HAL
open science

Filtre de Kalman à deux étages pour l'estimation d'état et de défauts de systèmes stochastiques linéaires

Karim Khemiri, Fayçal Ben Hmida, José Ragot, Moncef Gossa

To cite this version:

Karim Khemiri, Fayçal Ben Hmida, José Ragot, Moncef Gossa. Filtre de Kalman à deux étages pour l'estimation d'état et de défauts de systèmes stochastiques linéaires. 5ème Conférence Internationale d'Electrotechnique et d'Automatique, JTEA'2008, May 2008, Hammamet, Tunisia. pp.CDROM. hal-00341803

HAL Id: hal-00341803

https://hal.science/hal-00341803v1

Submitted on 26 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Filtre de Kalman à deux étages pour l'estimation d'état et de défauts de systèmes stochastiques linéaires

Karim Khemiri(1), Fayçal Ben Hmida(1), José Ragot(2), Moncef Gossa(1)

(1) ESSTT-C3S, 5 av. Taha Hussein, BP 56 - 1008 Tunis, Tunisie

kemiri_karim@yahoo.fr, {Faycal.BenHmida, Moncef.Gossa}@esstt.rnu.tn

(2) CRAN (CNRS UMR 7039). 2, av. de la forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France

José.Ragot@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé

Dans cette communication, on propose d'utiliser le filtre de Kalman à deux étages pour estimer l'état et les défauts de systèmes stochastiques à temps variant et à temps discret. Ces défauts sont générés par un processus stochastique et affectent, par des actions additives, l'équation d'état et l'équation de mesure. Deux cas de figure sont analysés. Le premier suppose que les propriétés statistiques du modèle de défaut sont connues, par contre dans le second cas les propriétés statistiques et les conditions initiales relatives au modèle de défauts ne sont pas utilisées. Pour chaque cas, on développe un filtre de Kalman à deux étages. Un exemple illustratif utilisant cette technique de filtrage est également présenté.

Mots clés : système stochastique, estimation d'état, estimation de défaut, découplage, filtre de Kalman à état augmenté, filtre de Kalman à deux étages.

1 Introduction

L'estimation d'état des systèmes dynamiques en présence de défauts additifs (ou d'entrées inconnues) est largement étudiée dans la littérature. Dans [10], le cas des systèmes déterministes à temps continu a été présenté. Dans le contexte linéaire stochastique à temps discret, on peut noter les travaux qui utilisent une approche à base de filtre de Kalman [2], [1], [6], [3], [4]. Ces travaux représentent une extension des travaux de Friedland qui est le premier à introduire la technique du filtre $TSKF$ (Two Stage-Kalman Filter). L'idée principale, sur laquelle repose cette technique, consiste à utiliser une double transformation pour découpler le filtre $ASKF$ (Augmented State Kalman Filter) en deux sous filtres : un sous filtre dédié à l'estimation de l'état et un sous filtre estimateur du biais. Ce dernier étant utilisé pour corriger les estimations de l'état. Le filtre proposé par Friedland [2] n'est optimal qu'en présence d'un biais constant. Cela a incité Alouani et al. [1] à étendre ce filtre pour un biais stochastique dynamique, une contrainte algébrique est alors introduite pour assurer l'optimalité du filtre $TSKF$. Hsieh et Chen [3] développent un filtre $OTSKF$ (Optimal Two Stage Kalman Filter) qui s'applique dans un contexte plus général, c'est-à-dire lorsque le biais est généré par un processus dynamique stochastique et affecte conjointement l'état et la mesure de la sortie du système. L'optimalité de ce filtre correspond à la minimisation du critère MSE (Mean Square Error). Le même auteur dans [4] a proposé une version robuste dite $RTSKF$ (Robust Two Stage Kalman Filter). Ce filtre se dérive du filtre $OTSKF$ moyennant certaines modifications dans le sous filtre estimateur des entrées inconnues et la satisfaction de contraintes algébriques.

Récemment, Kim et al. [7] développent une version adaptative du filtre $TSKF$ notée $ATSKF$ (Adaptive Two Stage Kalman Filter). Ce filtre utilise deux facteurs d'oublis, variables dans le temps, pour adapter les deux matrices de variance-covariance a priori des deux étages du filtre de Kalman. Ces facteurs d'oublis se calculent en fonction d'une estimation de la matrice variance-covariance de l'erreur d'innovation. Les mêmes auteurs Kim et al. [8] présentent une analyse de la stabilité du filtre $ATSKF$.

Dans ce papier, on propose d'utiliser le filtrage de Kalman à deux étages pour estimer l'état et les défauts d'un système stochastique à temps variant et à temps discret.

Pour cela, on considère que les défauts sont générés par un processus stochastique excité par un bruit gaussien de moyenne nulle et de covariance qui peut être connue ou inconnue. Deux cas de figure se présentent alors : le premier où on suppose que les propriétés statistiques du bruit excitant le processus générateur de défauts sont parfaitement connues et le second où elles ne sont pas parfaitement connues. Pour chaque cas, on propose de développer un filtre $TSKF$ approprié. Il s'agit ici d'un filtre $OTSKF$ pour le premier cas et un filtre $RTSKF$ pour le second cas.
Ce papier est organisé comme suit : dans la deuxième section, on positionne le problème et on donne les hypothèses utilisées. Les sections 3 et 4 sont consacrées respectivement à développer le calcul des filtres $ASKF$, $OTSKF$ et $RTSKF$. Un exemple illustratif est présenté dans la section 5 mettant en œuvre ces différents filtres. Enfin, on termine par une conclusion.

2 Position du problème

On considère un système Σ stochastique linéaire à temps variant discret décrit par :

$$\Sigma \begin{cases} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + F_k^x f_k + w_k^x \\ y_k &= H_k x_k + F_k^y f_k + v_k \\ f_{k+1} &= f_k + w_k^f \end{cases} \tag{1}$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ représente l'état du système, $y \in \mathcal{R}^m$ sa sortie, u son entrée de commande supposée connue et $f \in \mathcal{R}^p$ le vecteur des défauts à effets additifs. Les matrices A, B, H, F^x et F^y sont connues et de dimensions appropriées.

Les hypothèses considérées sont les suivantes :
• $\mathcal{H}_1$: les bruits w_k^x et v_k sont gaussiens de moyennes nulles, non corrélés et de matrices de variance-covariance :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(w_k^x w_\ell^{xT}) = Q_k^x \delta_{k\ell} \\ \mathcal{E}(v_k v_\ell^T) = R_k \delta_{k\ell} \\ \mathcal{E}(w_k v_\ell^T) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

où $\delta_{k\ell}$ est le symbole de Kronecker.
• $\mathcal{H}_2$: le bruit w_k^f est gaussien de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\mathcal{E}(w_k^f w_\ell^{fT}) = Q_k^f \delta_{k\ell}$, $\mathcal{E}(w_k^x w_\ell^{fT}) = Q_k^{xf} \delta_{k\ell}$
• $\mathcal{H}_3$: l'état initial x_0 est une réalisation d'une séquence gaussienne indépendante des bruits w_k^x, w_k^f et v_k, de moyenne $\overline{x}_0$ et de matrice de variance-covariance P_0^x.
• $\mathcal{H}_4$: la valeur initiale f_0 est une réalisation d'une séquence gaussienne avec :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(f_0) = \overline{f}_0 \\ \mathcal{E}((f_0 - \overline{f}_0)((f_0 - \overline{f}_0)^T) = P_0^f \\ \mathcal{E}((x_0 - \overline{f}_0)((x_0 - \overline{f}_0)^T) = P_0^{xf} \end{cases} \tag{3}$$

• $\mathcal{H}_5$: Condition 1 sur les rangs

$$rang(F_k^x) = p,\ rang(F^y) = p, rang(H_k) = m (m \geq p)$$

• $\mathcal{H}_6$: Condition 2 sur les rangs
$rang(H_{k+1} F_k^x + F_{k+1}^y) = p$

Le problème qui se pose maintenant est la synthèse d'un filtre (FIG. 1) permettant d'obtenir une estimation non biaisée et à minimum de variance de l'état et des défauts.

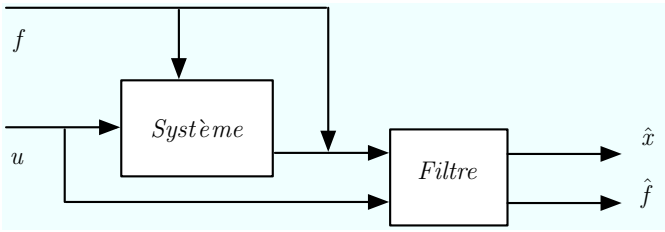

FIG. 1 – Filtre estimateur d'état et de défaut

Pour réaliser ce travail, on propose de considérer deux cas.
- Dans le premier cas, on suppose que les défauts sont générés par un processus stochastique dont les propriétés statistiques sont parfaitement connues ($\mathcal{H}_2$) et qu'on dispose des valeurs initiales de l'état et du défaut ($\mathcal{H}_3$ et $\mathcal{H}_4$). Dans ce cas, la solution la plus simple est d'utiliser le filtre $ASKF$ pour estimer d'une manière optimale l'état et le défaut, l'optimalité étant au sens de la minimisation du critère MSE (Mean Square Error). Une solution équivalente au filtre $ASKF$ est d'utiliser le filtre $OTSKF$ [3]. En effet, ce dernier permet de garantir les mêmes performances que le filtre $ASKF$ tout en réduisant le volume de calcul en nombre d'opérations d'addition et de multiplication [3].

- Dans un second cas, on considère qu'on ne dispose pas des connaissances exactes sur les propriétés statistiques du bruit w_k^f. Une erreur sur la matrice de covariance Q_k^f peut alors conduire à une large erreur d'estimation et voir même la perte de l'optimalité du filtre $OTSKF$. De ce fait, on propose, moyennant certaines modifications dans les équations de correction qui utilisent les mesures y_k, d'obtenir le filtre dit $RTSKF$. Ce filtre est qualifié de robuste car il permet d'obtenir une bonne estimation de l'état malgré la présence de défauts sans être influencé par les valeurs initiales $\overline{f}_0$, P_0^f et P_0^{xf} ni par les matrices Q_k^f et Q_k^{xf}. Cela revient à dire qu'on prend en compte uniquement les hypothèses $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_5$ et $\mathcal{H}_6$.

3 Connaissance parfaite des propriétés statistiques des défauts

Dans ce paragraphe, on se place dans le premier cas : les défauts sont issus du modèle (1), les matrices Q_k^f et Q_k^{xf} sont connues et les hypothèses $\mathcal{H}_1$ à $\mathcal{H}_5$ sont prises en compte. On cherche alors à concevoir un filtre de Kalman à deux étages moyennant une double transformation matricielle $U - V$ [3].

3.1 Filtre $ASKF$

Le système à état augmenté correspondant aux équations (1) est donné par :

$$x_{k+1}^a = A_k^a x_k^a + B_k^a u_k + w_k^a \quad (4)$$

$$y_k = H_k^a x^a + v_k \quad (5)$$

avec $x_k^a = \begin{bmatrix} x_k \\ f_k \end{bmatrix}$, $w_k^a = \begin{bmatrix} w_k^x \\ w_k^f \end{bmatrix}$

$$A_k^a = \begin{bmatrix} A_k & F_k^x \\ 0 & I \end{bmatrix}, \; B_k^a = \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix} \; H_k^a = \begin{bmatrix} H_k & F_k^y \end{bmatrix}$$

Le filtre $ASKF$ correspond au système (4)-(5) est un filtre de Kalman sous forme standard :

$$\begin{cases} x_{k+1/k}^a &= A_k^a x_{k/k}^a + B_k^a u_k \\ P_{k+1/k}^a &= A_k^a P_{k/k}^a A_k^{aT} + Q_k \\ x_{k+1/k+1}^a &= x_{k+1/k}^a + K_{k+1}^a (y_{k+1} - H_{k+1}^a x_{k+1/k}^a) \\ K_{k+1}^a &= P_{k+1/k}^a H_{k+1}^{aT} (H_{k+1}^a P_{k+1/k}^a H_{k+1}^{aT} + R_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1/k+1}^a &= (I - K_{k+1}^a H_{k+1}^a) P_{k+1/k}^a \end{cases} \quad (6)$$

avec :

$$x_{(.)}^a = \begin{bmatrix} x_{(.)} \\ f_{(.)} \end{bmatrix}, \quad K_{(.)}^a = \begin{bmatrix} K_{(.)}^x \\ K_{(.)}^f \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$P_{(.)}^a = \begin{bmatrix} P_{(.)}^x & P_{(.)}^{xf} \\ P_{(.)}^{fx} & P_{(.)}^f \end{bmatrix}, \quad Q_k = \begin{bmatrix} Q_k^x & Q_k^{xf} \\ Q_k^{fx} & Q_k^f \end{bmatrix} \quad (7b)$$

Le filtre $ASKF$ (6) permet d'obtenir une estimation optimale de l'état et du défaut. L'inconvénient majeur de cette approche réside essentiellement dans l'accroissement du coût de calcul avec l'ordre augmenté de l'état. Hsieh et Chen [3] ont montré qu'une solution équivalente à ce filtre, dont l'implémentation nécessite moins d'opérations (additions et multiplications), consiste à utiliser une technique de découplage pour obtenir un filtre de Kalman à deux étages. Cette technique fera l'objet des paragraphes suivants.

3.2 Transformation U-V

L'idée principale, sur laquelle repose cette technique de découplage, consiste à utiliser une double transformation $T(U)$ et $T(V)$ afin de diagonaliser les matrices de variance-covariance $P_{k+1/k}^a$ et $P_{k+1/k+1}^a$. Par conséquent, le filtre $ASKF$ sera décomposé en deux sous filtres : un sous filtre estimateur d'état et un sous filtre estimateur de défaut. La matrice de transformation utilisée est de la forme :

$$T(M) = \begin{bmatrix} I & M \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (8)$$

dont l'inverse est facile à obtenir :

$$T^{-1}(M) = \begin{bmatrix} I & -M \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (9)$$

et qui jouit de la propriété :

$$T(A)T(B) = T(A+B) \quad (10)$$

Après transformation, les grandeurs sont notées :

$$\begin{aligned}
\overline{x}^a_{k+1/k} &= T(-U_{k+1})x^a_{k+1/k} && (11)\\
\overline{P}^a_{k+1/k} &= T(-U_{k+1})P^a_{k+1/k}T^T(-U_{k+1}) && (12)\\
\overline{x}^a_{k+1/k+1} &= T(-V_{k+1})x^a_{k+1/k+1} && (13)\\
\overline{P}^a_{k+1/k+1} &= T(-V_{k+1})P^a_{k+1/k+1}T^T(-V_{k+1}) && (14)\\
\overline{K}^a_{k+1} = &= T(-V_{k+1})K^a_{k+1} && (15)
\end{aligned}$$

avec

$$\overline{x}^a_{(.)} = \begin{bmatrix} \overline{x}_{(.)} \\ \overline{f}_{(.)} \end{bmatrix}, \overline{P}^a_{(.)} = \begin{bmatrix} \overline{P}^x_{(.)} & 0 \\ 0 & \overline{P}^f_{(.)} \end{bmatrix}, \overline{K}^a_{(.)} = \begin{bmatrix} \overline{K}^x_{(.)} \\ \overline{K}^f_{(.)} \end{bmatrix}$$

Les matrices U et V seront déterminées ultérieurement.

3.3 Découplage

L'utilisation des équations (10) à (15) permet de transformer le filtre $ASKF$ (6) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\overline{x}^a_{k+1/k} &= T(-U)(A^aT(V)\overline{x}^a_{k/k} + B^a u_k) && (16)\\
\overline{P}^a_{k+1/k} &= T(-U)(A^aP^a_{k/k}A^{aT} + Q_k) \\
&\quad T^T(-U) && (17)\\
\overline{x}^a_{k+1/k+1} &= T(-V)(x^a_{k+1/k} + K^a_{k+1} \\
&\quad (y_{k+1} - H^a_{k+1}T(U)\overline{x}^a_{k+1/k}) && (18)\\
\overline{P}^a_{k+1/k+1} &= T(-V)(I - K^a_{k+1}H^a_{k+1}) \\
&\quad P^a_{k+1/k}T^T(-V) && (19)\\
\overline{K}^a_{k+1} &= T(-V)P^a_{k+1/k}H^{aT}_{k+1} \\
&\quad (H^a_{k+1}P^a_{k+1/k}H^{aT}_{k+1} + R_{k+1})^{-1} && (20)
\end{aligned}$$

où, pour alléger les notations, U_{k+1} et V_{k+1} ont été plus simplement notés U et V. Dans ce qui suit, les équations (16) à (20) vont être simplifiées. On commence tout d'abord par le développement des équations (17) et (19) pour trouver les matrices de transformation U_{k+1} et V_{k+1} permettant la diagonalisation des matrices de variance-covariance $P^a_{k+1/k}$ et $P^a_{k+1/k+1}$. En développant l'équation (17), on obtient :

$$\overline{P}^x_{k+1/k} = A_k\overline{P}^x_{k/k}A^T_k + \overline{Q}^x_k \quad (21)$$

$$\overline{P}^f_{k+1/k} = P^f_{k/k} + Q^f_k \quad (22)$$

$$\overline{U}_{k+1}\overline{P}^f_{k/k} + Q^{xf}_k - U_{k+1}(\overline{P}^f_{k/k} + Q^f_k) = 0 \quad (23)$$

avec :

$$\overline{Q}^x_k = Q^x_k - Q^{xf}_k\overline{U}^T_{k+1} - U_{k+1}(Q^{xf}_k - \overline{U}_{k+1}Q^f_k)^T \quad (24)$$

$$\overline{U}_{k+1} = A_kV_k + F^x_k \quad (25)$$

Pour l'équation (19), on obtient :

$$\overline{P}^x_{k+1/k+1} = (I - \overline{K}^x_{k+1}H_{k+1})\overline{P}^x_{k+1/k} \quad (26)$$

$$\overline{P}^f_{k+1/k+1} = (I - \overline{K}^f_{k+1}H_{k+1})\overline{P}^f_{k+1/k} \quad (27)$$

$$U_{k+1} - V_{k+1} - \overline{K}^x_{k+1}S_{k+1} = 0 \quad (28)$$

avec :

$$S_{k+1} = H_{k+1}U_{k+1} + F^y_{k+1} \quad (29)$$

A présent, il est possible de calculer les matrices U_{k+1} et V_{k+1} en utilisant les équations (22) et (23) pour U_{k+1} et l'équation (28) pour V_{k+1} :

$$\begin{aligned}
U_{k+1} &= \overline{U}_{k+1} + (Q^{xf}_k - \overline{U}_{k+1}Q^f_k) \\
&\quad (\overline{P}^f_{k+1/k})^{-1} && (30)\\
V_{k+1} &= U_{k+1} - \overline{K}^x_{k+1}S_{k+1} && (31)
\end{aligned}$$

Enfin, à partir des équations (16), (18) et (20), on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{x}_{k+1/k} &= A_k\overline{x}_{k/k} + B_ku_k + \overline{u}_k && (32)\\
\overline{f}_{k+1/k} &= \overline{f}_{k/k} && (33)\\
\overline{x}_{k/k} &= \overline{x}_{k/k-1} + \overline{K}^x_k(y_k - H_k\overline{x}_{k/k-1}) && (34)\\
\overline{f}_{k/k} &= \overline{f}_{k/k-1} + \overline{K}^f_k \\
&\quad (y_k - H_k\overline{x}_{k/k-1} - S_k\overline{f}_{k/k-1}) && (35)\\
\overline{K}^x_k &= \overline{P}^x_{k/k-1}H^T_k(H_k\overline{P}^x_{k/k-1}H^T_k + R_k)^{-1} && (36)\\
\overline{K}^f_k = &\quad \overline{P}^f_{k/k-1}S^T_k(S_k\overline{P}^f_{k/k-1}S^T_k + \\
&\quad H_k\overline{P}^x_{k/k-1}H^T_k + R_k)^{-1} && (37)
\end{aligned}$$

avec :

$$\overline{u}_k = (\overline{U}_{k+1} - U_{k+1})\overline{f}_{k/k} \quad (38)$$

3.4 Equations du filtre $OTSKF$

Les expressions données dans la section 3.3 sont obtenues après transformation. Pour revenir aux grandeurs dans l'ancienne base, il suffit d'utiliser :

$$\begin{aligned}
x^a_{k/k} &= T(V_k)\overline{x}^a_{k/k} \\
P^a_{k/k} &= T(V_k)\overline{P}^a_{k/k}T^T(V_k)
\end{aligned}$$

Les estimations a posteriori de l'état, du défaut et de leurs matrices de variance-covariance sont données respectivement par :

$$\hat{x}_{k/k} = \overline{x}_{k/k} + V_k \overline{f}_{k/k} \quad (39)$$
$$\hat{P}^x_{k/k} = \overline{P}^x_{k/k} + V_k \overline{P}^f_{k/k} V_k^T \quad (40)$$
$$\hat{f}_{k/k} = \overline{f}_{k/k} \quad (41)$$
$$\hat{P}^f_{k/k} = \overline{P}^f_{k/k} \quad (42)$$

Pour mettre en œuvre le filtre $OTSKF$, on suppose connues :

- l'entrée de commande u_k
- les matrices A_k, B_k, H_k, F^x_k et F^y_k
- les matrices Q^x_k, R_k, Q^f_k et Q^{xf}_k
- les valeurs initiales $\overline{x}_0$, $\overline{f}_0$, P^x_0, P^f_0 et P^{xf}_0

La mise en œuvre du filtre $OTSKF$ est résumée ci-dessous.

Algorithme 1 : Estimation état / défaut

• Etape 0 : initialisation $V_0 = P^{xf}_0 (P^f_{0/0})^{-1}$, $\overline{x}_{0/0} = \overline{x}_0 - V_0 \overline{f}_0$, $\overline{f}_{0/0} = \overline{f}_0$, $\overline{P}^x_{0/0} = P^x_0 - V_0 P^f_0 V_0^T$, $\overline{P}^f_{0/0} = P^f_0$, $k = 0$

• Etape 1 : sous-filtre estimateur de l'état

Calculer $\overline{U}_{k+1}$, U_{k+1}, $\overline{u}_k$ et $\overline{Q}^x_k$ respectivement à partir des équations (25), (30), (38), (24)

Calculer $\overline{x}_{k+1/k}$,$\overline{P}^x_{k+1/k}$, $\overline{K}^x_{k+1}$,$\overline{x}_{k+1/k+1}$ et $\overline{P}^x_{k+1/k+1}$ respectivement à partir de (32), (21), (36), (34) et (26)

• Etape 2 : sous-filtre estimateur des défauts

- Calculer S_{k+1} à partir de (29)
- Calculer $\overline{f}_{k+1/k}$, $\overline{P}^f_{k+1/k}$, $\overline{K}^f_{k+1}$, $\overline{f}_{k+1/k+1}$ à partir de (33), (22), (37) et (35)
- Calculer $\overline{P}^f_{k+1/k+1}$ à partir de (27)
- Mettre à jour V_{k+1} à partir de (31)
- Calculer l'état corrigé $\hat{x}_{k+1/k+1}$ à partir de (39) - Calculer la matrice variance-covariance $\hat{P}^x_{k+1/k+1}$ à partir de (40)

• Etape 3, $k = k + 1$, aller à l'étape 1.

Remarque 1 : une substitution des équations (33) et (27) respectivement dans (35) et (37), permet de réécrire :

$$\overline{f}_{k/k} = (I - \overline{K}^f_k S_k)\overline{f}_{k-1/k-1} + \overline{K}^f_k (y_k - H_k \overline{x}_{k/k-1}) \quad (43)$$
$$\overline{K}^f_k = \overline{P}^f_{k/k} S_k^T (H_k \overline{P}^x_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (44)$$

4 Connaissance imparfaite des propriétés statistiques des défauts

On considère maintenant le cas où l'on ne dispose pas des connaissances a priori sur le modèle générateur de défauts (1). Cela revient à concevoir un nouveau filtre par la recherche de nouvelles transformations U et V de telle sorte que ce filtre ne dépend pas ni des conditions initiales $\overline{f}_0$, P^f_0 et P^{xf}_0 ni des matrices de variance-covariance Q^f_k et Q^{xf}_k. On propose alors de déduire ce filtre à partir du filtre $OTSKF$ moyennant certaines modifications d'une part dans les équations du sous filtre estimateur de défauts (22), (33), (37), (35) et (27), et d'autre part dans les équations de prédiction de l'état (32) et (21). Ce filtre, noté $RTSKF$, est alors un filtre $TSKF$, qualifié de robuste puisqu'il est insensible aux matrices de variance-covariance Q^f_k et Q^{xf}_k et aux conditions initiales $\overline{f}_0$, P^f_0 et P^{xf}_0. Pour concevoir le filtre $RTSKF$, on va chercher tout d'abord à rendre les équations (32), (21) et (43) indépendantes de $\overline{f}_{k/k}$. Pour cela, dans l'équation (32) on remplace $\overline{x}_{k/k}$ par $\hat{x}_{k/k} - V_k \overline{f}_{k/k}$:

$$\overline{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + (\overline{U}_{k+1} - U_{k+1} - A_k V_k)\overline{f}_{k/k} \quad (45)$$

Pour rendre (45) et (43) indépendantes de $\overline{f}_{k/k}$ on impose les deux contraintes :

$$\overline{U}_{k+1} - U_{k+1} - A_k V_k = 0 \quad (46)$$
$$I - \overline{K}^f_{k+1} S_{k+1} = 0 \quad (47)$$

En comparant (45) et (25), on déduit :

$$U_{k+1} = F^x_k \quad (48)$$

Compte tenu de (46) et de (47), (45) et (43) deviennent respectivement :

$$\overline{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k \quad (49)$$
$$\overline{f}_{k+1/k+1} = \overline{K}^f_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\overline{x}_{k+1/k}) \quad (50)$$

Puis, en substituant (44) dans (47), on obtient :

$$\overline{P}^f_{k+1/k+1} = (S^T_{k+1} C^{-1}_{k+1} S_{k+1})^{-1} \quad (51)$$

avec :

$$C_{k+1} = H_{k+1}\overline{P}^x_{k+1/k}H^T_{k+1} + R_{k+1}$$

Si on substitue (51) dans (44), on trouve que :

$$\overline{K}^f_{k+1} = (S^T_{k+1}C^{-1}_{k+1}S_{k+1})^{-1}S^T_{k+1}C^{-1}_{k+1} \qquad (52)$$

Maintenant on cherche à réécrire l'équation (22) tout en remplaçant $\overline{P}^x_{k/k}$ par $\hat{P}^x_{k/k} - V_k\overline{P}^f_{k/k}V^T_k$, il vient alors :

$$\overline{P}^x_{k+1/k} = A_k\hat{P}^x_{k/k}A^T_k + Q^x_k + \tilde{Q}_k \qquad (53)$$

avec :

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_k &= (F^x_k - U_{k+1})\overline{P}^f_{k/k}(F^x_k - U_{k+1})^T - \qquad (54)\\ &\quad U_{k+1}Q^{xfT}_k - Q^{xf}_k U^T_{k+1} + U_{k+1}Q^f_k U^T_{k+1}\end{aligned}$$

Le terme $\tilde{Q}_k$ donné par (54) ne prend pas la valeur zéro pour $U_{k+1} = F^x_k$ comme indiqué dans [4]. De ce fait, le non prise en compte de ce terme dans le filtre $RTSKF$, n'assure pas un découplage parfait comme montré dans la section 3. Finalement, les étapes de la mise en œuvre du filtre $RTSKF$ sont les suivantes :

Algorithme 2 : Estimation état / défaut

- Etape 0 : initialisation
  $k = 0$, $\hat{x}_{0/0} = \overline{x}_0$ et $\hat{P}^x_{0/0} = P^x_0$
- Etape 1 : sous-filtre estimateur de l'état
  - $\overline{x}_{k+1/k} = A_k\hat{x}_{k/k} + B_k u_k$
  - $\overline{P}^x_{k+1/k} = A_k\hat{P}^x_{k/k}A^T_k + Q^x_k$
  - $\overline{K}^x_{k+1} = \overline{P}^x_{k+1/k}H^T_{k+1}C^{-1}_{k+1}$
  - $\overline{x}_{k+1/k+1} = \overline{x}_{k+1/k} + \overline{K}^x_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\overline{x}_{k+1/k})$
  - $\overline{P}^x_{k+1/k+1} = (I - \overline{K}^x_{k+1}H_{k+1})\overline{P}^x_{k+1/k}$
- Etape 2 : sous-filtre estimation du défaut
  - $\overline{P}^f_{k+1/k+1} = (S^T_{k+1}C^{-1}_{k+1}S_{k+1})^{-1}$
  - $\overline{K}^f_{k+1} = (S^T_{k+1}C^{-1}_{k+1}S_{k+1})^{-1}S^T_{k+1}C^{-1}_{k+1}$
  - $\overline{f}_{k+1/k+1} = \overline{K}^f_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1}\overline{x}_{k+1/k})$
  - $V_{k+1} = (I - \overline{K}^x_{k+1}H_{k+1})F^x_k - \overline{K}^x_{k+1}F^y_{k+1}$
- Etape 3 : correction
  - $\hat{x}_{k+1/k+1} = \overline{x}_{k+1/k+1} + V_{k+1}\overline{f}_{k+1/k+1}$
  - $\hat{P}_{k+1/k+1} = \overline{P}^x_{k+1/k+1} + V_{k+1}\overline{P}^f_{k+1/k+1}V^T_{k+1}$
- Etape 4 : $k = k + 1$, aller à l'étape 1.

5 Exemple

Pour évaluer les performances du filtre, on considère un exemple à trois variables d'état :

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k(1) \\ x_k(2) \\ x_k(3) \end{bmatrix}, \; A_k = \begin{bmatrix} a_k & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.25 \end{bmatrix}, \; B_k = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$a_k = 0.5 + 0.2sin(0.5k)$$

$$F^x_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ -1 \end{bmatrix}, \; F^y_k = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, f_0 = 0$$

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; \overline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P^{xf}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{f}_0 = 0, \; Q^x_k = 0.5I_{3\times3}, \quad R_k = 0.1I_{2\times2}, \quad Q^f_k = 2$$

$$Q^x f_k = (0.02 \quad 0.01 \quad 0.02)^T$$

Pour les deux cas d'étude (section 3 et 4), on utilise la même séquence de mesure sur l'entrée et la sortie du système (2) et on prend comme valeurs initiales des matrices de variance-covariance :

$$P^x_0 = 100I_{3\times3}, \quad P^f_0 = 100$$

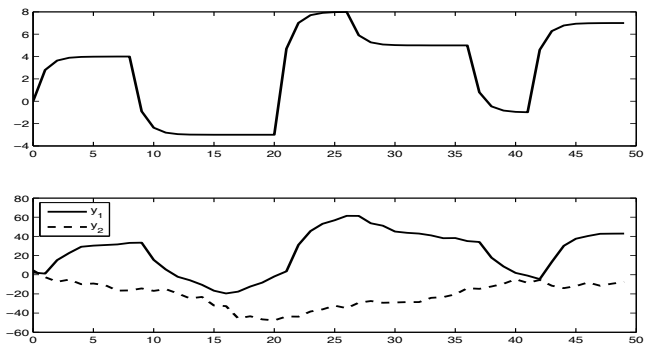

FIG. 2 – Séquence entrée-sortie du système

5.1 Matrices de variance-covariance connue

Les valeurs initiales sont :
$Q^f_k = 2, \quad Q^{xf}_k = (0.02 \quad 0.01 \quad 0.02)^T.$

A la figure 3, on présente l'estimation a posteriori obtenue par les deux filtres $OTSKF$ et $RTSKF$, pour la première variable d'état $x_k(1)$ et le défaut f_k. Les résultats donnés par le filtre $ASKF$ ne sont pas présentés car sont sensiblement identiques à ceux fournis par le filtre $OTSKF$.

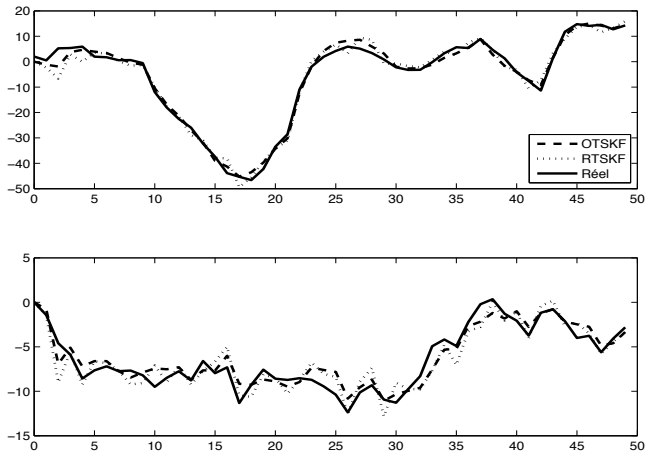

FIG. 3 – Variable d'état $x_k(1)$ et défaut f_k réels et leurs estimés

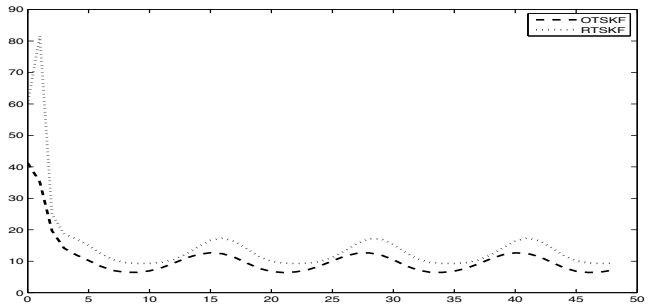

FIG. 4 – Trace de la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation d'état

La valeur $RMSE$ se calcule par la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne entre la grandeur réelle et sa estimée. Les figures 4 et 5 visualisent respectivement la trace de la matrice de variance-covariance $\hat{P}^x_{k+1/k+1}$ de l'état et $\overline{P}^f_{k+1/k+1}$ celle du défaut. On constate que le filtre $OTSKF$ présente des performances nettement meilleures que celles du filtre $RTSKF$. En effet, une évaluation de la valeur $RMSE$ des erreurs d'estimation a posteriori sur l'état et sur le défaut (table 1), confirme cette constatation.

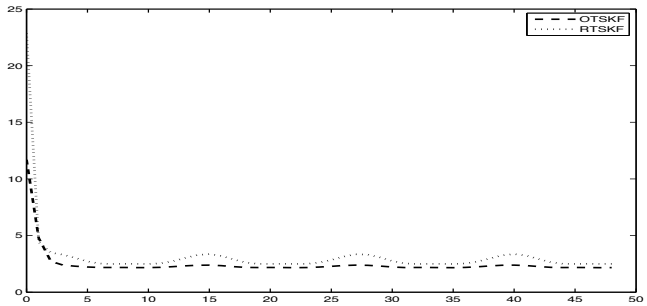

FIG. 5 – Variance de l'erreur d'estimation du défaut

RMSE	ASKF	OTSKF	RTSKF
$x_k(1)$	1.94	1.91	2.96
$x_k(2)$	1.74	1.72	2.69
$x_k(3)$	1.23	1.22	1.81
f_k	1.13	1.13	1.39

TAB. 1 – Valeurs RMSE des erreurs d'estimation

5.2 Matrices de variance-covariance non connue

On a choisi $Q^f_k = 20$ et $Q^{xf}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, valeurs volontairement différentes des valeurs vraies. Dans ce cas, on observe d'après les figures 6 à 8 et le tableau 2 que les performances du filtre $RTSKF$ restent inchangées malgré une erreur importante (10 fois plus grande) sur la matrice Q^f_k. Par contre, on remarque bien la nette dégradation des performances des filtres $ASKF$ et $OTSKF$.

RMSE	ASKF	OTSKF	RTSKF
$x_k(1)$	2.05	2.02	2.96
$x_k(2)$	1.92	1.89	2.69
$x_k(3)$	1.34	1.33	1.81
f_k	1.41	1.39	1.39

TAB. 2 – Valeurs RMSE des erreurs d'estimation

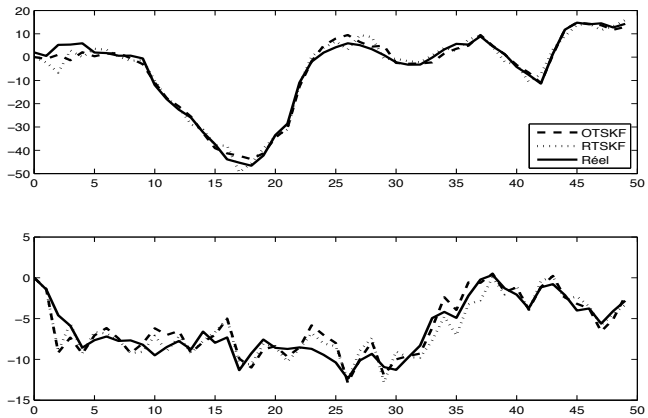

FIG. 6 – Variable d'état $x_k(1)$ et défaut f_k réels et leurs estimés

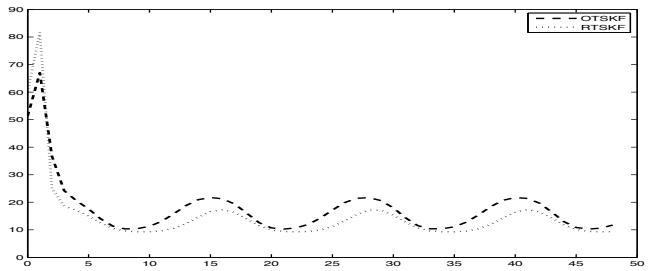

FIG. 7 – Trace de la matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation d'état

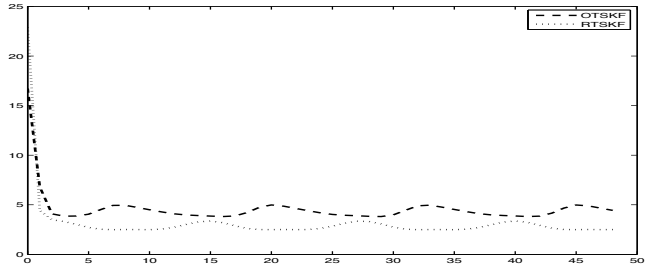

FIG. 8 – Variance de l'erreur d'estimation du défaut

6 Conclusion

Dans ce papier, on a présenté deux filtres de Kalman à deux étages en version optimale $OTSKF$ et en version robuste $RTSKF$. L'objectif c'était d'estimer le vecteur d'état et les défauts de systèmes stochastiques. Pour cela, on montre dans le cas où les propriétés statistiques du bruit de défaut sont parfaitement connues qu'il est préférable d'utiliser le filtre $OTSKF$. Ce filtre est équivalent au filtre $ASKF$ et permet de garantir l'optimalité au sens de la minimisation du critère MSE. Dans le cas contraire, où les propriétés statistiques du bruit de défaut ne sont pas parfaitement connues, alors il est préférable d'utiliser le filtre $RTSKF$. En effet, ce filtre reste performant (table 2) malgré les erreurs commises sur les valeurs des matrices de variance-covariance caractérisant le bruit de défaut. De plus, il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs initiales relatives au sous filtre estimateur de défaut.

Parmi les extensions possibles de ce travail, on envisage d'introduire un facteur supplémentaire dans le filtre $RTSKF$ sous forme de l'intégrale de l'erreur de prédiction dans le but de mieux estimer le défaut. L'utilisation d'autres types de défauts peut également être un sujet d'étude.

Références

[1] Alouani A. T., Rice T. R. and Blair W. D. A two-stage filter for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias. Proceeding American Control Conference, Chicago, IL, pp. 1784-1788, 1992

[2] Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 14, pp. 359-367, 1969.

[3] Hsieh C. S. and Chen F. C. Optimal solution of the two stage Kalman estimator. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 44, pp. 194-199, 1999.

[4] Hsieh C. S. Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 45, pp. 2374-2378, 2000.

[5] Ignagni M. Optimal and suboptimal separate-bias Kalman filter estimators of a stochastic bias. IEEE Transaction on Automatic Control, vol. 45, pp. 547-551, 2000.

[6] Keller J. Y. and Darouach M. Two-Stage Kalman estimator with unknown exogenous inputs. Automatica, vol. 35, pp. 339-342, 1999.

[7] Kim K. H., Lee J. G. and Park C. G. Adaptive two-stage Kalman filter in the presence of unknown random bias. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 20, pp. 305-319, 2006.

[8] Kim K. H., Lee J. G. and Park C. G. The stability analysis of the adaptive two-stage Kalman filter. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol. 21, pp. 856-870, 2007.

[9] Kitanidis P. K. Unbiased minimum-variance linear state estimation. Automatica, vol. 23, pp. 775-778, 1987.

[10] Maquin D. et Ragot J. Diagnostic des systèmes linéaires. Hermes, 2000.