Espaces critiques pour le système des equations de Navier-Stokes incompressibles

Pascal Auscher, Philippe Tchamitchian

ESPACES CRITIQUES POUR LE SYSTÈME DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES INCOMPRESSIBLES

P. AUSCHER ET PH. TCHAMITCHIAN

7 mai 1999

RÉSUMÉ. Nous dégageons dans ce travail des conditions abstraites portant sur un espace fonctionnel E qui assurent l'existence globale pour toute donnée initiale suffisamment petite dans E, ou l'existence locale sans condition de taille, de solutions pour une classe d'équations paraboliques semi-linéaires, dont le système de Navier-Stokes incompressibles dans l'espace constitue un exemple fondamental. Nous donnons également un critère abstrait de régularité des solutions obtenues. Ces conditions sont simples à vérifier dans tous les cas connus: espaces de Lebesgue, de Lorentz, de Besov, de Morrey, *et caetera.* Elles s'adaptent au cas d'espaces E non invariants par translation : nous détaillons l'exemple de certains espaces 2-microlocaux.

AMS Classification numbers: 35K55, 35Q30, 35R05, 35S50, 42B25.

Mots-clefs: Navier-Stokes systems; mild solutions; Littlewood-Paley decomposition; maximal spaces

Table des matières

Introduction

Les équations étudiées ici sont des équations paraboliques semi-linéaires, écrites sous la forme intégrale

$$u = Su_0 + B(u,u), \tag{1}$$

dont l'inconnue, notée u, est une distribution tempérée définie sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$. On désigne par u_0 une distribution donnée de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, et par Su_0 l'image de u_0 sous l'action du semi-groupe de la chaleur : $Su_0(t) =$

$e^{t\Delta}u_0, t > 0$. Enfin, B est une application bilinéaire symétrique, formellement définie par

$$B(u,v)(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} P(D)\{u(\tau)v(\tau)\}d\tau, \tag{2}$$

où $P(D)$ est un opérateur pseudo-différentiel homogène de degré 1, dont le symbole $P(\xi)$ est supposé non nul et C^∞ en-dehors de 0.

Bien que nous restreignant au cas scalaire, nous pourrions sans difficulté considérer le cas vectoriel : le système de Navier-Stokes incompressible est alors un exemple fondamental, d'ailleurs à l'origine de ce travail, dans lequel u et u_0 ont trois composantes scalaires et sont à divergence nulle, le terme bilinéaire s'écrivant

$$B(u,v)(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \; e^{(t-\tau)\Delta} \; \mathbb{P}\nabla \;.\; (u(\tau)\otimes v(\tau) + v(\tau)\otimes u(\tau)) \; d\tau,$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray dans $\mathbb{R}^3$.

Reprenant dans [K] un schéma formalisé par Weissler ([W]), Kato résoud (1)[1] pour toute donnée $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ suffisament petite, et obtient des solutions dans $\mathcal{C}([0,\infty[; L^3(\mathbb{R}^3))$ [2], alors que l'application B n'est pas continue sur cet espace (voir Oru [O]). Sa méthode repose sur la définition d'un espace de Banach $\mathcal{F}$, inclus dans $\mathcal{C}([0,\infty[; L^3(\mathbb{R}^3))$, tel que

i) $Su_0 \in \mathcal{F}$ si $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$,
ii) B soit continue de $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

Il ne lui reste plus qu'à utiliser les itérations successives de Picard pour résoudre (1), et c'est de cette dernière étape que provient la condition de taille sur u_0.

La même méthode lui a également permis d'obtenir des solutions locales pour toute donnée u_0, à partir d'un espace $\mathcal{F}_T$ inclus dans $\mathcal{C}([0,T[; L^3(\mathbb{R}^3))$ vérifiant les analogues de i) et ii). Dans ce cas, la condition de taille porte sur $T = T(u_0)$.

Cette méthode, que nous appellerons dorénavant méthode KW, a été relue et développée par Giga et Miyakawa ([G,M]), Taylor ([T]), Kozono et Yamazaki ([Ko,Y]), Cannone ([C]), Meyer ([M]), Planchon ([P]), Barraza ([B]), et d'autres auteurs. De nouvelles solutions de (1) ont été obtenues (notamment des solutions autosimilaires ou asymptotiquement autosimilaires) en remplaçant $L^3(\mathbb{R}^3)$ par d'autres espaces E bien choisis : l'espace de Lorentz $L^{3,\infty}$ (Barraza, Meyer), les espaces

[1]Plus exactement, Kato résoud le système de Navier-Stokes incompressible. Mais, une fois le formalisme mis en place, la condition d'incompressibilité ne joue plus aucun rôle, et il est plus simple de ne considérer que le cas scalaire général.

[2]Dans tout l'article, l'espace $\mathcal{C}(I;E)$ des fonctions continues de I à valeurs dans E est muni implicitement de la norme $\sup_{t\in I}\|u(t)\|_E$.

de Besov $\dot{B}_p^{-1+\frac{3}{p},\infty}$, $p < \infty$ (Cannone, Planchon), les espaces de Morrey (Giga et Miyakawa, Taylor, Cannone, Lemarié), certains espaces de Besov placés au-dessus d'espaces de Morrey (Kozono et Yamazaki). Dans chaque cas, la construction suit la démarche de Kato, et devient spécifique dans le choix de $\mathcal{F}$ et la preuve de la continuité de B.

La question principalement étudiée ici est la suivante : quels sont les espaces E pour lesquels la méthode KW fonctionne?

Autrement dit : peut-on caractériser les espaces E pour lesquels on peut trouver un espace $\mathcal{F}$ de fonctions continues du temps à valeurs banachiques satisfaisant aux condition i) et ii), conduisant ainsi à l'existence d'une solution de (1) pour toute donnée $u_0 \in E$ assez petite?

Cela nécessite de préciser la formalisation de la méthode KW : tel est l'objet de la première partie.

La seconde partie aborde le coeur du problème. On commence par délimiter la classe des espaces E considérés, d'abord en se restreignant aux espaces, dits invariants, sur lesquels le groupe affine $ax + b$ agit en accord avec les propriétés d'invariance de l'ensemble des solutions de (1). On définit ensuite la notion de compatibilité avec la non-linéarité contenue dans B. Celle-ci exprime que chaque bloc de la décomposition de Littlewood-Paley d'un produit fg appartient à E, lorsque $f, g \in E$ et sont soumis à des conditions spectrales. Plus précisément, on suppose l'existence d'une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que, si $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k = \{\xi; 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$ et $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \Gamma_l$, $k, l \in \mathbb{Z}$, alors on a pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq \eta_{\max(k-j,l-j)}\ 2^{k+l-j}\|f\|_E\|g\|_E.$$

(On renvoie à la section 2.1 pour les notations et les énoncés précis.) Cette hypothèse n'est pas contraignante, dans la mesure où tous les espaces invariants connus la vérifient. Il faut d'ailleurs souligner que cette condition ne suppose pas que l'appartenance à E soit caractérisée par une propriété de la décomposition de Littlewood-Paley.

C'est le comportement de la suite (η_n) qui discrimine les espaces, ainsi que le montrent les trois principaux résultats de ce travail, qui peuvent être résumés de la façon suivante (rapide, mais imprécise).

Théorème A. *La méthode KW fonctionne pour l'espace* E *dès que* $\sum_{n\geq 0} \eta_n < +\infty$.

Cela signifie qu'on peut trouver $\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{F}_T$) vérifiant i) et ii). En revanche, l'inclusion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}([0,\infty[; E)$ (respectivement $\mathcal{F}_T$ dans $\mathcal{C}([0,T[; E))$ n'est pas a priori satisfaite.

Théorème B. *Si de plus* $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$*, on peut faire en sorte que* $\mathcal{F}$ *(resp.* $\mathcal{F}_T$*) soit inclus dans* $\mathcal{C}([0,\infty[;E)$ *(resp.* $\mathcal{F}_T$ *dans* $\mathcal{C}([0,T[;E)$*) si* E *est séparable.*

Il existe aussi un résultat de régularité analogue si E est le dual non séparable d'un espace de Banach séparable.

La démonstration de ces deux résultats est constructive.

Théorème C. *Si* (η_n) *est décroissante,* $(2^{3n/2}\eta_n)$ *croissante à partir d'un certain rang et* $\sum_{n\geq 0} \eta_n^2 = +\infty$*, alors il existe un espace* E *invariant et compatible, associé à* (η_n)*, pour lequel il est impossible de faire fonctionner la méthode KW : cela signifie qu'il n'existe pas d'espace de fonctions continues du temps* $\mathcal{F}$ *ou* $\mathcal{F}_T$ *vérifiant i) et ii).*

Les contre-exemples de ce dernier théorème comprennent l'espace de Besov $\dot{B}_{\infty}^{-1,\infty}$. Voir la section 2.2 pour une condition plus générale imposée à (η_n).

Les théorèmes A et B sont démontrés dans cette même partie, le théorème C dans la quatrième partie. Auparavant, on montre dans la troisième partie que tous les exemples connus relèvent des théorèmes A et B.

Enfin, dans la cinquième et dernière partie, on décrit en détail de nouveaux exemples, inspirés directement des espaces 2-microlocaux de Bony. La motivation est ici de construire des solutions de (1) pour des données initiales u_0 les plus singulières possibles. On est amené à définir des espaces de distributions singulières sur un fermé de $\mathbb{R}^3$, pour lequel on suppose qu'une sorte de densité locale, appelée fonction de densité, obéit à la condition de Dini. On montre alors que de tels espaces entrent dans le cadre du théorème A (convenablement généralisé au cas d'espaces non invariants) et permettent donc de faire fonctionner la méthode KW. En particulier, on obtient ainsi de nouvelles solutions autosimilaires.

Afin de simplifier l'exposition, nous ne considérons que l'existence et la régularité globales de solutions de (1), sauf dans la section 2.6, qui décrit les modifications à apporter pour obtenir les résultats locaux[3].

Les méthodes décrites dans ce travail ne sont pas spécifiques à la dimension 3, et s'adaptent en toute dimension.

[3]Ces résultats répondent à une question qui nous a été posée par J.-Y. Chemin.

1. Formalisation abstraite

On se donne une fois pour toutes un opérateur bilinéaire B de la forme (2). Le but de cette partie est de décrire de façon abstraite la méthode KW. Celle-ci permet d'obtenir des résultats du type "il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute donnée $u_0 \in E$ vérifiant $\|u_0\|_E < \alpha$, il existe $u \in \mathcal{F}$ solution de (1) et telle que $u(t)$ tende vers u_0 en un certain sens, lorsque t tend vers 0".

1.1. **Propriété d'invariance.**

L'homogénéïté de l'opérateur $P(D)$ implique que, si $u(t,x)$ est une solution de (1) pour la donnée $u_0(x)$, alors quels que soient $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda > 0$, $\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x - x_0)$ est également solution de 1, pour la donnée $\lambda u_0(\lambda x - x_0)$. Par conséquent, il est raisonnable de se restreindre aux espaces E et $\mathcal{F}$ tels que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda > 0 \qquad \|\lambda u_0(\lambda \cdot - x_0)\|_E = \|u_0\|_E, \tag{3}$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda > 0 \qquad \|\lambda u(\lambda^2 \cdot, \lambda \cdot - x_0)\|_{\mathcal{F}} = \|u\|_{\mathcal{F}}. \tag{4}$$

Par exemple, si on cherche E parmi les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$, alors la valeur $p = 3$ est naturelle. En effet, si la méthode de Kato fonctionnait pour $L^p(\mathbb{R}^3)$ avec $p \neq 3$, la condition de taille sur u_0 pourrait être supprimée : en choisissant bien λ, on aurait $\|v_0\|_{L^p} < \alpha$, où $v_0(x) = \lambda u_0(\lambda x)$, ce qui donnerait une solution globale $u(t,x) = \frac{1}{\lambda}\, v\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}\right)$ associée à u_0, quelle que soit u_0. On ne sait pas si un tel résultat est vrai ou faux.

Definition 1. *On dit que E est invariant s'il vérifie (3).*

1.2. **Couples admissibles.**

La méthode KW fonctionne avec deux espaces de Banach E et F ayant les propriétés $(P1), (P2)$ et $(P3)$ suivantes.

Propriété (P1)

a) E s'injecte continûment dans $\mathcal{S}'$,
b) E est invariant.

Propriété (P2)

a) F s'injecte continûment dans $\mathcal{S}'$,
b) la norme de F est invariante par translation, et $f(\lambda\cdot) \in F$ si et seulement si $f \in F$, pour tout $\lambda > 0$,

c) sur tout compact de $]0,\infty[$, les normes

$$\|f\|_{t,F} = \sqrt{t}\|f(\sqrt{t}\,\cdot)\|_F$$

sont uniformément équivalentes entre elles, [4]

d) l'opérateur e^{Δ} est continu de E dans F.

Propriété (P3)
Si $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $]0,\infty[$ à valeurs dans F, notées u ou $u(t)$, $t>0$, telles que

$$\|u\|_{\mathcal{F}} = \sup_{t>0} \|u(t)\|_{t,F} < +\infty,$$

alors

a) B est continue de $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$,

b) $\lim_{t\to 0} B(u,v)(t) = 0$ dans $\mathcal{S}'$, pour tous $u, v \in \mathcal{F}$.

On note $\|B\|$ la plus petite des constantes C telles que

$$\forall u, v \in \mathcal{F} \qquad \|B(u,v)\|_{\mathcal{F}} \le C\|u\|_{\mathcal{F}}\|v\|_{\mathcal{F}}. \tag{5}$$

Definition 2. *Lorsque les propriétés ci-dessus sont satisfaites, le couple (E,F) est dit admissible.*

De tels espaces fournissent des solutions à (1) en vertu du résultat abstrait suivant.

Théorème 3. *Soit $\mathcal{F}$ un espace de Banach et B un opérateur bilinéaire continu de $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Alors, pour tout $a\in\mathcal{F}$ tel que $\|a\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{4\|B\|}$, il existe $u\in\mathcal{F}$ solution de l'équation*

$$u = a + B(u,u). \tag{6}$$

De plus, il existe des opérateurs $T_k, k\ge 1$, tels que :

i) *chaque T_k est la restriction à la diagonale de $\mathcal{F}^k$ d'un opérateur k-linéaire continu de $\mathcal{F}^k$ dans $\mathcal{F}$;*

ii) *il existe une constante absolue C telle que, pour tous $k\ge 1$ et $a\in\mathcal{F}$*

$$\|T_k(a)\|_{\mathcal{F}} \le \frac{C}{\|B\|} k^{-3/2} (4\ \|B\|\ \ \|a\|_{\mathcal{F}})^k;$$

iii) *si $\|a\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{4\|B\|}$, alors*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(a). \tag{7}$$

Enfin, on a toujours $\|u\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{2\|B\|}$, et u est l'unique solution de (6) dans la boule fermée $\overline{B_{\mathcal{F}}}(0, \frac{1}{2\|B\|})$.

---

[4]Cette propriété est vérifiée dès que $\lim_{\lambda\to 1} f(\lambda\,\cdot) = f$ pour tout $f\in F$.

L'existence de u est bien connue sous la condition $\|a\|_{\mathcal{F}} < \frac{1}{4\|B\|}$: voir par exemple Cannone ([C], p.37), qui utilise le théorème des contractions de Picard pour l'obtenir. L'approche par développement multilinéaire de la solution qui est choisie ici est un peu plus précise.

Preuve. On définit les opérateurs T_k de proche en proche par les relations

$$T_1(a) = a, \tag{8}$$

$$T_k(a) = \sum_{l=1}^{k-1} B(T_l(a), T_{k-l}(a)), \;\; k \geq 2. \tag{9}$$

Par construction et d'après $(P3)$, les T_k sont la restriction à la diagonale de $\mathcal{F}^k$ d'opérateurs k-linéaires, et il existe des constantes a_k telles que

$$\|T_k(a)\|_{\mathcal{F}} \leq a_k \|a\|_{\mathcal{F}}^k$$

pour tout $a \in \mathcal{F}$.

Pour estimer les a_k on part de l'inégalité de récurrence

$$a_k \leq \|B\| \sum_{l=1}^{k-1} a_l \; a_{k-l},$$

avec la condition initiale $a_1 = 1$. On en déduit que, pour tout $k \geq 1$

$$a_k \leq \|B\|^{k-1} \; c_k, \tag{10}$$

où les coefficients c_k sont tels que

$$\begin{cases} c_1 & = & 1 \\ c_k & = & \displaystyle\sum_{l=1}^{k-1} c_l c_{k-l}, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Ce sont les nombres de Catalan (voir par exemple Comtet, tome 1 [Co]), donnés par la formule

$$c_k = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}.$$

Leur série génératrice se calcule aisément :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2}, \tag{11}$$

et lorsque k tend vers ∞, on a

$$c_k \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}} k^{-3/2} 4^k.$$

Cela démontre les points i) et ii) pour les opérateurs T_k définis en (8) et (9).

Si $\|a\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{4\|B\|}$, on pose $u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(a)$: cette série est normalement convergente dans $\mathcal{F}$. On calcule

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B(T_l(a), T_m(a)) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{k-1} B(T_l(a), T_{k-l}(a)) \\ &= u - a \end{aligned}$$

d'après (8 - 9), ce qui montre que u est une solution de (6). De plus, il résulte de (10 - 11) que

$$\|u\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1-\sqrt{1-4\|B\|\|a\|_{\mathcal{F}}}}{2\|B\|}. \tag{12}$$

En particulier, $\|u\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{2\|B\|}$.

Il reste à obtenir l'unicité de u dans la boule fermée $\overline{B_{\mathcal{F}}}\big(0, \frac{1}{2\|B\|}\big)$. Elle est facile à démontrer lorsque $\|u\|_{\mathcal{F}} < \frac{1}{2\|B\|}$: si v est une solution de (6), $\|v\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{2\|B\|}$, on a

$$u - v = B(u+v, u-v),$$

d'où $u = v$, puisque $\|B\|\ \|u+v\|_{\mathcal{F}} < 1$. Dans le cas général, où il est possible d'avoir $\|u\|_{\mathcal{F}} = \frac{1}{2\|B\|}$, on définit pour tout $N \ge 1$ l'élément v_N de $\mathcal{F}$ par

$$v = T_1(a) + \cdots + T_N(a) + v_N, \tag{13}$$

et on prouve que

$$\|v_N\|_{\mathcal{F}} \le \frac{1}{\|B\|}\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k\ 4^{-k}. \tag{14}$$

Faisant tendre N vers ∞, il vient $v = u$.

L'inégalité (14) est vraie si $N = 1$, car d'une part $v_1 = B(v,v)$, donc $\|v_1\|_{\mathcal{F}} \le \|B\|\ \|v\|_{\mathcal{F}}^2 \le \frac{1}{4\|B\|}$, et d'autre part $\sum_{k=2}^{\infty} c_k\ 4^{-k} = \dfrac{1}{4}$ d'après (11).

Supposant (14) prouvée au rang N, on injecte (13) dans l'équation (6), et on trouve

$$\begin{aligned} v_{N+1} = \sum_{\substack{l+m\ge N+2 \\ 1\le l,\, m\le N}} & B(T_l(a), T_m(a)) \\ & + 2\ B(v_N, T_1(a) + \cdots + T_N(a)) + B(v_N, v_N). \end{aligned}$$

Puisqu'on sait que $\|T_k(a)\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{\|B\|} c_k 4^{-k}$ pour tout $k \geq 1$, on obtient en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
\|v_{N+1}\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{\|B\|} \Bigg\{ & \sum_{\substack{l+m \geq N+2 \\ 1 \leq l\,,\, m \leq N}} c_l \; c_m \; 4^{-l-m} \\
& + 2\Big(\sum_{k=1}^{N} c_k \; 4^{-k}\Big)\Big(\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \; 4^{-k}\Big) \\
& + \Big(\sum_{k=N+1}^{\infty} c_k \; 4^{-k}\Big)^2 \Bigg\} \\
\leq \frac{1}{\|B\|} & \sum_{k \geq N+2} \Big(\sum_{l=1}^{k-1} c_l \; c_{k-l}\Big) \; 4^{-k} \\
\leq \frac{1}{\|B\|} & \sum_{k \geq N+2} c_k \; 4^{-k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, (14) est prouvée pour tout N, et la démonstration est achevée. □

Ce théorème s'interprète comme un résultat d'analyticité au voisinage de 0 : $u = 0$ est évidemment une solution de (6) lorsque $a = 0$, et les solutions u construites lorsque a est petit sont obtenues par perturbation et développement en série autour de 0. Elles dépendent analytiquement de a, pour la topologie forte de $\mathcal{F}$. Enfin, par un phénomène analogue au prolongement continu jusqu'au bord des séries entières à coefficients positifs, on peut résoudre (6) sous la condition limite $\|a\|_{\mathcal{F}} = \frac{1}{4\|B\|}$. Le résultat est optimal, comme le montre l'exemple élémentaire $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ et $B(u, u) = u^2$.

Revenant à l'équation (1), on obtient le corollaire suivant.

Proposition 4. *Si (E, F) est un couple admissible, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u_0 \in E$ avec $\|u_0\|_E \leq \alpha$, l'équation (1) admet une solution $u \in \mathcal{F}$ telle que*

$$\lim_{t \to 0} u(t) = u_0 \tag{15}$$

dans $\mathcal{S}'$. De plus, u s'écrit

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(Su_0),$$

où les opérateurs T_k sont donnés par le théorème 3. Enfin, $\|u\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{1}{2\|B\|}$, et u est l'unique solution de (1) dans la boule fermée $\overline{B_{\mathcal{F}}}(0, \frac{1}{2\|B\|})$.

Preuve. Soit (E,F) un couple admissible et $u_0 \in E$. La continuité de e^{Δ} de E vers F et la définition de $\mathcal{F}$ impliquent $e^{t\Delta}u_0 \in F$ pour tout $t>0$, avec

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{t,F} \leq \|e^{\Delta}\|_{F,E}\|u_0\|_E.$$

Ecrivant $\Delta e^{\Delta} = \Delta e^{\Delta/2}e^{\Delta/2}$, on obtient de même $\Delta e^{t\Delta}u_0 \in F$, avec

$$\|\Delta e^{t\Delta}u_0\|_{t,F} \leq \frac{c}{t}\|u_0\|_E.$$

Puisque les normes $\|.\|_{t,F}$ sont uniformément équivalentes sur tout compact de $]0,\infty[$, ceci implique la dérivabilité de $t \longmapsto e^{t\Delta}u_0$, de $]0,\infty[$ dans F, et a fortiori la continuité. On a donc $Su_0 \in \mathcal{F}$, et

$$\|Su_0\|_{\mathcal{F}} \leq \|e^{\Delta}\|_{F,E}\|u_0\|_E.$$

Appliquant le théorème 3 avec $a = Su_0$, on peut résoudre (1) dès que $4\|B\|\ \|e^{\Delta}\|_{F,E}\|u_0\|_E \leq 1$. La relation (15) provient de (P3b) et du fait que E s'injecte continûment dans $\mathcal{S}'$. Le reste découle directement du théorème 3. $\square$

On peut maintenant formuler précisément la question centrale de ce travail : quels sont les espaces E pour lesquels on peut construire un espace F formant avec E un couple (E,F) admissible ?

On y répond dans la partie suivante, avant de donner divers exemples.

2. Les bons espaces de Banach

2.1. **Espaces fonctionnels compatibles avec la non-linéarité.**

On décrit dans ce paragraphe les hypothèses faites a priori sur les espaces considérés. Celle-ci ont pour but de permettre l'utilisation de la décomposition de Littlewood-Paley, et de l'algorithme associé pour calculer un produit, qu'on rappelle maintenant brièvement.

On se donne une fonction φ^0 de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, avec $\varphi^0 = 1$ sur $[0,\frac{1}{4}]$ et $\operatorname{Supp}\varphi^0 \subset [0,1]$, et on pose $\psi^0 = \varphi^0(\frac{\cdot}{4}) - \varphi^0$. Si $j \in \mathbb{Z}$, on note B_j la boule fermée $\overline{B}(0,2^j)$ dans $\mathbb{R}^3$, Γ_j la couronne

$$\Gamma_j = \{\xi \in \mathbb{R}^3\ ;\ 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\},$$

et S_j, Δ_j les opérateurs $\varphi^0(-4^{-j}\Delta), \psi^0(-4^{-j}\Delta)$ où Δ est le Laplacien sur $\mathbb{R}^3$. On emploiera aussi les opérateurs $\widetilde{\Delta}_j = \Delta_{j-2} + \Delta_{j-1} + \Delta_j + \Delta_{j+1} + \Delta_{j+2}$, qui vérifient l'identité utile

$$\widetilde{\Delta}_j\ \Delta_j = \Delta_j, \tag{16}$$

et on écrira $\widetilde{\Gamma}_j$ pour $\Gamma_{j-2} \cup \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j \cup \Gamma_{j+1} \cup \Gamma_{j+2}$.

On a alors $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$ et $\lim\limits_{j\to+\infty} S_j = I$ dans $\mathcal{S}'$, d'où il résulte que

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f \tag{17}$$

pour toute distribution tempérée f telle que $\lim\limits_{j\to-\infty} S_j f = 0$.

En s'inspirant de Meyer ([M]), on adopte la terminologie suivante.

Definition 5. *On appelle espace fonctionnel (sous-entendu : adapté à la décomposition de Littlewood-Paley) tout espace de Banach E tel que*

a) *$\mathcal{S} \subset E \subset \mathcal{S}'$, les injections étant continues;*
b) *deux cas sont possibles : dans le cas 1, $\mathcal{S}$ est dense dans E, et dans le cas 2, $\mathcal{S}$ est dense dans un espace de Banach dont E est le dual;*
c) *si $f \in E$, $\lim\limits_{j\to-\infty} S_j f = 0$ dans $\mathcal{S}'$.*

Si $f \in E$, on a $\lim\limits_{j\to+\infty} S_j f = f$ et de même $\lim\limits_{t\to 0} e^{t\Delta} f = f$ pour la topologie forte de E dans le cas 1 et pour la topologie faible $*$ dans le cas 2. Ceci induira la propriété analogue sur les solutions de (1) dans les espaces favorables.

Remarquer qu'un espace fonctionnel n'est pas nécessairement caractérisé par la décomposition de Littlewood-Paley. Par exemple, tous les espaces L^p, $1 \le p \le \infty$, sont des espaces fonctionnels au sens de la définition précédente.

Si f et g sont deux distributions tempérées vérifiant (17) et telles que le produit fg ait un sens, on a formellement

$$fg = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ |k-l|\le 2}} \Delta_k f\ \Delta_l g + \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}\\ |k-l|\ge 3}} \Delta_k f\ \Delta_l g. \tag{18}$$

Si $|k-l| \ge 3$, la transformée de Fourier de $\Delta_k f \Delta_l g$ est supportée dans la couronne $\Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j \cup \Gamma_{j+1}$, où $j = \max(k,l)$, et si $|k-l| \le 2$, elle est supportée dans la boule B_{j+2}. La formule (18) isole ainsi les produits dont le spectre contient 0 (chevauchement spectral) des autres dont le spectre ne contient pas 0 (séparation spectrale).

Definition 6. *Un espace fonctionnel E est dit compatible (sous-entendu : avec la non-linéarité de l'équation (1)) lorsque :*

a) *E est invariant,*
b) *il existe une suite $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que, si $f, g \in E$ avec $\operatorname{Supp}\widehat{f} \subset \Gamma_k, \operatorname{Supp}\widehat{g} \subset \Gamma_l, k,l \in \mathbb{Z}$, et si $j \in \mathbb{Z}$, alors $\Delta_j(fg) \in E$, et*

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \le \eta_{\max(k-j,l-j)}\ 2^{k+l-j}\ \|f\|_E \|g\|_E. \tag{19}$$

La propriété b) et l'inégalité (19) appellent plusieurs remarques.

D'abord le fait que le produit fg est bien défini sous les hypothèses énoncées, qui entraînent $f = S_{k+1}f$ et $g = S_{l+1}g$, ce qui montre que f et g sont des fonctions de classe C^∞. Elles sont de plus bornées, en vertu de l'injection de E dans $\mathcal{S}'$ et de l'invariance par translation de E (voir la Proposition 13 pour un énoncé plus précis). Par conséquent, $\Delta_j(fg)$ est également bien défini.

Ensuite, il convient de distinguer les deux mêmes cas que dans la formule (18). Si $|k-l| \geq 3$ (séparation spectrale), on a $\Delta_j(fg) = 0$ dès que $|\max(k,l) - j| \geq 3$. Compte tenu de la forme particulièrement simple que prend alors (18), on voit que (19) se ramène à

$$\|fg\|_E \leq C\ 2^{\min(k,l)}\ \|f\|_E \|g\|_E, \tag{20}$$

pour une constante C indépendante de f, g, k, l.

Le cas sensible est celui où $|k-l| \leq 2$ (chevauchement spectral) : (19) se simplifie en

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq C\ \eta_{k-j}\ 4^k\ 2^{-j}\ \|f\|_E \|g\|_E, \tag{21}$$

quitte à modifier la suite η, avec C constante ne dépendant pas de f, g, j, k. Il n'y a en revanche aucune raison de supposer $fg \in E$ (voir section 3.3 pour des exemples). Noter toutefois que $\Delta_j(fg) = 0$ dès que $j \geq k+5$: on posera presque toujours $\eta_n = 0$ pour $n \leq -5$.

La constante C de (21), et surtout la suite η, dépendent du choix de la fonction φ^0 définissant les opérateurs Δ_j. Mais leur existence ne dépend que de l'espace E, et si $\widetilde{\varphi}^0$ est une autre fonction définissant d'autres opérateurs $\widetilde{\Delta}_j$, l'inégalité correspondant à (21) reste vraie, avec une suite $\widetilde{\eta} = (\widetilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui vérifie $\widetilde{\eta}_n \leq C(\eta_{n-2} + \cdots + \eta_{n+2})$ pour une certaine constante C.

Enfin, il faut souligner que la forme de l'inégalité (19) est presque entièrement dictée par l'invariance de E. Si, en effet, on suppose seulement l'existence, pour tous $j, k, l \in \mathbb{Z}$, d'une constante $C(j,k,l)$ telle que

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq C(j,k,l) \|f\|_E \|g\|_E$$

quand $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$ et $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \Gamma_l$, alors on déduit de l'invariance de E l'existence de constantes $D(m,n),\ m, n \in \mathbb{Z}$, vérifiant l'égalité

$$C(j,k,l) = D(k-j, l-j) 2^{k+l-j}.$$

L'hypothèse supplémentaire implicite dans (19) est donc seulement que les constantes $D(m,n)$ ne dépendent que de $\max(m,n)$. Cette hypothèse n'intervient d'ailleurs que dans le cas "facile" où $|k-l| \geq 3$, c'est-à-dire dans l'inégalité (20).

2.2. **Théorèmes d'existence, de régularité, et contre-exemples.**

Definition 7. *On appelle bon espace tout espace fonctionnel compatible tel que* $\eta \in l^1(\mathbb{Z})$.

Il résulte de ce qui précède que la propriété "$\eta \in l^1(\mathbb{Z})$" ne dépend pas d'un choix particulier des opérateurs Δ_j.

Théorème 8. *Si E est un bon espace, il existe un espace de Banach F formant avec lui un couple admissible.*

On en déduit, en appliquant la Proposition 4, l'existence d'une solution de l'équation (1) dans l'espace $\mathcal{F}$ construit à partir de F, pour toute donnée $u_0 \in E$ assez petite.

On peut obtenir une version plus précise de ce théorème, en renforçant un peu l'hypothèse.

Théorème 9. *Soit E un bon espace tel que* $\sum_{n \geq 0} n\eta_n < +\infty$.
Alors il existe un espace de Banach $G \subset E$ formant avec E un couple admissible. De plus, si $u \in \mathcal{G}$ est une solution de (1) pour une donnée initiale $u_0 \in E$ quelconque, alors
- $u \in \mathcal{C}([0,\infty[;E)$ si $\mathcal{S}$ est dense dans E (cas 1, Définition 5),
- $u \in \mathcal{C}(]0,\infty[;E)$ et $\lim_{t\to 0} u(t) = u_0$ pour la topologie $*$ faible si $\mathcal{S}$ est dense dans le prédual de E (cas 2).

Ce résultat est celui qui généralise le plus directement la construction de Kato, dans la mesure où il donne des solutions de (1) régulières. Il est apparenté à une conjecture énoncée par Meyer dans [M], qu'on peut résumer en "si E est un espace de Banach invariant qui s'injecte continûment dans l'espace de Morrey M_2^3 (voir section 3.4), alors on peut résoudre (1) dans $\mathcal{C}([0,\infty[;E)$ (cas 1) pour toute donnée $u_0 \in E$ assez petite (modifier comme ci-dessus dans le cas 2)". Cette conjecture pose un problème de régularité, puisque l'existence d'une solution de (1) pour toute donnée assez petite dans E est garantie par l'inclusion de E dans M_2^3, qui est un bon espace (voir Proposition 23). Le théorème 9 donne un résultat positif dans la direction de cette conjecture.

La question de l'optimalité du théorème 8 motive le dernier théorème de cette section. On a besoin de la notion suivante.

Definition 10. *Une suite positive $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est régulière s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\frac{1}{C}\eta_{n+1} \leq \eta_n \leq C\ \eta_{n+1}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\eta_n > 0$.

Théorème 11. *Soit $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite décroissante régulière telle que*

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-3n} \inf_{k\geq n} 2^{3k}\, \eta_k^2 = +\infty.$$

Alors, il existe un espace fonctionnel E, compatible et associé à η via (19), tel que, étant donné un espace de Banach F vérifiant (P2), l'inégalité (5) est en défaut.

En d'autres termes, il n'y a pas d'espace F formant avec E un couple admissible; cela ne signifie pas pour autant qu'il n'y ait pas de solutions de (1) dans l'un de nos espaces $\mathcal{F}$.

L'hypothèse précédente implique $\sum_{n\geq 0} \eta_n^2 = +\infty$, et, réciproquement, est vérifiée dès que $\eta \notin l^2(\mathbb{N})$ et que la suite $(2^{3n/2}\, \eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

On voit qu'il subsiste une lacune à combler entre l'hypothèse l^1 donnant le théorème 8 et l'hypothèse du type non-l^2 donnant les contre-exemples.

Il faut également prendre garde au fait que cette discussion de l'optimalité porte sur des classes d'espaces de Banach, et non pas sur les espaces considérés séparément. En effet, il existe aussi, pour toute suite $\eta \notin l^2$, un espace de Banach $\widetilde{E}$, compatible et associé à η, pour lequel on peut trouver un espace F formant avec $\widetilde{E}$ un couple admissible. Il suffit de prendre $\widetilde{E} = E \cap L^3(\mathbb{R}^3)$, où E est n'importe quel espace vérifiant (21) avec η : la construction originelle de Kato convient à $\widetilde{E}$.

Les contre-exemples du théorème 11 sont toutefois suffisamment naturels pour inclure l'espace de Besov $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$, comme on le verra dans la quatrième partie (voir également la Proposition 22).

Corollaire 12. *Il est impossible de faire fonctionner la méthode KW à partir de $E = \dot{B}_\infty^{-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$.*

L'importance de ce résultat provient de la maximalité de $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$, observée par Meyer [M].

Proposition 13. *Tout espace de Banach invariant et qui s'injecte continûment dans $\mathcal{S}'$ est inclus dans $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$, avec injection continue également. Plus précisément, il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour toute $f \in E$ et tout $j \in \mathbb{Z}$,*

$$\|\Delta_j f\|_\infty \leq C\, 2^j\, \|f\|_E.$$

Preuve. Soit $k(x) = e^{-\frac{1}{4}|x|^2}$. Si E est un espace de Banach inclus dans $\mathcal{S}'$, il existe une constante C telle que

$$|(f,k)| \leq C\|f\|_E$$

pour tout $f \in E$. Puisque E est invariant par translation cela signifie

$$\|e^{\Delta} f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_E.$$

Comme E vérifie (3), on en déduit par changement d'échelle

$$\|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} \leq C t^{-1/2}\ \|f\|_E$$

pour tout $t > 0$.

Or, $\sup_{t>0} \sqrt{t}\ \|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty}$ est une norme équivalente à la norme de $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ (voir par exemple Cannone [C] pour une démonstration), d'où la proposition. □

La preuve des deux résultats positifs (théorèmes 8 et 9) est donnée à la suite de ces lignes : l'espace F est un espace de type Besov construit au-dessus de E. Le théorème 11 est de démonstration plus délicate : la quatrième partie lui est consacrée, après que dans la troisième on montre comment on peut retrouver l'ensemble des résultats préalablement connus.

2.3. **Existence : preuve du théorème 8.**

Soit E un bon espace, et N un réel > 0, pour le moment quelconque. L'espace F sera l'un des espaces notés $C_E^{N,\infty}$: par définition, $f \in C_E^{N,\infty}$ signifie que

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f$$

dans $\mathcal{S}'$, que $\Delta_j f \in E$ pour tout j, et que

$$\|f\|_{C_E^{N,\infty}} = \sup_{j\in\mathbb{Z}} (1+2^j)^N\ \|\Delta_j f\|_E < +\infty.$$

Cet espace est bien complet.

Puisque, d'après la Proposition 13, on a

$$\|\Delta_j f\|_{L^\infty} \leq C\ 2^j\ \|\Delta_j f\|_E,$$

l'espace $C_E^{N,\infty}$ est inclus dans L^∞ quand $N > 1$. En particulier, le produit de deux éléments de $C_E^{N,\infty}$ est défini dans ce cas. Il n'y a en revanche aucune raison pour que $C_E^{N,\infty}$ soit inclus dans E, quel que soit N.

On choisit maintenant et pour toute la suite le paramètre N parmi les entiers pairs ≥ 4, et on note $F = C_E^{N,\infty}$. Il s'agit de démontrer que le couple (E, F) est admissible.

La propriété (P1) est vraie par hypothèse sur E.

La propriété (P2) résulte d'une série de remarques simples.

Tout d'abord, l'injection de F dans L^∞ implique celle de F dans $\mathcal{S}'$ (continûment). Pour vérifier que la classe $\mathcal{S}$ s'injecte dans F, on utilise l'existence d'une fonction $\psi^N \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, $\operatorname{Supp} \psi^N = [\frac{1}{4}, 4]$, telle que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$

$$2^{jN}\Delta_j = \Delta_{j,N}(-\Delta)^{N/2}, \tag{22}$$

où $\Delta_{j,N} = \psi^N(-4^{-j}\Delta)$. Si $f \in \mathcal{S} \subset E$, alors $(-\Delta)^{N/2} f \in \mathcal{S}$. En vertu de l'invariance par translation de E, L^1 est un module de convolution sur E, donc il existe une constante C telle que

$$\|2^{jN}\Delta_j f\|_E \leq C$$

pour tout j. Ceci implique $f \in F$. On vérifie sans peine la continuité de l'injection.

Ensuite la norme F est invariante par translation parce que E est invariant, et pour la même raison, F est stable par homothétie de rapport λ, $\lambda > 0$. Si $t > 0$, $f \in F$, alors $\|f\|_{t,F}$ est équivalente à

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(1 + 2^j\sqrt{t}\right)^N \|\Delta_j f\|_E,$$

et ce uniformément par rapport à t. On identifie dans la suite ces deux normes. Il devient évident que les $\|.\|_{t,F}$, où t appartient à un compact de $]0, \infty[$, sont uniformément équivalentes entre elles.

Enfin, si $f \in E$ alors $e^\Delta f \in E$ ce qui implique

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} \|\Delta_j e^\Delta f\|_E < +\infty.$$

On a de même $(-\Delta)^{N/2}\, e^\Delta f \in E$, donc d'après (22)

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{jN}\, \|\Delta_j e^\Delta f\|_E < +\infty.$$

Ceci montre que e^Δ est continu de E dans F, et achève de prouver que (P2) est vraie.

On note la formule utile

$$\Delta_j\; e^{t\Delta} = (2^j\sqrt{t})^{-N}\; (-t\Delta)^{N/2}\; e^{t\Delta}\; \Delta_{j,N}. \tag{23}$$

Il reste à vérifier (P3). Soient $u, v \in \mathcal{F}$, qu'on suppose pour simplifier un peu de norme 1 tous les deux : $\|u\|_{\mathcal{F}} = \|v\|_{\mathcal{F}} = 1$. On doit d'abord montrer l'existence d'une constante C telle que

$$\|\Delta_j B(u,v)(t)\|_E \leq C\left(1 + 2^j\sqrt{t}\right)^{-N} \tag{24}$$

pour tous $j \in \mathbb{Z}, t > 0$, où $B(u,v)(t)$ est la distribution tempérée définie par

$$B(u,v)(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}\; P(D)u(\tau)v(\tau)d\tau.$$

Cette formule est à interpréter comme la série

$$B(u,v)(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^t \Delta_j\{e^{(t-\tau)\Delta}\ P(D)u(\tau)v(\tau)\}d\tau,$$

dont la convergence dans $\mathcal{S}'$ est une conséquence de (24). En effet, la Proposition 13 entraîne

$$\|\Delta_j B(u,v)(t)\|_{L^\infty} \leq C2^j,$$

ce qui implique que $B(u,v)(t) \in \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ et que, $\Delta_j B(u,v)(t)$ étant le terme général, la série converge pour la topologie faible $*$ de $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$.

Le point de départ est l'inégalité élémentaire

$$\|\Delta_j B(u,v)(t)\|_E \leq \int_0^t \|\Delta_j e^{(t-\tau)\Delta}\ P(D)u(\tau)v(\tau)\|_E\ d\tau.$$

Lemme 14. *Il existe pour tout $p > 0$ une constante C, ne dépendant que de p, telle que*

$$\|\Delta_j e^{(t-\tau)\Delta}\ P(D)u(\tau)v(\tau)\|_E \leq C\big(1 + 2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p} 2^j\ \|\Delta_j u(\tau)v(\tau)\|_E.$$

Preuve. On part de (16) pour écrire $\widetilde{\Delta}_j^2\Delta_j = \Delta_j$. L'opérateur $P(D)$ étant "à coefficients constants", on en déduit

$$\|\Delta_j e^{(t-\tau)\Delta}\ P(D)u(\tau)v(\tau)\|_E \leq \|\widetilde{\Delta}_j e^{(t-\tau)\Delta}\|\ \|\widetilde{\Delta}_j P(D)\|\ \|\Delta_j u(\tau)v(\tau)\|_E.$$

L'action de L^1 sur E par convolution implique $\|\widetilde{\Delta}_j e^{(t-\tau)\Delta}\| \leq C$, et de plus, si $2^j\sqrt{t-\tau} > 1$, la formule (23) s'applique (quitte à choisir à la place de N un autre entier pair supérieur à p) et donne

$$\|\widetilde{\Delta}_j e^{(t-\tau)\Delta}\| \leq C\big(2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p}.$$

D'autre part, il existe $\psi^\sharp \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ à support dans $]0,+\infty[$ telle que

$$\widetilde{\Delta}_j P(D) = 2^j\psi^\sharp(-4^{-j}\Delta).$$

Ceci implique

$$\|\widetilde{\Delta}_j P(D)\| \leq C2^j.$$

Le lemme en résulte directement. □

On est ainsi ramené, pour prouver (24), à estimer la quantité

$$B_j(t) = 2^j \int_0^t \big(1 + 2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p}\ \|\Delta_j(u(\tau)v(\tau))\|_E\ d\tau,$$

où p est un réel > 0 qu'on choisira plus tard.

On utilise la formule (18), sous une forme modifiée obtenue après regroupement de termes s'écrivant

$$\Delta_j(fg) = \Delta_j(\Delta_j f\, S_{j-2}g) + \Delta_j(S_{j-2}f\, \Delta_j g) + \Delta_j\Big(\sum_{k\geq j-4} \Delta_k f\, \widetilde{\Delta}_k g\Big). \tag{25}$$

Il suffit d'indiquer comment s'estiment les deux termes suivants :

$$R_j(t) = 2^j \int_0^t \big(1+2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p}\ \|\Delta_j u(\tau) S_{j-2}v(\tau)\|_E\ d\tau,$$

$$C_j(t) = 2^j \int_0^t \big(1+2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p} \Big\|\Delta_j\Big(\sum_{k\geq j-4} \Delta_k u(\tau)\widetilde{\Delta}_k v(\tau)\Big)\Big\|_E\ d\tau.$$

Si $v(\tau) \in F$, alors $S_{j-2}v(\tau) = \sum_{j'\leq j-3} \Delta_{j'}v(\tau)$ dans $\mathcal{S}'$. L'inégalité (20) donne alors

$$\begin{aligned}\|\Delta_j u(\tau) S_{j-2}v(\tau)\|_E &\leq \sum_{j'\leq j-3} \|\Delta_j u(\tau)\, \Delta_{j'}v(\tau)\|_E \\ &\leq C\, 2^j\, \|\Delta_j u(\tau)\| \sup_{j'} \|\Delta_{j'}v(\tau)\|_E \\ &\leq C\, 2^j\, \big(1+2^j\sqrt{\tau}\big)^{-N}.\end{aligned}$$

On obtient pour le terme rectangle

$$\begin{aligned}R_j(t) &\leq C \int_0^t \big(1+2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p}\big(1+2^j\sqrt{\tau}\big)^{-N} 4^j d\tau \\ &\leq C \int_0^{4^j t} (1+4^j t - s)^{-p/2}(1+s)^{-N/2} ds.\end{aligned}$$

En choisissant $p \geq N$, il vient

$$R_j(t) \leq C\ \min(1, 4^j t)\big(1+2^j\sqrt{t}\big)^{-N}. \tag{26}$$

Pour le terme carré, on utilise l'inégalité (21), ce qui donne

$$C_j(t) \leq C \int_0^t \big(1+2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p} \sum_{k\geq j-4} \eta_{k-j}\big(1+2^k\sqrt{\tau}\big)^{-2N} 4^k d\tau.$$

Si $2^j\sqrt{t} \geq 1$, il vient

$$C_j(t) \leq C \sum_{k\geq j-4} \eta_{k-j} \int_0^{4^k t} (1+4^j t - 4^{j-k}s)^{-p/2}(1+s)^{-N} ds.$$

En choisissant $p \geq 2N$ on obtient

$$C_j(t) \leq C \sum_{k \geq j-4} \eta_{k-j}(1 + 4^j t)^{-N},$$

c'est-à-dire

$$C_j(t) \leq C\big(1 + 2^j \sqrt{t}\big)^{-2N}. \tag{27}$$

Lorsque $2^j \sqrt{t} < 1$, un calcul analogue donne

$$C_j(t) \leq C \sum_{k \geq j-4} \eta_{k-j} \ \min(1, 4^k t),$$

soit

$$C_j(t) \leq C\varepsilon(4^j t), \tag{28}$$

où ε est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par la formule

$$\varepsilon(s) = \sum_{n \geq -4} \eta_n \ \min(1, 4^n s).$$

C'est une fonction positive, croissante, bornée, et surtout vérifiant $\lim\limits_{s \to 0} \varepsilon(s) = 0$.

Les inégalités (26 - 27 - 28) donnent finalement une version plus forte de (24), qui s'écrit

$$\|\Delta_j B(u,v)(t)\|_E \leq C \ \varepsilon(4^j t)(1 + 2^j \sqrt{t})^{-N}. \tag{29}$$

La fonction ε permet de prouver que $B(u,v)(t)$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}'$ quand t tend vers 0. En effet, si $f \in \mathcal{S}$, on a

$$(B(u,v)(t), f) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (\Delta_j B(u,v)(t), \widetilde{\Delta}_j f)$$

La Proposition 13 et l'inégalité (29) entraînent

$$\|\Delta_j B(u,v)(t)\|_{L^\infty} \leq C \ \varepsilon(2^j t) 2^j,$$

ce qui implique

$$|(B(u,v)(t), f)| \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} \varepsilon(2^j t) \ 2^j \ \|\widetilde{\Delta}_j f\|_{L^1}.$$

L'espace des distributions tempérées f telles que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \|\widetilde{\Delta}_j f\|_{L^1} < +\infty$$

et $\lim_{j\to-\infty} S_j f = 0$ est l'espace de Besov homogène $\dot{B}_1^{1,1}(\mathbb{R}^3)$; c'est le prédual de $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ (voir Triebel [Tr]). Par convergence dominée, on obtient donc

$$\lim_{t\to 0} B(u,v)(t) = 0$$

pour la topologie faible $*$ et de même, pour tout $t > 0$ fixé

$$\lim_{j\to-\infty} S_j B(u,v)(t) = 0$$

pour cette topologie, et par conséquent dans $\mathcal{S}'$. Ainsi $B(u,v)(t) \in F$ pour tout t, et $\sup_{t>0} \|B(u,v)(t)\|_{t,F} < +\infty$.

Il reste à montrer que $B(u,v)(t)$ dépend continûment de $t > 0$ pour la topologie de F.

Soient $t > 0$ et $h > 0$, $h \le \frac{t}{4}$. Si $\alpha \in]0, \frac{t}{4}]$, on a

$$\begin{aligned} B(u,v)(t+h) - B(u,v)(t) &= \int_0^{\alpha+h} e^{(t+h-\tau)\Delta}\ P(D)u(\tau)v(\tau)d\tau \\ &\quad - \int_0^{\alpha} e^{(t-\tau)\Delta}\ P(D)u(\tau)v(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_\alpha^t e^{(t-\tau)\Delta}\ P(D)[u(\tau+h)v(\tau+h) - u(\tau)v(\tau)]d\tau. \end{aligned}$$

En reprenant les calculs qui ont conduit à (29), on prouve

$$\begin{aligned} (30)\quad & \|B(u,v)(t+h) - B(u,v)(t)\|_{t,F} \\ & \le C \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon(4^j\alpha + 4^j h)\big(1 + 2^j\sqrt{t}\big)^{-1} + C \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon(4^j\alpha)\big(1 + 2^j\sqrt{t}\big)^{-1} \\ & \qquad + C \sup_{\tau\in[\alpha,t]} \big\{\|u(\tau+h) - u(\tau)\|_{\tau,F} + \|v(\tau+h) - v(\tau)\|_{\tau,F}\big\}. \end{aligned}$$

Par définition de $\mathcal{F}$, on a pour tout $\alpha > 0$ fixé

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\tau\in[\alpha,t]} \big\{\|u(\tau+h) - u(\tau)\|_{\tau,F} + \|v(\tau+h) - v(\tau)\|_{\tau,F}\big\} = 0.$$

On a aussi pour tout $t > 0$

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_{j\in\mathbb{Z}} \varepsilon(4^j\alpha)\big(1 + 2^j\sqrt{t}\big)^{-1} = 0,$$

d'où il résulte que $\|B(u,v)(t+h) - B(u,v)(t)\|_{t,F}$ tend vers 0 avec $h > 0$.

Le cas $h < 0$, tout à fait analogue, est laissé au lecteur. Le théorème 8 est ainsi complètement démontré.

2.4. **Régularité : preuve du théorème 9.**

L'espace associé à E est, lorsque $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$, différent de l'espace F précédent ; on le note G. C'est l'espace de Besov inhomogène $B_E^{N,\infty}$ construit au-dessus de E, défini par les conditions $S_0 f \in E$ et $\Delta_j f \in E$ pour tout $j \geq 0$, avec

$$\|f\|_G = \|S_0 f\|_E + \sup_{j\geq 0}\ 2^{jN}\|\Delta_j f\|_E < +\infty.$$

L'entier N est choisi comme à la section précédente.

Si $t > 0$, la norme $\|.\|_{t,G}$ est équivalente à

$$\|S_{j(t)} f\|_E + \sup_{j\geq j(t)} \left(2^j\sqrt{t}\right)^N\ \|\Delta_j f\|_E,$$

où $j(t)$ est défini par les inégalités $2^{-j(t)} \leq \sqrt{t} < 2^{-j(t)+1}$, et ce uniformément par rapport à t. On identifie donc les deux normes. Enfin, on note $\mathcal{G}$ au lieu de $\mathcal{F}$ l'espace des u telles que

$$\|u\|_{\mathcal{G}} = \sup_{t>0} \|u(t)\|_{t,G} < +\infty$$

qui dépendent continûment de t.

La preuve du théorème 9 est parallèle à celle du théorème 8, et presque complètement laissée au lecteur. Deux points méritent d'être détaillés, qui expliquent l'introduction de l'hypothèse $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$.

Le premier est la démonstration de l'inégalité

$$\|S_{j(t)} B(u,v)(t)\|_E \leq C\ \|u\|_{\mathcal{G}}\ \|v\|_{\mathcal{G}}.$$

On part de

$$\|S_{j(t)} B(u,v)(t)\|_E \leq \sum_{j<j(t)} \|\Delta_j B(u,v)(t)\|_E,$$

et, démontrant que (29) est encore vrai, on obtient si $\|u\|_{\mathcal{G}} = \|v\|_{\mathcal{G}} = 1$,

$$\begin{aligned}\|S_{j(t)} B(u,v)(t)\|_E &\leq C \sum_{j<j(t)}\ \sum_{n\geq -4} \eta_n \min(1, 4^{n+j}t)\\ &\leq C \sum_{n\geq -4} (5+n)\ \eta_n.\end{aligned}$$

Le deuxième est la démonstration de

$$\lim_{h\to 0}\ \|S_{j(t)}\{B(u,v)(t+h) - B(u,v)(t)\}\|_E = 0.$$

L'argument est semblable à celui utilisé pour (30), à condition de remplacer $\varepsilon(4^j\alpha)$ par

$$\widetilde{\varepsilon}(t,4^j\alpha) = \sum_{j<j(t)} \sum_{n\geq -4} \eta_n \min(1, 4^{n+j}\alpha),$$

et de même pour $\varepsilon(4^j\alpha + 4^j h)$. Comme on a bien, pour tout $t > 0$

$$\lim_{\alpha\to 0} \widetilde{\varepsilon}(t,4^j\alpha) = 0,$$

le raisonnement est inchangé.

2.5. **Autres résultats de régularité.**

Le théorème 9 est en fait valable sous une condition légèrement plus faible, qui sera utilisée dans la prochaine partie.

Proposition 15. *Soit E un espace fonctionnel invariant tel que*
a) si $f, g \in E$ avec $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_j$ *et* $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset B_{j-2}$, $j \in \mathbb{Z}$, *alors $fg \in E$ et*

$$\|fg\|_E \leq C\ 2^j\ \|f\|_E\ \|g\|_E,$$

où C est une constante ne dépendant que de E,
b) il existe une suite $(\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$ et, si $f, g \in E$ avec $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$, $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \widetilde{\Gamma}_k$, *alors $\Delta_j(fg) \in E$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et*

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq \eta_{k-j}\ 4^k\ 2^{-j}\ \|f\|_E\ \|g\|_E.$$

Alors, il existe un espace de Banach $G \subset E$ tel que le couple (E, G) soit admissible. De plus, si $u \in \mathcal{G}$ est une solution de (1) pour une donnée initiale $u_0 \in E$ quelconque, alors
- $u \in \mathcal{C}\ ([0,\infty[; E)$ si $\mathcal{S}$ est dense dans E,
- $u \in \mathcal{C}\ (]0,\infty[; E)$ et $\lim_{t\to 0} u(t) = u_0$ pour la topologie faible $*$ si $\mathcal{S}$ est dense dans le prédual de E.

Preuve. On considère le même espace $\mathcal{G}$ que dans le théorème 9. Le seule différence avec les preuves précédentes est dans le traitement des produits du type $\Delta_j u(\tau)\, S_{j-2}v(\tau)$, où $u, v \in \mathcal{G}$. L'hypothèse a) donne

$$\|\Delta_j u(\tau)\, S_{j-2}v(\tau)\|_E \leq C\ 2^j\ \|\Delta_j u(\tau)\|_E\ \|S_{j-2}v(\tau)\|_E.$$

Si $j-2 \leq j(\tau)$, alors $\|S_{j-2}v(\tau)\|_E \leq C\ \|v(\tau)\|_{\tau,G}$, tandis que si $j-2 > j(\tau)$, alors

$$\begin{aligned}\|S_{j-2}v(\tau)\|_E &\leq \|S_{j(\tau)}v(\tau)\|_E + \sum_{k=j(\tau)+1}^{j-1} \|\Delta_k v(\tau)\|_E \\ &\leq C\ \|v(\tau)\|_{\tau,G}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\|\Delta_j u(\tau)\ S_{j-2}v(\tau)\|_E \leq C\ 2^j\ \left(1 + 2^j\sqrt{\tau}\right)^{-N}\ \|u\|_{\mathcal{G}}\|v\|_{\mathcal{G}},$$

puis l'inégalité (26). On termine la preuve comme pour le théorème 9. $\square$

Enfin, la régularité de la solution peut encore être améliorée si l'hypothèse a) de la proposition précédente est renforcée.

Proposition 16. *Soit E un espace vérifiant toutes les hypothèses précédentes, à l'exception de a), remplacée par :*
a') si $f, g \in E$ avec $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_j$ et $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset B_{j-2}, j \in \mathbb{Z}$, alors $fg \in E$ et

$$\|fg\|_E \leq C\ \|f\|_E\ \|g\|_{L^\infty},$$

où C est une constante ne dépendant que de E. Alors, toute solution $u \in \mathcal{G}$ de l'équation (1) est de classe C^∞ sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}^3$. De plus, pour tout entier n et tout multi-indice α, il existe une constante C_n et une constante C_α telles que

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n}\ u(t,x)\right| \leq \frac{C_n}{t^{n+1/2}} \tag{31}$$

et

$$|D_x^\alpha\ u(t,x)| \leq \frac{C_\alpha}{t^{(|\alpha|+1)/2}}, \tag{32}$$

pour tout $t > 0, x \in \mathbb{R}^3$.

Preuve. La clé est dans la modification suivante de (26) :

$$R_j(t) \leq C\ \min(1, 4^j t)\ \left(1 + 2^j\sqrt{t}\right)^{-N-1}, \tag{33}$$

valable lorsque $u, v \in \mathcal{G}$. Pour le voir, on écrit si $j-2 > j(\tau)$

$$S_{j-2}v(\tau) = \sum_{j(\tau)\leq j'\leq j-3} \Delta_{j'}v(\tau) + S_{j(\tau)}v(\tau)$$

et on utilise la Proposition 13. On obtient, puisque $N > 1$,

$$\begin{aligned}\|S_{j-2}v(\tau)\|_{L^\infty} &\leq C \sum_{j(\tau)\leq j'\leq j-3} 2^{j'}\left(2^{j'}\sqrt{\tau}\right)^{-N}\|v\|_{\mathcal{G}} + C\ 2^{j(\tau)}\|v\|_{\mathcal{G}}\\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\tau}}\ \|v\|_{\mathcal{G}}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|S_{j-2}v(\tau)\|_{L^\infty} \leq C\ \frac{2^j}{1+2^j\sqrt{\tau}}\ \|v\|_{\mathcal{G}}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$. L'inégalité (33) en découle en utilisant a') pour $f = \Delta_j u(\tau)$ et $g = S_{j-2}v(\tau)$.

Si on note momentanément $\mathcal{G}_N$ au lieu de $\mathcal{G}$, afin de rendre apparent le paramètre N, les inégalités (27) et (33) montrent que B envoie $\mathcal{G}_N \times \mathcal{G}_N$ dans $\mathcal{G}_{N+1}$:

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{G}_{N+1}} \leq C_N\|u\|_{\mathcal{G}_N}\|v\|_{\mathcal{G}_N}.$$

Comme $Su_0 \in \mathcal{G}_N$ pour tout N quand $u_0 \in E$, un argument de "boot-strap" classique donne $u \in \mathcal{G}_N$ pour tout N également. On en déduit (32) par des calculs semblables aux précédents dont le détail est laissé au lecteur. Cela implique ensuite (31). □

2.6. **Existence et régularité locales.**

Pour résoudre localement l'équation (1) sans condition de taille sur la donnée initiale, on pose a priori $u = Su_0 + v$, ce qui donne l'équation suivante d'inconnue v :

$$v = B(Su_0, Su_0) + 2B(Su_0, v) + B(v, v). \tag{34}$$

Si $T > 0$ est, pour le moment, quelconque, on désigne par $\mathcal{F}_T$ l'espace des fonctions continues v de $]0, T[$ à valeurs dans F, telles que

$$\|v\|_{\mathcal{F}_T} = \sup_{t>0} \|v(t)\|_{t,F} < +\infty.$$

L'espace F est l'espace $C_E^{N,\infty}$ utilisé pour prouver le théorème 8. On définit de la même manière l'espace $\mathcal{G}_T$.

Soit L l'opérateur linéaire défini par

$$Lv = 2B(Su_0, v).$$

sur $\mathcal{F}_T$ ou $\mathcal{G}_T$. Bien qu'on ait ainsi défini plusieurs opérateurs, on les désignera de la même façon dans la suite.

Il résulte des preuves des théorèmes 8 et 9 que, sous leurs hypothèses, L est continu sur $\mathcal{F}_T$ et sur $\mathcal{G}_T$, uniformément en T, et pour tout $u_0 \in E$. Les résultats locaux seront une conséquence de l'observation suivante.

Lemme 17. *Si* $\lim_{j\to+\infty} \|\Delta_j u_0\|_E = 0$*, alors les normes de* L *sur* $\mathcal{F}_T$ *(si* $\sum_{n\geq 0} \eta_n < +\infty$*) et sur* $\mathcal{G}_T$ *(si* $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$*) tendent vers 0 avec* T*.*

Admettons-le un moment. Si T est assez petit, l'opérateur $I - L$ est inversible sur $\mathcal{F}_T$ ou $\mathcal{G}_T$, et l'équation (34) est équivalente à

$$v = (I - L)^{-1}\ B(Su_0, Su_0) + (I - L)^{-1} B(v, v). \tag{35}$$

Le théorème 3 peut donc s'appliquer. Comme $(I - L)^{-1}\ B(Su_0, Su_0) = \frac{1}{2}(I - L)^{-1} L(Su_0)$, le lemme 17 implique aussi

$$\lim_{T\to 0} \|(I - L)^{-1}\ B(Su_0, Su_0)\|_{\mathcal{F}_T} = 0$$

si $\sum_{n\geq 0} \eta_n < +\infty$, et de même dans $\mathcal{G}_T$ si $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$.

On peut donc résoudre (35).

Ecrivons les résultats obtenus.

Théorème 18. *Soit E un bon espace et $u_0 \in E$ tel que*

$$\lim_{j\to+\infty} \|\Delta_j u_0\|_E = 0.$$

Alors il existe $T > 0$ tel que l'équation (1) admette une solution u dans $\mathcal{F}_T$. De plus, si $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$, alors $u \in \mathcal{G}_T$ et donc

- $u \in \mathcal{C}([0,T[;E)$ si S est dense dans E,

- $u \in \mathcal{C}(]0,T[;E)$ et $\lim_{t\to 0} u(t) = u_0$ pour la topologie faible $*$ si S est dense dans le prédual de E.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du lemme 17.

On se place d'abord dans $\mathcal{F}_T$: soit $v = (v(t))_{0<t<T}$ tel que

$$\|\Delta_j v(t)\|_E \leq \big(1 + 2^j\sqrt{t}\big)^{-N}$$

pour tous $j \in \mathbb{Z}$ et $t \in]0,T[$. Reprenant la preuve du théorème 8, on se ramène à estimer les trois termes suivants :

$$R'_j(t) = 2^j \int_0^t \big(1 + 2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p} \|\Delta_j Su_0(\tau)\, S_{j-2}v(\tau)\|_E \, d\tau,$$

$$R''_j(t) = 2^j \int_0^t \big(1 + 2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p} \|S_{j-2}Su_0(\tau)\, \Delta_j v(\tau)\|_E \, d\tau,$$

$$C_j(t) = 2^j \int_0^t \big(1 + 2^j\sqrt{t-\tau}\big)^{-p} \left\|\Delta_j\Big(\sum_{k\geq j-4} \Delta_k Su_0(\tau)\, \widetilde{\Delta}_k v(\tau)\Big)\right\|_E d\tau.$$

Chacun de ces termes est estimé comme dans les inégalités (25-26-27), en suivant soigneusement la dépendance par rapport à u_0. On utilise toujours l'inégalité

$$\|\Delta_j Su_0(\tau)\|_E \leq C\, \big(1 + 2^j\sqrt{\tau}\big)^{-N} \|\Delta_j u_0\|_E,$$

qui se démontre comme le lemme 14.

On obtient ainsi pour le premier terme rectangle :

$$R'_j(t) \leq C\, \min(1, 4^j t)\, \|\Delta_j u_0\|_E \big(1 + 2^j\sqrt{t}\big)^{-N},$$

de la même façon qu'on a obtenu (25). Pour le second, on écrit

$$\begin{aligned}\|S_{j-2}Su_0(\tau)\, \Delta_j v(\tau)\|_E &\leq C \sum_{j'\leq j-3} 2^{j'} \|\Delta_{j'} Su_0(\tau)\|_E\, \|\Delta_j v(\tau)\|_E \\ &\leq C\, 2^j \big(1 + 2^j\sqrt{\tau}\big)^{-N} \sum_{j'\leq j-3} 2^{j'-j} \|\Delta_{j'} u_0\|_E.\end{aligned}$$

On en déduit la majoration

$$R''_j(t) \leq C\, \min(1, 4^j t) \sum_{j'\leq j-3} 2^{j'-j} \|\Delta_{j'} u_0\|_E \big(1 + 2^j\sqrt{t}\big)^{-N}.$$

Enfin, on a pour le terme carré

$$C_j(t) \le C \int_0^t \left(1+2^j\sqrt{t-\tau}\right)^{-p} \sum_{k\ge j-4} \eta_{k-j}\, \|\Delta_k u_0\|_E \left(1+2^k\sqrt{\tau}\right)^{-2N} 4^k d\tau.$$

Comme pour (26-27), on obtient

$$C_j(t) \le C \sum_{k\ge j-4} \eta_{k-j}\, \|\Delta_k u_0\|_E\ \min(1, 4^k t)\ \left(1+2^j\sqrt{t}\right)^{-2N}.$$

L'ensemble de ces estimations donne

$$(36)\quad \left(1+2^j\sqrt{t}\right)^N \|\Delta_j B(Su_0, v)(t)\|_E \le \\ C\{\min(1,4^j t) \sum_{j'\le j} 2^{j'-j} \|\Delta_{j'} u_0\|_E + \sum_{k\ge j-4} \eta_{k-j} \|\Delta_k u_0\|_E \min(1,4^k t)\}.$$

Il est élémentaire de vérifier que le terme entre accolades tend vers 0 avec t, uniformément par rapport à j, si $\lim_{l\to+\infty} \|\Delta_l u_0\|_E = 0$.

Cela prouve que la norme de L sur $\mathcal{F}_T$ tend vers 0 avec T.

Lorsque $\sum_{n\ge 0} n\eta_n < +\infty$, l'extension à $\mathcal{G}_T$ repose encore une fois sur l'inégalité

$$\|S_{j(t)} B(Su_0, v)(t)\|_E \le \sum_{j<j(t)} \|\Delta_j B(Su_0, v)(t)\|_E.$$

On injecte l'inégalité (36), et on conclut : les détails sont laissés au lecteur.

3. Liens avec les résultats antérieurs

3.1. L'espace $L^3(\mathbb{R}^3)$.

C'est sur cet espace que Kato a construit des solutions de (1) suivant la méthode de la première partie.

Proposition 19. *$L^3(\mathbb{R}^3)$ est un bon espace.*

Preuve. $L^3(\mathbb{R}^3)$ est un espace fonctionnel invariant. L'inégalité (20) résulte de la Proposition 13 et de ce que toute fonction bornée est un multiplicateur de L^3.

Soient $f, g \in L^3$, $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$, $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \widetilde{\Gamma}_k$, et $j \le k+4$. Puisque $fg \in L^{3/2}$, l'inégalité d'Young donne

$$\|\Delta_j(fg)\|_{L^3} \le C\ 2^j\ \|fg\|_{L^{3/2}} \le C\ 2^j\ \|f\|_{L^3}\ \|g\|_{L^3}.$$

Ceci montre (21) avec $\eta_n = 4^{-n}$, et conclut la preuve. $\square$

Kato a employé dans [K] un espace $\mathcal{F}$ différent de celui utilisé dans la preuve du théorème 8 (ou du théorème 9, qui s'applique) : les résultats d'unicité de Furioli-Lemarié-Terraneo montrent que ce sont les mêmes solutions qui sont obtenues ([F,LR,Te]).

3.2. **Espaces de Lorentz.**

Meyer a montré comment faire fonctionner la méthode KW dans $L^{(3,\infty)}$ ([M]). On a en fait la

Proposition 20. *Si* $1 \leq q \leq \infty$*, l'espace* $L^{(3,q)}$ *est un bon espace.*

Preuve. On rappelle que, si $1 \leq p, q \leq \infty$, une fonction mesurable f appartient à $L^{(p,q)}$ lorsque

$$\|f\|_{L^{(p,q)}} = \left(\frac{q}{p} \int_0^{+\infty} [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < +\infty,$$

et si $1 \leq p \leq \infty$ et $q = \infty$, lorsque

$$\|f\|_{L^{(p,\infty)}} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) < +\infty.$$

On a noté f^* le réarrangement décroissant de f :

$$f^*(t) = \inf\{s \geq 0; |\{|f| > s\}| \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Si $p > 1$, il existe une norme sur $L^{(p,q)}$, équivalente à $\|\cdot\|_{L^{(p,q)}}$ (qui n'est pas une norme), et qui rend $L^{(p,q)}$ complet (Stein-Weiss [S,W], chapitre V). Enfin, $L^{(p,p)}$ n'est autre que L^p.

Parmi tous les espaces de Lorentz, ce sont les $L^{(3,q)}$ qui sont invariants.

On a bien sûr $\mathcal{S} \subset L^{(3,q)}$, et l'inclusion $L^{3,q} \subset L^{p_1} + L^{p_2}$, où $1 < p_1 < 3 < p_2$, montre que $L^{(3,q)} \subset \mathcal{S}'$ et que $\lim_{j \to -\infty} S_j f = 0$ si $f \in L^{(3,q)}$. Les $L^{(3,q)}$ sont donc des espaces fonctionnels invariants. Pour montrer qu'ils sont compatibles, on note d'abord que les fonctions bornées sont des multiplicateurs de ces espaces, ce qui donne (19) (avec la Proposition 13). D'autre part, on a

$$\|fg\|_{L^{(\frac{3}{2},q)}} \leq C\ \|f\|_{L^{(3,q)}}\ \|g\|_{L^{(3,q)}} \tag{37}$$

et

$$\|h * F\|_{L^{(3,q)}} \leq C\ \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}}\ \|F\|_{L^{(\frac{3}{2},q)}}. \tag{38}$$

Si on admet ces deux inégalités, alors on montre que (21) est vérifiée avec $\eta_n = 4^{-n}$, exactement comme dans le cas de l'espace L^3.

Il suffit de démontrer (37) dans le cas où $f = g$. L'identité $(f^2)^*(t) = f^*(t)^2$ implique l'inégalité

$$\|f^2\|_{L^{(\frac{3}{2},q)}} \leq C\ \|f\|_{L^{(3,\infty)}}\ \|f\|_{L^{(3,q)}},$$

et on conclut avec l'inclusion $L^{(3,q)} \subset L^{(3,\infty)}$.

Pour obtenir (38), on part de

$$\|h * F\|_{L^r} \leq \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}}\ \|f\|_{L^p}$$

chaque fois que $1 \leq p \leq 3$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}$. Le théorème d'interpolation de Hunt ([S,W], p.197) fournit

$$\|h * F\|_{L^{(r,q)}} \leq C\ \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}}\ \|f\|_{L^{(p,q)}}$$

pour tous $p \in]1, 3[$ et $q \in [1, \infty]$. On en déduit (38). □

3.3. **Espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin.**

Les espaces $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,\infty}$ ont été étudiés par Cannone dans sa thèse, notamment pour $3 < p \leq 6$, et lui ont permis de construire des solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes ([C]).

Proposition 21. *Les espaces* $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,q}$, $1 \leq q \leq \infty$ *et* $1 \leq p < \infty$, *sont de bons espaces. Il en est de même des espaces* $\dot{F}_p^{\frac{3}{p}-1,q}$, $1 \leq p, q < \infty$.

Preuve. Le paramètre de régularité $\frac{3}{p} - 1$ est ajusté pour que ces espaces soient invariants. Ce sont des espaces fonctionnels : voir [Tr].

Ici, E désigne indifféremment l'un des $\dot{B}_p^{\frac{3}{p}-1,q}$ ou des $\dot{F}_p^{\frac{3}{p}-1,q}$, $1 \leq p < \infty$ fixé, $1 \leq q \leq \infty$ (Besov) ou $1 \leq q < \infty$ (Triebel-Lizorkin). On utilisera la remarque importante que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $f \in E$ avec $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$ on a $\|f\|_E \sim 2^{k(\frac{3}{p}-1)} \|f\|_{L^p}$ uniformément pour $k \in \mathbb{Z}$. Noter que l'indice q n'apparaît pas. Cela résulte de l'équivalence des normes sur E obtenues en partant de deux analyses de Littlewood-Paley différentes.

Soient $f, g \in E$, $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$, $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \Gamma_l$, $k, l \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{Z}$.

Si $|k-l| \geq 3$, et par exemple $l \leq k-3$, alors $fg = \widetilde{\Delta}_k(fg)$, donc

$$\begin{aligned} \|fg\|_E &\leq C\ 2^{k(\frac{3}{p}-1)}\ \|fg\|_{L^p} \\ &\leq\ C\ 2^{k(\frac{3}{p}-1)}\ \|f\|_{L^p}\ \|g\|_{L^\infty} \\ &\leq\ C\ 2^l\ \|f\|_E\ \|g\|_E, \end{aligned}$$

d'après la Proprosition 13 une fois encore.

Si $|k-l| \leq 2$, on utilise à nouveau l'inégalité d'Young. Si $p \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j(fg)\|_E &\leq C\ 2^{j(\frac{3}{p}-1)}\ \|\Delta_j(fg)\|_{L^p} \\ &\leq C\ 2^{j(\frac{6}{p}-1)}\ \|fg\|_{L^{p/2}} \\ &\leq\ C\ 2^{j(\frac{6}{p}-1)}\ \|f\|_{L^p}\ \|g\|_{L^p} \\ &\leq\ C\ 2^{(j-k)(\frac{6}{p}-1)}\ 2^k \|f\|_E\ \|g\|_E. \end{aligned}$$

Cela prouve (20) et (21) avec $\eta_n = 2^{-\frac{6n}{p}}$.

Si $1 \leq p < 2$, et toujours lorsque $|k-l| \leq 2$, on écrit

$$\begin{aligned} \|\Delta_j(fg)\|_E \leq&\ C\ 2^{j(\frac{3}{p}-1)}\ \|\Delta_j(fg)\|_{L^p} \\ \leq&\ C\ 2^{2j}\ \|fg\|_{L^1} \\ \leq&\ C\ 2^{2j}\ \|f\|_{L^p}\ \|g\|_{L^{p'}} \\ \leq&\ C\ 2^{2j-k}\ \|f\|_E\ \|g\|_E \end{aligned}$$

ce qui prouve (19) et (20) avec $\eta_n = 2^{-3n}$. □

Remarque : si $p > 6$, $fg \notin E$ en général, même sous les hypothèses de (21).

Dans ces exemples, $p = \infty$ apparaît comme valeur critique. On a en effet le résultat suivant.

Proposition 22. *Les espaces* $\dot{B}_\infty^{-1,q}$, $1 \leq q \leq \infty$*, ne sont pas de bons espaces. Ils sont compatibles et vérifient (19) avec* $\eta_n = C$ *pour une certaine constante* C*, et ce choix de la suite* η *est le meilleur possible.*

Preuve. La compatibilité de ces espaces se démontre comme dans le cas $p < \infty$, et on trouve $\eta_n = C$.

Soit $\phi \in \mathcal{S}$ telle que $\operatorname{Supp} \widehat{\phi} \subset B_0$. Si x_1 désigne la première coordonnée de $x \in \mathbb{R}^3$ et si $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^k\ e^{-i2^k x_1}\ \phi(x), \\ g(x) &= 2^k\ e^{i2^k x_1}\ \phi(x). \end{aligned}$$

Alors $f, g \in \dot{B}_\infty^{-1,q}$ pour tout q, de normes $\|\phi\|_{L^\infty}$, avec $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$ et de même pour g. On a

$$\Delta_0(fg) = 4^k \ \Delta_0(\phi^2),$$

donc

$$\|\Delta_0(fg)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,q}} = 4^k \ \|\Delta_0(\phi^2)\|_{L^\infty}.$$

Ceci prouve que si η est une suite pour laquelle (19) est vraie dans $\dot{B}_\infty^{-1,q}$, alors

$$\eta_n \geq \sup_\phi \frac{\|\Delta_0(\phi^2)\|_{L^\infty}}{\|\phi\|_{L^\infty}^2},$$

pour tout $n \geq 0$. La proposition est démontrée. □

Le corollaire 12 énonce bien entendu une propriété beaucoup plus forte de l'espace $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$.

3.4. **Espaces de Morrey.**

Si $1 < q \leq p < \infty$, une fonction $f \in L^q_{loc}$ est dans l'espace de Morrey M^p_q lorsque

$$\sup \ R^{\frac{3}{p}} \left(\fint_{B(x_0,R)} |f|^q \right)^{1/q} < +\infty,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et les $R > 0$, et où $\fint_B$ désigne $\frac{1}{|B|}\int_B$.

Les espaces M^p_1 sont des espaces de mesures : on dit qu'une mesure de Radon ν appartient à M^p_1 lorsque

$$\sup_{x_0,R} \ R^{\frac{3}{p}} \frac{|\nu|(B(x_0,R))}{|B(x_0,R)|} < +\infty.$$

Les espaces de Morrey invariants sont les M^3_q, $1 \leq q \leq 3$.

Proposition 23. *Les espaces M^3_q, $1 \leq q \leq 3$, sont de bons espaces.*

Preuve. Que ces espaces soient des espaces fonctionnels (définition 5) n'est pas évident, mais cependant déjà connu : voir par exemple [M].

L'inégalité (20) s'obtient avec l'argument utilisé à plusieurs reprises, selon lequel toute fonction bornée est un multiplicateur des espaces de Morrey.

Soient maintenant $f, g \in M^3_q$, $1 \leq q \leq 3$, qu'on suppose de normes 1 pour simplifier, telles que $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$, $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \widetilde{\Gamma}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, et soit $j \in \mathbb{Z}$, $j \leq k+4$. Il s'agit d'estimer

$$I_j = R \left(\fint_{B(x_0,R)} |\Delta_j(fg)|^q \right)^{1/q}$$

uniformément par rapport à x_0, R.

On commence par démontrer l'existence d'une constante C telle que

$$\|\Delta_j(fg)\|_{L^\infty} \leq \begin{cases} C\ 4^j, & \text{si } q \geq 2, \\ C\ 4^{k(1-q/2)}\ 4^{jq/2}, & \text{si } q < 2. \end{cases} \tag{39}$$

Pour le voir, on écrit, en choisissant N assez grand :

$$\begin{aligned} |\Delta_j(fg)(x)| &\leq C\ 2^{3j} \int (1+2^j|x-y|)^{-N}\ |f(y)g(y)|dy \\ &\leq C\ 2^{3j} \int_{B(x,2^{-j})} |f(y)g(y)|dy \\ &\quad + C \sum_{n\geq 0} 2^{3j}\ 2^{-nN} \int_{B(x,2^{n+1-j})\setminus B(x,2^{n-j})} |f(y)g(y)|dy \\ &\leq C \sum_{n\geq 0} 2^{-n(N-3)} ⨍_{B(x,2^{n-j})} |f(y)g(y)|dy. \end{aligned}$$

Si $q \geq 2$, on applique la définition de M^3_q directement :

$$\begin{aligned} |\Delta_j(fg)(x)| &\leq C \sum_{n\geq 0} 2^{-n(N-3)} \left(⨍_{B(x,2^{n-j})} |fg|^{q/2} \right)^{2/q} \\ &\leq C \sum_{n\geq 0} 2^{-n(N-3)}\ 4^{j-n} \\ &\leq C\ 4^j. \end{aligned}$$

pourvu que $N > 1$.

Si $q < 2$, on utilise la Proposition 13, qui implique ici $\|f\|_{L^\infty} \leq C\ 2^k$ et de même pour g, en écrivant

$$|\Delta_j(fg)(x)| \leq C\ \|fg\|_{L^\infty}^{1-q/2} \sum_{n\geq 0} 2^{-n(N-3)} ⨍_{B(x,2^{n-j})} |fg|^{q/2}.$$

Des calculs analogues aux précédents donnent le résultat dès que $N > 3 - q/2$.

Revenons à I_j. Dans le cas où $R \leq 2^{-j}$, (39) donne

$$I_j \leq \|\Delta_j(fg)\|_{L^\infty} 2^{-j} \leq \begin{cases} C\ 4^{j-k}\ 4^k\ 2^{-j} & \text{si } q \geq 2, \\ C\ 4^{(j-k)q/2}\ 4^k\ 2^{-j} & \text{si } q < 2. \end{cases}$$

Dans le cas où $R > 2^{-j}$ et $q \geq 2$, on commence par estimer

$$\begin{aligned}
|\Delta_j(fg)(x)|^{q/2} &\leq \left\{C \int 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}\ |f(y)g(y)|dy\right\}^{q/2} \\
&\leq C \int 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}\ |f(y)g(y)|^{q/2}dy \\
&\leq C \int_{|x-y|\leq R} 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}\ |f(y)g(y)|^{q/2}dy \\
&\quad + C\sum_{n\geq 0} \int_{2^nR\leq|x-y|\leq 2^{n+1}R} 2^{3j}(2^{j+n}R)^{-N}|f(y)g(y)|^{q/2}dy
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, si $N > 3$, que

$$\begin{aligned}
⨍_{B(x_0,R)} |\Delta_j(fg)|^{q/2} &\leq C\ \sum_{n\geq 0}(2^{j+n}R)^{-(N-3)}\ ⨍_{B(0,2^{n+2}R)} |fg|^{q/2} \\
&\leq C\ (1+2^jR)^{-N+3}\ R^{-q} \\
&\leq C\ R^{-q}.
\end{aligned}$$

On interpole ensuite cette inégalité avec (39), pour obtenir

$$\begin{aligned}
I_j &\leq\ R\ \|\Delta_j(fg)\|_{L^\infty}^{1/2} \left(⨍_{B(x_0,R)} |\Delta_j(fg)|^{q/2}\right)^{1/q} \\
&\leq\ C\ 2^j \\
&=\ C\ 4^{j-k}\ 4^k\ 2^{-j}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $R > 2^{-j}$ et $q < 2$, on commence par observer comme ci-dessus que

$$⨍_{B(x_0,R)} |\Delta_j(fg)| \leq C\ \sum_{n\geq 0} (2^{j+n}R)^{-N+3}\ ⨍_{B(x_0,2^{n+2}R)} |fg|.$$

Ecrivant ensuite

$$|f(y)g(y)| \leq \|fg\|_{L^\infty}^{1-q/2}\ |f(y)g(y)|^{q/2},$$

on obtient

$$⨍_{B(x_0,R)} |\Delta_j(fg)| \leq C\ 4^{k(1-q/2)}R^{-q}.$$

Enfin, on interpole avec (39) :

$$\begin{aligned}
I_j &\leq\ R\ \|\Delta_j(fg)\|_{L^\infty}^{1-1/q} \left(⨍_{B(x_0,R)} |\Delta_j(fg)|\right)^{1/q} \\
&\leq\ C\ 4^{k(1-q/2)}\ 2^{j(q-1)} \\
&=\ C\ 2^{(j-k)q}\ 4^k\ 2^{-j}.
\end{aligned}$$

Au total, on a prouvé (21), avec $\eta_n = 4^{-n}$ si $q \geq 2$ et $\eta_n = 2^{-qn}$ si $q < 2$, ce qui clôt la démonstration. $\square$

Le même type de calculs sera utilisé dans la partie suivante, où l'espace de Morrey M_2^3 joue implicitement un rôle.

3.5. **Espaces de Konozo et Yamazaki.**

Il s'agit d'espaces de Besov au-dessus d'espaces de Morrey, notés ici $\dot{B}^{s,r}_{M_q^p}$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq q \leq p < \infty$ et $1 \leq r \leq \infty$ ($\mathcal{N}^s_{p,q,r}$ dans [Ko,Y]). La norme se calcule par

$$\left\|(2^{js}\|\widetilde{\Delta}_j f\|_{M_q^p})_j\right\|_{\ell^r}.$$

Ceux d'entre eux qui sont invariants sont caractérisés par $s = \frac{3}{p} - 1$.

Proposition 24. *Pour $1 \leq q \leq p < \infty$ et $1 \leq r \leq \infty$, les espaces $\dot{B}^{\frac{3}{p}-1,r}_{M_q^p}$ sont de bons espaces.*

La preuve est une adaptation des calculs des deux sections précédentes en utilisant que si $E = \dot{B}^{\frac{3}{p}-1,r}_{M_q^p}$, $f \in E$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\|\Delta_k f\|_E = 2^{k(\frac{3}{p}-1)}\|\Delta_k f\|_{M_q^p}.$$

On trouve

$$\eta_n = \begin{cases} 4^{-\frac{3n}{p}}, & q \geq 2, \\ 4^{-\frac{3nq}{2p}}, & q \leq 2. \end{cases}$$

Les détails sont laissés au lecteur.

3.6. **Espaces définis par des conditions sur la transformée de Fourier.**

Le Jan et Sznitman ont résolu l'équation (1) avec donnée initiale dans l'espace des distributions tempérées f telles que $|\xi|^2\ \widehat{f}(\xi)$ soit borné sur $\mathbb{R}^3$ ([Le,Sz]). Cet espace est caractérisé par la condition

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 4^j\ \|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^\infty} < +\infty.$$

L'inégalité

$$\|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^q} \leq C\ 2^{3j/q}\ \|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^\infty}$$

suggère une généralisation. Si $1 \leq q \leq \infty$, on note F_q l'espace des distributions tempérées f telles que

$$\|f\|_{F_q} = \sup_{j\in\mathbb{Z}}\ 2^{j(2-3/q)}\ \|\widehat{\Delta_j f}\|_{L^q} < +\infty.$$

Remarquer que $F_2 = \dot{B}_2^{1/2,\infty}$, et que F_1 est l'espace de Besov $\dot{B}^{-1,\infty}_{\mathcal{A}}$ construit au-dessus de l'algèbre de Wiener $\mathcal{A}$.

Proposition 25. *Les espaces F_q sont de bons espaces pour $1 < q \leq \infty$.*

Preuve. On laisse au lecteur le soin de vérifier que ce sont des espaces fonctionnels invariants.

Soient $f, g \in F_q$, $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$, $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \Gamma_l$, $k, l \in \mathbb{Z}$, et soit $j \in \mathbb{Z}$.

Si $|k-l| \geq 3$, et par exemple $l \leq k-3$, on écrit, puisque $fg = \widetilde{\Delta}_k(fg)$,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{F_q} &\leq C\ 2^{k(2-3/q)}\ \|\widehat{f} * \widehat{g}\|_{L^q} \\
&\leq C\ 2^{k(2-3/q)}\ \|\widehat{f}\,\|_{L^q}\ \|\widehat{g}\|_{L^1} \\
&\leq C\ \|f\|_{F_q}\ 2^{3l/q'}\ \|\widehat{g}\|_{L^q} \\
&\leq C\ 2^l\ \|f\|_{F_q}\ \|g\|_{F_q},
\end{aligned}$$

ce qui démontre (20).

Si $|k-l| \leq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\|\Delta_j(fg)\|_{F_q} &\leq C\ 2^{j(2-3/q)}\ \|\widehat{f} * \widehat{g}\|_{L^q} \\
&\leq C\ 2^{j(2-3/q)}\ \|\widehat{f}\,\|_{L^1}\ \|\widehat{g}\|_{L^q} \\
&\leq C\ 2^{k(2-3/q)}\ 2^{3k/q'} \|\widehat{f}\,\|_{L^q}\ \|\widehat{g}\|_{L^q} \\
&\leq C\ 2^{(j-k)3/q'}\ 4^k\ 2^{-j}\ \|f\|_{F_q}\ \|g\|_{F_q}.
\end{aligned}$$

Cela signifie que (21) est vraie, avec $\eta_n = 2^{-3n/q'}$, et termine la preuve. $\square$

Remarque : on voit que (21) est vraie dans F_1, avec $\eta_n = 1$. Le contre-exemple de la Proposition 19 permet également de montrer qu'il n'y a pas de meilleur choix de η possible, et par conséquent que F_1 n'est pas un bon espace.

3.7. **Discussion de quelques conditions abstraites.**

Plusieurs auteurs ont donné des conditions abstraites que doit ou peut posséder un espace E pour qu'il soit possible de résoudre (1) par la méthode KW, spécialisée par un choix particulier de l'espace F (généralement E lui-même ou un sous-espace de E).

Si par exemple on cherche à prouver la continuité de l'application B sur $\mathcal{C}([0,\infty[; E)$, alors il est nécessaire d'avoir

$$\|(-\Delta)^{-1/2} fg\|_E \leq C\ \|f\|_E\ \|g\|_E \tag{40}$$

pour tous $f, g \in E$ (voir [M]). Mais cela n'est pas suffisant, comme l'a montré Oru ([O]) avec $E = L^3$. Noter que (40) est plus forte qu'une condition proposée par Cannone à la fin de sa thèse ([C]), s'écrivant

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \leq C\ 2^j\ \|f\|_E\ \|g\|_E. \tag{41}$$

En la modifiant convenablement, Furioli, Lemarié et Terraneo ont toutefois obtenu la continuité de B sur $\mathcal{C}([0,\infty[; \dot{B}_E^{0,\infty})$ ([F,LR,Te]). Leur condition est la suivante

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \le C\ 2^j \sup_{j'} \|\Delta_{j'} f\|_E \sup_{j'} \|\Delta_{j'} g\|_E. \tag{42}$$

C'est (41) dans l'espace $\dot{B}_E^{0,\infty}$, et aussi (40).

Meyer et Muschietti d'une part, Furioli, Lemarié et Terraneo d'autre part, ont donné d'autres conditions permettant de résoudre (1) par la méthode de Kato :

$$\|fg\|_E \le C\ (\|f\|_{L^\infty} + \|(-\Delta)^{1/2} f\|_E)\ \|g\|_E \tag{43}$$

est étudiée dans [M],

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \le C\ (\|f\|_E\ \|g\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}\ \|g\|_E) \tag{44}$$

a été proposée dans [F,LR,Te], ainsi que la forme légèrement plus précise

$$\|\Delta_j(fg)\|_E \le C\ \|f\|_E\ \|g\|_{L^\infty} + C\ 2^{j(1-\alpha)} \|f\|_E^{1-\alpha}\ \|f\|_{L^\infty}^{\alpha}\ \|g\|_E\ , \tag{45}$$

où $\alpha \in]0,1[$.

Proposition 26. *Tout espace fonctionnel invariant vérifiant l'une des propriétés (40) à (45) est un bon espace, au sens de la variante de la Proposition 15.*

Preuve. Soient d'abord $f, g \in E$, $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$ et $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset B_{k-2}$, $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $fg = \widetilde{\Delta}_k(fg)$, et d'après (22),

$$fg = 2^k\ \widetilde{\Delta}_{k,-1}\ ((-\Delta)^{-1/2} fg),$$
$$(-\Delta)^{1/2} f = 2^k\ \widetilde{\Delta}_{k,-1}(f).$$

Ces identités injectées dans (40 - 45) donnent

$$\|fg\|_E \le C\ 2^k\ \|f\|_E\ \|g\|_E,$$

éventuellement en utilisant aussi la Proposition 13 (c'est-à-dire $\|f\|_{L^\infty} \le C\, 2^k\, \|f\|_E$).

Si ensuite l'hypothèse sur g est changée en $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \widetilde{\Gamma}_k$, et si $j \in \mathbb{Z}$, alors on obtient (21) par des considérations analogues, avec $\eta_n = 4^{-n}$ sous les conditions (40 - 41 - 42), et $\eta_n = 2^{-n}$ sous (43 - 44 - 45). Les détails sont laissés au lecteur. □

Remarque : tout espace fonctionnel invariant vérifiant (43) est également un bon espace au sens de la Définition 7, puisque (20) est vraie dans ce cas.

4. Les espaces $M(\eta)$ et les contre-exemples

Le but principal de cette partie est de démontrer le théorème 11. Les espaces E qui vont fournir les contre-exemples désirés appartiennent à une même classe, celle des espaces $M(\eta)$.

4.1. Les espaces $M(\eta)$.

Definition 27. *Soit $\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite positive, décroissante et régulière. L'espace $M(\eta)$ est l'ensemble des distributions tempérées f telles que $\lim_{j\to-\infty} S_j f = 0$ dans $\mathcal{S}'$, et pour lesquelles il existe une constante C vérifiant pour tous $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $j, j' \in \mathbb{Z}$ avec $j \geq j'$*

$$(46)\qquad ⨍_{B(x_0,2^{-j'})} |\Delta_j f|^2 \leq C^2\ \eta_{j-j'}^2\ 4^j,$$

où $⨍_B$ désigne $\dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B$. La norme dans $M(\eta)$ est la plus petite constante C possible.

La régularité de la suite η implique que $M(\eta)$ ne dépend pas d'un choix particulier des opérateurs Δ_j. Des inégalités (46) avec $j' = j$ et de (16), on déduit que $M(\eta)$ s'injecte dans $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$. Il s'ensuit que les valeurs de η pour les entiers $n \leq 0$ n'ont pas d'importance : on suppose dorénavant $\eta_n = \eta_0$ si $n \leq 0$, de sorte que (46) est vraie quels que soient j et j'.

Si $\liminf 2^{3n}\,\eta_n^2 = 0$, alors $M(\eta)$ est réduit à $\{0\}$, de sorte qu'on suppose également $\liminf 2^{3n}\,\eta_n^2 > 0$.

Lorsque $\eta_n = 2^{-n\alpha}$, $n \geq 0$, pour un certain $\alpha \in [0, 3/2]$, $M(\eta)$ est l'espace de Besov homogène $\dot{B}^{\alpha-1,\infty}_{M_2^{3/\alpha}}$ (voir section 3.5). En particulier, il coïncide avec $\dot{B}_2^{1/2,\infty}$ pour $\alpha = 3/2$, et avec $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ pour $\alpha = 0$.

Dans le cas où η est quelconque, on a toujours

$$\dot{B}_2^{1/2,\infty} \subset M(\eta) \subset \dot{B}_\infty^{-1,\infty},$$

avec injections continues. Si la suite η est telle que $\sum_{n\geq 0} \eta_n^2 < +\infty$, alors $M(\eta)$ s'injecte continûment dans $\dot{F}_2^{-1,\infty}$, l'espace des dérivées des fonctions de BMO.

Proposition 28. *Les espaces $M(\eta)$ sont invariants, et vérifient (19) avec la suite $C\eta = (C\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, pour une certaine constante absolue C.*

Preuve. L'invariance des $M(\eta)$ est aisée à montrer et laissée au lecteur. Vérifions (19).

Soient $f, g \in M(\eta)$, Supp $\widehat{f} \subset \Gamma_k$, Supp $\widehat{g} \subset \Gamma_l$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

Si $|k-l| \geq 3$, et par exemple $l \leq k-3$, alors $fg = \widetilde{\Delta}_k(fg)$. Soient $j' \leq k$ et $x_0 \in \mathbb{R}^3$. On a pour tout $n \geq 0$

$$\fint_{B(x_0, 2^{-j'+n})} |fg|^2 \leq C\ \eta^2_{j+n-j'}\ \|f\|^2_{M(\eta)}\ \|g\|^2_{L^\infty}. \tag{47}$$

Si $x \in \mathbb{R}^3$ est momentanément fixé, et en choisissant $p > 3$, on a

$$|\Delta_k(fg)(x)| \leq C\ 2^{3k} \int (1 + 2^k|x-y|)^{-p}\ |f(y)g(y)|\ dy,$$

d'où

$$\begin{aligned} |\Delta_k(fg)(x)|^2 &\leq C\ 2^{3k} \int (1+2^k|x-y|)^{-p}\ |f(y)g(y)|^2 dy \\ &\leq C\ 2^{3k} \int_{B(x,2^{-j'})} (1+2^k|x-y|)^{-p}\ |f(y)g(y)|^2 dy \\ &\quad + C \sum_{n\geq 0} 2^{(3-p)(k-j'+n)} \fint_{B(x,2^{-j'+n+1})} |fg|^2. \end{aligned}$$

On utilise (47) et la décroissance de η :

$$\begin{aligned} |\Delta_k(fg)(x)|^2 \leq C\ 2^{3k} &\int_{B(x,2^{-j'})} (1+2^k|x-y|)^{-p}\ |f(y)g(y)|^2 dy \\ &+ C\ \eta^2_{k-j'}\ \|f\|^2_{M(\eta)}\ \|g\|^2_{L^\infty}. \end{aligned}$$

On applique cette inégalité à tout $x \in B(x_0, 2^{-j'})$ et on utilise à nouveau (47) :

$$\fint_{B(x_0,2^{-j'})} |\Delta_k(fg)(x)|^2 dx \leq C\ \eta^2_{k-j'}\ \|f\|^2_{M(\eta)}\ \|g\|^2_{L^\infty}.$$

On obtient de même l'inégalité analogue pour $\Delta_{k-1}(fg)$ et $\Delta_{k+1}(fg)$. Compte tenu de la Proposition 13, ceci démontre (20).

On suppose maintenant $|k-l| \leq 2$, et on se donne $j \in \mathbb{Z},\ j \leq k+4$. Si $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$|\Delta_j(fg)(x)| \leq C\ 2^{3j} \int_{B(x,2^{-j})} |fg| + C \sum_{n\geq 0} 2^{(3-p)n} \fint_{B(x,2^{-j+n+1})} |fg|,$$

où on a choisi $p > 3$ comme plus haut. La définition de $M(\eta)$ et la décroissance de η impliquent

$$|\Delta_j(fg)(x)| \leq C\ \eta^2_{k-j}\ 4^k\ \|f\|_{M(\eta)}\ \|g\|_{M(\eta)}. \tag{48}$$

Par ailleurs, si $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et $j' \leq j$ sont fixés

$$|\Delta_j(fg)(x)| \leq C \int 2^{3j}\ (1+2^j|x-y|)^{-p}\ |f(y)g(y)| dy dx$$

d'où

$$\fint_{B(x_0,2^{-j'})} |\Delta_j(fg)(x)|dx \leq C\ 2^{3j'} \int (1+2^{j'}|x_0-y|)^{-p}\ |f(y)g(y)|dy.$$

La même technique de découpage du domaine d'intégration, en utilisant cette fois les boules $B(x_0, 2^{-j'+n}),\ n \geq 0$, donne

$$\fint_{B(x_0,2^{-j'})} |\Delta_j(fg)| \leq C\ \eta^2_{k-j'}\ 4^k\ \|f\|_{M(\eta)}\ \|g\|_{M(\eta)}.$$

Avec (48), ceci implique

$$\fint_{B(x_0,2^{-j'})} |\Delta_j(fg)|^2 \leq C\ \eta^2_{k-j}\ \eta^2_{k-j'}\ 4^{2k}\ \|f\|^2_{M(\eta)}\ \|g\|^2_{M(\eta)}.$$

Puisque $\eta_{k-j'} \leq \eta_{j-j'}$, on obtient $\Delta_j(fg) \in M(\eta)$, et

$$\|\Delta_j(fg)\|_{M(\eta)} \leq C\ \eta_{k-j}\ 4^k\ 2^{-j}\ \|f\|_{M(\eta)}\ \|g\|_{M(\eta)}.$$

La preuve est terminée. $\square$

Remarque : on pose, pour tout $n \geq -4$

$$\varepsilon_n = \sup_{m\geq 0} \frac{\eta_{n+m}}{\eta_m}.$$

Les calculs précédents montrent qu'on a l'inégalité plus forte

$$\|\Delta_j(fg)\|_{M(\eta)} \leq C\ \eta_{k-j}\ \varepsilon_{k-j}\ 4^k\ 2^{-j}\ \|f\|_{M(\eta)}\ \|g\|_{M(\eta)}.$$

L'amélioration est sensible dans certains cas, par exemple pour $\eta_n = 2^{-n\alpha}$. Mais pour les suites $\eta \notin l^2(\mathbb{N})$ qui vont fournir les contre-exemples, l'inégalité $\varepsilon_n \leq C$ est la seule raisonnable.

4.2. **Construction des contre-exemples.**

Soit η une suite positive décroissante et régulière telle que

$$\sum_{n\geq 0} 2^{-3n} \inf_{k\geq n}\ 2^{3k}\ \eta_k^2 = +\infty.$$

La preuve du théorème 11 se fait par l'absurde en considérant l'espace fonctionnel compatible $M_0(\eta)$, fermeture de $\mathcal{S}$ dans $M(\eta)$, et en supposant qu'il peut être assorti d'un espace F rendant le couple $(M_0(\eta), F)$ admissible.

La contradiction résultera des deux lemmes suivants.

Lemme 29. *On peut trouver* $m_0 \in \mathcal{S}$, $\psi \in \mathcal{S}$, $x \in \mathbb{R}^3$ *et* $\Lambda \subset \mathbb{Z}^3 - \{0\}$ *tels que, si*

$$u(1,\cdot) = \sum_{l\in\Lambda} d_l \; m(\cdot - l),$$

où $m = e^{\Delta} m_0$ *et* $(d_l)_{l\in\Lambda}$ *est une famille quelconque de coefficients presque tous nuls, si*

$$u(t,\cdot) = \frac{1}{\sqrt{t}} \; u\left(1, \frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right), \; t > 0,$$

alors il existe pour tout l *un coefficient* $\varepsilon_l \in \{-1,+1\}$ *tel que, en posant*

$$v(1,\cdot) = \sum_{l\in\Lambda} \overline{d}_l \; \varepsilon_l \; m(\cdot - l),$$

$$v(t,\cdot) = \frac{1}{\sqrt{t}} \; v\left(1, \frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right), \; t > 0,$$

on ait

$$\sum_{l\in\Lambda} \frac{|d_l|^2}{|l|^3} \leq C \; |\psi * B(u,v)(1)(x)| + C \; \|d_l\|^2_{l^\infty}, \tag{49}$$

pour une certaine constante C *indépendante de la famille* $(d_l)_{l\in\Lambda}$*. De plus, on peut choisir* $|x|$ *aussi grand qu'on veut.*

Lemme 30. *Avec les notations précédentes, et si* $|x|$ *est assez grand, alors dès que* $\sum_{n\geq 0} 2^{-3n} \inf_{k\geq n} 2^{3k} \eta_k^2 = +\infty$, *on peut trouver une famille* $(c_l)_{l\in\Lambda}$ *dans* $l^\infty(\Lambda)$ *telle que*

$$\sum_{l\in\Lambda} \frac{|c_l|^2}{|l|^3} = +\infty, \tag{50}$$

(51) *pour toute famille* $(\varepsilon_l)_{l\in\Lambda} \in \{-1,1\}^\Lambda$, *on a* $\sum_{l\in\Lambda} \varepsilon_l c_l \; m_0(\cdot - l)$ $\in M(\eta)$, *où* m_0 *est la fonction du lemme 29, et ce uniformément par rapport à* $(\varepsilon_l)_{l\in\Lambda}$.

Admettant pour le moment ces deux résultats, on revient au théorème 11 où l'on a supposé le couple $(M_0(\eta), F)$ admissible. Soit $(c_l)_{l\in\Lambda}$ la famille donnée par le lemme 30, où Λ est l'ensemble donné par le lemme 29. Pour tout N entier positif, on pose $d_l = c_l$ si $l \in \Lambda$ et $|l| \leq N$, $d_l = 0$ sinon. Ensuite, on définit les fonctions u_0 et v_0 (dépendant de N) par

$$u_0(y) = \sum_l d_l \; m_0(y - l) \; , \quad v_0(y) = \sum_l \overline{d}_l \; \varepsilon_l \; m_0(y - l).$$

Il résulte du lemme 30 que $u_0, \; v_0 \in M_0(\eta)$ uniformément par rapport à N.

Soient alors u et v définies comme au lemme 29. Puisque $u(1,\cdot) = e^{\Delta}u_0$, et de même pour $v(1,\cdot)$, on a $u(1,\cdot)$, $v(1,\cdot) \in F$, ce qui implique $u, v \in \mathcal{F}$. La continuité de B sur $\mathcal{F}$ entraîne en particulier que $B(u,v)(1) \in \mathcal{S}'$. Plus précisément, il existe une constante C ne dépendant pas de N telle que

$$\begin{aligned}
|\psi * B(u,v)(1)(x)| &\leq C\ \|B(u,v)(1)\|_F \\
&\leq C\ \|B\|\ \|u\|_{\mathcal{F}}\ \|v\|_{\mathcal{F}} \\
&\leq C\ \|B\|\ \|u(1,\cdot)\|_F\ \|v(1,\cdot)\|_F \\
&\leq C\ \|B\|\ \ \|e^{\Delta}\|^2_{F,M(\eta)}\ \|u_0\|_{M(\eta)}\ \|v_0\|_{M(\eta)},
\end{aligned}$$

où x est le point donné par le lemme 29.

On déduit alors de (49) et de ce qui précède l'existence d'une constante M indépendante de N telle que

$$\sum_{l\in\Lambda,|l|\leq N} \frac{|c_l|^2}{|l|^3} \leq M.$$

Ceci est contradictoire avec (50), et ramène la preuve du théorème 11 à celle des lemmes 29 et 30.

Remarque : Puisque la suite $(c_l)_{l\in\Lambda}$ est bornée, on a toujours $u_0, v_0 \in \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$, uniformément par rapport à N. Ceci démontre le corollaire 12.

Par ailleurs, il résulte du lemme 29 qu'on a également $u_0, v_0 \in \dot{F}_\infty^{-1,2}$, uniformément par rapport à N : on ne peut donc pas faire fonctionner la méthode KW à partir de l'espace $\dot{F}_\infty^{-1,2}$ des dérivées des fonctions de BMO[5] .

4.3. Preuve du lemme 29.

Quitte à changer de repère, on suppose que le symbole $P(\xi)$ de l'opérateur $P(D)$ n'est jamais nul dans un cône ouvert de sommet 0 et d'axe le demi-axe $0z$ des cotes positives. L'ensemble Λ sera contenu dans un cône, image du précédent par une rotation d'angle $\pi/2$.

On commence par construire m_0.

Lemme 31. *Il existe $m_0 \in \mathcal{S}$, paire et à valeurs réelles, dont la transformée de Fourier est supportée par une couronne compacte ne contenant pas 0, telle que les fonctions $m(\cdot - l)$, $l \in \mathbb{Z}^3$, forment une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^3)$, où $m = e^{\Delta}m_0$.*

[5]Alors que cet article était en fin de rédaction, nous avons appris que dans un travail intitulé “Well posedness for the Navier-Stokes equations” (preprint, Northwestern University) Koch et Tataru ont démontré l'existence de solutions, pour petite donnée initiale dans $\dot{F}_\infty^{-1,2}$, dans un espace de fonctions localement de carré intégrable en temps et espace pour lequel ils obtiennent la bicontinuité de B. Cet espace ne se compare pas au nôtre et il n'y a donc pas de contradiction.

Preuve. On part de $h \in \mathcal{S}$, paire et à valeurs réelles, telle que $\widehat{h}$ soit supportée dans $\{2\pi \leq |\xi| \leq 8\pi\}$ par exemple, avec

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^3} |\widehat{h}(\xi+2\pi l)|^2 \geq \delta > 0.$$

On pose

$$\sigma(\xi) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^3} e^{-2|\xi+2\pi l|^2}\ |\widehat{h}(\xi+2\pi l)|^2,$$

et $\widehat{m}_0(\xi) = \sigma(\xi)^{-1/2}\ \widehat{h}(\xi)$. Par construction, on a

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}^3} |\widehat{m}(\xi+2\pi l)|^2 = 1,$$

d'où on déduit le lemme par la formule de Poisson. $\square$

On pose a priori

$$f(x) = u(1,x) = \sum_l d_l\ m(x-l),$$

$$g(x) = v(1,x) = \sum_l e_l\ m(x-l),$$

où (d_l) et (e_l) sont deux suites à support fini. Si $t > 0$, on pose ensuite

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\ u\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\ v\left(1, \frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

On note enfin

$$\psi * B(u,v)(1) = L(fg),$$

où $\psi \in \mathcal{S}$ est pour le moment quelconque, et $L(x,y)$ le “noyau” de L, au sens où

$$L(fg)(x) = \int L(x,y)\ f(y)\ g(y)\ dy.$$

Lemme 32.

$$L(x,y) = \int_0^1 \theta_{1-\tau}(x-\sqrt{\tau}y)\ \sqrt{\tau}\ d\tau,$$

où les fonctions $\theta_{1-\tau}$ sont définies par

$$\widehat{\theta}_{1-\tau}\ (\xi) = \widehat{\psi}(\xi)\ P(\xi)\ e^{-(1-\tau)\ |\xi|^2}. \tag{52}$$

Preuve. On part de $B(u,v)(1) = \displaystyle\int_0^1 b(\tau)\,d\tau$ où

$$b(\tau) = e^{(1-\tau)\Delta}\ P(D)\ \frac{1}{\tau}\ f\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\tau}}\right)\ g\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\tau}}\right).$$

Soit h_0 définie par $\widehat{h}_0(\xi) = P(\xi)\ e^{-|\xi|^2}$. On a

$$\begin{aligned} b(\tau)(z) &= \int \frac{1}{(1-\tau)^2}\ h_0\left(\frac{z-y}{\sqrt{1-\tau}}\right) \frac{1}{\tau} f\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right) g\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right) dy \\ &= \int \frac{\sqrt{\tau}}{(1-\tau)^2}\ h_0\left(\frac{z-\sqrt{\tau}y}{\sqrt{1-\tau}}\right) f(y)\ g(y)\ dy. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \int_0^1 \int \psi(x-z)\ \frac{\sqrt{\tau}}{(1-\tau)^2}\ h_0\left(\frac{z-\sqrt{\tau}y}{\sqrt{1-\tau}}\right) dz\ d\tau \\ &= \int_0^1\ \theta_{1-\tau}(x-\sqrt{\tau}y)\ \sqrt{\tau}\ d\tau, \end{aligned}$$

où

$$\theta_{1-\tau}(x) = \int\ \psi(x-z)\ \frac{1}{(1-\tau)^2}\ h_0\left(\frac{z-\sqrt{\tau}y}{\sqrt{1-\tau}}\right)\ dz.$$

On a bien (52), et le lemme est démontré. □

On définit maintenant θ par

$$\widehat{\theta}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi)\ P(\xi)\ e^{-|\xi|^2},$$

et le noyau L_0 par

$$L_0(x,y) = \int_0^1\ \theta(x-\sqrt{\tau}y)\ \sqrt{\tau}\ d\tau.$$

Lemme 33.

$$L(fg) = L_0(fg) + w_0,$$

où w_0 est une fonction bornée vérifiant

$$\|w_0\|_{L^\infty} \le C\ \|d_l\|_{l^\infty}\ \|e_l\|_{l^\infty}.$$

Preuve. On définit les fonctions $\sigma_{1-\tau}$ par la formule

$$\theta_{1-\tau} = \theta + \tau\ \sigma_{1-\tau},$$

autrement dit

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{1-\tau}(\xi) &= \widehat{\psi}(\xi)\ P(\xi)\ \frac{e^{-(1-\tau)|\xi|^2} - e^{-|\xi|^2}}{\tau} \\ &= \widehat{\psi}(\xi)\ P(\xi)\ |\xi|^2\ \frac{1}{\tau}\ \int_{1-\tau}^1\ e^{-s|\xi|^2}\ ds. \end{aligned}$$

Si $s \in [0,1]$, alors la fonction dont la transformée de Fourier est $\widehat{\psi}(\xi)\ P(\xi)\ |\xi|^2\ e^{-s|\xi|^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R}^3)$, uniformément par rapport à s. Il en résulte

$$\|\sigma_{1-\tau}\|_{L^1} \leq C \tag{53}$$

pour tout τ.

La fonction w_0 s'écrit

$$w_0(x) = \int L_0'(x,y)\ f(y)\ g(y)\ dy,$$

où

$$L_0'(x,y) = \int_0^1 \sigma_{1-\tau}\ (x - \sqrt{\tau}y)\ \tau^{3/2}\ d\tau.$$

On déduit de (53) que

$$\sup_x \int |L_0'(x,y)|\ dy \leq C,$$

ce qui implique

$$\|w_0\|_{L^\infty} \leq C\ \|fg\|_{L^\infty} \leq C\ \|d_l\|_{l^\infty}\ \|e_l\|_{l^\infty}.$$

□

Lemme 34.

$$L_0(fg)(x) = 2\sum_{l\in\mathbb{Z}^3} d_l e_l \int_0^1 \theta(x-\tau l)\tau^2 d\tau + w_1,$$

où w_1 est bornée, avec $\|w_1\|_{L^\infty} \leq C\ \|d_l\|_{l^\infty}\ \|e_l\|_{l^\infty}$.

Preuve. Partant de

$$\begin{aligned} L_0(fg)(x) &= \int_0^1 \int \theta(x-\sqrt{\tau}y)\ f(y)\ g(y)\ \sqrt{\tau}\ dy\ d\tau \\ &= 2\int_0^1 \int \theta(x-\tau y)\ f(y)\ g(y)\ \tau^2\ dy\ d\tau, \end{aligned}$$

on développe le produit $f(y)\ g(y)$. Ceci permet de calculer w_1 sous la forme $w_1 = w_2 + w_3$, où

$$w_2 = 2\sum_{l\in\mathbb{R}^3} d_l e_l \int_0^1 \int \tau^2\{\theta(x-\tau y) - \theta(x-\tau l)\} m^2(y-l) dy d\tau,$$

et

$$w_3 = 2\sum_{\substack{l\in\mathbb{R}^3\\ l\neq l'}} d_l e_{l'} \int_0^1 \int \theta(x-\tau y) m(y-l) m(y-l')\tau^2 dy d\tau.$$

On majore $|w_2(x)|$ par

$$2\|d_l\|_\infty \|e_l\|_\infty \int_0^1 \sum_l \int \tau^2 |\theta(x-\tau y) - \theta(x-\tau l)| |m(y-l)|^2 dy d\tau.$$

Puisque m, θ et $\nabla\theta$ sont à décroissance rapide (en choisissant convenablement ψ, par exemple de sorte que $0 \notin \operatorname{Supp} \widehat{\psi}$), on a pour tout p assez grand et x, y fixés

$$\begin{aligned}
&\sum_l |\theta(x-\tau y) - \theta(x-\tau l)|\ |m(y-l)|^2 \\
&\qquad \le C\tau \sum_{l, |y-l| \le \frac{1}{\tau}} |y-l|\ |m(y-l)|^2\ (1+|x-\tau y|)^{-p} \\
&\qquad\quad + C \sum_{l, |y-l| > \frac{1}{\tau}} |m(y-l)|^2\ \{(1+|x-\tau y|)^{-p} + (1+|x-\tau l|)^{-p}\} \\
&\qquad \le C\tau (1+|x-\tau y|)^{-p} \\
&\qquad\quad + C \sum_{l, |y-l| > \frac{1}{\tau}} \tau^4\ (1+|y-l|)^{-p}\ (1+|x-\tau l|)^{-p} \\
&\qquad \le C\tau (1+|x-\tau y|)^{-p}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|w_2\|_{L^\infty} \le\ C\ \|d_l\|_{L^\infty}\ \|e_l\|_{L^\infty}$.

Pour traiter w_3, on utilise l'orthogonalité des fonctions $m(. - l)$ et $m(\cdot - l')$ lorsque $l \neq l'$ (lemme 31) pour écrire

$$w_3(x) = 2 \sum_{\substack{l, l' \in \mathbb{Z}^3 \\ l \neq l'}} d_l e_{l'} \int_0^1 \int \{\theta(x-\tau y) - \theta(x-\tau l)\} \tau^2 m(y-l) m(y-l') dy d\tau.$$

Comme $\sum_{l'}\ |m(\cdot - l')|$ est une fonction bornée, on a

$$|w_3(x)| \le C \|d_l\|_{l^\infty} \|e_l\|_{l^\infty} \sum_l \int_0^1 \int |\theta(x-\tau y) - \theta(x-\tau l)| \tau^2 |m(y-l)| dy d\tau,$$

et on conclut comme pour w_2. Le lemme est démontré. $\square$

Les lemmes 33 et 34 montrent qu'il existe une constante C telle que, pour tout x

$$\left| \sum_l d_l e_l \int_0^1 \theta(x-\tau l)\ \tau^2 d\tau \right| \le \frac{1}{2} |\psi * B(u,v)(1)(x)| + C \|d_l\|_{l^\infty}\ \|e_l\|_{l^\infty}.$$

On pose, si n est fixé

$$\varepsilon_l(x) = \operatorname{sgn} \int_0^1\ \theta(x-\tau l)\ \tau^2\ d\tau. \tag{54}$$

Alors, si $e_l = \overline{d}_l\ \varepsilon_l(x)$, on obtient l'inégalité

$$\sum_l |d_l|^2 \left| \int_0^1 \theta(x-\tau l)\ \tau^2 d\tau \right| \le \frac{1}{2} |\psi * B(u,v)(1)(x)| + C \|d_l\|_{l^\infty}^2. \tag{55}$$

Il s'agit maintenant d'en déduire (49). Pour cela, on choisit θ de manière appropriée.

On rappelle que $\widehat{\theta}(\xi) = \widehat{\psi}(\xi)\ P(\xi)\ e^{-|\xi|^2}$, où $\psi \in \mathcal{S}$ et $0 \notin \operatorname{Supp}\widehat{\psi}$, et que $P(\xi) \neq 0$ pour tout ξ tel que $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} \leq \delta\ \xi_3$, pour un certain $\delta > 0$. Si $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, on note $x' = (x_2, x_3)$ et $x = (x_1, x')$. On peut alors choisir ψ de sorte que

$$\theta(x) = \varphi(x_1)\ \psi'(x'),$$

où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est à valeurs réelles, $\varphi(0) > 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$, et où $\psi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\psi'(0)$ réel > 0.

Lemme 35. *Il existe $A \geq 0$, $\alpha, \beta > 0$ tels que si $x = (x_1, 0)$ et $l = (l_1, l')$ vérifient les conditions $x_1 \geq A$, $l_1 \geq 4x_1$ et $d(x, [0, l]) \leq \alpha$, alors*

$$\left| \int_0^1 \theta(x - \tau l)\ \tau^2\ d\tau \right| \geq \beta\ \frac{x_1^2}{l_1^3}.$$

Preuve. Soient $x = (x_1, 0)$, $x_1 > 0$, et $l \in \mathbb{Z}^3$ tels que $d(x, [0, l]) \leq \alpha$, où $\alpha > 0$ est à choisir. Soit $\tau_0 l$, $0 \leq \tau_0 \leq 1$, le point de $[0, l]$ en lequel $d(x, [0, l])$ est atteinte, et γ l'angle entre $(0, x)$ et $(0, l)$. On a

$$(x_1 - \tau_0 l_1)^2 + |\tau_0 l'|^2 \leq \alpha^2,$$

et $\sin\gamma \leq \frac{\alpha}{x_1}$. Si $x_1 \geq A \geq 2\alpha$, alors $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{6}$, d'où $\tau_0 \frac{l_1}{x_1} = \cos^2\gamma \geq \frac{3}{4}$, c'est-à-dire

$$x_1 - 2\tau_0 l_1 \leq -\frac{x_1}{2}.$$

Enfin, on a $\tau_0 \leq \frac{1}{4}$ dès que $l_1 \geq 4x_1$.

On part alors de la décomposition

$$\int_0^1 \theta(x - \tau l)\ \tau^2\ d\tau = \int_0^{2\tau_0} \ldots + \int_{2\tau_0}^1 \ldots.$$

On a d'une part

$$\left| \int_0^{2\tau_0} \theta(x - \tau l)\tau^2 d\tau \right| \geq |\psi'(0)| \left| \int_0^{2\tau_0} \varphi(x_1 - \tau l_1)\tau^2 d\tau \right| \\ - 2\alpha \|\nabla\psi'\|_{L^\infty} \int_0^{2\tau_0} |\varphi(x_1 - \tau l_1)|\tau^2 d\tau,$$

et d'autre part

$$\left| \int_{2\tau_0}^1 \theta(x - \tau l)\tau^2 d\tau \right| \leq \|\psi'\|_{L^\infty} \int_{2\tau_0}^1 |\varphi(x_1 - \tau l_1)|\tau^2 d\tau.$$

On calcule les trois intégrales qui apparaissent dans ces inégalités :

$$\int_0^{2\tau_0} \varphi(x_1 - \tau l_1)\tau^2 d\tau = \frac{1}{l_1^3} \int_{x_1 - 2\tau_0 l_1}^{x_1} (x_1 - v)^2\ \varphi(v)\ dv,$$

de même si φ est remplacé par $|\varphi|$, et enfin

$$\int_{2\tau_0}^{1} |\varphi(x_1 - \tau l_1)|\tau^2 d\tau = \frac{1}{l_1^3} \int_{x_1 - l_1}^{x_1 - 2\tau_0 l_1} (x_1 - v)^2\ |\varphi(v)|\ dv.$$

Puisque $x_1 - 2\tau_0 l_1 \le -\frac{x_1}{2}$, on a

$$\int_{x_1 - 2\tau_0 l_1}^{x_1} \varphi(v)\ dv \ge \frac{1}{2}$$

dès que x_1 est assez grand. On en déduit

$$\left| \int_0^{2\tau_0} \varphi(x_1 - \tau l_1)\ \tau^2\ d\tau \right| \ge \frac{1}{2}\ \frac{x_1^2}{l_1^3} - C\ \frac{1 + x_1}{l_1^3}$$

pour une certaine constante C ne dépendant que de φ. On a également

$$\int_0^{2\tau_0} |\varphi(x_1 - \tau l_1)|\ \tau^2\ d\tau \le C\ \frac{1 + x_1 + x_1^2}{l_1^3},$$

et

$$\int_{2\tau_0}^{1} |\varphi(x_1 - \tau l_1)|\ \tau^2\ d\tau \le \frac{C}{l_1^3}\ \int_{-\infty}^{-x_1/2} v^2\ |\varphi(v)|\ dv.$$

Rassemblant les diverses inégalités obtenues, il vient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \theta(x - \tau l)\tau^2 d\tau \right| &\ge \frac{1}{2}|\psi'(0)|\frac{x_1^2}{l_1^3} \\ &\qquad - \frac{C}{l_1^3}\left(1 + x_1 + \alpha x_1^2 + \int_{-\infty}^{-x_1/2} v^2|\varphi(v)|dv\right), \end{aligned}$$

si x_1 est assez grand. Le lemme en résulte. □

L'ensemble des lemmes précédents, avec les inégalités (54 - 55), démontre le lemme 29. On relève que n'importe quel $x = (x_1, 0)$ assez grand convient (à un éventuel changement de repère près), et que Λ est l'ensemble des $l = (l_1, l')$ tels que $l_1 \ge 4x_1$ et $d(x, [0, l]) \le \alpha$, c'est-à-dire des points de $\mathbb{Z}^3$ se trouvant à l'intérieur d'un certain tronc de cône. Noter que $|l| \le C\ l_1$, pour tout $l \in \Lambda$.

4.4. **Preuve du lemme 30.**

On fixe maintenant un tel x et l'ensemble Λ associé. Sans perdre de généralité, on suppose $\alpha \le 1$, et $x_1 > 4(\alpha + 1)$. Enfin, on se place dans l'hypothèse où $\displaystyle\sum_{n \ge 0} 2^{-3n} \inf_{k \ge n} 2^{3k}\,\eta_k^2 = +\infty$.

Si $j \ge 4$ et $l = (l_1, l') \in \mathbb{Z}^3$ est tel que $|l'| \le \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\ 2^j$ et $l_1 \in 2^j\ x_1 + \left[-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\ 2^j, \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\ 2^j\right]$, on pose a priori $c_l = \delta_j$, pour un certain $\delta_j > 0$. On note Λ_j l'ensemble de ces points l : les Λ_j sont deux à deux disjoints et inclus dans Λ. Si $l \in \Lambda$ et $l \notin \bigcup_{j\geq 4} \Lambda_j$, on pose $c_l = 0$. Dans ces conditions, les séries $\sum_{l\in\Lambda} \frac{|c_l|^2}{|l|^3}$ et $\sum_{j\geq 4} \delta_j^2$ sont de même nature.

Si $n \geq 0$, soit $\sigma_n = \inf_{k\geq n} 2^{3k}\ \eta_k^2$. On choisit $\delta_4^2 = 2^{-12}\ \sigma_4$ et, si $j \geq 5$, $\delta_j^2 = 2^{-3j}\ (\sigma_j - \sigma_{j-1})$. On a alors par construction les deux propriétés suivantes :

$$\sum_{j\geq 4} \delta_j^2 = +\infty, \tag{56}$$

$$\sum_{j\geq n} 2^{3(j-n)}\ \delta_j^2 \leq \eta_n^2 \qquad \text{pour tout } n \geq 4. \tag{57}$$

Comme on a déjà remarqué que $\sum_{j\geq 4} \delta_j^2$ et $\sum_{l\in\Lambda} \frac{|c_l|^2}{|l|^3}$ sont de même nature, (56) montre que (50) est vrai.

Il reste à prouver (51) : on pose

$$a(y) = \sum_{l\in\Lambda} \varepsilon_l\ c_l\ m_0(y-l),$$

où $\varepsilon_l \in \{-1, 1\}$ pour tout l.

D'après le lemme 31, la transformée de Fourier de a est supportée par une couronne compacte ne contenant pas 0. L'appartenance de a à $M(\eta)$ est donc équivalente à l'existence d'une constante C telle que pour tous $y_0 \in \mathbb{R}^3$ et $k \geq 0$

$$⨍_{B(y_0,2^k)} |a|^2 \leq C\ \eta_k^2. \tag{58}$$

Soient $y_0 \in \mathbb{R}^3$ et $k \geq 0$. Trois cas sont à considérer, le premier étant celui où il existe $j \geq k+1$ et $l_0 \in \Lambda_j$ tels que $l_0 \in B(y_0, 2^{k+1})$.

On vérifie d'abord, dans ce cas, que

$$\Lambda_{j'} \cap B(y_0, 2^{k+1}) = \emptyset$$

si $j' \neq j$. En effet, on sait que $|l_0 - y_0| \leq 2^{k+1}$ et $|l_0 - 2^j x| \leq \alpha\ 2^j$, d'où $|y_0 - 2^j x| \leq (\alpha+1)2^j$. S'il existait $j' \neq j$ et $l \in \Lambda_{j'} \cap B(y_0, 2^{k+1})$, on aurait de même

$$|y_0 - 2^{j'} x| \leq (\alpha+1)\ 2^{\max(j',k+1)},$$

d'où

$$|2^j - 2^{j'}|\ |x| \leq (\alpha+1)\ (2^j + 2^{\max(j',k+1)}),$$

puis $|x| \leq 4(\alpha+1)$, ce qui est faux.

On écrit alors

$$a(y) = \sum_{l \in \Lambda_j} \varepsilon_l \; c_l \; m_0(y-l) + \sum_{l \notin \Lambda_j} \varepsilon_l \; c_l \; m_0(y-l).$$

La première somme donne

$$\begin{aligned} \fint_{B(y_0,2^k)} \Big| \sum_{l \in \Lambda_j} \varepsilon_l c_l m_0(y-l) \Big|^2 dy &\leq \delta_j^2 \fint_{B(y_0,2^k)} \Big(\sum_{l \in \Lambda_j} |m_0(y-l)| \Big)^2 dy \\ &\leq C \; \delta_j^2 \\ &\leq C \; \eta_k^2 \end{aligned}$$

d'après la définition de δ_j et la décroissance de η. Pour traiter la deuxième somme, on utilise la décroissance rapide de m_0. Si $j' \neq j$, on a

$$|y_0 - 2^{j'} x| \geq |(\alpha+1)2^j - (2^j - 2^{j'})x| \geq C \max(2^j, 2^{j'}).$$

On en déduit que $|y-l| \geq C2^j$ si $y \in B(y_0, 2^k)$ et $l \in \bigcup_{j' \neq j} \Lambda_{j'}$, puis que

$$\Big| \sum_{l \notin \Lambda_j} \varepsilon_l c_l \, m_0(y-l) \Big| \leq C \sum_{l \notin \Lambda_j} |m_0(y-l)| \leq C_N 2^{-Nj}$$

pour tout $N \geq 0$.

La régularité de la suite η implique l'existence de $N \geq 0$ tel que $\eta_0 2^{-Nj} \leq \eta_j$ pour tout j. On a donc finalement

$$\fint_{B(y_0,2^k)} \Big| \sum_{l \notin \Lambda_j} \varepsilon_l c_l \, m_0(y-l) \Big|^2 dy \leq \leq C\eta_j^2 \leq C\eta_k^2, \tag{59}$$

d'où l'inégalité (58) dans le premier cas.

On suppose maintenant qu'il existe $j_0 \leq k$ et $l_0 \in \Lambda_{j_0}$ tels que $l_0 \in B(y_0, 2^{k+1})$. On décompose alors a en

$$a(y) = \sum_{\substack{l \in \Lambda_j \\ j \leq k}} \varepsilon_l c_l \, m_0(y-l) + \sum_{\substack{l \in \Lambda_j \\ j \geq k+1}} \varepsilon_l c_l \, m_0(y-l).$$

Pour la première somme on écrit

$$\begin{aligned}
\fint_{B(y_0,2^k)} \Big| \sum_{\substack{l\in\Lambda_j \\ j\le k}} \varepsilon_l c_l m_0(y-l)\Big|^2 dy &\le C\ 2^{-3k} \int_{\mathbb{R}^3} \Big| \sum_{\substack{l\in\Lambda_j \\ j\le k}} \varepsilon_l c_l m_0(y-l)\Big|^2 dy \\
&\le C\ 2^{-3k} \sum_{\substack{l\in\Lambda_j, \\ j\le k}} |c_l|^2 \\
&\le C\ 2^{-3k} \sum_{j\le k} 2^{3j}\, \delta_j^2 \\
&\le C\ \eta_k^2
\end{aligned}$$

d'après (57) et le lemme 31. Pour la deuxième somme, on procède comme au premier cas : si $y \in B(y_0, 2^k)$ et $l \in \Lambda_j,\ j \ge k+1$, alors $|y-l| \ge C\ 2^k$, et on conclut comme pour (59). Au total, on a obtenu (58).

Le troisième et dernier cas est celui où aucun Λ_j n'intersecte $B(y_0, 2^{k+1})$. On a donc $|y-l| \ge 2^k$ pour tous $l \in \bigcup_{j\ge 4} \Lambda_j$ et $y \in B(y_0, 2^k)$. On raisonne une fois encore comme pour (59).

On a ainsi prouvé (58) dans tous les cas, ce qui implique (51) : le lemme 30 est entièrement prouvé, et la démonstration du théorème 11 est complète.

5. Un cas non invariant : espaces 2-microlocaux

Si l'invariance de l'espace E, dans les théorèmes 8 et 9, est une hypothèse naturelle, elle n'est pas pour autant nécessaire. Il est par exemple possible de résoudre (1) par la méthode KW lorsque u_0 est une distribution de norme assez petite dans un espace 2-microlocal $\dot{C}^{-1,s'}(x_0)$, x_0 fixé. Caractérisés par la condition

$$|\Delta_j f(x)| \le C\ 2^j (1 + 2^j|x-x_0|)^{-s'},$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^3$ et $j \in \mathbb{Z}$, ces espaces ne sont invariants ni par translation ni par homothétie de centre autre que x_0. Ce résultat, et sa généralisation à un cadre géométrique plus vaste, font l'objet de cette section.

5.1. **Bons espaces non invariants.**

Il faut d'abord étendre convenablement les théorèmes 8 et 9. On observe pour cela que l'hypothèse d'invariance de E est utilisée, tout au long des preuves de ces théorèmes, de deux façons. En premier lieu, la Proposition 13 est fréquemment invoquée : il suffit, si E n'est pas invariant, de supposer qu'il est inclus dans $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$. En second lieu, l'invariance par translation de E entraîne que tout opérateur de convolution par une fonction intégrable agit continûment sur E, et cela est appliqué par exemple aux opérateurs Δ_j et S_j. Un examen attentif des preuves montre cependant que l'hypothèse suivante est suffisante :

(60) pour toute fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, il existe une constante C telle que, pour tous $t > 0$ et $f \in E$, $f * \phi_t \in E$, où $\phi_t = t^{-3}\ \phi\left(\frac{\cdot}{t}\right)$, avec

$$\|f * \phi_t\|_E \leq C\ \|f\|_E.$$

On est donc amené à étendre la définition des bons espaces.

Definition 36. *Si E est un espace fonctionnel non invariant, on dit que c'est un bon espace non invariant lorsque*

a) *E vérifie (60),*
b) *E s'injecte continûment dans $\dot{B}_\infty^{-1,\infty}$,*
c) *E vérifie (19) avec une suite $\eta \in l^1(\mathbb{Z})$.*

Il faut également généraliser la notion de couple admissible, c'est-à-dire étendre au cadre non invariant les propriétés (P1), (P2) et (P3) du paragraphe 1.2.

Si E est un espace fonctionnel non invariant ayant les propriétés a) et b) de la définition précédente, on dira que le couple (E, F), où F est un espace de Banach, est admissible lorsque les propriétés (P2') et (P3') suivantes sont satisfaites.

Propriété (P2')

a) F s'injecte continûment dans $\mathcal{S}'$,
b) F vérifie (60),
c) pour tout $t > 0$, il existe une norme sur F, notée $\|\cdot\|_{t,F}$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_F$, uniformément sur tout compact de $]0, \infty[$, et il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{t,F} \leq C \|u_0\|_E$$
pour tout $u_0 \in E$.

Propriété (P3')

Si $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions u, définies sur $]0, \infty[$ et continues à valeurs dans F, telles que

$$\|u\|_{\mathcal{F}} = \sup_{t>0}\ \|u(t)\|_{t,F} < \infty,$$

alors

a) B est continue de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$,
b) $\lim\limits_{t\to 0}\ B(u, v)(t) = 0$ dans S', pour tous $u, v \in \mathcal{F}$.

Le résultat suivant est l'extension à ce cadre des théorèmes 8 et 9, et se démontre de la même façon. On se contente de l'énoncer.

Théorème 37. *Si E est un bon espace non invariant, il existe un espace de Banach F formant avec lui un couple admissible. Si de plus $\sum_{n\geq 0} n\eta_n < +\infty$, on peut choisir $F \subset E$, et toute solution $u \in \mathcal{F}$ de (1) est régulière, au sens du théorème 9.*

5.2. **Espaces 2-microlocaux généralisés.**

Afin d'autoriser des distributions aussi singulières que possible, on généralise la définition des $\dot{C}^{-1,s'}(x_0)$ en remplaçant le singleton $\{x_0\}$ par un ensemble S, pour le moment un fermé quelconque de $\mathbb{R}^3$.

Definition 38. *Une distribution tempérée f appartient à $\dot{C}_S^{-1,s'}$, $s' > 0$, si $\lim_{j\to-\infty} S_j f = 0$ dans $\mathcal{S}'$, et s'il existe une constante C telle que, pour tous $x \in \mathbb{R}^3$ et $j \in \mathbb{Z}$, on ait*

$$|\Delta_j f(x)| \leq C\, 2^j\, (1 + 2^j d_S(x))^{-s'},$$

où $d_S(x)$ désigne la distance de x à l'ensemble S.

Il n'est pas immédiat que cette définition ne dépende pas du choix des opérateurs Δ_j. Cela provient du lemme suivant, qu'on utilisera à plusieurs reprises.

Lemme 39. *Pour tout $N > 3 + s'$, il existe une constante C telle que, pour tous $x \in \mathbb{R}^3$ et $j \in \mathbb{Z}$*

$$\int 2^{3j}(1 + 2^j|x-y|)^{-N}\ (1 + 2^j\ d_S(y))^{-s'} dy \leq C\ (1 + 2^j d_S(x))^{-s'}.$$

Preuve. Puisque $N > 3$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{d_S(y)\geq\frac{1}{2}d_S(x)} 2^{3j}(1 + 2^j|x-y|)^{-N}\ (1 + 2^j d_S(y))^{-s'} dy \\
&\qquad \leq C\ (1 + 2^j d_S(x))^{-s'} \int_{d_S(y)\geq\frac{1}{2}d_S(x)} 2^{3j}(1 + 2^j|x-y|)^{-N} dy \\
&\qquad \leq C\ (1 + 2^j d_S(x))^{-s'}.
\end{aligned}$$

D'autre part, si $d_S(y) \leq \frac{1}{2}\ d_S(x)$, alors $|x-y| \geq \frac{1}{2} d_S(x)$. Cette observation découle de l'inégalité élémentaire

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^3 \qquad d_S(x) \leq |x-y| + d_S(y). \tag{61}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{d_S(y)\le\frac12 d_S(x)} & 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}\ (1+2^jd_S(y))^{-s'}dy \\
&\le C\ (1+2^jd_S(x))^{-s'}\int_{d_S(y)\le\frac12 d_S(x)} 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N+s'}dy \\
&\le C\ (1+2^jd_S(x))^{-s'},
\end{aligned}$$

puisque $N-s'>3$. Le lemme est démontré. $\square$

Proposition 40. *Pour tout $s'>0$, $\dot C_S^{-1,s'}$ est un espace fonctionnel qui s'injecte continûment dans $\dot B_\infty^{-1,\infty}$ et qui vérifie (60).*

Preuve. L'injection continue de $\dot C_S^{-1,s'}$ dans $\mathcal S'$ ou dans $\dot B_\infty^{-1,\infty}$ est évidente.

L'injection continue de $\mathcal S$ dans $\dot C_S^{-1,s'}$ est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 41. *Pour tous $x_0\in\mathbb R^3$, $N,p\ge 0$ et $f\in\mathcal S$, il existe une constante C telle que*

$$\begin{aligned}
|\Delta_j f(x)| &\le C\ 2^{3j}\,(1+2^j|x-x_0|)^{-N}, \quad j<0,\\
|\Delta_j f(x)| &\le C\ 2^{-jp}\,(1+2^j|x-x_0|)^{-N}, \quad j\ge 0.
\end{aligned}$$

Ce lemme se démontre directement dans le cas $j<0$, et en utilisant (22) dans le cas $j\ge 0$. Choisissant $x_0\in S$, il implique $\mathcal S\subset \dot C_S^{-1,s'}$, quel que soit $s'>0$, puisque $|x-x_0|\ge d_S(x)$ pour tout x. La continuité de l'injection est laissée au lecteur.

Soit $\mathcal E$ l'espace des distributions tempérées f telles que $\lim\limits_{j\to-\infty} S_jf=0$ dans $\mathcal S'$ et

$$\|f\|_{\mathcal E}=\sum_{j\in\mathbb Z} 2^j\int|\Delta_jf(x)|\,(1+2^jd_S(x))^{-s'}\ dx<+\infty.$$

On vérifie que l'espace $\mathcal E$ est complet, et que $\mathcal S$ est dense dans $\mathcal E$. Soit λ une forme linéaire continue sur $\mathcal E$ et $\psi\in\mathcal S$ telle que $\operatorname{Supp}\widehat\psi\subset\Gamma_0$. On a pour tout x

$$\begin{aligned}
|(\lambda,2^{3j}\psi(2^jx-2^j\cdot))| &\le C\ \|2^{3j}\psi(2^jx-2^j.)\|_{\mathcal E}\\
&\le C\ 2^{4j}\int|\psi(2^jx-2^jy)|(1+2^jd_S(y))^{-s'}\ dy\\
&\le C\ 2^j(1+2^jd_S(x))^{-s'},
\end{aligned}$$

d'après le lemme 39. On en déduit que le dual de $\mathcal E$ est $\dot C_S^{-1,s'}$, et que ce dernier est un espace fonctionnel.

Il reste à prouver (60). Si $\phi \in \mathcal{S}$ et $t > 0$, on a $|\Delta_j\ \phi(x)| \leq C_N\ 2^{3j}(1+2^j|x|)^{-N}$ pour tout $N \geq 0$, d'après le lemme 41, et par conséquent

$$|\Delta_j \phi_t(x)| \leq C_N\ 2^{3j}(1+2^j|x|)^{-N}$$

uniformément par rapport à $t > 0$.

Si $f \in \dot{C}_S^{-1,s'}$ et $j \in \mathbb{Z}$, il résulte de (16) que

$$\Delta_j(\phi_t * f) = \widetilde{\Delta}_j \phi_t * \Delta_j f,$$

puis que

$$\begin{aligned}
&|\Delta_j(\phi_t * f)(x)| \\
&\qquad \leq C\ \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}} \int 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}\, 2^j(1+2^j d_S(y))^{-s'} dy \\
&\qquad \leq C\ \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}}\ 2^j(1+2^j d_S(x))^{-s'},
\end{aligned}$$

en utilisant une nouvelle fois le lemme 39. Ceci prouve que

$$\|\phi_t * f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}} \leq C\ \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}},$$

uniformément par rapport à t. La Proposition 40 est démontrée. □

Exemples : notant x_1, x_2, x_3 les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^3$, les distributions v.p. $\frac{1}{x_1}$ et $\frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}$ appartiennent respectivement à $\dot{C}_P^{-1,s'}$, $P = \{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ x_1 = 0\}$ et $\dot{C}_D^{-1,s'}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ x_1 = x_2 = 0\}$, pour tout $s' > 0$.

5.3. **Fonction de densité et bons espaces 2-microlocaux.**

Pour étudier la validité de (19) dans les espaces $\dot{C}_S^{-1,s'}$, on introduit ce qu'on appelle la fonction de densité de S.

Definition 42. *Si S est un fermé de $\mathbb{R}^3$, sa fonction de densité est la fonction ε_S, définie sur $[0,1]$ par*

$$\varepsilon_S(\delta) = \sup \frac{1}{|B(x,r)|} \left|\{y \in B(x,r)\ ;\ d_S(y) \leq \delta r\}\right|,$$

où le supremum est pris sur tous les $x \in \mathbb{R}^3$ et $r > 0$.

Noter que ε_S est croissante.

Proposition 43. *Pour tout $s' > 0$ et tout fermé S de $\mathbb{R}^3$, l'espace $\dot{C}_S^{-1,s'}$ vérifie (19) avec, si $n \geq 0$,*

$$\eta_n = C \sum_{m=0}^{n} 2^{-2s'(n-m)}\ \varepsilon_S(2^{-m})$$

pour une certaine constante C.

Preuve. Soient $f,g \in \dot{C}_S^{-1,s'}$, $\operatorname{Supp}\widehat{f} \subset \Gamma_k$, $\operatorname{Supp}\widehat{g} \subset \Gamma_l$, $k,l \in \mathbb{Z}$.

Si $|k-l| \geq 3$ et par exemple $l \leq k-3$, on a

$$|f(y)\ g(y)| \leq 2^l\ 2^k\ (1+2^k d_S(y))^{-s'}\ \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}}\ \|g\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}}$$

pour tout y. Le lemme 39 montre alors que, si $|k-j| \leq 2$,

$$|\Delta_j(fg)(x)| \leq C\ 2^l\, 2^j\, (1+2^j d_S(y))^{-s'}\ \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}}\ \|g\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}}.$$

Ceci implique (20).

Si $|k-l| \leq 2$ et si on se donne $j \leq k+4$, alors

$$|f(y)\ g(y)| \leq 4^k\ (1+2^k d_S(y))^{-2s'}\ \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}}\ \|g\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}},$$

d'où

$$|\Delta_j(fg)(x)| \leq C\ I_{j,k}(x)\ 4^k\ \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}}\ \|g\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}},$$

avec

$$I_{j,k}(x) = \int 2^{3j}\ (1+2^j|x-y|)^{-N}\ (1+2^k d_S(y))^{-2s'}\ dy,$$

N désignant un paramètre à choisir. La Proposition 43 résulte directement de l'inégalité

$$I_{j,k}(x) \leq C \sum_{m=0}^{k-j} 2^{-2s'(k-j-m)}\ \varepsilon_S(2^{-m})\ (1+2^j d_S(x))^{-2s'}, \tag{62}$$

valable lorsque $j \leq k$ et sous la condition $N > 3+2s'$ (si $k+1 \leq j \leq k+4$, le lemme 39 s'applique).

On aura besoin du résultat suivant.

Lemme 44. *Pour tout $N > 3$ il existe une constante C telle que, pour tous $x \in \mathbb{R}^3$, $j \in \mathbb{Z}$ et $\delta \in [0,1]$, on ait*

$$\int_{d_S(y)\leq \delta 2^{-j}} 2^{3j}\ (1+2^j|x-y|)^{-N}\ dy \leq C\ \varepsilon_S(\delta).$$

Preuve. Il suffit de découper l'intégrale de manière appropriée :

$$\begin{aligned}
&\int_{d_S(y)\leq \delta 2^{-j}} 2^{3j}\ (1+2^j|x-y|)^{-N}\ dy \\
&\quad\leq \int_{d_S(y)\leq\delta 2^{-j},|x-y|\leq 2^{-j}} \dots + \sum_{m\geq 1}\int_{d_S(y)\leq \delta 2^{-j}, 2^{m-j-1}\leq|x-y|\leq 2^{m-j}} \dots \\
&\quad\leq C\sum_{m\geq 0} 2^{3j}2^{-mN}|\{y\in B(x,2^{m-j}); d_S(y)\leq \delta 2^{-j}\}| \\
&\quad\leq C\sum_{m\geq 0} 2^{-m(N-3)}\ \varepsilon_S(2^{-m}\ \delta) \\
&\quad\leq C\,\varepsilon_S(\delta).
\end{aligned}$$

□

Revenant à la preuve de (62), on distingue les cas $d_S(x) \geq 2^{-j+1}$ et $d_S(x) < 2^{-j+1}$.

Si $d_S(x) < 2^{-j+1}$, on découpe $I_{j,k}(x)$ selon

$$I_{j,k}(x) = \int_{d_S(y)\geq 2^{-j}} + \int_{d_S(y)\leq 2^{-j}} .$$

Dès que $N > 3$ la première intégrale est majorée par $C\ 2^{-2s'(k-j)}$. Pour la seconde, on utilise le lemme 44 :

$$\begin{aligned}
&\int_{d_S(y)\leq 2^{-j}} 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}(1+2^k d_S(y))^{-2s'}\ dy \\
&= \sum_{m=0}^{k-j-1} \int_{2^{-m-j-1}\leq d_S(y)\leq 2^{-m-j}} \ldots + \int_{d_S(y)\leq 2^{-k}} \ldots \\
&\leq\ C \sum_{m=0}^{k-j-1} 2^{-2s'(k-j-m)} \int_{d_S(y)\leq 2^{-m-j}} 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}\ dy \\
&\quad + \int_{d_S(y)\leq 2^{-k}} 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N}\ dy \\
&\leq\ C \sum_{m=0}^{k-j-1} 2^{-2s'(k-j-m)}\varepsilon_S(2^{-m}) + C\varepsilon_S(2^{j-k}).
\end{aligned}$$

Au total, on obtient bien (62) dans ce cas.

Lorsque $d_S(x) \geq 2^{-j+1}$, on part du découpage

$$\begin{aligned}
I_{j,k}(x) &= \int_{d_S(y)\geq \frac{1}{2}d_S(x)} + \int_{2^{-j}\leq d_S(y)\leq \frac{1}{2}d_S(x)} + \int_{d_S(y)\leq 2^{-j}} \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Quand $d_S(y) \geq \frac{1}{2}d_S(x)$, on a

$$\begin{aligned}
(1+2^k d_S(y))^{-2s'} &\leq C(1+2^k d_S(x))^{-2s'} \\
&\leq C2^{-2s'(k-j)}(1+2^j d_S(x))^{-2s'},
\end{aligned}$$

puisque $k \geq j$. Cela donne (dès que $N > 3$)

$$I \leq C\ 2^{-2s'(k-j)}\ (1+2^j d_S(x))^{-2s'}. \tag{63}$$

Quand $d_S(y) \leq \frac{1}{2}d_S(x)$, on a $|x-y| \geq \frac{1}{2}d_S(x)$, en vertu de (61) d'où

$$(1+2^j|x-y|)^{-N} \leq (1+2^j d_S(x))^{-2s'}(1+2^j|x-y|)^{-N+2s'}.$$

Si de plus $d_S(y) \geq 2^{-j}$, alors on peut majorer $(1+2^k d_S(y))^{-2s'}$ par $2^{-2s'(k-j)}$, ce qui permet d'obtenir

$$II \leq C\ 2^{-2s'(k-j)}\ (1+2^j d_S(x))^{-2s'}. \tag{64}$$

Enfin, on majore III par

$$C\ (1+2^j d_S(x))^{-2s'} \int_{d_S(y)\le 2^{-j}} 2^{3j}(1+2^j|x-y|)^{-N+2s'}(1+2^k d_S(y))^{-2s'}dy.$$

On estime alors l'intégrale du membre de droite comme au premier cas, ce qui donne

$$III \le C \sum_{m=0}^{k-j} 2^{-2s'(k-j-m)}\ \varepsilon_S(2^{-m})\ (1+2^j d_S(x))^{-2s'}.$$

Avec (63 - 64), cela prouve (62) dans le deuxième cas également, et achève la démonstration de la Proposition 43. □

Des Propositions 40 et 43 découle le résultat suivant.

Théorème 45. *Si S est un fermé de $\mathbb{R}^3$ dont la fonction de densité ε_S vérifie la condition de Dini $\displaystyle\int_0^1 \varepsilon_S(\delta)\ \frac{d\delta}{\delta} < +\infty$, alors $\dot{C}_S^{-1,s'}$ est un bon espace non invariant, pour tout $s' > 0$.*

Preuve. Il suffit de vérifier que la suite η_n donnée par la Proposition 43 est sommable. □

5.4. Régularité des solutions.

Appliquant le théorème 37, on peut résoudre (1) pour toute donnée u_0 assez petite dans $\dot{C}_S^{-1,s'}$, $s' > 0$, dès que ε_S vérifie la condition de Dini, ce qu'on suppose dans ce paragraphe.

On fixe $s' > 0$ et, notant $E = \dot{C}_S^{-1,s'}$, on choisit N de sorte que le couple (E, F) soit admissible, avec $F = C_E^{N,\infty}$ (voir la démonstration du théorème 8). Soit $u \in \mathcal{F}$ une solution de (1), associée à $u_0 \in E$. Le but de ce paragraphe est l'étude de la régularité de u.

L'appartenance de u à $\mathcal{F}$ signifie exactement que

$$|\Delta_j u(t,x)| \le C\ 2^j\ (1+2^j\sqrt{t})^{-N}\ (1+2^j d_S(x))^{-s'}, \tag{65}$$

pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^3$ et $j \in \mathbb{Z}$. On voit que, comme pour l'équation de la chaleur, la solution est instantanément régularisée. En particulier, $u(t)$ est, pour chaque $t > 0$, une fonction bornée.

Proposition 46. *On a*

a) $|u(t,x)| \le \frac{C}{\sqrt{t}+d_S(x)}$ *si* $s' > 1$,

b) $|u(t,x)| \le \frac{C}{\sqrt{t}+d_S(x)} \ln\left(10 + \frac{d_S(x)}{\sqrt{t}}\right)$ *si* $s' = 1$,

c) $|u(t,x)| \le C\ \frac{1}{(\sqrt{t})^{1-s'}}\ \frac{C}{\sqrt{t}+d_S(x)}$ *si* $0 < s' < 1$.

Preuve. Il suffit d'injecter (65) dans

$$u(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j u(t,x).$$

Les calculs sont laissés au lecteur. □

Dans le cas le plus régulier, c'est-à-dire quand $s' > 1$, on a aussi $|u_0(x)| \le \frac{C}{d_S(x)}$. Ainsi, à chaque instant $t > 0$, la solution u est bornée par $\frac{C}{\sqrt{t}}$ dans un voisinage de S d'épaisseur $\sqrt{t}$, et retrouve le comportement en $\frac{1}{d_S}$ de la donnée initiale en-dehors de ce voisinage.

On peut aller un peu plus loin en remarquant qu'on a

$$\|fg\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}} \le \|f\|_{\dot{C}_S^{-1,s'}} \|g\|_{L^\infty}$$

si $f, g \in \dot{C}_S^{-1,s'}$, $\operatorname{Supp} \widehat{f} \subset \Gamma_k$, $\operatorname{Supp} \widehat{g} \subset \Gamma_l$, et $l \le k-3$ (reprendre le début de la preuve de la Proposition 43). Si, par une démarche semblable à celle de la Proposition 16, on note momentanément $\mathcal{F}_N$ au lieu de $\mathcal{F}$ l'espace des u vérifiant (65), on montre alors que l'application B est continue de $\mathcal{F}_N \times \mathcal{F}_N$ dans $\mathcal{F}_{N+1}$, pour tout N assez grand. Autrement dit, la solution u vérifie (65) pour tout N. Elle est donc de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$, et ses dérivées satisfont des estimations ponctuelles analogues à celle de la Proposition 46. Par exemple, on a dans le cas $s' > 1$:

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n}\, u(t,x)\right| + |D_x^\alpha\, u(t,x)| \le C\ (\sqrt{t} + d_S(x))^{-1-2n}$$

si $|\alpha| = 2n < s' - 1$, et

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n}\, u(t,x)\right| + |D_x^\alpha\, u(t,x)| \le C\ (\sqrt{t} + d_S(x))^{-s'}\ (\sqrt{t})^{-1-2n+s'}$$

si $|\alpha| = 2n > s' - 1$.

Remarque : c'est parce que l'espace $E = \dot{C}_S^{-1,s'}$ est lui-même de type Besov l^∞, c'est-à-dire coincïde avec $\dot{B}_E^{0,\infty}$, que la condition $\sum_{n\ge 0} n\eta_n < +\infty$ n'apparaît pas, bien que la solution u soit régulière. Dans un tel cas, les espaces F et G utilisés respectivement aux théorèmes 8 et 9 coincïdent, et il n'y a donc pas lieu de renforcer la condition de sommabilité de la suite η.

Exemples : les solutions de (1) obtenues à partir de $u_0(x) = \varepsilon\ v.p.\frac{1}{x_1}$, ou de $v_0(x) = \varepsilon\ \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, pour ε assez petit, sont de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ et vérifient toutes les estimations précédentes. Ces solutions sont auto-similaires, en vertu de l'homogénéïté de u_0, v_0. Voir aussi ([Ko,Y]), où ce type de données initiales est considéré.

5.5. **Comparaison du terme linéaire et du terme bilinéaire.**

On reste sous les hypothèses de la section 5.4, et on considère u solution de (1) associée à $u_0 \in \dot{C}_S^{-1,s'}$.

Le terme linéaire Su_0 satisfait aux estimations (65) pour tout N, mais sans qu'il soit possible a priori d'améliorer l'exposant s'. De ce point de vue, le terme bilinéaire $B(u,u)$ est plus régulier.

Lemme 47. *En posant $w = B(u,u)$, on a*

$$|\Delta_j w(t,x)| \leq C_N \; 2^j (1+2^j\sqrt{t})^{-N} \; (1+2^j d_S(x))^{-\sigma} \; L(2^j d_S(x)) \tag{66}$$

pour tout N, où $\sigma = min(2s', s'+1)$, et $L(r) = 1$ si $s' \neq 1$, $L(r) = \ln(10+r)$ si $s' = 1$.

Preuve. On note $E^\sharp$ l'espace $\dot{C}_S^{-1,\sigma}$ si $s' \neq 1$, et si $s'=1$, l'espace des distributions tempérées f telles que $\lim_{j\to-\infty} S_j f = 0$ dans $\mathcal{S}'$ et vérifient

$$|\Delta_j f(x)| \leq C \; 2^j (1+2^j d_S(x))^{-2} \ln(10+2^j d_S(x))$$

pour tous $j \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^3$. La norme de f dans $E^\sharp$ est la meilleure constante C possible.

Soit, pour tout N, $F_N^\sharp = C_{E^\sharp}^{N,\infty}$ l'espace construit au-dessus de $E^\sharp$, et $\mathcal{F}_N^\sharp$ l'espace de distributions définies sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^3$ qui lui est associé. On sait que $u \in \mathcal{F}_N$ pour tout N (section 5.4), de sorte que le lemme 47 découle de l'inégalité

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{F}_N^\sharp} \leq C_N \; \|u\|_{\mathcal{F}_N} \; \|v\|_{\mathcal{F}_N}. \tag{67}$$

Celle-ci se démontre en revenant à la preuve du théorème 8. Si $u, v \in \mathcal{F}_N$, on estime les deux termes

$$R_j(t)^\sharp = 2^j \int_0^t \left(1+2^j\sqrt{t-\tau}\right)^{-p} \|\Delta_j u(\tau) \; S_{j-2} \; v(\tau)\|_{E^\sharp} d\tau,$$

$$C_j(t)^\sharp = 2^j \int_0^t \left(1+2^j\sqrt{t-\tau}\right)^{-p} \left\| \Delta_j \Big(\sum_{k\geq j-4} \Delta_k u(\tau) \; \widetilde{\Delta}_k v(\tau) \Big) \right\|_{E^\sharp} d\tau,$$

pour tout $t>0$ et pour p assez grand.

Le terme rectangle se traite en partant de

$$S_{j-2} v(\tau,y) = \sum_{j'\leq j-3} \Delta_{j'} v(\tau,y),$$

d'où

$$\begin{aligned} |S_{j-2} \; v(\tau,y)| &\leq \sum_{j'\leq j-3} 2^{j'} (1+2^{j'} d_S(y))^{-s'} \\ &\leq C 2^j (1+2^j d_S(y))^{-\nu} \; L(2^j d_S(y)), \end{aligned}$$

où $\nu = \min(s', 1)$. On en déduit

$$|\Delta_j u(\tau, y) S_{j-2}\, v(\tau, y)| \le C\, 4^j (1 + 2^j d_S(y))^{-\sigma}\, L(2^j d_S(y))\, \big(1 + 2^j \sqrt{\tau}\big)^{-N},$$

puis

$$\|\Delta_j u(\tau) S_{j-2}\, v(\tau)\|_{E^\sharp} \le C\, 2^j \big(1 + 2^j \sqrt{\tau}\big)^{-N}$$

en utilisant le lemme 39, convenablement modifié si $s' = 1$. On en déduit que $R_j(t)^\sharp$ vérifie (26), tout comme $R_j(t)$.

Pour le terme carré, on remarque que l'inégalité (62) implique

$$\|\Delta_j (\Delta_k\, u(\tau) \widetilde{\Delta}_k\, v(\tau))\|_{E^\sharp} \le \eta_{k-j}\, 4^k\, 2^{-j} \big(1 + 2^k \sqrt{\tau}\big)^{-2N},$$

d'où on déduit que $C_j(t)^\sharp$ vérifie (27 - 28) comme au théorème 8. L'inégalité (67) en résulte, ce qui prouve le lemme. $\square$

En résumé, on a obtenu le

Théorème 48. *Soit S un fermé de $\mathbb{R}^3$ dont la fonction de densité obéit à la condition de Dini. Pour tout $s' > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que, si $u_0 \in \dot{C}_S^{-1,s'}$ est de norme au plus α, alors l'équation (1) admet une solution u. Celle-ci vérifie (65) pour tout N, est de classe C^∞ sur $]0, \infty[\times\mathbb{R}^3$, et converge vers u_0 dans $\dot{C}_S^{-1,s'}$ quand $t \to 0$ pour la topologie faible $*$. De plus, dans la décomposition $u = Su_0 + B(u,u)$, le terme $B(u,u)$ vérifie (66) pour tout N.*

Remerciements. *Merci à Mireille Berg pour sa frappe efficace de ce long manuscrit.*

Références

[Ba] O. Barraza, *Self-similar solutions in weak L^p spaces for the Navier-Stokes equations.* Rev. Mat. Iberoamericana **12**, (1996), 411-439.

[Bo] J-M. Bony, *Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations.* Tanaguchi Symp.

[C] M. Canonne, *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot, 1995.

[Co] L. Comtet, *Analyse combinatoire I*, Presses Universitaires de France.

[F,LR,Te] G. Furioli, P-G. Lemarié-Rieusset, E. Terraneo, *Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes*, prépublication **85**, juin 1998, Université d'Evry-Val d'Essonne.

[G,M] Y. Giga, T. Miyakawa, *Navier-Stokes flows in $\mathbb{R}^3$ and Morrey spaces*, Comm. PDE **14** (1989), 577-618.

[K] T. Kato, *Strong L^P solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions*, Math. Zeit. **187** (1984), 471-480.

[Ko,Y] H. Kozono, M. Yamazaki, *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equations with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. PDE **19** (1994), 959-1014.

[Le,Sz] Y. Le Jan, A-S. Sznitman, *Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations*, CRAS Paris, Série I, **324** (1997), 823-826.

[M] Y. Meyer, *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations*, Manuscrit.

[O] F. Oru, Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non linéaire. Thèse, ENS de Cachan, 1998.

[P] F. Planchon, *Global strong solutions in Sobolev or Lesbegue spaces to the incompressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$*, Ann. IHP, Anal. Non Linéaire **13** (1996), 319-336.

[S,W] E. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton University Press, 1971.

[T] M.E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations*, Comm. PDE **17** (1992), 1407-1456.

[Tr] H. Triebel, *Theory of function spaces II*, Birkhauser, 1992.

[W] F. Weissler, *The Navier-Stokes initial value problem in L^p*, Arch. Rat. Mech. Anal., **74** (1980), 219-230.

E-mail address: `auscher@u-picardie.fr` et `tchamphi@math.u-3mrs.fr`

Université d'Amiens, Faculté de mathématiques et d'Informatique, 33, rue Saint Leu, F-80039 Amiens Cedex 1, et LAMFA, CNRS, UPRES-A 6119, et, Université d'Aix-Marseille III, Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme, Avenue Escadrille Normandie-Niemen, F-13397 Marseille Cedex 20, et LATP, CNRS, UMR 6632.