/5\} - \{x/30\}$$

il avait observé l'encadrement

$$\varphi(x) \leq \chi(x) \leq \sum_{k \geq 0} \varphi(x/6^k)$$

pour en déduire

$$Ax + O(\log x) \leq \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \leq \frac{6}{5}Ax + O(\log^2 x)$$

où  $\Lambda$  désigne la fonction de von Mangoldt, et

$$A = \log \frac{2^{1/2} 3^{1/3} 5^{1/5}}{30^{1/30}} = 0,92129202\dots$$

On peut préciser la nature de l'approximation de (1) par (2) équivalente au théorème des nombres premiers

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x \quad (x \rightarrow \infty),$$

où à l'hypothèse de Riemann

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O_\delta(x^{\frac{1}{2}+\delta}) \quad (x \geq 1, \delta > 0).$$

Ainsi, le théorème des nombres premiers est équivalent\* à l'assertion

$$\inf_{\varphi} \int_0^\infty |\chi(x) - \varphi(x)| \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Quant à l'hypothèse de Riemann, Báez-Duarte (cf. [4]) a démontré qu'elle équivaut à

$$\inf_{\varphi} \int_0^\infty |\chi(x) - \varphi(x)|^2 \frac{dx}{x^2} = 0.$$

Dans les deux cas, l'infimum est pris sur les  $\varphi$  de la forme (2).

Nous nous intéressons dans cet article à une forme quantitative de ce critère. Soit  $H$  l'espace de Hilbert  $L^2(0, \infty; t^{-2}dt)$  et, pour  $\alpha > 0$ ,

$$e_\alpha(t) = \{t/\alpha\} \quad (t > 0).$$

Posons, pour  $N$  entier positif,

$$d_N = \text{dist}_H(\chi, \text{Vect}(e_1, \dots, e_N)).$$

Ainsi, le critère de Báez-Duarte affirme que l'hypothèse de Riemann équivaut à la convergence de  $d_N$  vers 0, quand  $N$  tend vers l'infini.

Examinons maintenant la vitesse de cette convergence. D'une part, Burnol (cf. [6]) a démontré que

$$d_N^2 \geq \frac{C + o(1)}{\log N}, \quad N \rightarrow +\infty,$$

où

$$C = \sum_{\rho} \frac{m(\rho)^2}{|\rho|^2},$$

la somme portant sur les zéros non triviaux  $\rho$  de la fonction  $\zeta$ , et  $m(\rho)$  désignant la multiplicité de  $\rho$  comme zéro de  $\zeta$ .

---

\*Bien entendu, deux énoncés vrais sont toujours équivalents; nous renvoyons à [9] et [1] pour des énoncés précis sur ce sujet.

Comme

$$\sum_{\rho} \frac{\mathfrak{m}(\rho)}{|\rho|^2} = 2 + \gamma - \log(4\pi)$$

(si l'hypothèse de Riemann est vraie, cf. [8], chapter 12, (10), (11)), on en déduit en particulier que

$$d_N^2 \geq \frac{2 + \gamma - \log(4\pi) + o(1)}{\log N}, \quad N \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

D'autre part, les auteurs de [3] conjecturent l'égalité dans (3). Cette conjecture entraîne donc l'hypothèse de Riemann et la simplicité des zéros de  $\zeta$ .

Le comportement asymptotique de  $d_N$  est difficile à déterminer, même conditionnellement à l'hypothèse de Riemann et d'autres conjectures classiques (simplicité des zéros de  $\zeta$ , conjecture de Montgomery sur la corrélation par paires,...). Dans [4], Báez-Duarte donne une démonstration (dûe au premier auteur) de la majoration

$$d_N^2 \ll (\log \log N)^{-2/3}$$

sous l'hypothèse de Riemann. Nous améliorons ce résultat dans le présent travail.

**Théorème** *L'hypothèse de Riemann entraîne que*

$$d_N^2 \ll_{\delta} (\log \log N)^{5/2+\delta} (\log N)^{-1/2} \quad (N \geq 3),$$

pour tout  $\delta > 0$ .

Le plan de notre article est le suivant. Au §2 nous rappelons le rôle de la fonction de Möbius dans ce problème. Nous y majorons  $d_N^2$  par la somme de deux quantités,  $I_{N,\varepsilon}$  et  $J_{\varepsilon}$ , où  $\varepsilon$  est un paramètre positif, et nous énonçons les estimations de ces quantités qui permettent de démontrer notre théorème. Le §3 contient une étude de la fonction  $\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)$  nécessaire à la majoration, au §4, de la quantité  $J_{\varepsilon}$ . Les §§5 et 6 concernent l'estimation des sommes partielles de la série de Dirichlet de l'inverse de la fonction  $\zeta$ . Cela nous permet de majorer  $I_{N,\varepsilon}$  au §7, concluant ainsi la démonstration.

Il apparaîtra clairement que notre travail doit beaucoup à l'article récent [14]. Nous remercions son auteur, Kannan Soundararajan, pour une correspondance instructive concernant [14].

Le paramètre  $\delta$  est fixé une fois pour toutes. On suppose  $0 < \delta \leq 1/2$ . On pose pour tout nombre complexe  $s$

$$\sigma = \Re s, \quad \tau = \Im s.$$

Les symboles de Bachmann  $O$  et de Vinogradov  $\ll$  (resp.  $\ll_{\delta}$ ) qui apparaissent sous-entendent toujours des constantes absolues (resp. dépendant uniquement de  $\delta$ ) et effectivement calculables. Enfin nous indiquerons, par les initiales *(HR)* placées au début de l'énoncé d'une proposition, que la démonstration que nous en donnons utilise l'hypothèse de Riemann.

## 2 Pertinence de la fonction de Möbius

Partant de l'identité

$$\chi = - \sum_{n \geq 1} \mu(n) e_n$$

(valable au sens de la convergence simple), Báez-Duarte a d'abord montré (cf. [2]) la divergence dans  $H$  de la série du second membre. Il a ensuite proposé d'approcher  $\chi$  dans  $H$  par les sommes

$$- \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} e_n,$$

où  $\varepsilon$  est un paramètre positif, à choisir convenablement en fonction de  $N$ .

En posant

$$\nu_{N,\varepsilon} = \left\| \chi + \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} e_n \right\|_H^2,$$

on a évidemment  $d_N^2 \leq \nu_{N,\varepsilon}$  pour  $N \geq 1$ ,  $\varepsilon > 0$ . Posons maintenant pour  $N \geq 1$  et  $s \in \mathbb{C}$  :

$$M_N(s) = \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-s}.$$

On sait depuis Littlewood (cf. [11]) que l'hypothèse de Riemann entraîne la convergence de  $M_N(s)$  vers  $\frac{1}{\zeta(s)}$  quand  $N$  tend vers l'infini, pour tout  $s$  tel que  $\Re s > \frac{1}{2}$ . Nous allons faire apparaître la différence  $M_N - 1/\zeta$  pour majorer  $\nu_{N,\varepsilon}$ .

**Proposition 1** *Pour  $N \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$ , on a*

$$\nu_{N,\varepsilon} \leq 2I_{N,\varepsilon} + 2J_\varepsilon,$$

où

$$I_{N,\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} | \zeta(s) |^2 | M_N(s + \varepsilon) - \zeta(s + \varepsilon)^{-1} |^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \quad \text{et} \quad J_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s + \varepsilon)} - 1 \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2}.$$

### Démonstration

La transformation de Mellin associée à toute fonction  $f \in H$  est une fonction  $\mathfrak{M}f$ , définie pour presque tout  $s$  tel que  $\sigma = 1/2$  par la formule

$$\mathfrak{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t) t^{-s-1} dt$$

(où  $\int_0^{+\infty}$  signifie  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{1/T}^T$ ).

De plus, le théorème de Plancherel affirme que  $f \mapsto \mathfrak{M}f$  est un opérateur unitaire entre  $H$  et  $L^2(\frac{1}{2} + i\mathbb{R}, d\tau/2\pi)$ , espace que nous noterons simplement  $L^2$ . Comme

$$\mathfrak{M}e_\alpha(s) = \alpha^{-s} \frac{\zeta(s)}{-s}, \quad \mathfrak{M}\chi(s) = \frac{1}{s},$$

on a

$$\begin{aligned}
\nu_{N,\varepsilon} &= \left\| \chi + \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} e_n \right\|_H^2 \\
&= \left\| \frac{1}{s} + \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-\varepsilon} n^{-s} \frac{\zeta(s)}{-s} \right\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} |1 - \zeta(s) M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| 1 - \frac{\zeta(s)}{\zeta(s + \varepsilon)} \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s + \varepsilon)} - \zeta(s) M_N(s + \varepsilon) \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \\
&\quad (\text{où l'on a utilisé l'inégalité } |a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)) \\
&= 2J_\varepsilon + 2I_{N,\varepsilon}. \quad \square
\end{aligned}$$

Observons que la proposition 1 ne dépend pas de l'hypothèse de Riemann, mais que les quantités  $I_{N,\varepsilon}$  et  $J_\varepsilon$  pourraient être infinies si elle était fausse.

Dans [4], Báez-Duarte démontre (sous l'hypothèse de Riemann) que  $I_{N,\varepsilon}$  tend vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini (pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé), et que  $J(\varepsilon)$  tend vers 0 quand  $\varepsilon$  tend vers 0. On a donc bien  $d_N = o(1)$ .

La version quantitative donnée dans [4] repose sur les estimations

$$J(\varepsilon) \ll \varepsilon^{2/3} \quad (0 < \varepsilon \leq 1/2),$$

et

$$I_{N,\varepsilon} \ll N^{-2\varepsilon/3} \quad (c/\log \log N \leq \varepsilon \leq 1/2),$$

où  $c$  est une constante positive absolue. Nous démontrons ici les deux propositions suivantes.

**Proposition 2** (HR) *On a  $J_\varepsilon \ll \varepsilon$ .*

**Proposition 3** (HR) *Soit  $\delta > 0$ . Pour  $N \geq N_0(\delta)$  et  $\varepsilon \geq 25(\log \log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2}$ , on a*

$$I_{N,\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon/2}.$$

Le choix  $\varepsilon = 25(\log \log N)^{5/2+\delta}(\log N)^{-1/2}$  donne le théorème.

### 3 Étude du quotient $\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, nous étudions, sous l'hypothèse de Riemann, le comportement de la fonction  $\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)$  dans le demi-plan  $\sigma \geq 1/2$ , quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Afin de préciser, sur certains points, l'exposé de Burnol dans [7], nous utilisons le produit de Hadamard de  $\zeta(s)$  et majorons chaque facteur de  $\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)$ .

Nous supposons  $0 < \varepsilon \leq 1/2$ .

**Proposition 4** (HR) *On a les estimations suivantes.*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \right|^2 \ll |s|^\varepsilon \quad (\sigma = 1/2); \\
(ii) \quad & \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \right|^2 \leq 1 + O(\varepsilon|s|^{1/2}) \quad (\sigma = 1/2); \\
(iii) \quad & \frac{\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)}{s(1-s)} \ll \frac{|s|^{\varepsilon/2}}{|s-1|^2} \quad (\sigma \geq 1/2, s \neq 1).
\end{aligned}$$

**Démonstration**

Si l'on pose

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

on a

$$\xi(s) = \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

où le produit porte sur les zéros non triviaux  $\rho$  de la fonction  $\zeta$ , et doit être calculé par la formule  $\prod_{\rho} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \prod_{|\gamma| \leq T}$  (on pose  $\rho = \beta + i\gamma$ ). Par conséquent

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} = \pi^{-\varepsilon/2} \frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)} \frac{\Gamma((s+\varepsilon)/2)}{\Gamma(s/2)} \prod_{\rho} \frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho}. \quad (4)$$

Examinons successivement les facteurs apparaissant dans (4). On a d'abord  $\pi^{-\varepsilon/2} < 1$ . Ensuite, on a

$$\left| \frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)} \right| \ll \left| \frac{s}{s-1} \right| \quad (\sigma \geq 1/2, s \neq 1), \quad (5)$$

$$\left| \frac{(s+\varepsilon)(s+\varepsilon-1)}{s(s-1)} \right| \leq \exp(O(\varepsilon/|s|)) \quad (\sigma = 1/2). \quad (6)$$

Pour le quotient des fonctions  $\Gamma$  apparaissant dans la formule (4), on dispose de l'inégalité suivante, qui résulte de la formule de Stirling complexe.

$$\left| \frac{\Gamma((s+\varepsilon)/2)}{\Gamma(s/2)} \right| \leq |s/2|^{\varepsilon/2} \exp(O(\varepsilon/|s|)) \quad (\sigma \geq 1/2). \quad (7)$$

Pour majorer le produit infini apparaissant dans (4), on utilise l'inégalité

$$\left| \frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho} \right| < 1, \quad \sigma \geq \beta, \quad \varepsilon > 0,$$

qui donne par conséquent (sous l'hypothèse de Riemann)

$$\left| \prod_{\rho} \frac{s-\rho}{s+\varepsilon-\rho} \right| < 1 \quad (\sigma \geq 1/2). \quad (8)$$

Notons ensuite les inégalités

$$\exp(\varepsilon \log x/2 + O(\varepsilon/x)) \ll (x/2)^\varepsilon, \quad (9)$$

et

$$\exp(\varepsilon \log x/2 + O(\varepsilon/x)) \leq 1 + O(\varepsilon x^{1/2}), \quad (10)$$

valables pour  $x \geq 1/2$ .

L'estimation (i) résulte alors de (4), (6), (7), (8) et (9); l'estimation (ii) de (4), (6), (7), (8) et (10), et l'estimation (iii) de (4), (5), (7), (8) et (9).  $\square$

## 4 Majoration de $J_\varepsilon$

On suppose, comme au §3, que  $\varepsilon$  vérifie  $0 < \varepsilon \leq 1/2$ . On pose

$$K_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \left| \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \right|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \quad \text{et} \quad L_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \frac{d\tau}{|s|^2},$$

de sorte que

$$J_\varepsilon = K_\varepsilon - 2L_\varepsilon + 1. \quad (11)$$

Pour majorer  $J_\varepsilon$ , nous allons calculer exactement  $L_\varepsilon$  à l'aide du théorème des résidus, et majorer  $K_\varepsilon$  en utilisant les résultats du paragraphe précédent.

**Proposition 5 (HR)** *On a*

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \frac{\gamma - 1}{\zeta(1 + \varepsilon)} - \frac{\zeta'(1 + \varepsilon)}{\zeta^2(1 + \varepsilon)} \\ &= 1 - (\gamma + 1)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

### Démonstration

On a

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma=1/2} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \frac{d\tau}{|s|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma=1/2} Q(s) ds, \end{aligned}$$

où

$$Q(s) = \frac{\zeta(s)/\zeta(s+\varepsilon)}{s(1-s)}.$$

Soit  $\Pi$  le demi-plan  $\sigma \geq \frac{1}{2}$ , et  $\Delta$  la droite  $\sigma = \frac{1}{2}$ . La fonction  $Q$  est méromorphe dans  $\Pi$ , holomorphe sur  $\Delta$ . Dans  $\Pi$  elle a un unique pôle, double, en  $s = 1$  où son résidu vaut

$$\frac{1 - \gamma}{\zeta(1 + \varepsilon)} + \frac{\zeta'(1 + \varepsilon)}{\zeta^2(1 + \varepsilon)}.$$



D'après la proposition 4, (iii), on a  $sQ(s) \rightarrow 0$  uniformément quand  $|s| \rightarrow +\infty$ ,  $s \in \Pi$ , et

$$\int_{\Delta} |Q(s)| \cdot |ds| < +\infty.$$

Nous sommes donc en situation d'appliquer une proposition classique du calcul des résidus (cf. par exemple [18]§6.22) pour en déduire

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon} &= -\text{Res} \left( \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \cdot \frac{1}{s(1-s)} \right) \Big|_{s=1} \\ &= \frac{\gamma-1}{\zeta(1+\varepsilon)} - \frac{\zeta'(1+\varepsilon)}{\zeta^2(1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité vaut

$$1 - (\gamma+1)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

puisque

$$\frac{1}{\zeta(1+\varepsilon)} = \varepsilon - \gamma\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'estimation  $J_{\varepsilon} \ll \varepsilon$ , objet de la proposition 2. En intégrant l'inégalité (ii) de la proposition 4 sur la droite  $\sigma = 1/2$  avec la mesure  $d\tau/|s^2|$ , on obtient

$$K_{\varepsilon} - 1 \ll \varepsilon.$$

Le résultat découle alors de (11) et de la proposition 5.

En considérant la contribution à  $J_{\varepsilon}$  d'un voisinage de l'ordonnée d'un zéro simple de  $\zeta$  (par exemple  $\gamma_1 = 14, 1347\dots$ ), on peut montrer inconditionnellement que  $J_{\varepsilon} \gg \varepsilon$ . Il serait intéressant de préciser le comportement asymptotique de  $J_{\varepsilon}$  quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

## 5 Quelques propriétés de la fonction $\zeta$ sous l'hypothèse de Riemann

Afin d'établir la majoration de la proposition 3, nous allons étudier  $M_N(s+\varepsilon)$ . Pour cela, nous allons utiliser la méthode inventée par Maier et Montgomery dans l'article [12], dévolue à  $M_N(0) = M(N)$ . Ils y démontrent que

$$M(N) = \sum_{n \leq N} \mu(n) \ll \sqrt{N} \exp((\log N)^{39/61})$$

sous l'hypothèse de Riemann. Leur approche a été ensuite perfectionnée par Soundararajan (cf. [14]), qui a obtenu l'estimation

$$M(N) \ll \sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{14}),$$

toujours sous l'hypothèse de Riemann. La méthode de Soundararajan donne en fait

$$M(N) \ll_{\delta} \sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+\delta}),$$

pour tout  $\delta$  tel que  $0 < \delta \leq 1/2$ . Nous allons maintenant rappeler les éléments de la méthode de Soundararajan qui seront utilisés dans notre argumentation, avec les quelques modifications qui permettent d'obtenir l'exposant  $5/2 + \delta$ . On trouvera les démonstrations dans l'article [14] (cf. aussi [5] pour un exposé détaillé des modifications).

## 5.1 Ordonnées $V$ -typiques

L'évaluation de  $M_N(s + \varepsilon)$  grâce à la formule de Perron fera appel à un contour sur lequel les grandes valeurs de  $|\zeta(z)|^{-1}$  seront aussi rares que possible. Pour quantifier cette rareté, Soundararajan a introduit la notion suivante.

Soit  $T$  assez grand<sup>†</sup> et  $V$  tel que  $(\log \log T)^2 \leq V \leq \log T / \log \log T$ . Un nombre réel  $t$  est appelé une **ordonnée  $V$ -typique de taille  $T$**  si

- $T \leq t \leq 2T$ ;
- (i) pour tout  $\sigma \geq 1/2$ , on a

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \right| \leq 2V, \quad \text{où } x = T^{1/V};$$

(ii) tout sous-intervalle de  $[t-1, t+1]$  de longueur  $2\pi\delta V / \log T$  contient au plus  $(1+\delta)V$  ordonnées de zéros de  $\zeta$ ;

(iii) tout sous-intervalle de  $[t-1, t+1]$  de longueur  $2\pi V / ((\log V) \log T)$  contient au plus  $V$  ordonnées de zéros de  $\zeta$ .

Si  $t \in [T, 2T]$  ne vérifie pas l'une des assertions (i), (ii), (iii), on dira que  $t$  est une **ordonnée  $V$ -atypique de taille  $T$** .

L'apport de cette définition à l'estimation de  $M_N(s + \varepsilon)$  via la formule de Perron (§6 ci-dessous) est contenu dans l'énoncé suivant (proposition 9 de [5]).

**Proposition 6** (HR) *Soit  $t$  assez grand, et  $x \geq t$ . Soit  $V'$  tel que  $(\log \log t)^2 \leq V' \leq (\log t/2) / (\log \log t/2)$ . On suppose que  $t$  est une ordonnée  $V'$ -typique (de taille  $T'$ ). Soit  $V \geq V'$ .*

Alors

$$|x^z \zeta(z)^{-1}| \leq \sqrt{x} \exp(V \log(\log x / \log t) + (2+3\delta)V \log \log V) \quad (V' \leq (\Re z - 1/2) \log x \leq V, \quad |\Im z| = t).$$

## 5.2 Majoration de l'écart entre le nombre de zéros de la fonction $\zeta$ et sa moyenne, dans un intervalle de la droite critique

La proposition suivante (cf. [5], proposition 15) donne une majoration de l'écart entre le nombre d'ordonnées de zéros de  $\zeta$  dans l'intervalle  $[t-h, t+h]$  et sa valeur moyenne  $(h/\pi) \log(t/2\pi)$ . Cet encadrement est exprimé au moyen d'un paramètre  $\Delta$ , et met notamment en jeu un polynôme de Dirichlet de longueur  $\exp 2\pi\Delta$ .

**Proposition 7** (HR) *Soit  $\Delta \geq 2$  et  $h > 0$ . Il existe des nombres réels  $a(p) = a(p, \Delta, h)$  ( $p$  premier,  $p \leq e^{2\pi\Delta}$ ) vérifiant*

- $|a(p)| \leq 4$  pour  $p \leq e^{2\pi\Delta}$ ;
- pour tout  $t$  tel que  $t \geq \max(4, h^2)$ , on a

$$N(t+h) - N(t-h) - 2h \frac{\log t/2\pi}{2\pi} \leq \frac{\log t}{2\pi\Delta} + \sum_{p \leq e^{2\pi\Delta}} \frac{a(p) \cos(t \log p)}{p^{\frac{1}{2}}} + O(\log \Delta).$$

Lorsqu'on majore trivialement le polynôme de Dirichlet qui intervient dans cette proposition, on obtient le résultat suivant, dû à Goldston et Gonek (cf. [10]). Notre énoncé est légèrement plus précis que celui de [10].

---

<sup>†</sup>Ici et dans la suite, cela signifie que  $T \geq T_0(\delta)$ , quantité effectivement calculable, et dépendant au plus de  $\delta$ .

**Proposition 8** Soit  $t$  assez grand et  $0 < h \leq \sqrt{t}$ . On a

$$N(t+h) - N(t-h) - (h/\pi) \log(t/2\pi) \leq (\log t)/2 \log \log t + (1/2 + o(1)) \log t \log \log \log t / (\log \log t)^2.$$

**Démonstration**

On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq e^{2\pi\Delta}} \frac{a(p) \cos t \log p}{p^{\frac{1}{2}}} \right| &\ll \sum_{p \leq e^{2\pi\Delta}} \frac{1}{\sqrt{p}} \\ &\ll \frac{e^{\pi\Delta}}{\Delta}. \end{aligned}$$

On choisit  $\Delta = \frac{1}{\pi} \log(\log t / \log \log t)$  et on vérifie alors que

$$\frac{\log t}{2\pi\Delta} + O(e^{\pi\Delta}/\Delta) + O(\log \Delta) = (\log t)/2 \log \log t + (1/2 + o(1)) \log t \log \log \log t / (\log \log t)^2. \quad \square$$

La proposition suivante est une variante un peu plus précise de la première assertion de la Proposition 4 de [14].

**Proposition 9** Soit  $T$  assez grand, et  $V$  tel que

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \delta\right) \log \log \log T / \log \log T \leq V \log \log T / \log T \leq 1.$$

Alors toute ordonnée  $t \in [T, 2T]$  est  $V$ -typique.

**Démonstration**

Il faut vérifier les critères (i), (ii), (iii) de la définition d'une ordonnée  $V$ -typique.

Pour (i), on a pour  $\sigma \geq 1/2$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , et  $x = T^{1/V}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n^{\sigma+it} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \right| &\leq \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log n} \frac{\log(x/n)}{\log x} \\ &\ll \frac{\sqrt{x}}{(\log x)^2} \\ &\ll \frac{\log T}{(\log \log T)^2} \quad (\text{car } x = T^{1/V} \leq (\log T)^2) \\ &= o(V). \end{aligned}$$

Pour (ii) on a, avec  $t' \in [t-1, t+1]$  et  $h = \pi\delta V / \log T$  :

$$\begin{aligned} N(t'+h) - N(t'-h) &\leq (h/\pi) \log(t'/2\pi) + \frac{1}{2} \log t' / \log \log t' + (1/2 + o(1)) \log t' \log \log \log t' / (\log \log t')^2 \\ &\quad (\text{proposition 8}) \\ &\leq (h/\pi) \log T + \frac{1}{2} \log T / \log \log T + (1/2 + \delta) \log T \log \log \log T / (\log \log T)^2 \\ &\leq (1 + \delta)V. \end{aligned}$$

Pour (iii) on a, avec  $t' \in [t-1, t+1]$  et  $h = \pi V / ((\log V) \log T)$  :

$$\begin{aligned}
N(t'+h) - N(t'-h) &\leq (h/\pi) \log(t'/2\pi) + \frac{1}{2} \log t' / \log \log t' + (1/2 + o(1)) \log t' \log \log \log t' / (\log \log t')^2 \\
&\leq \frac{V}{\log V} + \frac{1}{2} \log T / \log \log T + (1/2 + o(1)) \log T \log \log \log T / (\log \log T)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \log T / \log \log T + (1/2 + \delta) \log T \log \log \log T / (\log \log T)^2 \\
&\leq V.
\end{aligned}$$

□

## 6 Approximation de l'inverse de la fonction $\zeta$ par ses sommes partielles

Le but de ce paragraphe est la démonstration de la proposition suivante.

**Proposition 10** *Soit  $N$  assez grand et  $\varepsilon \geq 25(\log \log N)^{5/2+6\delta}(\log N)^{-1/2}$ . Alors, pour  $|\tau| \leq N^{3/4}$ , on a*

$$\zeta(s+\varepsilon)^{-1} - M_N(s+\varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/4}(1+|\tau|)^{1/2-\beta(\tau)},$$

$$\text{où } \beta(\tau) = \frac{\log \log \log(16+|\tau|)}{2 \log \log(16+|\tau|)}.$$

Elle résultera de diverses estimations, valables uniformément quand  $\tau$  et  $\varepsilon$  appartiennent à certains intervalles définis en termes de  $N$ , longueur du polynôme de Dirichlet  $M_N$ , approximant la fonction  $\zeta^{-1}$ . Pour plus de clarté dans l'exposé, nous développons séparément les analyses relatives aux deux paramètres  $\tau$  et  $\varepsilon$ . Nous commençons par l'étude de

$$M_N(i\tau) = \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-i\tau},$$

pour  $\tau \in \mathbb{R}$ .

### 6.1 Estimation de $M_N(i\tau)$ pour les petites valeurs de $|\tau|$

Commençons par le résultat obtenu par sommation partielle à partir de la majoration de Soundararajan (cf. [14] et [5])

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \ll \sqrt{x} \exp C(\log x), \quad x \geq 3,$$

où  $C(u) = u^{1/2}(\log u)^{5/2+\delta}$ . Observons que  $C'(u) = O(1)$ ,  $u \geq 1$ .

**Proposition 11** *On a uniformément*

$$M_N(i\tau) \ll (1+|\tau|)\sqrt{N} \exp C(\log N), \quad N \geq 3, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

La démonstration (standard) est laissée au lecteur. Pour aller plus loin, nous allons appliquer la formule de Perron et suivre la démarche de Soundararajan dans [14].

## 6.2 Estimation de $M_N(i\tau)$ pour les grandes valeurs de $|\tau|$

Nous utiliserons la majoration simple suivante.

**Proposition 12** *Pour  $0 < \delta \leq 1/12$ ,  $N$  assez grand et*

$$\exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta}) \leq |\tau| \leq N^{3/4},$$

on a

$$M_N(i\tau) \ll N^{1/2} |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)},$$

où  $\kappa(\tau) = \frac{1}{2} \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|$ .

**Démonstration** Dans toute la démonstration,  $N$  sera supposé assez grand.

### Première étape : formule de Perron

La première étape de la démonstration consiste à appliquer la formule de Perron à la hauteur  $N_1 = 2^{\lfloor \log N / \log 2 \rfloor}$  (le choix d'une puissance de 2 simplifie l'exposé de [5]), ce qui pour  $\tau \in \mathbb{R}$  donne

$$\begin{aligned} M_N(i\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/\log N-iN_1}^{1+1/\log N+iN_1} \zeta(z+i\tau)^{-1} \frac{N^z}{z} dz + O(N \log N_1/N_1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/\log N-i(N_1-\tau)}^{1+1/\log N+i(N_1+\tau)} \zeta(z)^{-1} \frac{N^{z-i\tau}}{z-i\tau} dz + O(\log N) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $|\tau| \leq N/5$  et remplaçons l'intégrale par  $N^{-i\tau} B_N$ , où

$$B_N = B_N(i\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/\log N-iN_1}^{1+1/\log N+iN_1} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z-i\tau} dz.$$

L'erreur commise est alors majorée par

$$\frac{1}{2\pi} \int_{N_1-|\tau| \leq |\Im z| \leq N_1+|\tau|} |\zeta(z)^{-1}| \left| \frac{N^z dz}{z-i\tau} \right| \quad (\Re z = 1 + 1/\log N).$$

Or  $|\zeta(z)^{-1}| \ll \log N$  si  $\Re z = 1 + 1/\log N$  et  $|z-i\tau| \gg N$  si  $N_1 - |\tau| \leq |\Im z| \leq N_1 + |\tau|$ , donc l'erreur est  $O(|\tau| \log N)$ .

Pour  $N \geq 3$  et  $|\tau| \leq N/5$  on a donc montré

$$M_N(i\tau) = N^{-i\tau} B_N + O((1+|\tau|) \log N). \quad (12)$$

### Deuxième étape : déformation du chemin d'intégration

Pour majorer  $|B_N|$ , nous allons remplacer le segment d'intégration  $[1+1/\log N-iN_1, 1+1/\log N+iN_1]$  par une variante  $\mathcal{S}_N$  du chemin défini par Soundararajan dans [14], chemin sur lequel les grandes valeurs de l'intégrande sont rares. Nous commençons par une description de  $\mathcal{S}_N$ . Nous posons

$$\kappa = \lfloor (\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2} \rfloor, \quad K = \lfloor \log N / \log 2 \rfloor.$$

Nous posons également  $T_k = 2^k$  pour  $\kappa \leq k \leq K$ , et  $N_0 = T_\kappa$  (on a  $N_1 = T_K$ ).

Le chemin  $\mathcal{S}_N$  est symétrique par rapport à l'axe réel, et constitué de segments verticaux et horizontaux. Nous décrivons seulement la partie de  $\mathcal{S}_N$  située dans le demi-plan  $\Im z \geq 0$ .

- Il y a d'abord un segment vertical  $[1/2 + 1/\log N, 1/2 + 1/\log N + iN_0]$ .
- Pour chaque  $k$  tel que  $\kappa \leq k < K$ , on considère les entiers  $n$  de l'intervalle  $[T_k, 2T_k[$ . On définit alors  $V_n$  comme le plus petit entier de l'intervalle  $[(\log \log T_k)^2, \log T_k / \log \log T_k]$  tel que tous les points de  $[n, n+1]$  soient  $V_n$ -typiques de taille  $T_k$ . L'existence de  $V_n$  est garantie par la proposition 9. On a même

$$V_n \leq \frac{1}{2} \log n / \log \log n + (1/2 + \delta) \log n (\log \log \log n) / (\log \log n)^2 + 1.$$

On inclut alors dans  $\mathcal{S}_N$  le segment vertical  $[1/2 + V_n / \log N + in, 1/2 + V_n / \log N + i(n+1)]$

Il y a enfin des segments horizontaux reliant tous ces segments verticaux :

- le segment  $[1/2 + 1/\log N + iN_0, 1/2 + V_{N_0} / \log N + iN_0]$ ;
- les segments  $[1/2 + V_n / \log N + i(n+1), 1/2 + V_{n+1} / \log N + i(n+1)]$ ,  $N_0 \leq n \leq T_K - 2$ ;
- le segment  $[1/2 + V_{N_1-1} / \log N + iN_1, 1 + 1/\log N + iN_1]$ .

D'après le théorème de Cauchy, on a

$$B_N = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_N} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz.$$

### Troisième étape : évaluation de $B_N$

Lorsque  $|z - i\tau|$  n'est pas trop petit devant  $|z|$ , nous pouvons utiliser les estimations de [14] et [5]. Nous définissons donc  $\mathcal{S}_{N,\tau}$  comme la partie de  $\mathcal{S}_N$  où  $|(\Im z - \tau)/\tau| \leq 1/4$  ( $\tau \neq 0$ ).

Si  $z \in \mathcal{S}_N \setminus \mathcal{S}_{N,\tau}$ , on a  $|z - i\tau| \gg |z|$ . Par conséquent (cf. [14] et [5]), pour  $N \geq 3$  et  $\tau \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \left| B_N - \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz \right| &\ll \int_{\mathcal{S}_N} \left| \frac{\zeta(z)^{-1} N^z dz}{z} \right| \\ &\ll \sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta}). \end{aligned} \quad (13)$$

Il nous reste à majorer la contribution de  $\mathcal{S}_{N,\tau}$ .

Supposons  $\sqrt{2}N_0 \leq |\tau| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}N_1$ . Par symétrie, on peut également supposer  $\tau > 0$ . On a

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz \right| \leq \sup_{z \in \mathcal{S}_{N,\tau}} |\zeta(z)^{-1} N^z| \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \left| \frac{dz}{z - i\tau} \right| \right).$$

Observons que si  $z \in \mathcal{S}_N$  et  $\Im z \geq N_0$ , alors  $z$  se trouve sur un des segments horizontaux et verticaux décrits ci-dessus. Sur les deux segments (horizontal et vertical) de  $\mathcal{S}_{N,\tau}$  situés dans la bande  $n < \Im z \leq n+1$ , on a  $|z - i\tau|^{-1} \ll (1 + |n - \tau|)^{-1}$ , donc l'intégrale est en  $O(\log \tau)$ .

Pour majorer  $|\zeta(z)^{-1} N^z|$ , nous utilisons la proposition 6. En posant  $n = \lceil \Im z \rceil - 1$ , on peut écrire

$$V' \leq (\Re z - 1/2) \log N \leq V,$$

avec  $(V, V') = (V_n, V_n)$  dans le cas vertical et  $(V_{n+1}, V_n)$  ou  $(V_n, V_{n+1})$  dans le cas horizontal ( $\Im z = n+1$ ), et  $\Im z$   $V'$ -typique (de taille correspondante). On peut donc bien appliquer la proposition 6 pour obtenir

$$|\zeta(z)^{-1} N^z| \leq \sqrt{N} \exp(V \log(\log N / \log \Im z) + (2 + 3\delta)V \log \log V).$$

Maintenant, si  $z \in \mathcal{S}_{N,\tau}$ , on a

$$\tau\sqrt{2} \geq \Im z \geq \tau/\sqrt{2} \geq N_0$$

donc

$$\log N / \log \Im z \leq \log \Im z \leq \log \tau \sqrt{2}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} V &\leq \frac{1}{2} \log(n+1) / \log \log(n+1) + (1/2 + \delta) \log(n+1) \log \log \log(n+1) / (\log \log(n+1))^2 + 1 \\ &\leq \frac{1}{2} \log \tau / \log \log \tau + (1/2 + 2\delta) \log \tau \log \log \log \tau / (\log \log \tau)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} V \log(\log N / \log \Im z) + (2 + 3\delta)V \log \log V &\leq \frac{1}{2} (\log \tau / \log \log \tau) \log(\log N / \log \tau) \\ &\quad + (3/2 + 5\delta) \log \tau \log \log \log \tau / \log \log \tau. \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$\sup_{z \in \mathcal{S}_{N,\tau}} |\zeta(z)^{-1} N^z| \leq \sqrt{N} \exp\left(\frac{1}{2} (\log \tau / \log \log \tau) \log(\log N / \log \tau) + (3/2 + 5\delta) \log \tau \log \log \log \tau / \log \log \tau\right).$$

Ainsi, pour  $\sqrt{2}N_0 \leq |\tau| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}N_1$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{S}_{N,\tau}} \zeta(z)^{-1} \frac{N^z}{z - i\tau} dz &\leq \sqrt{N} \exp\left((\log |\tau| / 2 \log \log |\tau|) \log(\log N / \log |\tau|)\right) \\ &\quad + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|, \end{aligned}$$

ce qui donne finalement, en utilisant (13)

$$\begin{aligned} B_N &\leq \sqrt{N} \exp\left(\frac{1}{2} (\log |\tau| / \log \log |\tau|) \log(\log N / \log |\tau|) + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|\right) \\ &\quad + O\left(\sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta})\right). \end{aligned} \tag{14}$$

**Conclusion : estimation de  $M_N(i\tau)$**

D'après (12) et (14), on a

$$M_N(i\tau) = N^{-i\tau} B_N + O(|\tau| \log N) \quad (1 \leq |\tau| \leq N/5)$$

et

$$B_N \leq \sqrt{N} \exp\left(\frac{1}{2}(\log |\tau| / \log \log |\tau|) \log(\log N / \log |\tau|) + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \log \log \log |\tau| / \log \log |\tau|\right) \\ + O\left(\sqrt{N} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta})\right).$$

On observe que sous les hypothèses de la proposition, on a :

$$|\tau| \log N \leq N^{1/2} |\tau|^{2/5}$$

et

$$N^{1/2} \exp((\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta}) \leq N^{1/2} |\tau|^{1/3}.$$

On a également

$$\frac{\log |\tau|}{(\log \log |\tau|)^{5/2}} \geq \frac{3(\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2}}{\left(\log(3(\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2})\right)^{5/2}} \\ \geq \sqrt{\log N}.$$

Par conséquent,

$$\frac{\log N}{\log |\tau|} \leq \frac{\log |\tau|}{(\log \log |\tau|)^5},$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2} \frac{\log |\tau|}{\log \log |\tau|} \cdot \log\left(\frac{\log N}{\log |\tau|}\right) + (3/2 + 6\delta) \log |\tau| \frac{\log \log \log |\tau|}{\log \log |\tau|} \leq \frac{1}{2} \log |\tau| + (-1 + 6\delta) \log |\tau| \frac{\log \log \log |\tau|}{\log \log |\tau|}$$

et permet de conclure. □

### 6.3 Estimations de $\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon)$

Démontrons à présent la proposition 10 et revenons à l'estimation de la différence

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon),$$

que nous exprimons d'abord à l'aide d'une intégrale :

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) = -M_N(i\tau) N^{-1/2-\varepsilon} + (1/2 + \varepsilon) \int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt \quad (N \geq 1, \varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}) \quad (15)$$

On suppose  $N$  assez grand,  $\varepsilon \geq 2(\log \log N)^{5/2+\delta} (\log N)^{-1/2}$ , et  $\tau \in \mathbb{R}$ .



**Petites valeurs de  $|\tau|$**

On a d'abord, d'après la proposition 11,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll (1 + |\tau|)N^{-\varepsilon} \exp((\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+\delta}).$$

D'autre part, pour  $t \geq N$ , on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \log t \geq (\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+\delta}.$$

En particulier,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll (1 + |\tau|)N^{-\varepsilon/2}.$$

Et aussi,

$$\begin{aligned} \int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt &\ll (1 + |\tau|) \int_N^\infty t^{-1-\varepsilon} \exp((\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+\delta}) dt \\ &\leq (1 + |\tau|) \int_N^\infty t^{-1-\varepsilon/2} dt \\ &\ll \varepsilon^{-1} (1 + |\tau|) N^{-\varepsilon/2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} &\leq (\log \log N)^{-5/2} (\log N)^{1/2} \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{3}(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+\delta}\right) \\ &\leq N^{\varepsilon/6}, \end{aligned}$$

donc  $\varepsilon^{-1} N^{-\varepsilon/2} \ll N^{-\varepsilon/3}$ , ce qui donne sous nos hypothèses, la majoration

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) \ll (1 + |\tau|) N^{-\varepsilon/3}.$$

Dans le cas  $\exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta}) \geq |\tau|$ , pour obtenir le résultat de la proposition 10, il nous suffit donc de démontrer que

$$(1 + |\tau|) N^{-\varepsilon/3} \ll (1 + |\tau|)^{1/3} N^{-\varepsilon/4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varepsilon}{12} \log N \geq \frac{2}{3} \log(1 + |\tau|).$$

Or on a bien dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \log(1 + |\tau|) &\leq \frac{2}{3} (3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta} + O(1)) \\ &\leq \frac{25}{12} (\log N)^{1/2} (\log \log N)^{5/2+6\delta} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{12} \log N. \end{aligned}$$

### Grandes valeurs de $|\tau|$

Si  $\exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta}) \leq |\tau| \leq N^{3/4}$ , on a d'abord, d'après la proposition 12,

$$M_N(i\tau)N^{-1/2-\varepsilon} \ll N^{-\varepsilon}|\tau|^{1/2-\kappa(\tau)}.$$

Étudions maintenant l'intégrale

$$\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt.$$

Pour commencer, observons que  $|\tau| \leq N^{3/4} \leq t^{3/4}$  si  $t \geq N$ .

D'autre part, définissons  $\theta = \theta(\tau)$  par la relation

$$|\tau| = \exp(3(\log \theta)^{1/2}(\log \log \theta)^{5/2+6\delta}).$$

On a  $\theta \geq N$  si  $|\tau| \geq \exp(3(\log N)^{1/2}(\log \log N)^{5/2+6\delta})$ , et

$$\int_N^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt = \int_N^\theta t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt + \int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt.$$

Pour la première intégrale, nous pouvons utiliser la proposition 12 car  $t \leq \theta \Rightarrow |\tau| \geq \exp(3(\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta})$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_N^\theta t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt &\ll |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)} \int_N^\theta t^{-1-\varepsilon} dt \\ &\leq |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)} \varepsilon^{-1} N^{-\varepsilon} \\ &\leq |\tau|^{1/2-\kappa(\tau)} N^{-5\varepsilon/6}, \end{aligned}$$

comme dans le cas précédent.

Pour la seconde intégrale, nous pouvons utiliser la proposition 11. On a

$$\int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt \ll |\tau| \int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon} \exp((\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta}) dt.$$

Maintenant, pour  $t \geq \theta(\tau) (\geq N)$ , on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \log t \geq 4(\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_\theta^\infty t^{-3/2-\varepsilon} M_t(i\tau) dt &\ll |\tau| \int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon/2} \exp(-3(\log t)^{1/2}(\log \log t)^{5/2+6\delta}) dt \\ &\leq |\tau| \exp(-3(\log \theta)^{1/2}(\log \log \theta)^{5/2+6\delta}) \int_\theta^\infty t^{-1-\varepsilon/2} dt \\ &= (2/\varepsilon) \theta^{-\varepsilon/2} \\ &\leq (2/\varepsilon) N^{-\varepsilon/2} \\ &\ll N^{-\varepsilon/3} \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/3} |\tau|^{1/2 - \kappa(\tau)}$$

Notons à présent que pour  $|\tau|$  grand, on a  $\beta(\tau) - \kappa(\tau) \ll 1/\log|\tau|$ . Cela permet de conclure la démonstration de la proposition 10.  $\square$

## 7 Majoration de $I_{N,\varepsilon}$

Dans tout ce paragraphe, on pose  $\sigma = \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $s = \frac{1}{2} + i\tau$ .

**Proposition 13** (HR) *Pour  $N \geq 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1/2$ , on a*

$$\int_{|\tau| \geq N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s + \varepsilon) - M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-1/9}. \quad (16)$$

### Démonstration

Il suffit de démontrer que, pour  $T \geq 1$ ,

$$I_N(T, \varepsilon) = \int_{T \leq |\tau| \leq 2T} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll T^{-3/2} (T + N) \log N, \quad (17)$$

car (16) résultera de la sommation de (17) pour les valeurs  $T = 2^k N^{3/4}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

On a

$$I_N(T, \varepsilon) \ll T^{-2} \int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)|^2 d\tau + 4T^{-2} \int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)|^2 |M_N(s + \varepsilon)|^2 d\tau.$$

D'une part,

$$\int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)/\zeta(s + \varepsilon)|^2 d\tau \ll T^{3/2},$$

d'après le point (i) de la proposition 4.

D'autre part,

$$\int_{T \leq \tau \leq 2T} |\zeta(s)|^2 |M_N(s + \varepsilon)|^2 d\tau \leq T^{1/2} \int_{T \leq \tau \leq 2T} \left| \sum_{n \leq N} \mu(n) n^{-1/2 - \varepsilon} n^{-i\tau} \right|^2 d\tau,$$

d'après l'inégalité  $|\zeta(s)| \ll \tau^{1/4}$  (cf. [16], (5.1.8) p.96).

La dernière intégrale vaut

$$(T + O(N)) \sum_{n \leq N} \mu^2(n) n^{-1-2\varepsilon} \leq (T + N) \log N,$$

d'après une inégalité de Montgomery et Vaughan (cf. [13], (5) p.128), et car  $\sum_{n \leq N} n^{-1-2\varepsilon} \ll \log N$ . Par conséquent,

$$I_{N,\varepsilon} \ll T^{-3/2} (T + N) \log N. \quad \square$$

**Proposition 14** (HR) *Soit  $N$  assez grand et  $\varepsilon \geq 25(\log \log N)^{5/2+6\delta} (\log N)^{-1/2}$ . Alors,*

$$\int_{|\tau| \leq N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-\varepsilon/2}.$$

### Démonstration

Pour  $|\tau| \leq N^{3/4}$ , on a

$$\zeta(s + \varepsilon)^{-1} - M_N(s + \varepsilon) \ll N^{-\varepsilon/4}(1 + |\tau|)^{1/2 - \beta(\tau)},$$

d'après la proposition 10. D'autre part,

$$\begin{aligned} |\zeta(s)|^2 &\ll \exp\left(O(\log(3 + |\tau|)/\log \log(3 + |\tau|))\right) && ([16], (14.14.1)) \\ &\ll (1 + |\tau|)^{\beta(\tau)}, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{|\tau| \leq N^{3/4}} |\zeta(s)|^2 |\zeta(s + \varepsilon) - M_N(s + \varepsilon)|^2 \frac{d\tau}{|s|^2} \ll N^{-\varepsilon/2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\tau|)^{-1 - \beta(\tau)} d\tau,$$

où la dernière intégrale est convergente. □

Les deux propositions précédentes entraînent la proposition 3, ce qui achève la démonstration du théorème.

## Références

- [1] L. Báez-Duarte, *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis*, Adv. in Maths. **101** (1993), 10-30.
- [2] L. Báez-Duarte, *A class of invariant unitary operators*, Adv. in Maths. **144** (1999), 1-12.
- [3] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau et E. Saias, *Notes sur la fonction  $\zeta$  de Riemann, 3*, Adv. in Maths. **149** (2000), 130-144.
- [4] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Rend. Mat. Acc. Lincei (9) **14** (2003), 5-11.
- [5] M. Balazard et A. de Roton, *Notes de lecture de l'article « Partial sums of the Möbius function » de Kannan Soundararajan*, arXiv :0810.3587
- [6] J.-F. Burnol, *A lower bound in an approximation problem involving the zeroes of the Riemann zeta function*, Adv. in Maths. **170** (2002), 56-70.
- [7] J.-F. Burnol, *On an analytic estimate in the theory of the Riemann zeta function and a theorem of Báez-Duarte*, Acta Científica Venezolana **54** (2003), 210-215.
- [8] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, 3<sup>rd</sup> edition revised by H.L. Montgomery, Springer, 2000.
- [9] H.G. Diamond et K.S. McCurley, *Constructive elementary estimates for  $M(x)$* , Analytic number theory, Lecture Notes in Mathematics **899**, Springer (1981), 239-253.
- [10] D.A. Goldston et S.M. Gonek, *A note on  $S(t)$  and the zeros of the Riemann zeta-function*, Bull. London Math. Soc. **39** (2007), 482-486.
- [11] J.E. Littlewood, *Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan  $\Re s > \frac{1}{2}$* , C.R.A.S. Paris **154** (1912), 263-266.
- [12] H. Maier et H.L. Montgomery, *The sum of the Möbius function*, à paraître au J. London Math. Soc.

- [13] H.L. Montgomery, Ten lectures at the interface between analytic number theory and harmonic analysis, CBMS **84**, AMS 1994.
- [14] K. Soundararajan, *Partial sums of the Möbius function*, arXiv :0705.0723v2
- [15] P. Tchebichef (sic), *Mémoire sur les nombres premiers*, J. Maths pures et appliquées, (Ser. I) **17** (1852), 366-390.
- [16] E.C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, 2<sup>nd</sup> edition revised by D.R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.
- [17] G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, 3<sup>e</sup> édition, Belin, 2008.
- [18] E.T. Whittaker et G.N. Watson, A course of modern analysis, 4<sup>th</sup> edition, Cambridge University Press, 1927.

BALAZARD, Michel  
Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206  
CNRS, Université de la Méditerranée  
Case 907  
13288 Marseille Cedex 09  
FRANCE  
Adresse électronique : [balazard@iml.univ-mrs.fr](mailto:balazard@iml.univ-mrs.fr)

de ROTON, Anne  
Institut Elie Cartan de Nancy, UMR 7502  
Nancy-Université, CNRS, INRIA  
BP 239  
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex  
FRANCE  
Adresse électronique : [deroton@iecn.u-nancy.fr](mailto:deroton@iecn.u-nancy.fr)