HAL open science

Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur Maxwell sans jamais oser le demander

Simon Labrunie

To cite this version:

Simon Labrunie. Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur Maxwell sans jamais oser le demander. 2008. hal-00343457

HAL Id: hal-00343457

https://hal.science/hal-00343457v1

Preprint submitted on 1 Dec 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TOUT CE QUE VOUS AVEZ TOUJOURS VOULU SAVOIR SUR MAXWELL SANS JAMAIS OSER LE DEMANDER

SIMON LABRUNIE

Résumé. Nous présentons quelques aspects de la théorie mathématique et de la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires, plus particulièrement en vue de la simulation de particules chargées. Deux thématiques servent de fil conducteur à cet article : le traitement la contrainte de divergence et celui des singularités. Les équations habituelles, du premier ordre, peuvent être reformulées en équations du second ordre, plus adaptées à la simulation par éléments finis. On peut d'autre part intégrer différents traitements de la contrainte de divergence, même en présence de données bruitées. Nous esquissons la preuve d'existence et d'unicité de la solution de ces équations. La régularité de cette solution dépend fortement des singularités du domaine de calcul, et influe à son tour sur le choix de la méthode d'éléments finis. Deux méthodes sont examinées en détail : les éléments d'arête et les éléments nodaux ; pour ces derniers, deux variantes permettent une prise en compte efficace des singularités. Nous donnons des estimations d'erreurs optimales pour toutes les variantes.

1. Introduction

Depuis leur découverte il y a près d'un siècle et demi, les équations de Maxwell sont l'objet d'un intérêt constant de la part des physiciens et des ingénieurs. La variété des phénomènes qu'elles modélisent — seules ou couplées à d'autres équations — n'est pas moindre que celle de leurs applications : sans chercher à être exhaustif, citons les liaison hertziennes (radio et télévision), le radar, les différentes techniques d'imagerie médicale, le contrôle non destructif, la téléphonie mobile, l'astrophysique, la physique des plasmas de fusion.

Bien entendu, l'électromagnétisme et les équations de Maxwell ne sont pas restés à l'écart du développement spectaculaire des mathématiques appliquées et du calcul scientifique depuis un demi-siècle. L'analyse mathématique a révélé une structure très riche, unissant étroitement analyse fonctionnelle et topologie algébrique. Ces équations admettent de nombreuses formulations, et leurs solutions sont le siège de phénomènes assez subtils. Dans le domaine de l'analyse numérique, toutes les grandes familles de méthodes numériques ont trouvé leurs applications aux équations de Maxwell : différences finies, éléments finis, volumes finis, équations intégrales...

Il est d'ailleurs curieux de constater qu'à l'inverse de la mécanique, où les éléments finis sont presque systématiquement utilisés pour les problèmes réalistes, tant stationnaires qu'instationnaires, la simulation par éléments finis des équations de Maxwell instationnaires et la théorie sous-jacente sont longtemps restées peu développées. Cela tient à différentes raisons. Tout d'abord, *en l'absence de conditions*

Key words and phrases. Equations de Maxwell, calcul scientifique, éléments finis d'arête, éléments finis mixtes, correction de charge, singularités.

aux limites le système de Maxwell est équivalent à un système d'équations d'onde scalaires *découplées* pour chacune des composantes du champ électrique et du champ magnétique, tout comme pour les potentiels dont ils dérivent. Beaucoup de praticiens du calcul scientifique en ont conclu, un peu hâtivement, que pour simuler les équations de Maxwell il suffisait de savoir calculer la solution d'une équation d'onde.

Ce retard historique tient également à la nature des applications. Longtemps, la plupart des applications «réalistes» de l'électromagnétisme furent, soit des problèmes aux valeurs propres (trouver les fréquences passantes d'un guide d'onde), soit des problèmes de diffraction en régime harmonique (détection radar ou autre). Les émetteurs électromagnétiques industriels produisent naturellement un champ harmonique ; les régimes transitoires sont très rapidement amortis dans les systèmes réels ; leur simulation ne présente donc guère d'intérêt. De plus, les problèmes de diffraction admettent une formulation en équation intégrale posée sur la *surface* des obstacles, en général bien plus favorable, du point de vue numérique, qu'une formulation en éléments finis posée dans le *volume* qui les entoure. Enfin, le choix et la mise en œuvre des éléments finis pour les équations de Maxwell sont moins évidents que pour les équations de la mécanique du solide et des fluides. Les phénomènes évoqués plus haut, révélés par l'analyse fonctionnelle, peuvent se révéler catastrophiques pour la simulation numérique si celle-ci est conduite de façon «naïve».

C'est la simulation des plasmas de fusion (dans les tokamaks ou le laser Mégajoule, par exemple) et des faisceaux de particules (tels ceux que l'on trouve dans les accélérateurs) qui a redonné un intérêt considérable à la résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires, généralement couplées à des équations gouvernant le mouvement des particules (électrons, protons, ions) du plasma ou du faisceau. En effet, dans ces instruments les particules se déplacent à la fois sous l'effet de champs électromagnétiques imposés et des champs dits *auto-consistants* qu'elles créent et modifient par leur mouvement. Pour modéliser ce dernier, on utilise en général l'équation cinétique de Vlassov, parfois pourvue d'un second membre représentant les collisions entre particules. Beaucoup plus rarement, on se sert d'équations fluides comme celles d'Euler ou de Navier–Stokes ; les prédictions de ces modèles fluides sont souvent incompatibles avec l'expérience.

La simulation du système couplé Vlassov–Maxwell peut se faire par des codes eulériens (appelés *vlassoviens* dans ce contexte), ou par des codes particulaires (appelés PIC pour "Particle In Cell") qui consistent à échantillonner le plasma ou le faisceau par des «macro-particules» qui agrègent un grand nombre de particules physiques. Le schéma de principe d'un code PIC est présenté sur la figure 1.

Dans cet article, nous nous intéresserons à la partie du code mise en relief (boîte hexagonale épaisse) sur la figure 1, c'est-à-dire le calcul des champs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ par résolution numérique des équations de Maxwell. Dans des configurations réalistes, ce calcul se fait de préférence par éléments finis. Les différentes variantes utilisées appartiennent à deux grandes familles : les éléments d'arête, spécialement conçus à cet usage [11] et les éléments classiques «nodaux». Nous présenterons d'abord quelques formulations des équations de Maxwell, ainsi qu'une généralisation utile pour la simulation de particules chargées. Ensuite, nous indiquerons les principes de l'analyse mathématique de ces équations. Puis nous présenterons les éléments finis

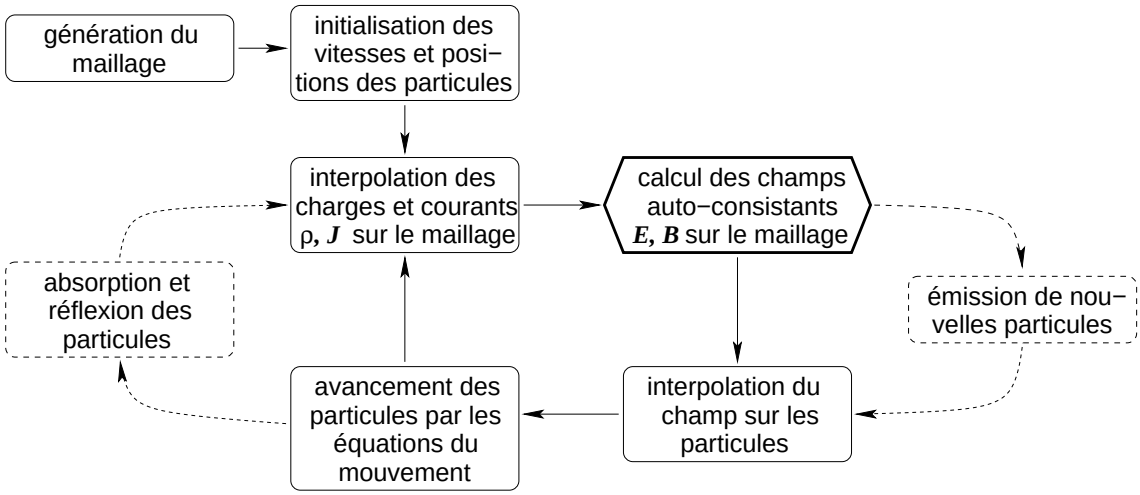

FIG. 1. Schéma de principe d'un code PIC.

les plus utilisés en électromagnétisme, et donnerons les grandes lignes de l'analyse de leur convergence pour les problèmes instationnaires.

2. Les équations

2.1. **Équations du premier ordre et corrections.** Dans cet article, on considère un domaine Ω borné, connexe et lipschitizien de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$; on note $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire sortante à Ω. En pratique, Ω est en général un polygone, un polyèdre, ou un domaine de révolution dont la méridienne est polygonale. Précisons qu'en dimension 2, il existe deux opérateurs rotationnel, l'un vectoriel et l'autre scalaire

$$\mathbf{rot}\,\phi = \partial_y\phi\,\mathbf{e}_x - \partial_x\phi\,\mathbf{e}_y, \quad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \partial_x v_y - \partial_y v_x,$$

et que le produit vectoriel $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$ doit être remplacé par le déterminant du système $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$: on obtient ainsi un modèle bi-dimensionnel de Maxwell.

Les équations de Maxwell instationnaires dans $\Omega\times\,]0,T[$ se répartissent en deux sous-ensemble bien distincts. Les équations d'évolution font intervenir l'opérateur rotationnel :

$$\partial_t\boldsymbol{E} - c^2\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = -\tfrac{1}{\varepsilon_0}\boldsymbol{J}, \quad \partial_t\boldsymbol{B} + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = 0, \quad \text{dans } \Omega\times\,]0,T[\,. \tag{1}$$

Dans ces équations, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ sont le champ électrique et le champ (ou induction) magnétique, $\boldsymbol{J}$ est la densité de courant ; on suppose qu'on a également une densité de charge ϱ, cf. (2). Bien entendu, il convient de fournir des conditions initiales : $\boldsymbol{E}(0)=\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}(0)=\boldsymbol{B}_0$. A ceci s'ajoutent les équations de contrainte : divergence et condition aux limites. On peut par exemple mettre une condition de conducteur parfait (ou «métallique») sur une partie $\Gamma_M\neq\emptyset$ de la frontière, et une condition de Silver–Müller sur le reste (éventuellement vide) $\Gamma_S=\partial\Omega\setminus\Gamma_M$.

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \tfrac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{dans } \Omega\times\,]0,T[\,; \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_M\times\,]0,T[\,, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{E} - c\,\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{n})\wedge\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g}\wedge\boldsymbol{n} \qquad \text{sur } \Gamma_S\times\,]0,T[\,. \tag{4}$$

Physiquement, Γ_M représente le bord matériel (métallique) du dispositif que l'on simule, tandis que Γ_S est une frontière «artificielle» (et assez arbitraire) modélisant les échanges d'énergie du dispositif avec l'extérieur. Lorsque $\boldsymbol{g} = 0$, l'équation (4) est une condition de radiation (ou d'*onde sortante*), indiquant que l'énergie ne peut que sortir du domaine. Il s'agit de la condition à l'ordre le plus bas, correspondant à la condition de Sommerfeld pour l'équation des ondes scalaire ; les conditions d'ordre supérieur sont difficilement utilisables car non-locales. Lorsque $\boldsymbol{g} \neq 0$, on a une condition d'*onde entrante*, où $\boldsymbol{g}$ représente le champ émis par une source extérieure.

L'équation de conservation de la charge

$$\operatorname{div} \boldsymbol{J} + \partial_t \varrho = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\,, \tag{5}$$

apparaît comme une condition nécessaire d'existence d'une solution aux équations (1–2). Dans les codes de calcul de plasmas (surtout PIC, à cause du bruit numérique), elle n'est pas exactement satisfaite en pratique. Dès lors, la contrainte de divergence n'est plus satisfaite ; le champ électrostatique (et parfois le champ électromagnétique) calculé s'éloigne considérablement de la solution physique.

Pour remédier à cet inconvénient, on peut introduire des équations généralisées, i.e. remplacer (1–2) par :

$$\partial_t \boldsymbol{E} + c^2(\mathbf{grad}\, p - \mathbf{rot}\, \boldsymbol{B}) = -\tfrac{1}{\varepsilon_0} \boldsymbol{J}, \quad \partial_t \boldsymbol{B} + \mathbf{rot}\, \boldsymbol{E} = 0, \tag{6}$$

$$g(p) + \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \tfrac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{7}$$

Ici, $g(p)$ est un opérateur différentiel qui définit le type de correction : selon que $g(p) = 0$, resp. p ou $\partial_t p$, on parle de correction elliptique, resp. parabolique ou hyperbolique. Cette terminologie se justifie parce que le correcteur p vérifie l'équation

$$\frac{\partial g(p)}{\partial t} - c^2 \Delta p = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{J} \right) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\,. \tag{8}$$

Si des conditions aux limites convenables sont choisies, par exemple

$$p = 0 \text{ (ell. \& parab.), resp. } \partial_t p + c\, \partial_n p = 0 \text{ (hyperb.), sur } \partial\Omega \times]0, T[\,, \tag{9}$$

alors p s'annule si et seulement si la conservation de la charge est satisfaite. Dans le cas général, la correction est équivalente à la résolution des équations de Maxwell ordinaires avec des sources (charge et courant) modifiées : $\tilde{\boldsymbol{J}} := \boldsymbol{J} + \mathbf{grad}\, p$, $\tilde{\varrho} := \varrho - g(p)$. Ces données corrigées vérifient : $\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{J}} + \partial_t \tilde{\varrho} = 0$; les équations généralisées sont cohérentes.

Dans la suite, nous nous intéresserons exclusivement à la correction elliptique. De plus, nous poserons $c = \varepsilon_0 = 1$. L'extension à des milieux matériels à coefficients variables est possible, mais elle est évidemment peu intéressante si l'on s'intéresse à la simulation de particules chargées. Enfin, nous considérerons presque toujours que $\Gamma_S = \emptyset$, et nous nous contenterons de signaler à l'occasion les adaptations à la condition de Silver–Müller. Celle-ci ne cause que des difficultés techniques et les résultats sont fondamentalement les mêmes qu'avec la condition de conducteur parfait.

2.2. **Reformulations du second ordre.** En dérivant (1) par rapport au temps et éliminant $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, on trouve que les champs électrique et magnétique satisfont les équations d'onde vectorielles :

$$\partial_t^2 \boldsymbol{E} + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{J}, \quad \partial_t^2 \boldsymbol{B} + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = -\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{J}. \tag{10}$$

Les équations de contrainte (2–4) sont encore valables ; d'autre part il faut préciser les conditions initiales pour les dérivées premières :

$$\partial_t \boldsymbol{E}(0) = \boldsymbol{E}_1 := \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{J}(0), \quad \partial_t \boldsymbol{B}(0) = \boldsymbol{B}_1 := -\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}_0, \tag{11}$$

et la condition aux limites supplémentaire pour le champ magnétique :

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} - \boldsymbol{J}) \wedge \boldsymbol{n} = 0.$$

Nous appellerons (10) la *formulation de base*. Comme nous le verrons au §4, il est utile pour certaines méthodes d'éléments finis de considérer les formulations *augmentées* :

$$\partial_t^2 \boldsymbol{E} + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} - \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{J} - \mathbf{grad}\,\varrho, \tag{12}$$

$$\partial_t^2 \boldsymbol{B} + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} - \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{J}. \tag{13}$$

Dans celles-ci, la divergence est incluse dans l'opérateur d'évolution, qui devient donc un laplacien vectoriel.

Si l'on part de (6), on obtient une formulation avec correction elliptique, qui se distingue par la présence d'un terme $\mathbf{grad}\,\partial_t p$ dans le premier membre de (12), ou de la première équation de (10), p étant calculé par (8). Cela dit, on remarque que $P = -\partial_t p$ s'interprète alors comme le multiplicateur de Lagrange associé à la containte de divergence $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \varrho$. Dès lors, on peut considérer des formulations mixtes (de point-selle). La formulation mixte augmentée s'écrit :

$$\partial_t^2 \boldsymbol{E} + \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} - \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} - \mathbf{grad}\,P = -\partial_t \boldsymbol{J} - \mathbf{grad}\,\varrho, \tag{14}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \varrho. \tag{15}$$

La formulation mixte non augmentée en diffère par l'absence des termes $\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ et $\mathbf{grad}\,\varrho$.

3. Analyse mathématique

3.1. **Espaces fonctionnels et décomposition de Helmholtz.** L'énergie du champ électromagnétique est égale à $\int_\Omega \{|\boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2\}$; il faut donc que (presque) à chaque instant $\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, la forme de l'équation d'évolution (1) suggère que l'on aura également $\partial_t \boldsymbol{E},\ \partial_t \boldsymbol{B},\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E},\ \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. On est amené donc à poser les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\right\}, \\ \mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) : \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0\right\}. \end{aligned}$$

L'opérateur rotationnel est auto-adjoint dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)$, ce qui permet de traiter la condition aux limites électrique de façon essentielle. Les contraintes de divergence (2)

peuvent être prises en compte en introduisant les espaces :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega) : \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\in L^2(\Omega)\right\},\\ \mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) : \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0\right\},\\ \mathbf{H}(\mathrm{div}\,0;\Omega) &:= \left\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega) : \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0\right\}.\end{aligned}$$

Tous ces espaces sont munis de leurs normes hilbertiennes canoniques. Nous appellerons *espaces naturel* du champ électrique (resp. magnétique) avec une condition aux limites métallique, l'espace

$$\mathbf{X}_0^d(\Omega) := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega),\ \text{resp. } \mathbf{X}_0^n(\Omega) := \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega). \tag{16}$$

Les exposants d et n signifient Dirichlet et Neumann, pour des raisons qui apparaîtront bientôt. Une propriété essentielle de ces espaces est qu'ils sont inclus dans $\mathbf{H}^s(\Omega)$, avec $s=1$ si le domaine Ω est régulier ou convexe [7, §§I.3.5 et I.3.6], et $s>1/2$ pour un polyèdre quelconque ou un domaine de révolution [10, théorème 3.50]. Par conséquent, leur injection dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte, ce qui permet de prendre leur norme comme :

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbf{X}_0} := \left\{\|\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\|_0^2 + \|\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\|_0^2\right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Nous présentons maintenant un outil fondamental dans l'étude des équations de Maxwell (et également de Stokes) : la décomposition de Helmholtz (ou de Hodge). Celle-ci consiste à écrire un champ de vecteur quelconque comme somme d'un gradient (donc d'un champ *irrotationnel*) et d'un champ à divergence nulle (dit *solénoïde*). Considérons donc les sous-espaces de champs à divergence nulle :

$$\mathbf{K}^d(\Omega) := \mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div}\,0;\Omega),\ \text{resp. } \mathbf{K}^n(\Omega) := \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,0;\Omega), \tag{18}$$

et les espaces de potentiels scalaires :

$$\Phi^d(\Omega) := \left\{\varphi\in H_0^1(\Omega) : \Delta\varphi\in L^2(\Omega)\right\}, \tag{19}$$

$$\Phi^n(\Omega) := \left\{\varphi\in H^1(\Omega) : \Delta\varphi\in L^2(\Omega) \text{ et } \int_\omega\varphi=0 \text{ et } \partial_n\varphi|_{\partial\Omega}=0\right\}. \tag{20}$$

On montre sans difficulté que :

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega) = \mathbf{K}^d(\Omega)\overset{\perp}{\oplus}\mathbf{grad}\,H_0^1(\Omega) \text{ et } \mathbf{X}_0(\Omega) = \mathbf{K}(\Omega)\overset{\perp}{\oplus}\mathbf{grad}\,\Phi(\Omega), \tag{21}$$

l'orthogonalité ayant lieu à la fois dans les normes de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$. La deuxième égalité est valable pour les deux conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, et de plus l'orthogonalité a lieu pour les normes de $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ et $\mathbf{X}_0(\Omega)$.

On peut aller plus loin dans le cas où Ω est *simplement connexe* et $\partial\Omega$ *connexe*.[1] On a alors le *complexe de De Rham* [10, §3.7] : les diagrammes suivants

$$\{0\}\to H^1(\Omega)\overset{\mathbf{grad}}{\to}\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)\overset{\mathbf{rot}}{\to}\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)\overset{\mathrm{div}}{\to}L^2(\Omega)\to\{0\}$$

$$\{0\}\to H_0^1(\Omega)\overset{\mathbf{grad}}{\to}\mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)\overset{\mathbf{rot}}{\to}\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega)\overset{\mathrm{div}}{\to}L_0^2(\Omega)\to\{0\}$$

sont des suites exactes (l'image d'une flèche est le noyau de la suivante). On aura noté $L_0^2(\Omega) := \left\{w\in L^2(\Omega) : \int_\omega w=0\right\}$. En conséquence, le noyau $\mathbf{K}(\Omega)$ de l'opérateur divergence s'identifie au rotationnel d'un espace bien choisi ; ses éléments sont entièrement caractérisés par leur rotationnel ; enfin, les champs de gradient lui sont

[1] Si l'une ou l'autre de ces hypothèses est en défaut, le diagramme est plus compliqué, en raison de la cohomologie ; voir [10, *loc. cit.*].

orthogonaux à la fois dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ ou $\mathbf{X}_0(\Omega)$. Ce dernier point apparaît fondamental.

3.2. **Équations du premier ordre.** L'existence et l'unicité de la solution aux équations d'évolution du premier ordre (1) peut être obtenue [8, §2.2] par la théorie des semi-groupes[2] dans les cas suivants : avec une condition aux limites métallique sur toute la frontière, ou avec une condition d'onde sortante (Silver–Müller avec $\boldsymbol{g} = 0$) sur une partie de celle-ci. On vérifie ensuite que la solution de (1) vérifie les équations de contrainte pour tout t, pourvu que les données initiales $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{B}_0$ les satisfassent *et que la conservation de la charge soit également vérifiée.* Cette condition étant remplie par les données modifiées par la correction elliptique, les équations généralisées (6–9) (avec $g(p) = 0$) sont bien posées.

La théorie des semi-groupes n'a pas de lien avec une méthode numérique de discrétisation en espace des équations, contrairement à la théorie variationnelle présentée au paragraphe suivant. Il se trouve de plus que les conditions d'application de cette dernière sont plus larges. Aussi allons-nous la présenter plus longuement.

3.3. **Équations du second ordre.** On rappelle le théorème fondamental dû à J.L. Lions [9, th. 8.1, chap. III] :

Soient $V \subset H$ deux espaces hilbertiens, l'injection étant continue et dense. Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur V, telle que : $a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \geq \alpha \|\boldsymbol{v}\|_V^2 - C\|\boldsymbol{v}\|_H^2$. Alors la formulation variationnelle :
Trouver $\boldsymbol{E} \in L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;H) \cap H^2(0,T;V')$ tel que, $\forall t \in [0,T]$, $\forall \boldsymbol{F} \in V$,

$$\langle \boldsymbol{E}''(t), \boldsymbol{F}\rangle_{V',V} + a(\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{\psi}(t) \mid \boldsymbol{F})_H, \tag{22}$$

avec les conditions initiales : $\boldsymbol{E}(0) = \boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{E}'(0) = \boldsymbol{E}_1$, admet une unique solution lorsque $\boldsymbol{\psi} \in L^2(0,T;H)$, $\boldsymbol{E}_0 \in V$, $\boldsymbol{E}_1 \in H$.

Dans ce cadre, on montre la bonne position des équations du champ électrique, avec une condition aux limites métallique :

- la formulation de base (10), avec $V = \mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)$, $H = \mathbf{L}^2(\Omega)$, $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})$, et $\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{J}'$, si $\boldsymbol{J} \in H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$;
- la formulation augmentée (12), avec $V = \mathbf{X}_0^d(\Omega)$, $H = \mathbf{L}^2(\Omega)$, $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}) + (\operatorname{div}\boldsymbol{u} \mid \operatorname{div}\boldsymbol{v})$, et $\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{J}' - \mathbf{grad}\,\varrho$, si p.ex. $\boldsymbol{J} \in H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\varrho \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

En ce qui concerne les équations du champ magnétique, la démonstration est moins immédiate ; elle se trouve dans [2]. Dans cette référence, on montre également comment prendre en compte[3] la condition de Silver–Müller (4). Dans la formulation de base, les espaces des champs magnétiques (resp. électriques) sont définis comme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^n(\Omega,\Gamma_S) &:= \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega) : \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}|_{\Gamma_S} \in \mathbf{L}^2_\top(\Gamma_S)\right\}, \text{ resp.}\\
\mathbf{V}^d(\Omega,\Gamma_S) &:= \left\{\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}^n(\Omega,\Gamma_S) : \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{n}|_{\Gamma_M} = 0\right\}, \text{ où :}\\
\mathbf{L}^2_\top(\Gamma_S) &:= \left\{\boldsymbol{w} \in L^2(\Gamma_S)^3 : \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n} = 0\right\}.
\end{aligned}$$

[2]Plus précisément par le théorème de Stone, une variante du théorème de Hille–Yosida adaptée aux systèmes conservatifs tels que Maxwell.

[3]L'article [2] ne considère que la condition d'onde sortante, mais la généralisation à $\boldsymbol{g} \neq 0$ ne pose pas de problème puisque la condition aux limites est traitée de façon naturelle et que $\boldsymbol{g}$ peut être choisie régulière.

Pour la formulation augmentée, on a respectivement :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0^n(\Omega,\Gamma_S) &= \{\boldsymbol{u}\in\mathbf{V}^n(\Omega,\Gamma_S)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) : \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|_{\Gamma_M}=0\}\,.\\ \mathbf{X}_0^d(\Omega,\Gamma_S) &= \mathbf{V}^d(\Omega,\Gamma_S)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega).\end{aligned}$$

En adoptant la notation générale $V^{d/n}$ pour les espaces variationnels, les différentes formulations se mettent sous la forme :
Trouver $\boldsymbol{E}\in L^2(0,T;V^d)\cap H^1(0,T;H)\cap H^2(0,T;(V^d)')$ *tel que,* $\forall\boldsymbol{F}\in V^d$ *:*

$$\partial_t^2\,(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{F})+a(\boldsymbol{E},\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{E}'\wedge\boldsymbol{n}\mid\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{n})_S=(\boldsymbol{\psi}\mid\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{g}'\wedge\boldsymbol{n}\mid\boldsymbol{F}\wedge\boldsymbol{n})_S\;; \tag{23}$$

Trouver $\boldsymbol{B}\in L^2(0,T;V^n)\cap H^1(0,T;H)\cap H^2(0,T;(V^n)')$ *tel que,* $\forall\boldsymbol{C}\in V^n$ *:*

$$\partial_t^2\,(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{C})+a(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{B}'_\top\mid\boldsymbol{C}_\top)_S=(\boldsymbol{J}\mid\mathbf{rot}\,\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{g}'\wedge\boldsymbol{n}\mid\boldsymbol{C}_\top)_S\,. \tag{24}$$

Ci-dessus, on aura noté $\boldsymbol{C}_\top:=\boldsymbol{n}\wedge(\boldsymbol{C}\wedge\boldsymbol{n})$; et les produits scalaires notés $(\cdot|\cdot)$ et $(\cdot|\cdot)_S$ sont respectivement ceux de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2_\top(\Gamma_S)$.

Enfin, la correction elliptique rentre encore dans ce cadre, puisqu'elle consiste à modifier les données. Dans tous les cas, les conditions $\boldsymbol{J}\in H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\varrho\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap H^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ garantissent l'existence et l'unicité d'une solution aux équations du champ électrique.

3.4. **Extension au problème mixte.** En revanche, les formulations mixtes telles que (14–15) ne peuvent pas être directement être analysées par le théorème de Lions. Bien qu'il n'existe pas (à notre connaissance) d'extension de ce théorème au cas général d'un problème d'évolution du second ordre avec contrainte, on peut montrer la bonne position de (14–15) grâce à la remarque faite à la fin du §3.1 : le noyau de l'opérateur divergence possède un orthogonal à la fois dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ ou $\mathbf{X}_0(\Omega)$. (Dans la suite, on s'intéressera exclusivement aux équations du champ électrique, et l'on omettra donc l'exposant d dans les espaces correspondants. Tous les résultats présentés s'étendent au champ magnétique moyennant quelques adaptations.)

Les notations $V,\ H,\ a(\cdot,\cdot),\ \boldsymbol{\psi}$ sont les mêmes qu'au §3.3 ; on se donne également un espace des multiplicateurs Q, et une forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ sur $V\times Q$, satisfaisant aux *conditions de Babuška–Brezzi* :

$$a \text{ elliptique sur le noyau de } b \quad \text{et} \quad \inf_{q\in Q}\sup_{\boldsymbol{v}\in V}\frac{b(\boldsymbol{v},q)}{\|\boldsymbol{v}\|_V\|q\|_Q}=\beta>0, \tag{25}$$

et finalement $\varrho\in L^2(O,T;Q')$. Nous considérons alors la formulation variationnelle (de type point-selle) suivante : *Trouver* $\boldsymbol{E}\in L^2(0,T;V)\cap H^1(0,T;H)\cap H^2(0,T;V')$ *et* $P\in L^2(0,T;Q)$ *tels que,* $\forall t\in[0,T],\ \forall\boldsymbol{F}\in V,\ \forall q\in Q,$

$$\langle\boldsymbol{E}''(t),\boldsymbol{F}\rangle_{V',V}+a(\boldsymbol{E}(t),\boldsymbol{F})+b(\boldsymbol{F},P(t))=(\boldsymbol{\psi}(t)\mid\boldsymbol{F})_H, \tag{26}$$

$$b(\boldsymbol{E}(t),q)=\langle\varrho(t),q\rangle_{Q',Q}\,. \tag{27}$$

Dans ce cadre, on peut étudier :
- la formulation mixte non augmentée : $V,\ H,\ a(\cdot,\cdot),\ \boldsymbol{\psi}$ sont les mêmes que dans la formulation de base, $Q=H^1_0(\Omega)$ et $b(\boldsymbol{v},q)=-(\boldsymbol{v}\mid\mathbf{grad}\,q)$;
- la formulation mixte augmentée (14,15) : $V,\ H,\ a(\cdot,\cdot),\ \boldsymbol{\psi}$ sont les mêmes que dans la formulation augmentée, $Q=L^2(\Omega)$ et $b(\boldsymbol{v},q)=(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\mid q)$.

La formulation (26,27) admet une unique solution, sous l'hypothèse technique supplémentaire $\varrho \in H^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ qui résulte de l'équivalence avec la correction elliptique. En effet, on vérifie (25) dans les deux cas. Ensuite, on décompose $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_T(t) + \boldsymbol{E}_L(t) \in \ker b \oplus (\ker b)^\perp$, le noyau étant égal à $\mathbf{K}(\Omega)$ dans les deux cas. L'équation (27) équivaut à : $b(\boldsymbol{E}_L(t), q) = \langle \varrho(t), q\rangle_{Q',Q}, \forall q \in Q$, ce qui détermine $\boldsymbol{E}_L(t) \in (\ker b)^\perp$ [7, lemme I.4.1] ; on vérifie que $\boldsymbol{E}_L \in L^2(0,T;V) \cap H^2(0,T;H)$. Ensuite, en prenant une fonction-test à divergence nulle dans (26) et en utilisant la double orthogonalité, on trouve successivement :

$$\langle \boldsymbol{E}_T''(t), \boldsymbol{F}_T\rangle_{V',V} + a(\boldsymbol{E}_T(t), \boldsymbol{F}_T) = (\boldsymbol{\psi}_T(t) \mid \boldsymbol{F}_T)_H, \quad \forall \boldsymbol{F}_T \in \ker b, \tag{28}$$

$$\langle \boldsymbol{E}_T''(t), \boldsymbol{F}\rangle_{V',V} + a(\boldsymbol{E}_T(t), \boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{\psi}_T(t) \mid \boldsymbol{F})_H, \quad \forall \boldsymbol{F} \in V. \tag{29}$$

Ici, on note $\boldsymbol{\psi}_T(t)$ la projection de $\boldsymbol{\psi}(t)$ sur $\mathbf{H}(\operatorname{div} 0;\Omega)$ au sens de $\mathbf{L}^2(\Omega)$. L'équation (29) admet une unique solution dans $L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;H) \cap H^2(0,T;V')$ par la théorie de Lions, et on vérifie qu'elle est bien à divergence nulle. Finalement, en prenant un gradient comme fonction-test dans (26), on trouve que $P(t)$ s'identifie à chaque instant à l'unique solution de : $-\Delta P(t) = -\varrho''(t) - \operatorname{div} \boldsymbol{J}'(t)$ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Réciproquement, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_L + \boldsymbol{E}_T$ et P ainsi définis sont solution de (26,27).

On peut aussi noter que $\boldsymbol{E}_L(t)$ est à chaque instant solution de la formulation mixte augmentée *statique* :

$$a(\boldsymbol{E}_L(t), \boldsymbol{F}) + b(\boldsymbol{F}, P_L(t)) = (\varrho(t) \mid \operatorname{div} \boldsymbol{F}), \quad \forall \boldsymbol{F} \in V\,; \tag{30}$$

$$b(\boldsymbol{E}_L(t), q) = \langle \varrho(t), q\rangle_{Q',Q}, \quad \forall q \in Q\,; \tag{31}$$

dans le cas non augmenté, le second membre de (30) est remplacé par zéro. Dans les deux cas, on a $P_L = 0$. Quant à la partie solénoïde $\boldsymbol{E}_T$ elle satisfait l'équation d'évolution, avec $P_T = P$:

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{E}_T''(t), \boldsymbol{F}\rangle_{V',V} + a(\boldsymbol{E}_T(t), \boldsymbol{F}) + b(\boldsymbol{F}, P_T(t)) \\ &\qquad = -(\boldsymbol{J}'(t) \mid \boldsymbol{F})_H - \frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{E}_L(t) \mid \boldsymbol{F})_H, \quad \forall \boldsymbol{F} \in V\,; \end{aligned} \tag{32}$$

$$b(\boldsymbol{E}_T(t), q) = 0, \quad \forall q \in Q. \tag{33}$$

Si la conservation de la charge est satisfaite, les deux systèmes peuvent être découplés en notant que $\boldsymbol{J}' + \boldsymbol{E}_L'' = \boldsymbol{J}_T'$. Dans ce cas seulement, $P_T = 0$.

4. Eléments finis et équations de Maxwell.

4.1. **Quelques éléments finis.** La figure 2 présente les types d'éléments finis les plus utilisés en électromagnétisme. Pour simplifier, on suppose que le problème est posé en dimension 2 et qu'on utilise un maillage triangulaire. Les éléments finis de Lagrange (dits *nodaux*) approchent des fonctions scalaires, ou chaque composante de fonctions vectorielles. Leurs degrés de liberté sont constitués des valeurs de la fonction en un certain nombre de points. Les éléments de Nédélec [11] (dits *d'arête*) et de Raviart–Thomas sont destinés à approcher des champs vectoriels. Au plus bas degré, ils ont pour degrés de liberté, respectivement, la circulation du champ le long de chaque arête du triangle et le flux à travers cette arête ; ou, de façon équivalente, la composante tangentielle et la composante normale du champ au milieu de l'arête. La continuité de la composante tangentielle (resp. normale) d'un élément à l'autre

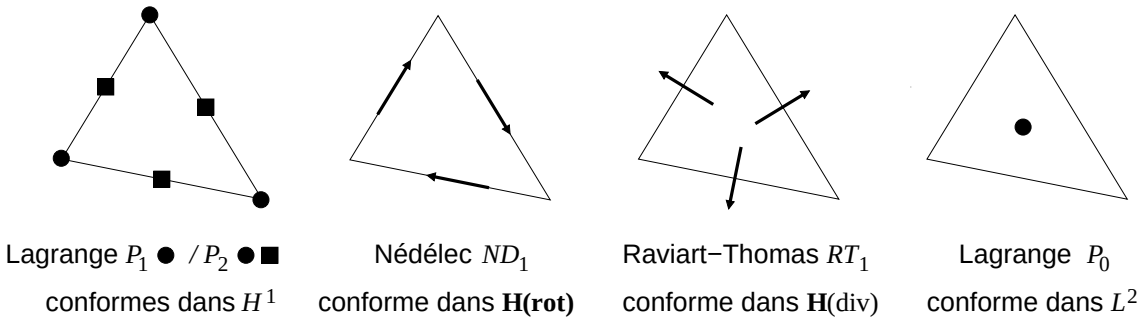

FIG. 2. Quelques types d'éléments finis.

garantit que le champ appartient à $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)$ (resp. $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$). Des versions de degré quelconque existent, mais peuvent être fastidieuses. Pour cette question et pour les versions tri-dimensionnelles de ces éléments, nous renvoyons à [7, §III.5.3] et [10, §§5.5 et 8.2].

Si l'on souhaite discrétiser la formulation augmentée (12) des équations de Maxwell, avec une approximation interne, on recherche un élément fini conforme dans $\mathbf{H}(\mathbf{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$. Le paradoxe est qu'un tel élément assure à la fois la continuité des deux composantes tangentielle et normale des champs ; donc les champs sont continus, et l'élément est en fait conforme dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Or, comme évoqué plus haut, $\mathbf{X}_0(\Omega)\not\subset\mathbf{H}^1(\Omega)$ en général. On montre même que, s'il y a des singularités géométriques (coins, arêtes, sommets) non convexes, l'espace $\mathbf{X}_R(\Omega):=\mathbf{X}_0(\Omega)\cap\mathbf{H}^1(\Omega)$ est *fermé* dans $\mathbf{X}_0(\Omega)$. Par conséquent, $\mathbf{X}_0(\Omega)$ *n'admet pas* de sous-espace dense inclus dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$: il est en général *impossible* d'approcher un champ quelconque de $\mathbf{X}_0(\Omega)$ à l'aide d'éléments finis conformes dans cet espace, en particulier avec les éléments nodaux. Pis encore, la formulation discrète, posée dans un sous-espace de $\mathbf{X}_R(\Omega)$, peut très bien converger vers un élément de $\mathbf{X}_R(\Omega)$, différent de la solution physique qui n'appartient pas en général à cet espace. Ce phénomène paraît condamner sans appel l'usage des éléments nodaux (et donc des formulations augmentées) pour résoudre numériquement les équations de Maxwell dans un domaine *singulier* (qui présente des singularités géométriques non convexes).

En revanche, on discrétise la formulation non augmentée (10) posée dans $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)$, en utilisant les éléments d'arête, qui ont d'ailleurs été conçus à cet usage. Un autre avantage des éléments d'arête est le *complexe de De Rham discret*, à savoir le diagramme suivant, commutatif et dont chaque ligne est une suite exacte [10, éq. (5.59) p. 150] :

$$\begin{array}{ccccccc}
E: & H_0^1(\Omega) & \xrightarrow{\mathbf{grad}} & \mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega) & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & L_0^2(\Omega) \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\tilde{E}: & H_0^{1+s}(\Omega) & \xrightarrow{\mathbf{grad}} & \mathbf{H}_0^s(\mathbf{rot};\Omega) & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathbf{H}_0^s(\mathrm{div};\Omega) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & H^s\cap L_0^2(\Omega) \\
 & \Pi_h^P\downarrow & & \Pi_h^{ND}\downarrow & & \Pi_h^{RT}\downarrow & & \Pi_h^Z\downarrow \\
E_h: & P_h^0 & \xrightarrow{\mathbf{grad}} & \mathbf{ND}_h^0 & \xrightarrow{\mathbf{rot}} & \mathbf{RT}_h^0 & \xrightarrow{\mathrm{div}} & Z_h^0
\end{array}$$

La deuxième ligne est constituée d'espaces un peu plus réguliers qu'à la première : pour $s \geq 0$ on note $\mathbf{H}_0^s(\mathbf{rot};\Omega) := \mathbf{H}^s(\mathbf{rot};\Omega) \cap \mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega)$, où $\mathbf{H}^s(\mathbf{rot};\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega) : \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)\}$, et de même pour $\mathbf{H}_0^s(\mathrm{div};\Omega)$. Les flèches verticales entre les deux premières lignes représentent les injections canoniques. La troisième ligne est formée par les espaces d'éléments finis P_1, ND_1, RT_1 et P_0 vérifiant les conditions aux limites appropriées, ou la condition de moyenne nulle pour Z_h^0. Les flèches verticales entre les deux dernières lignes sont des opérateurs d'interpolation, qui vérifient de bonnes propriétés d'approximation en fonction du pas h du maillage d'éléments finis, du type :

$$\forall u \in \tilde{E}, \quad \|u - \Pi_h^E u\|_E \lesssim h^{\alpha_E(s)} \|u\|_{\tilde{E}},$$

pour des valeurs convenables de s. Grâce au complexe de De Rham discret, on peut affirmer que la formulation mixte non augmentée est équivalente, *au niveau discret comme au niveau continu*, à la formulation de base, pourvu qu'on fasse la correction elliptique si (une version discrète de) la conservation de la charge n'est pas vérifiée. Cette propriété est violée par toutes les méthodes d'éléments nodaux connues.

En revanche, les éléments d'arête présentent trois inconvénients assez graves pour la simulation de particules chargées en mouvement. Le premier est qu'ils ne permettent pas la condensation de masse[4], si bien que même une formulation explicite en temps nécessite l'inversion de la matrice de masse à chaque pas de temps. Ensuite, il peut être nécessaire de raffiner le maillage au voisinage des singularités géométriques pour représenter convenablement le comportement des champs en ces endroits. Le pas du maillage doit alors être pris très petit, ce qui entraîne un pas de temps également très petit pour les méthodes explicites ; vu le caractère hyperbolique du système, les méthodes implicites ne permettent guère de s'affranchir de cette contrainte. Le troisième défaut est que les champs calculés par ces éléments sont discontinus d'un élément à l'autre (seule leur composante tangentielle est continue), alors que les champs physiques sont continus en dehors des singularités géométriques et des interfaces entre milieux différents. En conséquence, les forces subies par les particules dans la simulation sont partout discontinues, ce qui cause un bruit numérique important.

4.2. **Réhabilitation des éléments finis nodaux.** Il paraît donc utile de chercher à adapter les éléments finis nodaux pour la simulation des équations de Maxwell. Tout d'abord, on note qu'en l'absence de singularités géométriques non convexes, l'espace naturel $\mathbf{X}_0(\Omega)$ est inclus dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, et il est possible d'utiliser la méthode habituelle des éléments finis nodaux (MHEN). Dans le cas général, deux remèdes à la défaillance de ces éléments ont été mis au point.

La *méthode du complément singulier* (MCS) [1] est fondée sur la décomposition d'espaces :

$$\mathbf{X}_0(\Omega) = \mathbf{X}_R(\Omega) \oplus \mathbf{X}_S(\Omega), \text{ avec } \mathbf{X}_R(\Omega) := \mathbf{X}_0(\Omega) \cap \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{34}$$

[4]Ce terme ("mass-lumping") désigne le remplacement de la matrice de masse par une matrice diagonale, au prix d'une erreur du même ordre que celle due à l'approximation par éléments finis. Elle n'est pas possible avec les éléments de Nédélec. Certains éléments d'arête spécialement conçus l'autorisent, mais leur complexité fait qu'ils ne sont guère employés en pratique. Voir : A. Elmkies, P. Joly, Eléments finis d'arête et condensation de masse pour les équations de Maxwell : le cas de dimension 3, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **325**, Série I, 1217–1222 (1997).

qui est *continue* dans la norme de $\mathbf{X}_0(\Omega)$, puisque $\mathbf{X}_R(\Omega)$ est fermé. L'espace *régulier* $\mathbf{X}_R(\Omega)$ est approché par éléments nodaux. L'espace *singulier* $\mathbf{X}_S(\Omega)$ nécessite un traitement particulier, reposant sur un développement asymptotique de ses éléments. Un cas particulier important est constitué par les formulations bi-dimensionnelles (planes ou axisymétriques) : dans ce cas, l'espace singulier est de dimension finie, et on en connaît explicitement une base $(\mathbf{x}_S^j)_{1\le j\le N_S}$. Dès lors, on peut décomposer la solution de Maxwell selon (34) :

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_R(t) + \sum_{j=1}^{N_S} \kappa_j(t)\,\mathbf{x}_S^j\,;$$

la partie régulière $\boldsymbol{E}_R(t)$ est calculée par éléments finis, et la connaissance de la partie singulière est équivalente à celle des *coefficients de singularité* $(\kappa_j(t))_{1\le j\le N_S}$, dont la loi d'évolution peut être déterminée. Notons pour finir qu'il est possible d'étendre la méthode à certaines situations tri-dimensionnelles (p.ex. un domaine de révolution) par l'analyse de Fourier. Cependant, le passage à un domaine tri-dimensionnel quelconque (ou même à un polyèdre non convexe) est sans doute très difficile.

La *méthode de régularisation à poids* (MRP) [6] repose sur l'observation suivante : si la condition $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ paraît nécessaire à la bonne position de l'équation d'évolution (1), (10), ou (14), en revanche rien n'impose *a priori* que $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \varrho \in L^2(\Omega)$. Si cette condition peut être affaiblie de telle façon que le nouvel espace «naturel» admette un sous-espace dense inclus dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, alors il devient possible d'approcher par éléments nodaux le champ électromagnétique lui-même — et non seulement sa partie régulière. Dans [6], on montre que cette propriété est satisfaite (pour certaines valeurs du paramètre γ) par l'espace :

$$\mathbf{X}_\gamma(\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot};\Omega) : \operatorname{div}\boldsymbol{u} \in L^2_\gamma(\Omega)\},\ \text{où } L^2_\gamma(\Omega) := L^2(\Omega; w_\gamma\,\mathrm{d}\Omega), \tag{35}$$

le poids w_γ se comportant au voisinage des coins, arêtes ou sommets non convexes comme la puissance γ de la distance à ces singularités. Dans ces conditions, on montre la bonne position de :

- la formulation augmentée à poids (22) avec $V = \mathbf{X}_\gamma(\Omega)$, $H = \mathbf{L}^2(\Omega)$, $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \mid \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})_{L^2} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u} \mid \operatorname{div}\boldsymbol{v})_{L^2_\gamma}$, $(\boldsymbol{\psi} \mid \boldsymbol{F})_{L^2} = -(\boldsymbol{J}' \mid \boldsymbol{F})_{L^2} + (\varrho \mid \operatorname{div}\boldsymbol{F})_{L^2_\gamma}$;
- la formulation mixte augmentée à poids (26,27) avec $Q = L^2_{-\gamma}(\Omega)$, $b(\boldsymbol{v},q) = \langle \operatorname{div}\boldsymbol{v}, q\rangle_{Q',Q}$.

Les deux méthodes s'étendent à une condition de Silver–Müller. En effet, on montre que le comportement singulier des champs n'est causé que par la forme de la partie «métallique» Γ_M de la frontière. On peut alors définir [1] une MCS reposant sur la décomposition continue suivante :

$$\mathbf{X}_0(\Omega,\Gamma_S) = \mathbf{X}_*(\Omega,\Gamma_S) \oplus \mathbf{X}_S(\Omega), \tag{36}$$

où l'espace singulier $\mathbf{X}_S(\Omega)$ est *le même* que pour la condition aux limites purement métallique, tandis que $\mathbf{X}_*(\Omega,\Gamma_S)$ admet un sous-espace dense inclus dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et peut donc être approché par éléments finis nodaux.

4.3. **Méthodes d'éléments finis mixtes.** On appelle ainsi les éléments adaptés à la discrétisation de problèmes à contraintes tels que (14,15), i.e. de formulations variationnelles de type point-selle comme (26,27). La figure 3 présente, toujours en version bi-dimensionnelle et au plus bas degré, les éléments les plus utilisés pour les équations de Maxwell. Grâce au complexe de De Rham discret, il est possible

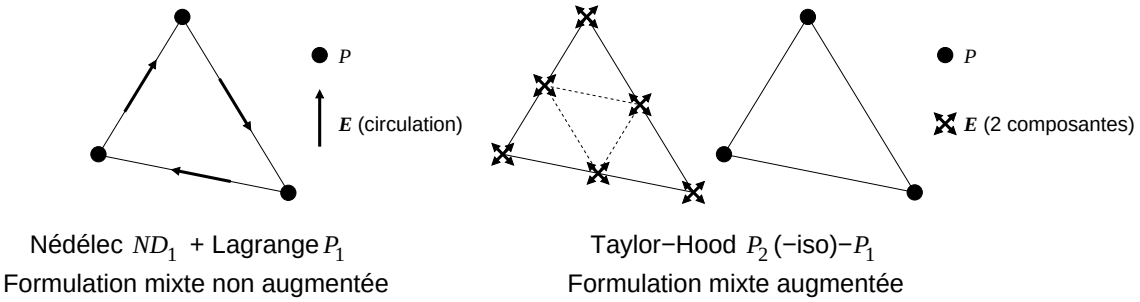

FIG. 3. Quelques éléments finis mixtes.

de discrétiser la formulation mixte non augmentée en superposant simplement un élément d'arête pour le champ $\boldsymbol{E}$ et un élément nodal pour le multiplicateur P. Pour la formulation mixte augmentée, il faut utiliser un élément spécialement conçu, dit de Taylor–Hood. L'approximation des champs étant fondée sur un élément nodal, l'élément de Taylor–Hood est utilisable pour toutes les méthodes vues au §4.2 : MHEN, MCS et MRP, avec quelques particularités pour cette dernière [3].

5. Discrétisation et analyse numérique.

5.1. **Formulations discrètes.** On se donne une famille de triangulations quasi-uniformes $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ du domaine Ω ; on introduit les espaces d'éléments finis[5] $V_h \subset V$ pour le champ $\boldsymbol{E}$ et $P_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$ pour le correcteur p. Le maillage temporel est défini par les instants $t^n := n\,\tau$, on pose $\boldsymbol{u}^n = \boldsymbol{u}(t^n)$, $\partial_\tau \boldsymbol{u}^n := \tau^{-1}\,(\boldsymbol{u}^n - \boldsymbol{u}^{n-1})$. Pour la discrétisation en temps, nous choisirons soit un schéma totalement implicite (TI), qui est inconditionnellement stable, soit un schéma explicite centré (EC), qui est d'ordre plus élevé et numériquement très efficace si l'on utilise la condensation de masse.

Les versions totalement discrétisées de la formulation non mixte sont :
Trouver $\boldsymbol{E}_h^{n+1} \in V_h$ *tel que* $\forall \boldsymbol{F}_h \in V_h$

$$(37)\quad (\partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_h^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h) + a(\boldsymbol{E}_h^{n+1}, \boldsymbol{F}_h) = -(\partial_\tau \boldsymbol{J}^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h) + \underline{(\varrho^{n+1} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{F}_h)_\gamma},\ \text{(TI)}\,;$$

$$(38)\qquad (\partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_h^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h) + a(\boldsymbol{E}_h^{n}, \boldsymbol{F}_h) = -(\partial_\tau \boldsymbol{J}^{n+\frac{1}{2}} \mid \boldsymbol{F}_h) + \underline{(\varrho^{n} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{F}_h)_\gamma},\ \text{(EC)}.$$

Les termes soulignés apparaissent dans les formulations augmentées ; l'indice γ signifie qu'il convient de prendre un produit scalaire à poids si l'on utilise la MRP (la MCS et la MHEN correspondent à $\gamma = 0$). La correction elliptique consiste à ajouter au deuxième membre :

[5]Rappelons que dans la MCS, l'espace d'approximation $\mathbb{X}_h$ est la somme d'un espace d'éléments finis et d'un complément singulier ; voir [1].

– dans le cas TI : $(\operatorname{div} \boldsymbol{F}_h \mid \partial_\tau p_h^{n+1})$, où $p_h^{n+1} \in P_h^0$ est tel que $\forall q_h \in P_h^0$, $(\mathbf{grad}\, p_h^{n+1} \mid \mathbf{grad}\, q_h) = (\partial_\tau \varrho^{n+1} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}^{n+1} \mid q_h)$;
– dans le cas EC : $(\operatorname{div} \boldsymbol{F}_h \mid \partial_\tau p_h^{n+\frac{1}{2}})$, où $p_h^{n+\frac{1}{2}} \in P_h^0$ est tel que $\forall q_h \in P_h^0$, $(\mathbf{grad}\, p_h^{n+\frac{1}{2}} \mid \mathbf{grad}\, q_h) = (\partial_\tau \varrho^{n+1} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}^{n+\frac{1}{2}} \mid q_h)$.

Pour les formulations mixtes, on introduit l'espace $Q_h \subset Q$ des multiplicateurs discrets. Dans tous les cas il s'agit d'un espace d'éléments finis nodaux. Pour obtenir la convergence des éléments finis mixtes, on aime bien disposer de l'équivalent discret des conditions (25), à savoir

$$a \text{ elliptique sur le noyau } \textit{discret} \text{ de } b \quad \text{et} \quad \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\boldsymbol{v}_h \in V_h} \frac{b(\boldsymbol{v}_h, q_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_V \|q_h\|_Q} = \beta > 0, \tag{39}$$

la dernière estimation étant *uniforme en h*. Elles sont réalisées pour les éléments de la figure 3, dans les différentes méthodes du §4.2 ; leur vérification n'est toutefois pas évidente, surtout en MRP [3].

La discrétisation totale de la formulation mixte s'écrit, en version totalement implicite : *Trouver* $(\boldsymbol{E}_h^{n+1}, P_h^{n+1}) \in V_h \times Q_h$ *tel que* $\forall (\boldsymbol{F}_h, q_h) \in V_h \times Q_h$,

$$\begin{aligned}(\partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_h^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h) + a(\boldsymbol{E}_h^{n+1}, \boldsymbol{F}_h) + b(\boldsymbol{F}, P_h^{n+1}) = \\ -(\partial_\tau \boldsymbol{J}^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h) + \underline{(\varrho^{n+1} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{F}_h)_\gamma},\end{aligned} \tag{40}$$

$$b(\boldsymbol{E}_h^{n+1}, q_h) = \langle \varrho^{n+1}, q_h \rangle_{Q',Q} \,; \tag{41}$$

la version explicite centrée constituant une adaptation évidente.

5.2. **Convergence des éléments d'arête.** Comme nous l'avons remarqué au §4.1, il n'est pas nécessaire de faire une analyse spécifique de la formulation mixte : celle-ci est équivalente à la formulation avec correction elliptique. Cela dit, la formulation de base est assez délicate, la forme $a(\cdot,\cdot)$ n'étant pas elliptique, avec un noyau $\ker a = \mathbf{grad}\, H_0^1(\Omega)$ de dimension infinie. Par une méthode directe [5] on montre dans tous les cas que, si $\boldsymbol{E} \in H^2(0,T;\mathbf{H}_0^s(\mathbf{rot};\Omega)) \cap H^3(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ pour $s > \frac{1}{2}$, on a l'estimation

$$\|\partial_\tau \boldsymbol{E}_h^n - \partial_t \boldsymbol{E}^n\|_0 + \|\mathbf{rot}(\boldsymbol{E}_h^n - \boldsymbol{E}^n)\|_0 \le C\,(\tau + \tau\, h^{s-1} + h^s). \tag{42}$$

la constante C dépendant de la norme de $\boldsymbol{E}$ dans l'espace ci-dessus. Si de plus $\boldsymbol{E} \in H^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$ et (pour la correction elliptique ou la formulation mixte) $\varrho \in H^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, on a aussi :

$$\|\boldsymbol{E}_h^n - \boldsymbol{E}^n\|_0 \le C\,(\tau + h^2). \tag{43}$$

5.3. **Convergence des éléments nodaux.** Commençons par la formulation sans correction ni contrainte (37) ou (38). Elle ne présente guère de difficulté ; on peut soit s'inspirer de la méthode de [5], soit adapter l'analyse bien connue de la discrétisation de l'équation des ondes scalaire.[6] En effet, on a affaire à une véritable équation d'onde, la forme $a(\cdot,\cdot)$ étant ici elliptique.

[6]En tenant compte de l'erreur de consistance supplémentaire due à la discrétisation de la dérivée temporelle de $\boldsymbol{J}$ dans le second membre.

On note $\mathbb{X}_h$ le sous-espace de $\mathbf{X}(\Omega)$ engendré par les éléments finis (et les champs singuliers dans le cas de la MCS) ; la notation $\mathbf{X}(\Omega)$ recouvre $\mathbf{X}_\gamma(\Omega)$ et $\mathbf{X}_0(\Omega)$, selon qu'on utilise la MRP ou non. Pour estimer la convergence des éléments finis, il faut supposer que la solution appartient à un espace «amélioré» $\tilde{\mathbf{X}}(\Omega) \subset \mathbf{X}(\Omega)$. L'espace amélioré doit vérifier deux conditions «raisonnables» : la solution y appartient si les données sont assez régulières, et il peut être approché par éléments finis avec un taux $\alpha > 0$:

$$\forall \boldsymbol{u} \in \tilde{\mathbf{X}}(\Omega), \quad \inf_{\boldsymbol{v}_h \in \mathbb{X}_h} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_h\|_{\mathbf{X}} \lesssim h^\alpha \|\boldsymbol{u}\|_{\tilde{\mathbf{X}}} . \tag{44}$$

On peut construire un tel espace pour les trois méthodes d'éléments nodaux.

- Pour la MHEN en domaine non singulier : $\tilde{\mathbf{X}}(\Omega) := \mathbf{X}_0(\Omega) \cap \mathbf{H}^{1+\alpha}(\Omega)$. On montre que la propriété de régularisation est vraie pour $0 \leq \alpha < \alpha_\star$, l'exposant limite $\alpha_\star$ ne dépendant que de la géométrie de Ω. L'estimation (44) est alors l'erreur habituelle d'approximation par éléments finis.
- Pour la MCS dans un polygone plan : $\tilde{\mathbf{X}}(\Omega) := (\mathbf{X}_0(\Omega) \cap \mathbf{H}^{1+\alpha}(\Omega)) \oplus \mathbf{X}_S(\Omega)$, la régularisation ayant lieu pour $0 \leq \alpha < \alpha_\star$, l'exposant limite $\alpha_\star$ ne dépendant que des angles du polygone [4].
- Pour la MRP : $\tilde{\mathbf{X}}(\Omega) := \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{X}_\gamma(\Omega) : \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u} \text{ et } \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$. Le taux de convergence [6, 3] est $\alpha = \gamma - \gamma_{\min} - \epsilon$, où $\gamma_{\min} < \frac{1}{2}$ ne dépend que de la géométrie de Ω, et $\gamma_{\min} < \gamma < 1$.

On montre alors [4] que, si $\boldsymbol{E} \in W^{2,1}(0,T;\tilde{\mathbf{X}}(\Omega)) \cap W^{3,1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\boldsymbol{J} \in W^{2,1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, on a l'estimation :

$$\|\partial_\tau \boldsymbol{E}_h^n - \partial_t \boldsymbol{E}^n\|_0 + \|\boldsymbol{E}_h^n - \boldsymbol{E}^n\|_{\mathbf{X}} \leq C\,(h^\alpha + \tau), \tag{45}$$

la constante C dépendant des normes de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{J}$ dans les espaces en question. Pour le schéma explicite, cette estimation est valable sous une condition CFL $\tau \leq c\,h$. On a également une estimation L^2 :

$$\text{TI} : \|\boldsymbol{E}_h^n - \boldsymbol{E}^n\|_0 \leq C\,(h^\alpha + \tau), \quad \text{EC} : \|\boldsymbol{E}_h^n - \boldsymbol{E}^n\|_0 \leq C\,(h^\alpha + \tau^2) \tag{46}$$

l'estimation du cas explicite étant valable sous CFL et sous les hypothèses $\boldsymbol{E} \in W^{2,1}(0,T;\tilde{\mathbf{X}}(\Omega)) \cap W^{4,1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\boldsymbol{J} \in W^{3,1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$.

Comme nous l'avons noté au §2.2, la correction elliptique revient à une simple modification du deuxième membre. Les estimations (45,46) restent valables sous les hypothèses supplémentaires : $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}$ et $\partial_t \varrho \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$, et $\varrho \in W^{3,1}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, voire $\varrho \in W^{4,1}(0,T;H^{-1}(\Omega))$ pour avoir l'estimation L^2 améliorée dans le cas EC.

5.4. **Convergence des éléments nodaux mixtes.** En l'absence de cohomologie discrète, une analyse de convergence spécifique est nécessaire. A cet effet, on introduit une décomposition de «pseudo-Helmholtz», ou plutôt statique + solénoïde, de la solution à (40,41) : $\boldsymbol{E}_h^n = \boldsymbol{E}_{L,h}^n + \boldsymbol{E}_{T,h}^n$, $P_h^n = P_{L,h}^n + P_{T,h}^n$, où :

- $\boldsymbol{E}_{L,h}^n$ satisfait une formulation statique, qui est l'analogue discret de (30,31) :

$$a(\boldsymbol{E}_{L,h}^n, \boldsymbol{F}_h) + b(\boldsymbol{F}_h, P_{L,h}^n) = (\varrho^n \mid \mathrm{div}\,\boldsymbol{F}_h)_\gamma, \quad \forall \boldsymbol{F} \in \mathbb{X}_h, \tag{47}$$

$$b(\boldsymbol{E}_{L,h}^n, q_h) = \langle \varrho^n, q_h \rangle, \quad \forall q \in Q_h, \tag{48}$$

mais n'est pas à rotationnel nul, ni au sens discret ni au sens continu ;

– $\boldsymbol{E}_{T,h}^n$ est à divergence discrète (mais non à divergence continue) nulle :

$$\boldsymbol{E}_{T,h}^n \in \mathbb{K}_h := \{\boldsymbol{u}_h \in \mathbb{X}_h : b(\boldsymbol{u}_h, q_h) = 0,\ \forall q_h \in Q_h\},$$

et est solution de l'analogue discret de (32,33), soit dans le cas TI :

$$(\partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_{T,h}^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h) + a(\boldsymbol{E}_{T,h}^{n+1}, \boldsymbol{F}_h) + b(\boldsymbol{F}_h, P_{T,h}^{n+1}) = -(\partial_\tau \boldsymbol{J}^{n+1} + \partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_{L,h}^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h), \quad \forall \boldsymbol{F}_h \in \mathbb{X}_h, \tag{49}$$

$$b(\boldsymbol{E}_{T,h}^{n+1}, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \tag{50}$$

On suppose encore que $\boldsymbol{E} \in W^{2,1}(0,T;\tilde{\mathbf{X}}(\Omega)) \cap W^{3,1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\boldsymbol{J} \in W^{2,1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ (voire un peu plus pour avoir une meilleure estimation L^2 dans le cas explicite). Dans tous les cas, la décomposition en parties irrotationnelle et solénoïde est continue dans la norme de $\tilde{\mathbf{X}}(\Omega)$, et l'on a la propriété importante d'*approximabilité forte* du noyau :

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{K}(\Omega) \cap \tilde{\mathbf{X}}(\Omega), \quad \exists \boldsymbol{u}_h \in \mathbb{K}_h, \quad \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{\mathbf{X}} \lesssim h^\alpha \|\boldsymbol{u}\|_{\tilde{\mathbf{X}}}. \tag{51}$$

Grâce à celle-ci, on obtient l'estimation classique d'erreur sur la partie statique [7, théorèmes II.1.1 et II.1.2] :

$$\left\|\boldsymbol{E}_{L,h}^n - \boldsymbol{E}_L^n\right\|_{\mathbf{X}} + \left\|P_{L,h}^n\right\|_Q \lesssim h^\alpha \|\boldsymbol{E}_L^n\|_{\tilde{\mathbf{X}}}, \tag{52}$$

$$\left\|\boldsymbol{E}_{L,h}^n - \boldsymbol{E}_L^n\right\|_0 \lesssim h^{\alpha+\beta} \|\boldsymbol{E}_L^n\|_{\tilde{\mathbf{X}}}; \tag{53}$$

on aura utilisé le fait que $P_L^n = 0$. L'exposant $\beta = \alpha$ pour la MHEN et la MCS, et $\beta = \min(\alpha, 1-\gamma)$ pour la MRP. On en déduit les estimations sur les dérivées temporelles première et seconde, cette dernière apparaissant dans le second membre des équations d'évolution de la partie solénoïde.

$$\left\|\partial_\tau \boldsymbol{E}_{L,h}^{n+1} - \dot{\boldsymbol{E}}_L^{n+1}\right\|_0 \lesssim \tau \|\boldsymbol{E}_L\|_{W^{3,1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + h^{\alpha+\beta} \|\boldsymbol{E}_L\|_{W^{2,1}(0,T;\tilde{\mathbf{X}}(\Omega))}, \tag{54}$$

$$\left\|\partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_{L,h}^{n+1} - \ddot{\boldsymbol{E}}_L^{n+1}\right\|_0 \lesssim \int_{t^{n-1}}^{t^{n+1}} \left\{\left\|\dddot{\boldsymbol{E}}_L(t)\right\|_0 + \tau^{-1} h^{\alpha+\beta} \left\|\ddot{\boldsymbol{E}}_L(t)\right\|_{\tilde{\mathbf{X}}}\right\} \mathrm{d}t. \tag{55}$$

Quant à la partie solénoïde, on constate qu'elle est solution de la formulation variationnelle suivante, posée dans le noyau discret :
Trouver $\boldsymbol{E}_{T,h}^{n+1} \in \mathbb{K}_h$ *tel que,* $\forall \boldsymbol{F}_h \in \mathbb{K}_h$,

$$(\partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_{T,h}^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h) + a(\boldsymbol{E}_{T,h}^{n+1}, \boldsymbol{F}_h) = -(\partial_\tau \boldsymbol{J}^{n+1} + \partial_\tau^2 \boldsymbol{E}_{L,h}^{n+1} \mid \boldsymbol{F}_h).$$

On a donc encore affaire à une équation des ondes. L'approximation est externe (puisque $\mathbb{K}_h \not\subset \mathbf{K}(\Omega)$), mais la propriété (51) permet d'adapter l'analyse du §5.3. On obtient ainsi :

$$\left\|\partial_\tau \boldsymbol{E}_{T,h}^n - \partial_t \boldsymbol{E}_T^n\right\|_0 + \left\|\boldsymbol{E}_{T,h}^n - \boldsymbol{E}_T^n\right\|_{\mathbf{X}} \leq C\,(h^\alpha + \tau), \tag{56}$$

et, compte tenu des estimations sur la partie statique :

$$\|\partial_\tau \boldsymbol{E}_h^n - \partial_t \boldsymbol{E}^n\|_0 + \|\boldsymbol{E}_h^n - \boldsymbol{E}^n\|_{\mathbf{X}} \leq C\,(h^\alpha + \tau). \tag{57}$$

Ces estimations restent valables, sous une condition CFL, pour un schéma explicite. De même, on démontre des estimations en norme L^2 semblables à (46).

Références

[1] F. Assous, P. Ciarlet, Jr., J. Segré. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in two-dimensional singular domains : The Singular Complement Method. *J. Comput. Phys.* **161**, 218–249 (2000).
F. Assous, P. Ciarlet Jr., S. Labrunie, J. Segré. Numerical solution to the time-dependent Maxwell equations in axisymmetric singular domains : The Singular Complement Method. *J. Comput. Phys.* **191**, 147–176 (2003).

[2] F. Ben Belgacem, C. Bernardi. Spectral element discretization of the Maxwell equations. *Math. Comp.* **68**, 1497–1520 (1999).

[3] P. Ciarlet, Jr., G. Hechme. Mixed, augmented variational formulations for Maxwell's equations : numerical analysis via the macroelement technique. Soumis à *Numer. Math.*

[4] P. Ciarlet Jr., S. Labrunie. Numerical analysis of the generalized Maxwell equations (with an elliptic correction) for charged particle simulations. A paraître dans *Math. Models Methods Appl. Sci.* Prépublication de l'Institut Élie Cartan no. 2008-30 (2008). *En ligne :* `http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/26/22/PDF/CiLa08a.pdf`

[5] P. Ciarlet Jr., J. Zou. Fully discrete finite element approaches for time-dependent Maxwell's equations. *Numer. Math.* **82**, 193–219 (1999).

[6] M. Costabel, M. Dauge. Weighted regularization of Maxwell equations in polyhedral domains. A rehabilitation of Nodal finite elements. *Numer. Math.* **93**, 239–277 (2002).

[7] V. Girault, P.A. Raviart. *Finite element method for Navier–Stokes equations.* Springer, Berlin, 1986.

[8] S. Labrunie. *Sur quelques problèmes de modélisation et de calcul en physique des plasmas et en électromagnétisme.* Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Henri Poincaré, 2005. *En ligne :* `http://www.iecn.u-nancy.fr/~labrunie/pubs/habil.pdf`

[9] J.L. Lions, E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Dunod, Paris, 1968.

[10] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations.* Oxford University Press, Oxford, 2003.

[11] J.C. Nédélec. Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.* **35**, 315–341 (1980).
J.C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numer. Math.* **50**, 57–81 (1986).

Institut Élie Cartan, Nancy-Université et INRIA (projet CALVI), B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
E-mail address: `Simon.Labrunie@iecn.u-nancy.fr`