Sur le spectre semi-classique d'un système intégrable de dimension 1 autour d'une singularité hyperbolique

Olivier Lablée

▶ **To cite this version:**

Olivier Lablée. Sur le spectre semi-classique d'un système intégrable de dimension 1 autour d'une singularité hyperbolique. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., 2010, 19 (1), pp.85-123. hal-00339621

HAL Id: hal-00339621
https://hal.science/hal-00339621

Submitted on 18 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LE SPECTRE SEMI-CLASSIQUE D'UN SYSTÈME INTÉGRABLE DE DIMENSION 1 AUTOUR D'UNE SINGULARITÉ HYPERBOLIQUE

OLIVIER LABLÉE

Summary. Dans cette article on décrit le spectre semi-classique d'un opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}$ avec un potentiel type double puits. La description qu'on donne est celle du spectre autour du maximun local du potentiel. Dans la classification des singularités de l'application moment d'un système intégrable, le double puits représente le cas des singularités non-dégénérées de type hyperbolique.

1. Introduction

Sur la variété $M = \mathbb{R}$, l'opérateur de Schrödinger P_h de potentiel V, V étant une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est l'opérateur linéaire non-borné sur l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définit par :

$$P_h := -\frac{h^2}{2}\Delta + V,$$

où V est l'opérateur de multiplication par la fonction V, le laplacien est donné par $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ et h est le paramètre semi-classique. Le spectre semi-classique d'un opérateur de Schrödinger en dimension un est bien connu **[20]**, **[21]** et **[11]** dans les zones dites elliptiques, c'est-à-dire en dehors des maxima locaux de la fonction potentiel V ; on parle alors de règles de Bohr-Sommerfeld régulières. Dans cet article on se concentre sur le cas d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel type double puits, c'est-à-dire que $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ avec $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ et V possédant exactement un maximum local non-dégénéré, que l'on supposera par exemple atteint en 0. Le modèle du double puits à été beaucoup étudié **[3]**, **[22]** cependant son spectre reste globalement assez mystérieux. Dans l'étude des singularités de l'application moment d'un système complètement intégrable, l'opérateur de Schrödinger avec double puits est le modèle type pour les singularités non-dégénérées de type hyperbolique **[34]**. En effet, pour un hamiltonien $p : M \to \mathbb{R}$ tel que 0 soit valeur critique de p, et tel que les fibres dans un voisinage de 0 soient compactes et connexes et ne contiennent qu'un unique point critique non-dégénéré de type hyperbolique : la fibre $\Lambda_0 := p^{-1}(0)$ est alors un "huit" et le feuilletage dans un voisinage de la fibre singulière Λ_0 est difféomorphe à celui du double puits.

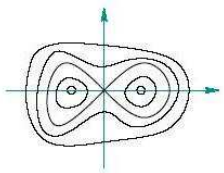


Fig. 1 : Le feuilletage autour d'une singularité hyperbolique dans l'espace de phases.

Date: 17 Novembre 2008.

Dans une série de trois articles **[8]**, **[9]** et **[10]** Y. Colin de Verdière et B. Parisse se sont intéressés au spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger, en dimension 1 avec un potentiel ayant un maximun local non-dégénéré. Dans **[10]** ils traitent de manière générale l'étude des singularités. Dans **[8]** et **[9]** les deux auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour trouver le spectre semi-classique dans un compact de diamètre h centré autour de l'origine de l'opérateur linéaire :

$$P_h := -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$$

avec un potentiel V type double puits.

Dans la première partie de cet article, on fait quelques rappels sur les outils semi-classiques. Dans la partie suivante, on rappelle la formule donnée par Y. Colin de Verdière et B. Parisse. Dans la dernière partie on utilise cette formule pour expliciter, dans une certaine mesure, le spectre de l'opérateur P_h. On montre en particulier que le spectre de l'opérateur P_h dans le compact $\left[-\sqrt{h}, \sqrt{h}\right]$ est constitué de deux familles de réels en quinconce, et que l'interstice spectral est de l'ordre de $O(h/\left|\ln(h)\right|)$: voir le théorème 4.1.

2. Préliminaires

Dans toute cette section X est une variété différentielle lisse de dimension n et on notera souvent par $M := T^*X$ la variété symplectique associée.

2.1. **Outils semi-classiques.** Pour le lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'-analyse semi-classique, on conseille par exemple la littérature suivante : Y. Colin de Verdière **[12]**, Dimassi-Sjöstrand **[14]**, L. Evans et M. Zworski **[15]**, A. Martinez **[27]**, D. Robert **[30]**, S. Vu Ngoc **[34]**.

Sur la variété $X := \mathbb{R}^n$, et pour $k, m \in \mathbb{Z}^2$, on définit l'ensemble de symboles d'indice k et de poids $\langle z\rangle^m$ sur la variété X où $\langle z\rangle = \langle x, \xi\rangle := \left(1 + |z|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, par :

$$S^k\left(X, \langle z\rangle^m\right)$$

$$:= \left\{a_h(z) \in \mathcal{C}^\infty\left(T^*X\right), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha \geq 0, \forall z \in T^*X, \left|\partial_z^\alpha a_h(z)\right| \leq C_\alpha h^k \langle z\rangle^m\right\}.$$

De manière très formelle, la quantification de Weyl consiste à associer à une fonction symbole $a_h : (x, \xi) \mapsto a_h(x, \xi) \in S^k\left(\langle z\rangle^m\right)$ un opérateur linéaire $O_p^w(a_h)$ de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(X)$ dans lui même et admettant une représentation intégrale : pour toute fonction $u \in \mathcal{S}(X)$ et pour tout $x \in X$:

$$O_p^w(a_h)(u)(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n}\int\int_{T^*X} e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dyd\xi.$$

Example 2.1. *Le quantifié de Weyl de la fonction $(x, \xi) \mapsto x_j$ est l'opérateur de multiplication par la variable x_j. Le quantifié de Weyl de la fonction $(x, \xi) \mapsto \xi_j$ est l'opérateur de dérivation $-ih\frac{\partial}{\partial x_j}$.*

Rappelons aussi la :

Proposition 2.2. *Pour deux symboles a_h et b_h nous avons que :*

$$O_p^w(a_h b_h) = O_p^w(a_h) \circ O_p^w(b_h) + O(h)$$

$$O_p^w\left\{a_h, b_h\right\} = \left[O_p^w(a_h), O_p^w(b_h)\right] + O(h^2)$$

$\{.,.\}$ étant les crochets de Poisson et $[.,.]$ le commutateur.

Un opérateur linéaire A est un opérateur pseudo-différentiel si et seulement s'il existe un symbole a_h tel que $A = O_p^w(a_h)$.

En analyse semi-classique, on est aussi amené à considérer des symboles ayant des développements asymptotiques en puissance de h : soit $a_h \in S^0\left(X, \langle z\rangle^m\right)$, on

dira que ce symbole est classique si et seulement s'il existe une suite de symboles $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in S^0\left(X, \langle z\rangle^m\right)^{\mathbb{N}}$ indépendant de h tels que pour tout $k' \geq 0$, on ait :

$$\left(a_h(z) - \sum_{j=0}^{k'} a_j(z)h^j\right) \in S^{k'+1}\left(X, \langle z\rangle^m\right).$$

On note alors $a_h = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j h^j$, on dira aussi que a_0 est le symbole principal de a_h.

Pour finir sur les symboles, on dit qu'un symbole $a \in S\left(X, \langle z\rangle^m\right)$ est elliptique en $(x_0, \xi_0) \in T^*X$ si et seulement si $|a(x_0, \xi_0)| \neq 0$.

2.2. **Outils microlocaux.** De manière générale, sur une variété riemannienne (X, g) complète connexe, l'asymptotique du spectre de l'opérateur de Schrödinger

$$P_h := -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

ou plus généralement d'un opérateur pseudo-différentiel, est remarquablement liée à une géométrie sous-jacente. Celle-ci vit sur le fibré cotangent T^*X, vu comme une variété symplectique[1] : c'est la géométrie de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le même phénomène qui permet de voir la mécanique classique (structure de variété symplectique) comme limite de la mécanique quantique (structure d'algèbre d'opérateurs). On est ainsi amené à définir une notion de localisation dans l'espace des phases.

Donnons ici quelques éléments d'analyse microlocale, pour plus de détails voir par exemple **[33]**, **[34]** ou **[12]**.

Pour $h_0 > 0$ fixé, l'ensemble $A := \left\{\lambda(h) \in \mathbb{C}^{]0,h_0]},\ \exists N \in \mathbb{Z},\ |\lambda(h)| = O(h^{-N})\right\}$ est un anneau commutatif pour les opérations usuelles sur les fonctions. On voit aussi sans peine que $I := \{\lambda(h) \in A,\ \lambda(h) = O(h^\infty)\}$ est un idéal bilatère de A, on définit alors l'anneau $\mathbb{C}_h$ des constantes admissibles comme étant l'anneau quotient A/I.

On peut alors définir le $\mathbb{C}_h$-module des fonctions admissibles :

Definition 2.3. L'ensemble $\mathcal{A}_h(X)$ des fonctions admissibles sur X est l'ensemble des distributions $u_h \in \mathcal{D}'(X)$ tels que pour tout opérateur pseudo-différentiel P_h dont le symbole dans une carte locale est a support compact

$$\exists N \in \mathbb{Z},\ \|P_h u_h\|_{L^2(X)} = O(h^N).$$

L'ensemble $\mathcal{A}_h(X)$ est un $\mathbb{C}_h$-module pour les lois usuelles des fonctions. Un premier fait important est que par le théorème de Calderon-Vaillancourt, on a l'inclusion : $L^2(X) \subset \mathcal{A}_h(X)$.

Example 2.4. Les fonctions WKB[2] de la forme :

$$u_h(x) = \alpha(x)e^{i\frac{S(x)}{h}}$$

S étant une fonction réelle $\mathcal{C}^\infty$, sont des fonctions admissibles stables par l'action d'un opérateur pseudo-différentiel.

A tout élément u_h du $\mathbb{C}_h$-module des fonctions admissibles est associé un sous-ensemble de T^*X, cet ensemble, nommé micro-support[3] décrit la localisation de la fonction u_h dans l'espace des phases.

[1]Rappelons que le fibré cotangent d'une variété différentiable est naturellement muni d'une structure symplectique. En effet, pour toute variété M lisse de dimension n, on peut munir de façon intrinsèque son fibré cotangent T^*M d'une structure de variété symplectique (T^*M, ω) de dimension $2n$ définie par la différentielle extérieure $\omega = d\alpha$ de la 1-forme de Liouville α.

[2]Pour Wentzel, Kramers et Brillouin.

[3]Ou front d'ondes.

Definition 2.5. Soit $u_h \in \mathcal{A}_h(X)$, on dira que u_h est négligeable au point $m \in T^*X$, si et seulement s'il existe P_h un opérateur pseudo-différentiel elliptique en m tels que :

$$\|P_h u_h\|_{L^2(X)} = O(h^\infty).$$

On définit alors $MS(u_h)$, le micro-support de u_h comme le complémentaire dans T^*X de l'ensemble des points $m \in T^*X$ où u_h est négligeable. Parmi les propriétés liées au micro-support nous avons que si P_h est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal p alors on a l'implication :

$$P_h u_h = O(h^\infty) \Rightarrow MS(u_h) \subset p^{-1}(0).$$

Donc si par exemple P_h est un opérateur de symbole principal p, λ un scalaire, et si u_h est une fonction non nulle telle que : $(P_h - \lambda I_d)\, u_h = O(h^\infty)$ alors $MS(u_h) \subset p^{-1}(\lambda)$. Ceci est une propriété fondamentale de l'analyse microlocale : elle donne une localisation des fonctions propres dans l'espace des phases.

Example 2.6. Pour une fonction WKB : $u_h(x) = \alpha(x) e^{i\frac{S(x)}{h}}$ on a :

$$MS(u_h) = \{(x, dS(x)), \alpha(x) \neq 0\}.$$

Definition 2.7. Soient $u_h, v_h \in \mathcal{A}_h(X)^2$, on dira que $u_h = v_h + O(h^\infty)$ sur un ouvert $U \subset T^*X$ si et seulement si :

$$MS(u_h - v_h) \cap U = \emptyset.$$

Avec les propriétés du micro-support, on peut montrer que pour tout ouvert U de T^*X, l'ensemble $\{u_h \in \mathcal{A}_h(X) / MS(u_h) \cap U = \emptyset\}$ est un $\mathbb{C}_h-$sous-module de $\mathcal{A}_h(X)$, on peut alors définir l'espace des micro-fonctions :

Definition 2.8. Soit U un ouvert non vide de T^*X, on définit l'espace des micro-fonctions sur U comme étant le $\mathbb{C}_h-$module quotient :

$$\mathcal{M}_h(U) := \mathcal{A}_h(X) / \{u_h \in \mathcal{A}_h(X),\, MS(u_h) \cap U = \emptyset\}.$$

Les opérateurs pseudo-différentiels agissent sur $\mathcal{M}_h(U)$, en effet : pour tout opérateur pseudo-différentiel P_h on a $MS(P_h u_h) \subset MS(u_h)$ et ainsi $P_h(\mathcal{M}_h(U)) \subset \mathcal{M}_h(U)$.

A tout triplet (P_h, λ, U) où P_h est un opérateur pseudo-différentiel, λ un scalaire de l'anneau $\mathbb{C}_h$ et U un ouvert non vide de T^*X, on peut associer l'ensemble $\mathcal{L}(P_h, \lambda, U)$ des microfonctions u_h solutions dans l'ouvert U de $(P_h - \lambda I_d)\, u_h = O(h^\infty)$. L'ensemble $\mathcal{L}(P_h, \lambda, U)$ est un $\mathbb{C}_h$-module, et si Ω désigne un ensemble d'indices quelconque, la famille d'ensembles $\{\mathcal{L}(P_h, \lambda, U_x),\, x \in \Omega\}$ est un faisceau au dessus de $\bigcup_{x\in\Omega} U_x$. En effet toute solution peut être restreinte sur des ouverts plus petits d'une unique manière, et deux solutions u_h définie sur un ouvert U_x et v_h définie sur un autre ouvert U_y et telles que $u_h = v_h$ sur l'ouvert $U_x \cap U_y$ peuvent être misent ensemble pour former une solution globale sur l'ouvert $U_x \cup U_y$. Ce faisceau est supporté[4] sur l'ensemble $p^{-1}(\lambda) \subset T^*X$.

2.3. **Systèmes intégrables semi-classiques.** Un système intégrable classique est la donnée d'une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ et de n fonctions $(f_1, ..., f_n)$ de l'algèbre $\mathcal{C}^\infty(M)$ telles que les différentielles $(df_i(x))_{i=1,...,n}$ sont libres

[4]Au sens du micro-support.

presque partout sur M, et telles que pour tout indices i, j on ait $\{f_i, f_j\} = 0$. On définit aussi l 'application moment classique associée :

$$\mathbf{f} : \begin{cases} M \to \mathbb{R}^n \\ \\ x \mapsto (f_1(x), ..., f_n(x)) . \end{cases}$$

Un système intégrable semi-classique sur une variété X est la donné de n opérateurs pseudo-différentiels $P_1, ..., P_n$ sur $L^2(X)$ tels que pour tout indices i et j on ait $[P_i, P_j] = O(h^\infty)$ et dont les symboles principaux forment un système intégrable sur $M := T^*X$. On notera par $\mathbf{P} := (P_1, ..., P_n)$ l'application moment quantique et par $\mathbf{p} := (p_1, .., .p_n)$ l'application moment classique associée aux symboles principaux de $\mathbf{P}$. Les points réguliers de l'application moment classique sont les points $m \in M$ tels que les différentielles $(dp_i(m))_{i=1,...,n}$ sont libres. Les points réguliers d'un système intégrable ont une description symplectique locale simple donnée par le théorème de Darboux-Carathéodory (voir par exemple [**2**]). Une fibre $\Lambda_c := \mathbf{p}^{-1}(c)$ est régulière si et seulement si tous les points de Λ_c sont réguliers pour $\mathbf{p}$. Les fibres régulières sont décrites par le théorème actions-angles, nommé aussi théorème d'Arnold-Liouville-Mineur, qui donne la dynamique classique au voisinage d'une fibre régulière connexe et compacte : le flot hamiltonien associé à une intégrale première est quasi-périodique (droites s'enroulant sur un tore). Ces deux théorèmes ont un analogue semi-classique : Y. Colin de Verdière pour le théorème de Darboux-Carathéodory [**7**] et S. Vu Ngoc pour le théorème actions-angles [**31**],[**32**]. Le théorème de Darboux-Carathéodory semi-classique permet de faire une description précise de l'ensemble des micro-solutions des équations $P_j u_h = O(h^\infty)$. Les résultats d'analyse microlocale nous informe déjà que les solutions u_h sont localisées sur $\bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(0)$; mais en fait on a bien mieux :

Proposition 2.9. *Pour tout point $m \in M$ régulier de $\mathbf{p} = (p_1, ...p_n)$ tel que $\mathbf{p}(m) = 0$, le faisceau des microsolutions de l'équation :*

$$P_j u_h = O(h^\infty) \text{ près de } m$$

est un faisceau en $\mathbb{C}_h$-module libre de rang 1 engendré par $U^{-1}(\mathbf{1})$ où U est un opérateur intégral de Fourier et $\mathbf{1}$ est une microfonction égale à 1 près de l'origine.

2.4. **Fibres régulières d'un système intégrable.** En conséquence pour une fibre $\Lambda_E := \mathbf{p}^{-1}(E)$ compacte, connexe et régulière, toute microsolution u_h de $(P_h - EI_d)\, u_h = O(h^\infty)$ est engendré par $U^{-1}(\mathbf{1})$. La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre que u_h est nécesseraiment du type WKB. On va maintenant décrire comment on prolonge une microsolution d'un ouvert à un autre le long d'une fibre régulière (pour plus de détails, voir [**34**]). Pour commencer on se donne un recouvrement fini $(U_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ d'ouverts de la fibre Λ_E. Pour tout couple d'ouverts non vides U_α et U_β du recouvrement tels que $U_\alpha \cap U_\beta$ est non vide et connexe; si on considère alors deux microfonctions φ_α et φ_β solutions de $(P_h - \lambda I_d)\, u_h = O(h^\infty)$ microlocalement sur les ouverts respectifs U_α et U_β, les microfonctions φ_α et φ_β sont respectivement engendrés par $U^{-1}(\mathbf{1}_\alpha)$ et par $U^{-1}(\mathbf{1}_\beta)$, $\mathbf{1}_\alpha$ et $\mathbf{1}_\beta$ étant égale à 1 microlocalement sur U_α et respectivement sur U_β. En se plaçant sur $U_\alpha \cap U_\beta$ et en utilsant l'argument de la dimension 1 on a l'existence de $c_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}_h$ tel que sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on ait

$$U^{-1}(\mathbf{1}_\alpha) = c_{\alpha,\beta} U^{-1}(\mathbf{1}_\beta)$$

et donc, sur $U_\alpha \cap U_\beta$ on a :

$$\mathbf{1}_\alpha = c_{\alpha,\beta} \mathbf{1}_\beta.$$

La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre (voir **[33]**,**[34]**) que la constante $c_{\alpha,\beta}$ s'écrit sous la forme

$$c_{\alpha,\beta} = e^{\frac{iS_{\alpha\beta}}{h}}$$

le scalaire $S_{\alpha\beta}$ étant dans $\mathbb{C}_h$ est dépendant de la variable E. Plus généralement pour une famille finie $(U_k)_{k=1,\ldots,l}$ d'ouverts non vides recouvrant une partie compacte et connexe de la fibre régulière Λ_E telle que pour tout indice $k \in \{1,..,l-1\}$, $U_k \cap U_{k+1}$ est non vide et connexe. Sur chaques ouverts U_k on a un générateur $\mathbf{1}_k$ de $\mathcal{L}(P_h, \lambda, U_k)$ et pour tout indice $k \in \{1,..,l-1\}$ il existe $c_{k,k+1} = e^{\frac{iS_{k,k+1}}{h}} \in \mathbb{C}_h$ tel que :

$$\mathbf{1}_k = c_{k,k+1}\mathbf{1}_{k+1}$$

ainsi nous avons alors l'égalité suivante

$$\mathbf{1}_1 = c_{1,2}c_{2,3}\ldots c_{l-1,l}\mathbf{1}_l.$$

On peut donc écrire $\mathbf{1}_1 = e^{\frac{iS_{1,l}}{h}}1_l$ où on a posé $S_{1,l} = \sum_{k=1}^{l-1} S_{k,k+1}$. La dépendance en la variable E est lisse : les fonctions $E \mapsto S_\cdot(E)$ sont $\mathcal{C}^\infty$(voir **[31]**,**[33]** et **[34]**).

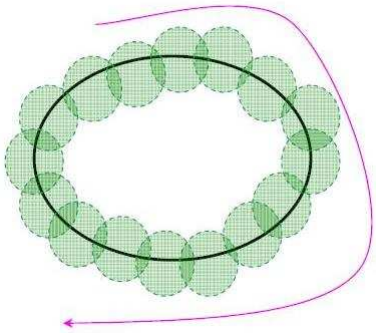


Fig. 2 : Un recouvrement par des ouverts d'une fibre régulière.

2.5. **Théorème d'Egorov et opérateurs intégraux de Fourier.** Pour finir donnons le théorème d'Egorov qui permet de définir rapidement la notion d'opérateur intégral de Fourier, voir par exemple **[12]** :

Theorem 2.10. ***(Egorov)*** *: Soient $(T^*X, d\alpha)$ et $(T^*Y, d\beta)$ deux variétés symplectomorphe : il existe χ un symplectomorphisme de T^*X dans T^*Y. On supposera que χ est exact : $\chi^*\beta - \alpha$ est une 1-forme exacte sur X. Alors il existe $\widetilde{\chi}$ un morphisme de $\mathbb{C}_h$-module de $\mathcal{M}_h(X)$ dans $\mathcal{M}_h(Y)$ inversible tel que pour tout $a \in \mathcal{M}_h(Y)$, en notant par $\hat{a} = O_p^w(a)$, l'opérateur :*

$$B = \widetilde{\chi}^{-1} \circ \hat{a} \circ \widetilde{\chi}$$

est un opérateur pseudo-différentiel sur $\mathcal{M}_h(X)$, et dont le symbole principal est donné par $a_0 \circ \chi$, a_0 étant le symbole principal de $\hat{a}$. On dit que $\widetilde{\chi}$ est un opérateur intégral de Fourier associé à χ.

2.6. **Théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger.** Pour un panorama à la fois historique et actuel sur l'étude du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne on pourra consulter **[23]**. Ici on considère l'opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$P_h := -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V.$$

T. Carleman [**4**] en 1934 à montré que si la fonction V est localement bornée et globalement minorée, alors l'opérateur de Schrödinger P_h est essentiellement auto-adjoint. En 1934 K. Friedrichs [**16**] a montré que dans le cas où la fonction V est confinante, ie $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger P_h est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicité finie s'accumulant en $+\infty$. Le théorème de Courant de 1953 [**13**], assure en particulier que la première valeur propre $\mu_1(h)$ de l'opérateur P_h est simple :

$$\min_{x\in\mathbb{R}} V(x) \leq \mu_1(h) < \mu_2(h) \leq \cdots \leq \mu_n(h) \to +\infty.$$

Rappelons [**34**] que pour un compact K de $[\min(V), +\infty[$ on a la :

Definition 2.11. On appelle spectre semi-classique dans le compact K, l'ensemble $\Sigma_h(P_h, K)$ des familles de réels $E_h \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{h\to 0} E_h \to E \in K$ et telles qu'il existe une microfonction u_h avec $MS(u_h) = p^{-1}(E)$ et vérifiant :

$$(P_h - E_h)\, u_h = O(h^\infty).$$

On appelle multiplicité microlocale de E_h la dimension du $\mathbb{C}_h$-module des solutions microlocales de cette équation.

Moralement le spectre semi-classique (ou microlocal) correspond aux valeurs propres approchées avec une précision d'ordre $O(h^\infty)$ incluant les multiplicités. Le spectre semi-classique et le spectre exact sont liés par la :

Proposition 2.12. *[34] Sur un compact K de $\mathbb{R}$, le spectre semi-classique $\Sigma_h(P_h, K)$ et le spectre exact $\sigma(P_h)$ de l'opérateur linéaire auto-adjoint P_h sont liés par :*

$$\Sigma_h(P_h, K) = \sigma(P) \cap K + O(h^\infty)$$

au sens où si $\lambda_h \in \Sigma_h(P_h, K)$, alors il existe $\mu_h \in \sigma(P_h) \cap K$ tel que $\lambda_h = \mu_h + O(h^\infty)$; et si $\mu_h \in \sigma(P_h) \cap K$, alors il existe $\lambda_h \in \Sigma_h(P_h, K)$ tel que $\mu_h = \lambda_h + O(h^\infty)$. De plus pour toute famille E_h ayant une limite finie $E \in K$ lorsque $h \to 0$, si la multiplicité microlocale de E_h est bien définie et est finie, alors elle est égale pour h assez petit au rang du projecteur spectral de P_h sur une boule de diamètre $O(h^\infty)$ centrée autour de E_h.

3. La formule de Colin de Verdière-Parisse

3.1. **Le cadre.** Soit $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ et V possédant exactement un maximun local non dégénéré, que l'on supposera atteint en 0, ainsi : $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$, $V''(0) < 0$.

Example 3.1. Un exemple typique non-générique est la fonction $V(x) = x^4 - x^2$.

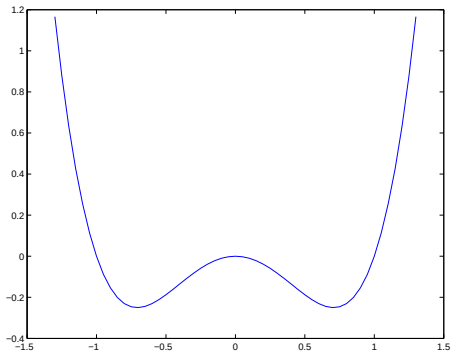


Fig. 3 : La courbe représentative de la fonction potentiel paire $V(x) = x^4 - x^2$. On distingue les deux puits (les minima) du potentiel, le droit et le gauche.

On notera par p la fonction définie sur le fibré cotangent de $\mathbb{R}$ par :

$$p(x,\xi) := \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

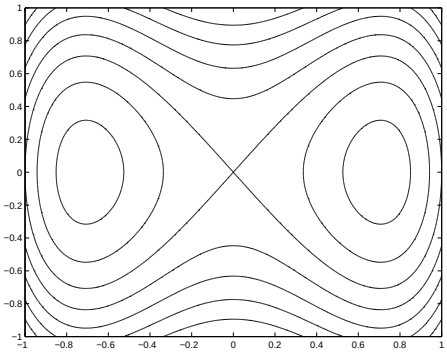


Fig. 4 : Le feuilletage de $p^{-1}(c)$; avec des $c>0$ les fibres elliptiques ont une seule composante connexe, pour $c=0$: la fibre singulière en forme de huit hyperbolique, et pour des $c<0$: les fibres elliptiques ont deux composantes connexes.

Son quantifié de Weyl P_h est donné par :

$$P_h = -\frac{h^2}{2}\Delta + V.$$

Pour étudier le spectre de l'opérateur P_h dans une fenêtre de taille E, avec $E \in [-1,1]$, considérons alors l'opérateur :

$$P_h - EI_d$$

I_d étant l'opérateur identité. Ainsi par définition nous avons que

$$(P_h - EI_d)\, u_h = O(h^\infty) \Leftrightarrow E \in \Sigma_h(P_h).$$

3.2. **Énoncé de la formule.** Y. Colin de Verdière et B. Parisse ont donné les règles de Bohr-Sommerfeld dans le cas singulier sous la forme suivante :

Theorem 3.2. *Pour $E \in [-1,1]$ l'équation :*

$$(P_h - EI_d)\, u_h = O(h^\infty)$$

admet une solution $u_h \in L^2(\mathbb{R})$ non triviale avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}\{E\}$ si et seulement si E vérifie l'équation suivante :

(3.1)

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{\frac{2\pi\varepsilon}{h}}}} \cos\left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h}\ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right)\right)$$

où :

$$\varepsilon := \varepsilon(E),\ \theta_{+/-} := \theta_{+/-}(E) = S^{+/-}(E)/h.$$

Les fonctions ε et $S^{+/-}$ admettant des développements asymptotiques en puissance de h avec des coefficients $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à E.

3.3. **Les grandes étapes de la preuve.** On résume **[8]**, **[9]** et une bonne partie de **[10]**. La preuve de la formule se décompose en plusieurs grandes étapes.

La stratégie. La première étape de la preuve est une étude locale autour de la singularité. Pour ça on utilise une forme normale de Birkhoff quantique de manière à se ramener à une équation différentielle linéaire du premier ordre. On exhibe alors quatre solutions et on utilise le fait que l'ensemble des solutions est de dimension 2, pour en déduire une dépendance linéaire entres ces solutions. La seconde étape consiste à prolonger de manière globale les fonctions solutions, ce qui donnera à nouveau une dépendance linéaire entres les solutions. A la fin, on exprime simultanément ces relations linéaires avec un déterminant.

Première étape : Étude locale autour de la singularité. Pour un réel $E \in [-1,1]$, on va étudier l'équation $(P_h - EI_d)\, u_h = O(h^\infty)$ avec une forme normale quantique autour de l'origine, utilisons le :

Theorem 3.3. ***(Théorème 3 de [10])*** *Il existe U un opérateur intégral de Fourier, N un opérateur pseudo-différentiel elliptique en 0 et une fonction ε ayant un développement asymptotique en puissance de h : $\varepsilon(E) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon_j(E)h^j$ où les fonctions ε_j sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à E et indépendante de h, tels que microlocalement dans un ouvert Ω_0 contenant l'origine, on ait pour tout $E \in [-1,1]$:*

$$U^{-1}(P_h - EI_d)U = N\left(\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d\right)$$

où

$$\widehat{x\xi} := \frac{h}{i}\left(x\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}I_d\right)$$

avec $\varepsilon_0(0) = 0$ et $\varepsilon_0'(0) = \frac{1}{\sqrt{-V''(0)}}$.

La démonstration de ce théorème de forme normale quantique est donnée dans **[8]** ou **[10]**, la preuve utilise le lemme de Morse isochore **[6].**

Remark 3.4. Cette forme normale reste valide uniquement pour $|E| \leq 1$.

Pour tout $|E| \leq 1$ on a :

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0(E) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(E)h^j.$$

Ainsi, en appliquant la formule de Taylor sur la fonction lisse ε_0, on a pour tout $E \in [-1,1]$ nous avons :

$$\varepsilon(E) = \frac{E}{\sqrt{-V''(0)}} + O(E^2) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(E)h^j.$$

Par la suite on va utiliser ce théorème avec $E := \lambda h^\alpha$ où $\lambda \in [-1,1]$ et $\alpha \geq 0$. Ainsi dans ce là nous avons pour tout $\lambda \in [-1,1]$:

$$\varepsilon(\lambda h^\alpha) = \frac{\lambda h^\alpha}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha}) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(\lambda h^\alpha)h^j \tag{3.2}$$

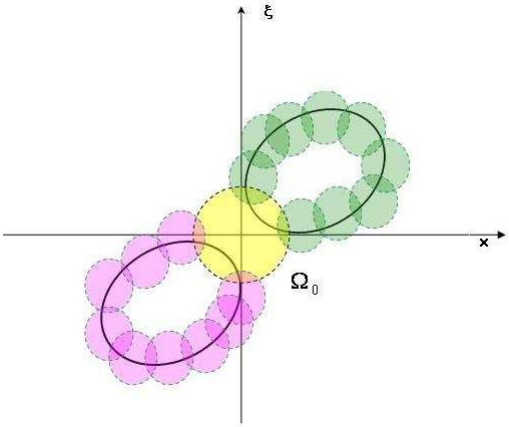


Fig. 5 : Ouvert Ω_0 où la forme normale est valide.

Grâce à ce théorème on a un lien très simple entres les vecteurs propres de $(P_h - EI_d)$ et ceux de $\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d$; en effet on voit facilement que :

$$(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty) \Leftrightarrow \left(\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d\right) U^{-1}(u_h) = O(h^\infty).$$

Ainsi si on travaille sur l'ouvert Ω_0 où la forme normale est valide, on est amené à résoudre : $\left(\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d\right) v_h = O(h^\infty)$, ie, résoudre : $xv_h'(x) + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\varepsilon(E)}{h}\right) v_h(x) = O(h^\infty)$. Alors, par simple intégration d'équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre, les solutions exactes de $\left(\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d\right) v_h = 0$ sont engendrées par les deux fonctions :

$$\varphi_1(x) := x_+^{-\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) e^{-\frac{1}{2}\ln(x)+i\frac{\varepsilon}{h}\ln(x)}$$

et

$$\varphi_2(x) := x_-^{-\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x) e^{-\frac{1}{2}\ln(-x)+i\frac{\varepsilon}{h}\ln(-x)}.$$

Ensuite, l'idée est de construire deux autres solutions de $\left(\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d\right) v_h = 0$; pour cela on utilise la h-transformée de Fourier définie par *:*

$$\mathcal{F}_h(f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{ixt}{h}}\, dt.$$

En effet, en utilisant les propriétés usuelles sur la dérivation des h-transformées de Fourier on a la :

Proposition 3.5. *En posant $\varphi_1^*(x) := x_+^{-\frac{1}{2}-i\frac{\varepsilon}{h}}$ et $\varphi_2^*(x) := x_-^{-\frac{1}{2}-i\frac{\varepsilon}{h}}$, les fonctions φ_3 et φ_4 définies par*

$$\varphi_3(\xi) := e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h\left(\varphi_1^*\right)(-\xi) \quad et \quad \varphi_4(\xi) := e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h\left(\varphi_2^*\right)(-\xi)$$

sont aussi solutions exactes de $\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d = 0$.

Maintenant si u_h est solution de $\left(\widehat{x\xi} - \varepsilon(E)I_d\right) u_h = b_h$ où le second membre b_h est un $O(h^\infty)$, on peut, en utilisant essentiellement la méthode de la variation de la constante, voir **[8]**, montrer que nécessairement $\exists! x_1, x_2 \in \mathbb{C}_h^2$ tels que $u_h = x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + O(h^\infty)$, en effet :

Theorem 3.6. *[8] L'espace des solutions microlocales de l'équation $\left(\widehat{P} - EI_d\right) u_h = O(h^\infty)$ dans Ω_0 est un $\mathbb{C}_h$- module libre de rang 2.*

En notant par $\mathcal{B} := \{\varphi_1, \varphi_2\}$ et $\mathcal{B}' := \{\varphi_3, \varphi_4\}$ les deux bases de solutions, la matrice de passage Q de la base $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donnée par :

Theorem 3.7. *En notant $\varepsilon := \varepsilon(E)$, la matrice de passage Q s'écrit :*

$$Q = \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-\frac{\varepsilon}{h}} \\ ie^{-\frac{\varepsilon}{h}} & 1 \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{E} := \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon}{h}(\frac{\pi}{2} + \ln(h))} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-2\pi i \frac{\varepsilon}{h}}}} e^{i \arg(\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h})) + i\frac{\varepsilon}{h}\ln(h)}.$$

Démonstration. Pour cela on a besoin du (voir annexe) : □

Lemma 3.8. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}^*$ on a, au sens des distributions, que :*

$$\mathcal{F}_h\left(\left[x_+^\lambda\right]\right)(\xi) = \frac{i\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{2\pi}} h^{\lambda+\frac{1}{2}} \left[e^{i\frac{\pi}{2}\lambda}\xi_-^{-\lambda-1} - e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}\xi_+^{-\lambda-1}\right]$$

et

$$\mathcal{F}_h\left(\left[x_-^\lambda\right]\right)(\xi) = \frac{i\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{2\pi}} h^{\lambda+\frac{1}{2}} \left[e^{i\frac{\pi}{2}\lambda}\xi_+^{-\lambda-1} - e^{-i\frac{\pi}{2}\lambda}\xi_-^{-\lambda-1}\right]$$

Γ *désignant la fonction Gamma d'Euler usuelle.*

De ce lemme, on en déduit l'égalité suivante :

$$\mathcal{F}_h(\varphi_1)(\xi) = \mathcal{F}_h\left(\left[x_+^{-\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}}\right]\right)(\xi) = \frac{i\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \xi_-^{-\frac{1}{2}-i\frac{\varepsilon}{h}} - e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \xi_+^{-\frac{1}{2}-i\frac{\varepsilon}{h}}\right].$$

En appliquant à nouveau $\mathcal{F}_h$ on a :

$$(\mathcal{F}_h \circ \mathcal{F}_h)(\varphi_1)(x) = \frac{i\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h\left(\left[\xi_-^{-\frac{1}{2}-i\frac{\varepsilon}{h}}\right]\right)(x) - e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \mathcal{F}_h\left(\left[\xi_+^{-\frac{1}{2}-i\frac{\varepsilon}{h}}\right]\right)(x)\right]$$

ie :

$$\begin{aligned}\varphi_1(-x) &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_h(\varphi_2^*)(x) - e^{i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \mathcal{F}_h(\varphi_1^*)(x)\right] \\ &= \frac{i\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_4(-x) - e^{i\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_3(-x)\right]\end{aligned}$$

et donc :

$$\varphi_1(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}) e^{\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}}}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[\varphi_3(x) + ie^{-\pi\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_4(x)\right].$$

De même on montre que

$$\varphi_2(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}) e^{\frac{\pi}{2}\frac{\varepsilon}{h}}}{\sqrt{2\pi}} h^{i\frac{\varepsilon}{h}} \left[\varphi_4(x) + ie^{-\pi\frac{\varepsilon}{h}} \varphi_3(x)\right].$$

Par conséquent :

$$Q = \mathcal{E} \begin{pmatrix} 1 & ie^{-\frac{\varepsilon}{h}\pi} \\ ie^{-\frac{\varepsilon}{h}\pi} & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathcal{E} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon}{h}(\frac{\pi}{2}+\ln(h))}.$$

Pour finir la démonstration, il reste juste à vérifier que :

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon}{h}(\frac{\pi}{2}+\ln(h))} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2\pi\frac{\varepsilon}{h}}}} e^{i\arg(\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}))+i\frac{\varepsilon}{h}\ln(h)}$$

en effet comme

$$\arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) = -i\ln\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) + i\ln\left(\left|\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})\right|\right)$$

on a donc

$$e^{i\arg(\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}))}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\left|\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})\right|}.$$

Et comme

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right|^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}\right)\overline{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}\right)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\varepsilon}{h}\right)$$

en appliquant la formule des compléments on a :

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right|^2=\frac{\pi}{\cos(\pi i\frac{\varepsilon}{h})}=\frac{\pi}{\cosh(\pi\frac{\varepsilon}{h})}$$

et donc

$$e^{i\arg(\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}))}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{e^{\pi\frac{\varepsilon}{h}}+e^{-\frac{\varepsilon}{h}\pi}}$$

ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2\pi\frac{\varepsilon}{h}}}}e^{i\arg(\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h}))}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon}{h})}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\varepsilon}{h}\frac{\pi}{2}}.$$

Ce qui montre le théorème 3.8. □

Revenons maintenant à l'étude de $(P_h-EI_d)u_h=O(h^\infty)$: si u_h est une solution globale non triviale, en se plaçant sur l'ouvert Ω_0 où la forme normale est valide, il existe alors $x_1,x_2,x_3,x_4\in(\mathbb{C}_h)^4$ tels que $U^{-1}u_h=x_1\varphi_1+x_2\varphi_2=x_3\varphi_3+x_4\varphi_4$. Ensuite en posant pour tout indice $j\in\{1,2,3,4\}$, $\phi_j:=U\varphi_j$, les deux familles $\mathcal{C}:=\{\phi_1,\phi_2\}$ et $\mathcal{C}':=\{\phi_3,\phi_4\}$ sont deux bases de solutions de $(P_h-EI_d)\,u_h=O(h^\infty)$ dans l'ouvert Ω_0. Donc, dans Ω_0 on a $u_h=x_1\phi_1+x_2\phi_2=x_3\phi_3+x_4\phi_4$. Et ainsi on a alors la relation matrice-vecteur suivante :

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Seconde étape : Étude globale. Toutes les fibres $\Lambda_E:=p^{-1}(E)$ sont compactes, pour $E\neq 0$, la fibre $\Lambda_0:=p^{-1}(0)$ étant l'unique fibre singulière du feuilletage. L'ensemble $\Upsilon_0:=p^{-1}(0)-\Omega_0$ est une partie régulière de la fibre Λ_0, pour $E\in[-1,1]$ le faisceau des solutions microlocales de $(P_h-EI_d)u_h=O(h^\infty)$ au dessus de Λ_E est un fibré plat de dimension 1 (voir **[33]**,**[34]**).

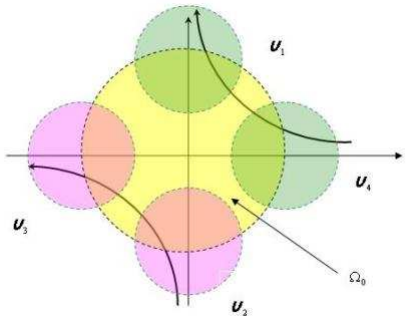


Fig. 6 : Les ouverts U_1,U_2,U_3,U_4 et Ω_0.

La fonction ϕ_1 appartient à $\mathcal{L}(P_h,E,U_1)$ (ie : ϕ_1 est une solution microlocale de $\left(\widehat{P}-EI_d\right)u_h=O(h^\infty)$ sur l'ouvert U_1) et la fonction ϕ_4 appartient à $\mathcal{L}(P_h,E,U_4)$, donc d'après la proposition 2.9, il y a alors une unique façon de prolonger (voir la

sous-section 2.4) la solution ϕ_1 le long de la courbe en évitant la singularité pour arriver sur l'ouvert U_4 ; la solution finale $\widetilde{\phi_1}$ diffère alors de la solution ϕ_4 par un facteur de phase (voir la sous-section 2.4) : $\widetilde{\phi_1} = e^{iS^+(E)/h}\phi_4$ où la fonctions S_+ admet un développement asymptotique en puissance de h : $S^+(E) = \sum_{i=0}^{\infty} S_j^+(E)h^j$ avec des coefficients S_j^+ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la variable E. De la même façon on a que $\widetilde{\phi_2} = e^{iS^-(E)/h}\phi_3$ avec aussi une fonctions S_- ayant un développement asymptotique en puissance de h : $S^-(E) = \sum_{i=0}^{\infty} S_j^-(E)h^j$ avec des coefficients S_j^- qui sont $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la variable E. Ces deux séries formelles $S^{+/-}$ sont appelées actions singulières. On posera pour la suite

$$\theta_{+/-}(E) := \frac{S^{+/-}(E)}{h}.$$

A ce stade là, il ne reste plus qu'écrire les relations locales et globales pour montrer le théorème : soit u_h une solution globale de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$, telle que sur chacun des ouverts U_1, U_2, U_3, U_4 (voir Figure 6) on ait :

$$\forall j \in \{1,2,3,4\}\,,\ u_{h|U_j} = x_j\phi_j$$

on a alors que :

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_-(E)} \\ e^{i\theta_+(E)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi il existe une fonction $u_h = x_1\phi_1 + x_2\phi_2 = x_3\phi_4 + x_4\phi_4$ solution globale non triviale de $(P_h - EI_d)u_h = O(h^\infty)$ si et seulement si :

$$\det\left(Q - \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_-(E)} \\ e^{i\theta_+(E)} & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(Q \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta_+(E)} \\ e^{-i\theta_-(E)} & 0 \end{pmatrix} - I_2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \in Spec(T(\mathcal{E}))$$

où on a posé

$$T(\mathcal{E}) := Q \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta_+(E)} \\ e^{-i\theta_-(E)} & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_-(E)}ie^{-\varepsilon(E)\pi/h} & e^{-i\theta_+(E)} \\ e^{-i\theta_-(E)} & e^{-i\theta_+(E)}ie^{-\varepsilon(E)\pi/h} \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{E} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_-(E)}ie^{-\varepsilon(E)\pi/h} & e^{-i\theta_+(E)} \\ e^{-i\theta_-(E)} & e^{-i\theta_+(E)}ie^{-\varepsilon(E)\pi/h} \end{pmatrix}.$$

Et maintenant à ce stade là, pour conclure on utilise le lemme 1 de **[8]**, rappelons le :

Lemma 3.9. *[8] Soit U une matrice unitaire de $M_2(\mathbb{C})$, où $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tels que $U \neq \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta_1} \\ e^{-i\theta_2} & 0 \end{pmatrix}$; alors*

$$1 \in Spec(U) \Leftrightarrow |a|\cos\left(\frac{\arg(da)}{2} - \arg(a)\right) = \cos\left(\frac{\arg(da)}{2}\right),\ |d| = |a|\,.$$

En appliquant ce lemme à la matrice $T(\mathcal{E})$ on arrive bien à :

$$1 \in Spec(T(\mathcal{E})) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{\frac{2\pi\varepsilon}{h}}}}\cos\left(\frac{\theta_+ - \theta_-}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h}\ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right)\right).$$

Ce qui donne bien la formule proposée dans le théorème 3.2.

Remark 3.10. Dans **[10]**, Y. Colin de Verdière et B. Parisse montre que dans le cas où $E = \lambda h$ avec $\lambda \in [-1, 1]$, les actions singulières peuvent s'écrire avec des invariants symplectiques :

$$S_0^{+/-}(E) = A_{+/-}(E) + \varepsilon_0(E) \ln |\varepsilon_0(E)| - \varepsilon_0(E)$$

où $A_{+/-}(E) := \int_{p=E,+/-} \xi \, dx$ est l'intégrale d'action de la courbe $p^{-1}(E)$ du puit $+/-$.

3.4. **Du singulier au régulier.** Toujours dans **[10]**, les auteurs examinent le lien entre le cas régulier et singulier. Soient $E_+, E_- \in [-1, 1]^2$ tels que $0 < E_- < E_+$ avec $E_- > \epsilon$ où ϵ est un réel strictement positif indépendant de h.

Haut de spectre. C'est le cas où $E \in I_+ := [E_-, E_+]$, l'ensemble $J_+ := p^{-1}(I_+)$ est alors un anneau topologique. Pour tout $E \in I_+$, $\lim_{h\to 0^+} \frac{\varepsilon}{h} = +\infty$ donc en utilisant la formule de Stirling, pour $h \to 0$ on a

$$\arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) = \frac{\varepsilon}{h} \ln\left|\frac{\varepsilon}{h}\right| - \frac{\varepsilon}{h} + o(1)$$

d'où pour $h \to 0$:

$$-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) = -\frac{1}{h} A_{+/-}(E) + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

D'autre part comme $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+e^{\frac{2\pi\varepsilon}{h}}}} = 0$; l'asymptotique de la formule (3.1) est :

$$0 = \cos\left(-\frac{A(E)}{2h} + \frac{\pi}{2} + o(1)\right)$$

où $A(E) = A_+(E) + A_-(E)$, ce qui donne bien les règles de Bohr-Sommerfeld régulière pour un puits : $\frac{1}{h} A(E) + o(1) \in \pi\mathbb{Z}$.

Bas de spectre. C'est le cas où $E \in I_- := [-E_+, -E_-]$, l'ensemble $J_- := p^{-1}(I_-)$ est alors la réunion de deux anneaux topologique. Pour tout $E \in I_-$, $\lim_{h\to 0^+} \frac{\varepsilon}{h} = -\infty$ donc toujours avec la formule de Stirling, pour $h \to 0$:

$$\arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) = \frac{\varepsilon}{h} \ln\left|\frac{\varepsilon}{h}\right| - \frac{\varepsilon}{h} + o(1)$$

d'où pour $h \to 0$:

$$-\frac{\theta_+ + \theta_-}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon}{h} \ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon}{h}\right)\right) = -\frac{1}{h} A_{+/-}(E) + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

D'autre part comme $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+e^{\frac{2\pi\varepsilon}{h}}}} = 1$; l'asymptotique de la formule (3.1) est :

$$\cos\left(\frac{A_+(E) - A_-(E)}{2h} + O(1)\right) = \cos\left(-\frac{A_+(E) + A_-(E)}{2h} + \frac{\pi}{2} + o(1)\right)$$

ce qui implique donc

$$\begin{cases} \frac{A_+(E)}{h} + \frac{\pi}{2} + O(1) \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \text{et} \\ \frac{A_-(E)}{h} + \frac{\pi}{2} + O(1) \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ce sont bien les règles de Bohr-Sommerfeld régulières pour les deux puits.

4. La forme du spectre autour de la singularité

4.1. **Introduction et résultats.** On va dans cette partie utiliser la formule du théorème 3.1 pour en déduire des informations sur le spectre semi-classique autour de l'origine de l'opérateur :

$$P_h := -\frac{h^2}{2}\Delta + V.$$

Précisément on va démontrer le principal théorème de cette article :

Theorem 4.1. *Le spectre semi-classique de l'opérateur P_h sur le compact $\left[-\sqrt{h}, \sqrt{h}\right]$ s'écrit comme la réunion disjointe*

$$(\alpha_k(h))_{k\in I_h} \bigsqcup (\beta_l(h))_{l\in J_h}$$

de deux familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ s'écrivant $\alpha_k(h) := \sqrt{h}\mathcal{A}_h(2\pi k)$, $\beta_l(h) := \sqrt{h}\mathcal{B}_h(2\pi l)$, les fonctions $\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{B}_h$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus les familles $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ sont strictement décroissantes et en quinconce :

$$\beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

En outre l'interstice spectral est de l'ordre de $O(h/|\ln(h)|)$: il existent C, C' deux constantes réelles strictement positives telles que :

$$C\frac{h}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq C'\frac{h}{|\ln(h)|}.$$

De même pour la famille $(\beta_l(h))_{l\in J_h}$.

Qui a pour conséquence immédiate le :

Corollary 4.2. *Le nombre de valeurs propres de l'opérateur P_h dans le compact $\left[-\sqrt{h}, \sqrt{h}\right]$ est de l'ordre de $|\ln(h)|/\sqrt{h}$.*

Avant de démontrer le théorème 4.1 on va interpréter le terme en $\ln(h)$.

4.2. **Interprétation géométrique.** Le terme $|\ln(h)|$ est la signature de la singularité hyperbolique : en effet géométriquement il correspond au temps de parcours du flot classique avec un point initial situé a une distance $\sqrt{h}$ de l'origine, en effet :

Theorem 4.3. *Soit $m_h \in T^*\mathbb{R}$ de coordonnés $\left(\sqrt{h}, 0\right)$ dans le repère $(0, x, \xi)$. Alors le flot hamiltonien associé à p et de point initial m_h est périodique et sa période τ_h vérifie pour $h \to 0$ l'équivalent suivant :*

$$\tau_h \sim \frac{\ln(h)}{K}$$

où K est une constante réelle non nulle et indépendante de h.

Démonstration. Sans perdre de généralités comme $V''(0) < 0$ on peut supposer que $-V''(0) = 1$. Ensuite notons par $\Lambda_h = p^{-1}\{p(m_h)\}$ l'unique fibre régulière contenant le point m_h alors le flot hamiltonien $\varphi_t(m_h)$ associé à p et de point initial m_h est périodique et supporté sur la fibre Λ_h. Pour estimer la période on va faire deux étapes : d'abord en se plaçant autour de la singularité (en 0) on peut utiliser une forme normale classique pour estimer le temps de visite du flot dans un voisinage de la singularité. Ensuite la seconde étape consiste à estimer le temps de visite du flot en dehors de ce voisinage.

Première étape. Avant d'utiliser une forme normale on va d'abord faire un changement de repère préliminaire : en faisant un développement limité de la fonction V autour de 0 :

$$p(x,\xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) = \frac{\xi^2}{2} + V(0) + V'(0) + \frac{V''(0)}{2}x^2 + O(x^3)$$
$$= \frac{\xi^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

donc sur un voisinage de $(0,0)$ nous avons que

$$p(x,\xi) = \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + o(x^3).$$

L'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \\ (x,y) \mapsto \left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme linéaire et son inverse φ^{-1} est égale à φ. Ainsi dans les nouvelles variables $(X,\Xi) := \varphi(x,\xi)$ on a

$$P(X,\Xi) = X\Xi + o\left(X^3\Xi^3\right)$$

et le point initial m_h a pour nouvelles coordonnées $m_h = \left(\sqrt{\frac{h}{2}}, \sqrt{\frac{h}{2}}\right)$. Alors le théorème 2 de forme normale de Moser (voir **[25]**) assure l'existence d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant l'origine, d'un symplectomorphisme $\psi : U \to \mathbb{R}^2$ et d'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $(X,\Xi) \in U$ on ait

$$P(X,\Xi) = F(X\Xi).$$

Ainsi les équations de Hamilton du flot sont alors :

$$\begin{cases} \dot{X} = F'(X\Xi)\, X \\ \\ \dot{\Xi} = -F'(X\Xi)\, \Xi. \end{cases}$$

Notons bien que $t \mapsto X(t)\Xi(t)$ est constante, ainsi pour tout $t \geq 0$ on a l'égalité $X(t)\Xi(t) = X(0)\Xi(0) = \frac{h}{2}$. En posant $C_h = F'\left(\frac{h}{2}\right)$ nous avons donc que pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} X(t) = \sqrt{\frac{h}{2}} e^{C_h t} \\ \\ \Xi(t) = \sqrt{\frac{h}{2}} e^{-C_h t}. \end{cases}$$

Or comme U est un ouvert non vide contenant 0, il existe une constante $A > 0$ telle que la boule $B_\infty(0,A)$ (pour la distance infinie de $\mathbb{R}^2$) de centre 0 et de rayon A soit incluse dans U. On va calculer le temps $\tau_1(h)$ pour que le flot hamiltonien partant du point $m_h = (X(0),\Xi(0)) = \left(\sqrt{\frac{h}{2}}, \sqrt{\frac{h}{2}}\right)$ sorte de la boule carré $B_\infty(0,A)$: il faut donc trouver t tel que $\Xi(t) = A$. On a alors immédiatement que :

$$\tau_1(h) = \frac{1}{C_h} \ln\left(\sqrt{\frac{h}{2}}\right) - \frac{1}{C_h} \ln(A)$$
$$= \frac{1}{2C_h} \ln(h) - \frac{1}{2C_h} \ln(2) - \frac{1}{C_h} \ln(A).$$

Ainsi sur une période complète du flot hamiltonien partant du point m_h le temps total de parcours du flot dans la boule $B_\infty(0,A)$ est $2\tau_1(h)$.

Seconde étape : Il reste donc a estimer le temps de parcours du flot en dehors de la boule $B_\infty(0,A)$. En fait, on va montrer que ce temps est négligeable par rapport à $\tau_1(h)$. Considérons alors le point $a = (0,A)$ et comme l'unique fibre $\Lambda_A = p^{-1}\{p(a)\}$ qui contienne ce point a ne contient pas de singularité en dehors de la boule $B_\infty(0,A)$, le flot hamiltonien de point initial a va nécessairement revenir en temps fini dans la boule $B_\infty(0,A)$, on peut alors considérer le réel :

$$t^* := \inf\left\{t > 0 / \varphi_t(a) \in \overline{B_\infty(0,A)}\right\}$$

et poser $b := \varphi_{t^*}(a)$. Notons aussi par T_a l'hyperplan transverse au flot $(\varphi_t(a))_{t\geq 0}$ au point a, et par T_b l'hyperplan transverse au flot $(\varphi_t(a))_{t\geq 0}$ au point b.

Comme le flot hamiltonien est associé au champs de vecteur $\mathcal{C}^\infty$:

$$\chi_P = \begin{pmatrix} \Xi \\ V'(X) \end{pmatrix}$$

qui ne s'annule pas en a et en b, par un théorème classique de calcul différentiel de type application de Poincaré (voir par exemple [**24**]) il existe Ω_a un voisinage ouvert de a dans le plan T_a, une fonction θ de Ω_a dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\theta(a) = 0$ avec les propriétés suivantes :

1) pour tout $x \in \Omega_a$ on a $\varphi_{t^*+\theta(x)}(x) \in T_b$;

2) l'application $x \mapsto \varphi_{t^*+\theta(x)}(x)$ est un difféomorphisme local de Ω_a dans Ω_b un voisinage ouvert de b dans le plan T_b.

Autrement dit, partant d'un point voisin de a sur l'hyperplan T_a le flot rencontre l'autre hyperplan T_b en un temps voisin de t^* qui est une fonction différentiable du point de départ.

Donc en particulier comme Ω_a est un voisinage ouvert de a dans $T_a \simeq \mathbb{R}$, par compacité locale il existe K_a un compact de $\mathbb{R}$ tel que $a \in K_a \subset \Omega_a$ avec $K_a \neq \{a\}$ et donc évidemment pour tout $x \in K_a$ on a $|\theta(x)| \leq \sup_{x\in K_a} |\theta(x)|$. Ainsi, comme :

$$\varphi_{\tau_1(h)}(m_h) = \left(\frac{h}{2A}, A\right)$$

pour h assez petit on a que $\varphi_{\tau_1(h)}(m_h) \in K_a \times \{A\}$ et donc :

$$\left|\theta\left(\varphi_{\tau_1(h)}(m_h)\right)\right| \leq \sup_{x\in K_a} |\theta(x)|$$

d'où au final la période τ_h est égale à $\tau(h) = \tau_1(h) + \theta\left(\varphi_{\tau_1(h)}(m_h)\right)$.

Au final :

$$\tau(h) = \frac{1}{2C_h}\ln(h) - \frac{1}{2C_h}\ln(2) - \frac{1}{C_h}\ln(A) + \theta\left(\varphi_{\tau_1(h)}(m_h)\right)$$

donc pour $h \to 0$ on a l'équivalent suivant :

$$\tau(h) \sim \frac{\ln(h)}{2F'(\frac{h}{2})}$$

et comme $F'\left(\frac{h}{2}\right) = F'(0) + F''(0)\frac{h}{2} + o(h^2)$ avec $F'(0) \neq 0$, d'où pour $h \to 0$ l'équivalent $\tau(h) \sim \frac{\ln(h)}{2F'(0)}$. □

4.3. **Démonstration du théorème 4.1.**

Stratégie de la preuve. La formule du théorème de Colin de Verdière-Parisse (théorème 3.2) est une équation fonctionnelle implicite, on va inverser (au sens bijectif) cette fonction de manière à pouvoir expliciter les valeurs propres. Pour cela on va utiliser ce théorème avec $E = \lambda h^\alpha$ où $\lambda \in [-1,1]$ et $\alpha \geq 0$. Par la suite on va voir que si l'on choisit $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ de sorte qu'on ai l'inclusion évidente $[-h^\alpha, h^\alpha] \subseteq \left[-\sqrt{h}, \sqrt{h}\right]$, on peut montrer assez facilement le théorème 4.1 avec

des techniques d'analyse réelle basiques. Afin de comprendre pourquoi on suppose $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, plutôt qu'écrire la preuve directement avec $\alpha = \frac{1}{2}$ on écrira toute la preuve avec $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (voir aussi la partie 4.4.).

Prologue. On va commencer par des notations : pour alléger l'écriture on définit sur le compact $[-1, 1]$ les fonctions :

$$F_h(E) := -\frac{\theta_+(E) + \theta_-(E)}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon(E)}{h}\ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon(E)}{h}\right)\right)$$

et

$$f_h(\lambda) := F_h(\lambda h^\alpha) = -\frac{\theta_+(\lambda h^\alpha) + \theta_-(\lambda h^\alpha)}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right)$$

puis

$$G_h(E) := \frac{\theta_+(E) + \theta_-(E)}{2}$$

et

$$g_h(\lambda) := G_h(\lambda h^\alpha) = \frac{\theta_+(\lambda h^\alpha) + \theta_-(\lambda h^\alpha)}{2}.$$

Pour finir avec les notations, sur le compact $[-1, 1]$, on définit les deux fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ par

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) := f_h(\lambda) - \arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right)$$

et

$$\mathcal{Z}_h(\lambda) := f_h(\lambda) + \arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right).$$

Le théorème 3.2 affirme alors exactement que :

$$h^\alpha\lambda \in \Sigma_h(P_h, [-h^\alpha, h^\alpha]) \Leftrightarrow \frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1 + e^{2\pi\frac{\varepsilon}{h}}}} = \cos\left(f_h(\lambda)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} f_h(\lambda) \equiv \arccos\left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1+\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}}\right) \ [2\pi] \\ \text{ou} \\ f_h(\lambda) \equiv -\arccos\left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1+\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}}\right) \ [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \mathcal{Y}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \mathcal{Z}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

L'idée pour expliciter le spectre est d'inverser les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ pour avoir une formule explicite. On va d'abord montrer que :

Proposition 4.4. *Pour h assez petit, la fonction $\mathcal{Y}_h$ (resp. la fonction $\mathcal{Z}_h$) réalise une bijection strictement décroissante de $[-1, 1]$ sur $\mathcal{Y}_h([-1, 1])$ (resp. sur $\mathcal{Z}_h([-1, 1])$). En outre, on a uniformément sur $[-1, 1]$ que*

$$\frac{h^{\alpha-1}\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \leq \mathcal{Y}_h'(\lambda) \leq \frac{\alpha h^{\alpha-1}\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}).$$

De même pour la fonction $\mathcal{Z}_h$.

Démonstration. Avec la définition de la fonction $\mathcal{Y}_h$, pour tout $\lambda \in [-1,1]$ on a :

$$\mathcal{Y}_h'(\lambda) = f_h'(\lambda) - \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right)\right]$$

$$= -h^\alpha \frac{\theta_+'(\lambda h^\alpha) + \theta_-'(\lambda h^\alpha)}{2} + h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\ln(h)$$

$$+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right)\right] - \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right)\right].$$

On va estimer, un par un, les quatre éléments de cette somme.

Comme la fonction $E \mapsto -\left(\Theta_+'(E) + \Theta_-'(E)\right)/2$ admet un développement asymptotique de -1 à $+\infty$, avec des coefficients $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à E, on a donc que la fonction $\lambda \mapsto -h^\alpha \frac{\theta_+'(\lambda h^\alpha)+\theta_-'(\lambda h^\alpha)}{2}$ admet un développement asymptotique de $\alpha - 1$ à $+\infty$, avec des coefficients $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à λ, ainsi nous avons que

$$-h^\alpha \frac{\theta_+'(\lambda h^\alpha) + \theta_-'(\lambda h^\alpha)}{2} = O(h^{\alpha-1}).$$

Ensuite on va estimer le terme $\lambda \mapsto h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\ln(h)$: en utilisant le développement asymptotique de la fonction ε et en le dérivant on a :

$$\varepsilon'(\lambda h^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j'(\lambda h^\alpha) h^j = \varepsilon_0'(\lambda h^\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j'(\lambda h^\alpha) h^j$$

$$= \varepsilon_0'(0) + O(h^\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j'(\lambda h^\alpha) h^j$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j'(\lambda h^\alpha) h^j.$$

Par conséquent nous obtenons :

$$h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\ln(h) = \frac{h^{\alpha-1}\ln(h)}{\sqrt{-V'''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}\ln(h)) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j'(\lambda h^\alpha) h^{j+\alpha-1}\ln(h).$$

Estimons maintenant le terme $\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arccos\left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1+\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}}\right)\right]$: par un simple calcul de dérivé on a pour tout $\lambda \in [-1,1]$ l'égalité :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right)\right]$$

$$= \frac{\sin(g_h(\lambda))g_h'(\lambda)\left[1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)\right] + \pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\cos(g_h(\lambda))\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}{\left(1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)\right)\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}}$$

$$= \frac{\sin(g_h(\lambda))g_h'(\lambda)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}}$$

$$+\frac{\pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\cos(g_h(\lambda))\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}{\left(1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)\right)\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}}.$$

Or pour tout $\lambda \in [-1,1]$, comme : $1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) \geq 1$ on a donc que :

$$\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)} \geq \sqrt{1-\cos^2\left(g_h(\lambda)\right)} = \left|\sin\left(g_h(\lambda)\right)\right|$$

d'où pour tout $\lambda \in [-1,1]$:

$$\left|\frac{\sin(g_h(\lambda))g_h'(\lambda)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}}\right| \leq |g_h'(\lambda)|$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{\theta_+(\lambda h^\alpha) + \theta_-(\lambda h^\alpha)}{2} \right] \right| = h^\alpha \left| \frac{\theta'_+(\lambda h^\alpha) + \theta'_-(\lambda h^\alpha)}{2} \right|$$

$$= \frac{h^\alpha}{2} \left| \frac{S'_{0,+}(\lambda h^\alpha) + S'_{0,-}(\lambda h^\alpha)}{h} \right.$$

$$\left. + \left(S'_{1,+}(\lambda h^\alpha) + S'_{1,-}(\lambda h^\alpha) \right) + \sum_{j=2}^{\infty} \left(S'_{j,+}(\lambda h^\alpha) + S'_{j,-}(\lambda h^\alpha) \right) h^{j-1} \right|$$

$$= O(h^{\alpha-1}).$$

Ensuite comme pour tout $\lambda \in [-1,1]$:

$$\sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)} \geq \exp\left(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)$$

nous avons que pour tout $\lambda \in [-1,1]$:

$$\left| \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \cos(g_h(\lambda)) \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}{\left(1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)\right) \sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}} \right|$$

$$\leq \left| \pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \right| \exp\left(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)$$

avec

$$\left| \pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \right| = \left| \frac{\pi h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) + \sum_{j=1}^{\infty} \pi \varepsilon'_j(\lambda h^\alpha) h^{j+\alpha-1} \right|$$

$$= O(h^{\alpha-1})$$

et

$$\exp\left(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) = \exp\left(\frac{\pi\lambda h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) + \sum_{j=1}^{\infty} \pi\varepsilon_j(\lambda h^\alpha) h^{j-1} \right) \tag{4.1}$$

comme $\alpha \geq \frac{1}{2}$, on en déduit alors que pour tout $\lambda \in [-1,0]$, $\exp\left(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) = O(1)$, ainsi pour pour tout $\lambda \in [-1,0]$ on a :

$$\left| \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \cos(g_h(\lambda)) \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}{\left(1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)\right) \sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}} \right| = O(h^{\alpha-1}).$$

D'autre part, pour tout $\lambda \in [-1,1]$ on a aussi

$$\left| \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \cos(g_h(\lambda)) \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}{\underbrace{\left(1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)\right)}_{\geq \exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)} \underbrace{\sqrt{1 + \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) - \cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}}_{\geq \exp(\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \right|$$

$$\leq \frac{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha) \exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}{\exp\left(3\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}$$

$$= \underbrace{\pi h^{\alpha-1} \varepsilon'(\lambda h^\alpha)}_{=O(h^{\alpha-1})} \exp\left(-\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)$$

avec

$$\exp\left(-\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) = \exp\left(-\frac{\pi\lambda h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) - \sum_{j=1}^{\infty} \pi\varepsilon_j(\lambda h^\alpha) h^{j-1} \right) \tag{4.2}$$

donc toujours comme $\alpha \geq \frac{1}{2}$, on en déduit que pour tout $\lambda \in [0,1]$ on a $\exp\left(-\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right) = O(1)$, ainsi pour tout $\lambda \in [0,1]$ on obtient

$$\left| \frac{\pi h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\cos(g_h(\lambda))\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}{\left(1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)\right)\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)-\cos^2\left(g_h(\lambda)\right)}} \right| = O(h^{\alpha-1}).$$

On vient donc de montrer que pour tout $\lambda \in [-1,1]$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right)\right] = O(h^{\alpha-1}).$$

Ensuite, pour finir, on va calculer et estimer $\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right)\right]$: pour tout $\lambda \in [-1,1]$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\mathrm{Im}\left(\ln\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right)\right)\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\ln\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right)\right)\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right) ih^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)}\right] \\
&= h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\mathrm{Re}\left[\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)}\right] \\
&= h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^\alpha)\mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right)
\end{aligned}$$

où Ψ est la fonction di-Gamma définie sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}^-$ par $\Psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ (voir **[1]**). Rappelons que pour tout $\lambda \in [-1,1]$,

$$\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h} = \frac{\lambda h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) + \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j(\lambda h^\alpha)h^{j-1}.$$

Donc comme $x \mapsto \mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+ix\right)\right)$ est paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'encadrement pour tout $\lambda \in [-1,1]$:

$$\mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+iO(h^{2\alpha-1})\right)\right) \leq \mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+i\frac{\varepsilon(\lambda h^\alpha)}{h}\right)\right) \leq \mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{ih^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}}+iO\left(h^{2\alpha-1}\right)\right)\right).$$

Alors d'une part, comme $\alpha \geq \frac{1}{2}$ nous avons que pour tout $\lambda \in [-1,1]$:

$$\mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+iO(h^{2\alpha-1})\right)\right) = O(1).$$

D'autre part, comme (voir **[1]**) pour $|y| \to +\infty$

$$\mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+iy\right)\right) = \ln|y| + O\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

on en déduit (car $\alpha < 1$) que :

$$\mathrm{Re}\left(\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{ih^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}}+iO(h^{2\alpha-1})\right)\right)$$

$$= \ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right| + O\left(\frac{1}{\left(\frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right)^2} \right).$$

Or comme

$$\frac{1}{\left(\frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right)^2} = \frac{1}{\frac{h^{2\alpha-2}}{-V''(0)} + O(h^{3\alpha-2})}$$

$$= \frac{-V^{''}(0)h^{2-2\alpha}}{1+O(h^{\alpha})} = -V^{''}(0)h^{2-2\alpha} + O(h^{2-\alpha}) = O(h^{2-2\alpha})$$

et que

$$\ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right| = \ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} (1 + O(h^{\alpha})) \right|$$

$$= \ln \left| \frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} \right| + \ln |1 + O(h^{\alpha})|$$

$$= (\alpha - 1) \ln |h| - \ln \left| \sqrt{-V''(0)} \right| + O(h^{\alpha}),$$

on en déduit que

$$\mathrm{Re}\left(\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{ih^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + iO(h^{2\alpha-1}) \right) \right) = (\alpha-1)\ln|h| - \ln\left|\sqrt{-V''(0)}\right| + O(h^{\alpha}) + O(h^{2-2\alpha}).$$

Par conséquent, pour tout $\lambda \in [-1,1]$ nous avons l'encadrement :

$$m_{\alpha}(h) \leq \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\arg \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} + i \frac{\varepsilon(\lambda h^{\alpha})}{h} \right) \right) \right] \leq M_{\alpha}(h).$$

Où on a posé :

$$m_{\alpha}(h) := h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^{\alpha})\mathrm{Re}\left(\Psi \left(\frac{1}{2} + iO(h^{2\alpha-1}) \right) \right) = O(h^{\alpha-1})$$

et

$$M_{\alpha}(h) := h^{\alpha-1}\varepsilon'(\lambda h^{\alpha})\mathrm{Re}\left(\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{ih^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + iO(h^{2\alpha-1}) \right) \right)$$

$$= \left[\frac{h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{2\alpha-1}) \right] \left[(\alpha-1)\ln|h| - \ln\left|\sqrt{-V''(0)}\right| + O(h^{\alpha}) + O(h^{2-2\alpha}) \right]$$

$$= \frac{(\alpha-1)h^{\alpha-1}}{\sqrt{-V''(0)}} \ln(h) + O\left(h^{\alpha-1}\right).$$

Ainsi au final, on en déduit que pour tout $\lambda \in [-1,1]$:

$$\frac{h^{\alpha-1}\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \leq \mathcal{Y}_h'(\lambda) \leq \frac{\alpha h^{\alpha-1}\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}).$$

Ensuite pour h assez petit on conclut que pour tout $\lambda \in [-1,1]$, $\mathcal{Y}_h'(\lambda) < 0$ et donc la fonction $\mathcal{Y}_h$ est bien strictement décroissante sur le compact $[-1,1]$. De même pour la fonction $\mathcal{Z}_h$. □

Deux familles de valeurs propres. Comme les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sont toutes deux bijectives, considérons leurs bijections réciproques, que l'on renote par :

$$\mathcal{A}_h := \mathcal{Y}_h^{-1} \,:\, \mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right) \to [-1,1] \;\text{ et }\; \mathcal{B}_h := \mathcal{Z}_h^{-1} \,:\, \mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right) \to [-1,1].$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante des valeurs propres semi-classique :

$$h^\alpha \lambda \in \Sigma_h(P_h, [-h^\alpha, h^\alpha])$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} \mathcal{Y}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z} & \text{avec } \lambda \in [-1,1] \\ \text{ou} & \\ \mathcal{Z}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z} & \text{avec } \lambda \in [-1,1] \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in \left(\bigcup_{k \in I_h} \mathcal{A}_h(2\pi k) \right) \bigcup \left(\bigcup_{l \in J_h} \mathcal{B}_h(2\pi l) \right)$$

où on à posé

$$I_h := \{k \in \mathbb{Z} / 2\pi k \in \mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right)\} = \frac{\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right)}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$$

et

$$J_h := \{l \in \mathbb{Z} / 2\pi l \in \mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right)\} = \frac{\mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right)}{2\pi} \cap \mathbb{Z}.$$

En résumant nous avons alors la :

Proposition 4.5. *L'équation $(P_h - h^\alpha \lambda I_d) u_h = O(h^\infty)$ admet une solution $u_h \in L^2(\mathbb{R})$ non triviale avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}\{0\}$ si et seulement si :*

$$\lambda \in \left(\bigcup_{k \in I_h} \mathcal{A}_h(2\pi k) \right) \bigcup \left(\bigcup_{k \in J_h} \mathcal{B}_h(2\pi k) \right)$$

où $\mathcal{A}_h = \mathcal{Y}_h^{-1}$, $\mathcal{B}_h = \mathcal{Z}_h^{-1}$ et $I_h = \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$, $J_h = \frac{\mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$.

Notons bien que les ensembles I_h et J_h ne sont pas vides, en effet :

Proposition 4.6. *Pour h assez petit, nous avons les encadrements suivants :*

$$E\left[-\frac{\alpha h^{\alpha-1} \ln(h)}{\pi \sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \right] \leq Card(I_h) \leq E\left[-\frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\pi \sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \right] + 1$$

où $E[x]$ désigne la partie entière de x. On a le même encadrement pour le cardinal de l'ensemble J_h.

Démonstration. On va faire la preuve uniquement pour l'ensemble I_h. Comme la fonction $\mathcal{Y}_h$ est strictement décroissante sur le compact $[-1,1]$, le diamètre du compact $\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right)$ est simplement donné par la relation :

$$\text{diam}\left(\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right)\right) = \mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Y}_h(1).$$

Par le théorème des accroissements finis il existe $\xi \in]-1,1[$ tels que :

$$\mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Y}_h(1) = -2\mathcal{Y}_h'(\xi) > 0.$$

On obtient donc l'encadrement suivant :

$$-2\alpha \frac{h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}) \leq \text{diam}\left(\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right)\right) \leq \frac{-2h^{\alpha-1} \ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1}).$$

La suite de la preuve est alors directe. □

Quinconce et interstice. Comme on l'a vu, dans le compact $[-h^\alpha, h^\alpha]$ (avec $\alpha \geq \frac{1}{2}$) le spectre semi-classique de l'opérateur :

$$P_h = -\frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$$

est constitué de deux familles : d'abord la famille

$$\alpha_k(h) := h^\alpha \mathcal{A}_h(2\pi k),\ k \in I_h$$

puis la famille

$$\beta_l(h) := h^\alpha \mathcal{B}_h(2\pi l),\ l \in J_h.$$

Donnons les propriétés importantes de ces deux familles.

Proposition 4.7. *Pour h assez petit, les deux familles de réels $(\alpha_k(h))_{k\in I_h}$ et $(\beta_l(h))_{l\in J_h}$ sont strictement décroissantes.*

Démonstration. cela tiens juste du fait que les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sont $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissantes, donc leurs bijections réciproques le sont aussi. □

Lemma 4.8. *La famille*

$$\left\{(\alpha_n(h))_{n\in I_h}, (\beta_l(h))_{l\in J_h}\right\}$$

est une famille de réels deux à deux bien distincts.

Démonstration. Les familles $\{\alpha_n(h)\}_{n\in I_h}$ et $\{\beta_l(h)\}_{l\in J_h}$ étant des familles de réels strictement décroissantes, il suffit juste de vérifier que ces deux familles n'ont pas de valeur commune. Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existent $(k,l) \in I_h \times J_h$ tels que $\alpha_k(h) = \beta_l(h)$, ie : $\mathcal{A}_h(2\pi k) = \mathcal{B}_h(2\pi l)$. En notant par λ cette valeur commune, c'est-à-dire :

$$\lambda := \mathcal{A}_h(2\pi k) = \mathcal{B}_h(2\pi l)$$

puis en appliquant les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ sur le réel λ, on a que

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) = 2\pi k \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ et } \mathcal{Z}_h(\lambda) = 2\pi l \in 2\pi\mathbb{Z}$$

et par conséquent :

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

donc par définition des fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$ nous avons

$$-2\arccos\left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1+\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}}\right) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

d'où :

$$\arccos\left(\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1+\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}}\right) \in \pi\mathbb{Z}$$

ainsi nécessairement on a

$$\frac{\cos(g_h(\lambda))}{\sqrt{1+\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}} \in \{-1,1\}.$$

Ce qui implique finalement l'égalité :

$$\underbrace{\cos^2(g_h(\lambda))}_{\leq 1} = \underbrace{1+\exp(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h)}_{>1}$$

qui est absurde, d'où le lemme proposé. □

Quinconce et interstice. On va maintenant s'intéresser à comparer ces deux familles entre elles, pour cela il faut prendre des indices appartenant à $I_h \cap J_h$. On va donc d'abord s'assurer que $I_h \cap J_h \subset \mathbb{Z}$ est non vide.

Proposition 4.9. *Pour h assez petit, nous avons*

$$E\left[\frac{\alpha(\xi-1)h^{\alpha-1}\ln(h)}{\pi\sqrt{-V''(0)}}+O(h^{\alpha-1})\right] \leq Card(I_h \cap J_h) \leq E\left[\frac{(\xi-1)h^{\alpha-1}\ln(h)}{\pi\sqrt{-V''(0)}}+O(h^{\alpha-1})\right]+1$$

où $\xi \in]-1,1[$.

Démonstration. Écrivons juste la différence entre les fonctions $\mathcal{Y}_h$ et $\mathcal{Z}_h$, pour tout $\lambda \in [-1,1]$ nous avons donc que

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda) = \underbrace{-2\arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right)}_{\in[-2\pi,0]}$$

donc en particulier

$$\mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Z}_h(-1) < 0 \text{ et } \mathcal{Y}_h(1) - \mathcal{Z}_h(1) < 0$$

(pour le strict dans les inégalités, voir la démonstration du précédent lemme).

Ensuite comme d'après la preuve de la proposition 4.6 on a l'encadrement :

$$-2\alpha\frac{h^{\alpha-1}\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}}+O(h^{\alpha-1}) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{Y}_h([-1,1])) \leq \frac{-2h^{\alpha-1}\ln(h)}{\sqrt{-V''(0)}}+O(h^{\alpha-1})$$

et en utilisant aussi que pour tout $\lambda \in [-1,1]$

$$|\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda)| \leq 2\pi$$

on voit immédiatement que pour h assez petit $\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1]) \neq \emptyset$; et on a même mieux, en effet comme :

$$\operatorname{diam}\left(\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right) \cap \mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right)\right) = \mathcal{Y}_h(-1) - \mathcal{Z}_h(1)$$

puis que

$$\mathcal{Z}_h(1) \leq \mathcal{Y}_h(-1) \leq \mathcal{Z}_h(-1)$$

par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\xi \in [-1,1]$ tels que

$$\mathcal{Y}_h(-1) = \mathcal{Z}_h(\xi)$$

par conséquent nous avons

$$\operatorname{diam}\left(\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right) \cap \mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right)\right) = \mathcal{Z}_h(\xi) - \mathcal{Z}_h(1)$$

$$= \mathcal{Z}_h'(\theta)(\xi-1)$$

où $\theta \in]\xi,1[$ est donné par le théorème des accroissements finis, d'où au final :

$$\frac{\alpha h^{\alpha-1}\ln(h)(\xi-1)}{\sqrt{-V''(0)}}+O(h^{\alpha-1}) \leq \operatorname{diam}\left(\mathcal{Y}_h\left([-1,1]\right) \cap \mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right)\right) \leq \frac{h^{\alpha-1}\ln(h)(\xi-1)}{\sqrt{-V''(0)}}+O(h^{\alpha-1})$$

et on en déduit alors la proposition. □

Proposition 4.10. *Pour h assez petit et pour tout $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1])\cap\mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$, on a que*

$$\alpha_k(h) < \beta_k(h).$$

Démonstration. On sait déjà que pour tout $\lambda \in [-1,1]$

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) - \mathcal{Z}_h(\lambda) = \underbrace{-2\arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\lambda)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right)}_{\in[-2\pi,0]} \leq 0.$$

Le lemme 4.8 nous informe de plus que la précédente inégalité est stricte : pour tout $\lambda \in [-1,1]$

$$\mathcal{Y}_h(\lambda) < \mathcal{Z}_h(\lambda).$$

De là on déduit que pour tout $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$

$$\mathcal{Y}_h\left(\mathcal{A}_h(2\pi k)\right) < \mathcal{Z}_h\left(\mathcal{A}_h(2\pi k)\right)$$

ie :

$$2\pi k < \mathcal{Z}_h\left(\mathcal{A}_h(2\pi k)\right).$$

Comme $2\pi k \in \mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right)$ et que $\mathcal{B}_h : \mathcal{Z}_h\left([-1,1]\right) \to [-1,1]$ en appliquant la fonction $\mathcal{B}_h$ (qui est strictement décroissante) sur la dernière inégalité on arrive a :

$$\mathcal{B}_h(2\pi k) > \mathcal{A}_h(2\pi k)$$

et donc

$$\alpha_k(h) < \beta_k(h).$$

Ce qui finit la preuve. □

Ensuite on a la :

Proposition 4.11. *Pour h assez petit tels et pour tout $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$ nous avons :*

$$\beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

Démonstration. Pour tout $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1]) \cap \mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$, considérons les deux réels :

$$\theta_k := \mathcal{B}_h(2\pi k) \in [-1,1]$$

et

$$\zeta_k := \mathcal{A}_h(2\pi k) - \mathcal{A}_h(2\pi(k-1)) < 0.$$

Alors comme :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Y}_h(\theta_k+\zeta_k) - \mathcal{Z}_h(\theta_k) \\
&= f_h(\theta_k+\zeta_k) - f_h(\theta_k) - \arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\theta_k+\zeta_k)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right) - \arccos\left(\frac{\cos\left(g_h(\theta_k)\right)}{\sqrt{1+\exp\left(2\pi\varepsilon(\lambda h^\alpha)/h\right)}}\right) \\
&= f_h(\theta_k+\zeta_k) - f_h(\theta_k) + O(1) \\
&= \underbrace{f_h'(\tau_k)\zeta_k + O(1)}_{>0 \ (\text{car } \zeta_k<0)}
\end{aligned}$$

où τ_k est donné par le théorème des accroissement finis, on a que :

$$\mathcal{Y}_h(\theta_k+\zeta_k) > \mathcal{Z}_h(\theta_k)$$

ie :

$$\mathcal{Y}_h(\mathcal{B}_h(2\pi k)+\zeta_k) > 2\pi k.$$

D'où en appliquant la fonction $\mathcal{A}_h$ (qui est strictement décroissante) nous obtenons alors :

$$\mathcal{B}_h(2\pi k) + \zeta_k < \mathcal{A}_h(2\pi k)$$

ie :

$$\mathcal{B}_h(2\pi k) + \mathcal{A}_h(2\pi k) - \mathcal{A}_h(2\pi(k-1)) < \mathcal{A}_h(2\pi k)$$

soit encore

$$\beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

Ce qui montre l'inégalité proposée dans l'énoncé. □

Pour finir, estimons la distance entre les valeurs propres :

Proposition 4.12. *Il existent C et C' deux nombres réels strictement positifs et indépendant de h tels que :*

$$C\frac{h}{|\ln(h)|} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq C'\frac{h}{|\ln(h)|}.$$

De même pour la distance $|\beta_{l+1}(h) - \beta_l(h)|$.

Démonstration. Or pour tout indice $k \in \frac{\mathcal{Y}_h([-1,1])\cap\mathcal{Z}_h([-1,1])}{2\pi} \cap \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}|\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| &= h^\alpha \left|\mathcal{A}_h\left(2\pi(k+1)\right) - \mathcal{A}_h\left(2\pi k\right)\right| \\ &= h^\alpha \left|\mathcal{A}_h'(\xi_k)2\pi\right|\end{aligned}$$

où $\xi_k \in]k, k+1[$ est donné par le théorème des accroissements finis. Il reste alors à écrire simplement que :

$$|\mathcal{A}_h'(\xi_k)| = \left|\frac{1}{\mathcal{Y}_h'(\mathcal{A}_h(\xi_k))}\right|$$

pour avoir l'encadrement suivant :

$$\frac{2\pi h^\alpha}{\frac{h^{\alpha-1}|\ln(h)|}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1})} \leq |\alpha_{k+1}(h) - \alpha_k(h)| \leq \frac{2\pi h^\alpha}{\frac{\alpha h^{\alpha-1}|\ln(h)|}{\sqrt{-V''(0)}} + O(h^{\alpha-1})}.$$

Ensuite il reste juste a noter que :

$$\begin{aligned}\frac{h^\alpha}{h^{\alpha-1}\left|\ln(h)\right| + O(h^{\alpha-1})} &= \frac{h}{|\ln(h)| + O(1)} \\ &= \frac{h}{|\ln(h)|}\frac{1}{1 + O\left(\frac{1}{|\ln(h)|}\right)} \\ &= \frac{h}{|\ln(h)|}\left(1 + O\left(\frac{1}{|\ln(h)|}\right)\right)\end{aligned}$$

et comme pour h assez petit $h/\ln(h)^2 \ll h/\left|\ln(h)\right|$ on démontre la proposition 4.12. □

En résumant toute cette partie 4, on a bien montré le théorème 4.1.

4.4. **Quelques remarques.** Pour finir, on va donner deux remarques, la première est technique et concerne le diamètre du compact où le théorème 4.1 est valide. Dans la seconde remarque on tente de donner un panorama global sur le spectre du double puits à l'aide des résultats connus sur le haut de spectre **[21]**, **[11]** et sur le bas de spectre **[20]**. Quelques tracés numériques sont aussi proposés.

Une remarque technique. Dans la preuve du théorème 4.1 on a vu la nécessité technique d'avoir supposé $\alpha \geq \frac{1}{2}$ (voir en particulier les majorants 4.5 et 4.6). Cependant, malgré cette hypothèse, le théorème 4.1 reste assez intéressant, notamment en vu d'applications : par exemple pour l'étude de la dynamique quantique d'un paquet d'ondes, en effet la taille $\sqrt{h}$ est (modulo un facteur multiplicatif) la taille d'un boule d'aire h, c'est à dire en physique la taille d'un quanta[5] .

[5]Par exemple les états cohérents.

Une remarque sur le spectre global du double puits. Pour fixer les idées, on va supposer que le double puits est symétrique (la fonction V est paire), le bas du spectre est alors uniquement constitué de quasi-doublets[6] de valeurs propres distant l'un de l'autre de h. Le haut de spectre est constitué de valeurs propres régulièrement espacées de taille h (voir [**21**], [**11**]). Sur la figure 7 on voit le passage du spectre quasi-double correspondant au bas du spectre au spectre simple correspondant au haut du spectre. On voit aussi que les valeurs propres se resserrent entre elles au passage du maximun local et s'écartent lorsque on monte vers le haut du spectre.

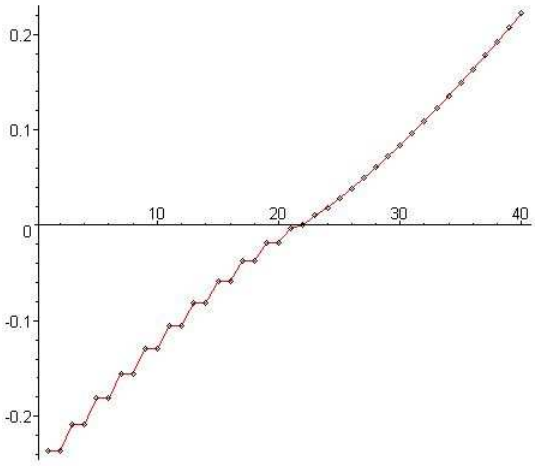
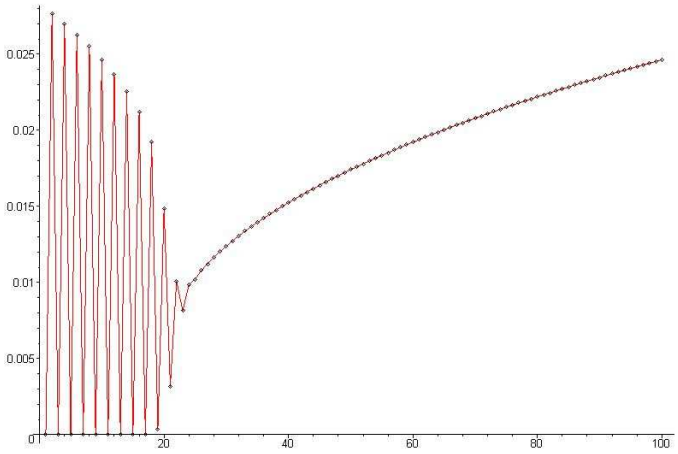


Fig. 7 : Tracé numérique d'une partie du spectre du double puits symétrique : sur l'axe des abscisses on trouve un indexage des valeurs propres, et sur l'axe des ordonnées on trouve les valeurs propres.

La figure 8 décrit la différence entres 2 valeurs propres consécutives : en passant du bas au haut du spectre on voit que l'oscillation induite par le phénomène de quasi-doublets diminue jusqu'à disparaître. Sur cette même figure 7 on distingue aussi très bien le resserrement "logarithmique" des valeurs propres au passage du maximun local, puis l'écartement, lui aussi "logarithmique", des valeurs propres quand on remonte dans la haut du spectre.



[6]En fait les valeurs propres sont toutes simples, mais la présence des deux puits induit deux spectres exponentiellement proches l'un de l'autre ; voir [**20**].

Fig. 8 : Tracé numérique de la différence entres 2 valeurs propres consécutives dans le cas du double puits symétrique : sur l'axe des abscisses on trouve un indexage des valeurs propres, et sur l'axe des ordonnées on trouve la différence entres 2 valeurs propres consécutives.

Cette article donne le train d'union entre le bas et le haut de spectre : même si les transitions restent mathématiquement délicates à écrire, on peut imaginer qu'en partant du bas de spectre et en montant vers le maximun local, la quinconce exponentiel des quasi-doublets augmente jusqu'à apparaître[7] clairement. Dans le même temps, toutes les valeurs propres se resserrent (passage de la distance spectrale h à $h/\left|\ln(h)\right|$). Ensuite quand on continue de monter du maximun vers le haut de spectre, il faut la aussi imaginer que la quinconce devient équidistante et que les valeurs propres s'écartent (passage de la distance $h/\left|\ln(h)\right|$ à h).

5. Annexe

Le but de cette annexe est de montrer de manière détaillée, à l'aide des distributions, le lemme 3.8 (voir aussi **[19]**).

5.1. Distributions tempérées holomorphes.

Definition 5.1. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, et considérons l'application :

$$T_{\cdot} : \begin{cases} U \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \\ \\ \lambda \mapsto T_\lambda. \end{cases}$$

On dira que T_λ est holomorphe sur U si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la fonction $\lambda \mapsto \langle T_\lambda, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$ est holomorphe sur U.

5.2. **Les distributions $\left[x_+^\lambda\right]$ et $\left[x_-^\lambda\right]$.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$, on définit alors les fonctions x_+^λ et x_-^λ par : $x_+^\lambda := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)x^\lambda$ et $x_-^\lambda := \mathbf{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x)|x|^\lambda$. Comme $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$ on vérifie sans peine que x_+^λ et x_-^λ sont dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et que les distributions $\left[x_+^\lambda\right]$ et $\left[x_-^\lambda\right]$ sont holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re}(z) > -1\}$.

Proposition 5.2. *Les distributions $\left[x_+^\lambda\right]$ et $\left[x_-^\lambda\right]$ admettent toutes les deux un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-^*$.*

Démonstration. Pour le moment la distribution $\left[x_+^\lambda\right]$ n'a de sens que pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$. Alors comme pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nous avons que

$$\left\langle \left[x_+^\lambda\right], \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)\, dx + \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx + \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}.$$

Il est clair que $\lambda \mapsto \frac{\varphi(0)}{\lambda+1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-1\}$, que $\lambda \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et que $\lambda \mapsto \displaystyle\int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \varphi(0)\right)\, dx$ est absolument convergente pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -2$, ainsi l'égalité précédente est vrai pour $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1\}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -2$, on vient donc de définir $\left[x_+^\lambda\right]$ pour $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1\}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -2$. Itérons ce procédé : en écrivant que

$$\left\langle \left[x_+^\lambda\right], \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx$$

[7] Il faut dire qu'en méthode semi-classique la distance exponentiellement petite est un $O(h^\infty)$, donc non visible.

$$= \int_0^1 x^\lambda \left(\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi\prime(0 - ... - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0) \right) dx$$

$$+ \int_1^{+\infty} x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}.$$

Avec le même procédé qu'avant, on peut définir la distribution $\left[x_+^\lambda\right]$ pour $\lambda \in \mathbb{C} - \{-1, -2, \cdots, -n\}$ et tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -n-1$. Ainsi par récurrence on peut définir la distribution $\left[x_+^\lambda\right]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \left\{\mathbb{Z}_-^*\right\}$. □

5.3. **Les distributions $(x+i0)^\lambda$ et $(x-i0)^\lambda$.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on définit la fonction $(x+iy)^\lambda$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$(x+iy)^\lambda := e^{\lambda \ln(x+iy)} = e^{\lambda \ln|x^2+y^2| + \lambda i \arg(x+iy)}.$$

Ainsi comme $z = x+iy \mapsto z^\lambda = (x+iy)^\lambda$ est holomorphe sur $U_\pi := \mathbb{C} - \mathbb{R}_-$, on va s'intéresser aux limites quand on s'approche de l'axe des réels par le haut et par le bas de l'axe ; on a simplement que :

$$(x+i0)^\lambda = \lim_{y \to 0^+} (x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{\lambda i \arg(x+iy)} = \begin{cases} x^\lambda \ \ si \ \ x \geq 0 \\ \\ |x|^\lambda e^{\lambda i \pi} \ \ si \ \ x \leq 0 \end{cases}$$

et

$$(x-i0)^\lambda = \lim_{y \to 0^-} (x^2+y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{\lambda i \arg(x+iy)} = \begin{cases} x^\lambda \ \ si \ \ x \geq 0 \\ \\ |x|^\lambda e^{-\lambda i \pi} \ \ si \ \ x \leq 0. \end{cases}$$

Ces deux nouvelles fonctions $(x+i0)^\lambda$ et $(x-i0)^\lambda$ sont bien définies sur tout $\mathbb{C}$ et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$ ces fonctions peuvent aussi s'écrirent :

$$(x+i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{\lambda i \pi} x_-^\lambda \text{ et } (x-i0)^\lambda = x_-^\lambda + e^{-\lambda i \pi} x_+^\lambda.$$

Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) > -1$, au sens des distributions nous avons que :

$$(x+i0)^\lambda = \left[x_+^\lambda\right] + e^{\lambda i \pi} \left[x_-^\lambda\right] \text{ et } (x-i0)^\lambda = \left[x_-^\lambda\right] + e^{-\lambda i \pi} \left[x_+^\lambda\right].$$

Avec la proposition 5.2 on peut définir un prolongement holomorphe de $(x+i0)^\lambda$ et de $(x-i0)^\lambda$ à $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_-^*$.

5.4. **Calcul de la transformée de Fourier de $\left[x_+^\lambda\right]$ et de $\left[x_-^\lambda\right]$.** On va démontrer le lemme 3.9 : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda) \in]0,1[$. Soit $\tau > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\mathcal{F}_1\left(t_+^\lambda e^{-\tau t}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{-\tau t} e^{-ixt}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^\lambda e^{ist}\, dt \tag{5.1}$$

où on a posé $s := -x + \tau i$.

Comme Im(s)$>$ 0, l'intégrale (5.1) converge absolument et on peut voir avec le théorème de convergence dominée que la distribution $\left[x_+^\lambda e^{-\tau x}\right]$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\left[x_+^\lambda\right]$ quand $\tau \to 0$, ainsi par continuité de la transformée de Fourier la distribution $\mathcal{F}_1\left(\left[x_+^\lambda e^{-\tau x}\right]\right)$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\mathcal{F}_1\left(\left[x_+^\lambda\right]\right)$ quand $\tau \to 0$.

On va maintenant calculer l'intégrale (5.1) : en faisant le changement de variable $u := -ist$, avec $s = -x + \tau i$, où $\tau > 0$, ainsi $\arg(s) \in]0, \pi[$ on a :

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda e^{ist}\, dt = \left(\frac{i}{s}\right)^{\lambda+1} \int_L u^\lambda e^{-u}\, du$$

où L est la demi-droite partant de 0 et d'angle $\arg(-is)$. Notons bien que $\arg(-ist) = \arg(s) - \frac{\pi}{2}$, donc $\arg(-ist) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Maintenant montrons que :

$$\int_L u^\lambda e^{-u}\, du = \int_0^{+\infty} x^\lambda e^{-x}\, dx.$$

Pour cela soit $0 < \epsilon < R$, et considérons le lacet orienté $\gamma_{\epsilon,R}$ du plan complexe défini par (voir Figure suivante) :

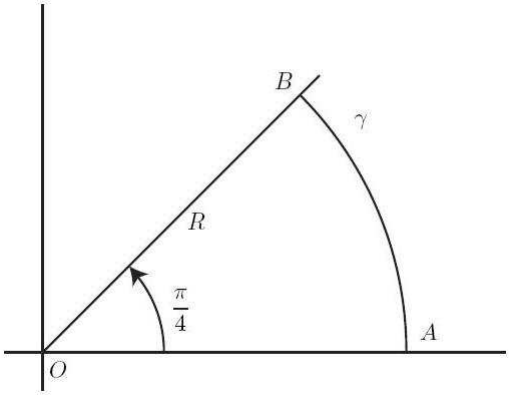


Fig. 9 : Chemin d'intégration $\gamma_{\epsilon,R} := L_{\epsilon,R} \cup C_R \cup [R, \epsilon] \cup C_\epsilon$.

Alors comme $f : z \mapsto z^\lambda e^{-z} = e^{\lambda \ln(z)} e^{-z}$ est holomorphe sur tout ouvert de $\{z \in \mathbb{C},\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par le théorème de Cauchy on a d'une part que :

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)\, dz = 0$$

et d'autre part en décomposant le lacet on obtient l'égalité suivante :

$$\int_{\gamma_{\epsilon,R}} f(z)\, dz = \int_{L_{\epsilon,R}} f(z)\, dz + \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_R^\epsilon f(x)\, dx + \int_{C_\epsilon} f(z)\, dz. \tag{5.2}$$

Or avec le changement de variable $z := Re^{i\theta}$ dans la seconde intégrale de (5.2) nous avons

$$\int_{C_R} f(z)\, dz = -i \int_0^{\arg(-is)} R^{\lambda+1} e^{i\lambda\theta} e^{-Re^{i\theta}}\, d\theta$$

or

$$\left| R^{\lambda+1} e^{i\lambda\theta} e^{-Re^{i\theta}} \right| \leq R^{Re(\lambda)+1} e^{-R\cos(\theta)}$$

donc, comme $\arg(-is) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, pour tout $\theta \in [0, \arg(-is)]$, $\cos(\theta) > 0$, ainsi

$$\lim_{R \to +\infty} R^{Re(\lambda)+1} e^{-R\cos(\theta)} = 0$$

d'où par convergence dominée sur un compact :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0.$$

Avec le changement de variable $z := \epsilon e^{i\theta}$ dans la quatrième intégrale de (5.2) nous avons

$$\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = i\int_0^{\arg(-is)} \epsilon^{\lambda+1} e^{i\lambda\theta} e^{-\epsilon e^{i\theta}}\,d\theta$$

donc

$$\left|\int_{C_\epsilon} f(z)\,dz\right| \leq \epsilon^{Re(\lambda)+1} |\arg(-is)|$$

et comme $\mathrm{Re}(\lambda)+1>0$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \epsilon^{Re(\lambda)+1} |\arg(-is)| = 0$$

on a

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{C_\epsilon} f(z)\,dz = 0.$$

Enfin par le théorème de Cauchy, et comme (5.1) converge absolument, en faisant tendre $\epsilon \to 0$ et $R \to +\infty$, l'égalité est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $-1 <\mathrm{Re}(\lambda) < 0$

$$0 = \int_L u^\lambda e^{-u}\,dt + \int_{+\infty}^0 x^\lambda e^{-x}\,dx$$

donc

$$\int_L u^\lambda e^{-u}\,dt = \int_0^{+\infty} x^\lambda e^{-x}\,dx = \Gamma(\lambda+1)$$

ie :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1\left(t_+^\lambda e^{-\tau t}\right)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{s}\right)^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{s}\right)^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i\tau)^{\lambda+1}}\Gamma(\lambda+1).\end{aligned}$$

Maintenant passons à la limite ($\tau \to 0$) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on obtient :

$$\mathcal{F}_1\left(\left[t_+^\lambda\right]\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i.0)^{\lambda+1}}\Gamma(\lambda+1).$$

Alors comme $\lambda \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i.0)^{\lambda+1}}\Gamma(\lambda+1)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}_-^*$ et que $\lambda \mapsto \mathcal{F}_1\left(\left[t_+^\lambda\right]\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}^*$, par un prolongement holomorphe la précédente égalité reste vraie sur $\mathbb{C}-\mathbb{Z}^*$. Et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}^*$ nous avons

$$\mathcal{F}_1\left(\left[t_+^\lambda\right]\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(-x+i.0)^{\lambda+1}}\Gamma(\lambda+1)$$

et donc

$$\mathcal{F}_1\left(\left[t_+^\lambda\right]\right)(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}}{(x+i.0)^{\lambda+1}}\Gamma(\lambda+1)$$

ensuite comme

$$(x+i.0)^{-\lambda-1} = \left[x_+^{-\lambda-1}\right] - e^{-\lambda i\pi}\left[x_-^{-\lambda-1}\right]$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}^*$on a

$$\mathcal{F}_1\left(\left[t_+^\lambda\right]\right)(-x) = \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[x_+^{-\lambda-1}\right] - e^{-\lambda i\pi}\left[x_-^{-\lambda-1}\right]\right)$$

d'où

$$\mathcal{F}_1\left(\left[t_+^\lambda\right]\right)(x) = \frac{ie^{i\frac{\pi}{2}\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[x_-^{-\lambda-1}\right] - e^{-\lambda i\pi}\left[x_+^{-\lambda-1}\right]\right).$$

Références

[1] M. ABRAMOWITZ & I.A STEGUN, *Handbook of Mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.* New York : Dover, pp. 255-258 and 260-263, 1972.

[2] M. AUDIN, *Les systèmes hamilitoniens et leurs intégrabilité,* Cours spécialisés 8, SMF, 2001.

[3] R. BRUMMELHUIS, T. PAUL & A. URIBE, *Spectral estimates around a critical level*, Duke Math. J, 78(3) :477-530, 1995.

[4] T. CARLEMAN, *Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger,* Ark. Mat. Astr. Fys. 24B 11 :1-7, 1934.

[5] J. CARRY & P. RUSU, *Separatrix eingenfunction*, Phys. Review A 45(12) :8501-8512, 1992.

[6] Y. COLIN DE VERDIERE & J. VEY, *Le lemme de Morse isochore,* Topology, 19 : 283-293, 1979.

[7] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commute II,* Math. Z., vol 71, p. 51-73, 1980.

[8] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSE, *Equilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale,* Comm PDE, 19 : 1535-1564, 1994.

[9] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSE, *Equilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerferld,* Ann IHP, 61 : 347-367, 1994.

[10] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSE, *Singular Bohr-Sommerfeld rules,* Commun. Math. Phys, 205 : 459-500, 2000.

[11] Y. COLIN DE VERDIERE, *Bohr-Sommerfeld rules to all orders* , Henri Poincaré Acta, 6, 925-936, 2005.

[12] Y. COLIN DE VERDIERE, *Méthodes semi-classique et théorie spectrale*, Cours de DEA, 2006.

[13] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of mathematical physics,* Intersciences Publishers, New York, 1953.

[14] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math Society Lectures Note Series 268, 1999.

[15] L. EVANS & M. ZWORSKI, *Lectures on semiclassical analysis.* http ://mathh-berkeley.edu/˜zworski/semiclassical.pdf.

[16] K. FRIEDRICHS, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109 : 465-487, 685-713, 1934.

[17] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds of bounded, geometry* , Proceedings of the conference "Functional Analysis, Partial Differential Equations and Applications" dedicated to the V. G. Maz'ya 60th birthday, Rostock, 1998.

[18] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Conditions for the discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifold*s, Funct. Anal. and Appl. 33, 1999.

[19] I. GEL'FAND & G. SHILOV, *Generalized Functions,* Vol. 1, Academic Press, 1964.

[20] C. GERARD & A. GRIGIS, *Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier,* Journal of Differential Equation 72 :149-177, 1988.

[21] B. HELFFER & D. ROBERT, *Puit de potentiel généralisé et asymptotique semi-classique,* Annales de l'IHP Physique Théorique 41(3) :291-331, 1984.

[22] B. HELFFER & J. SJOSTRAND, *Multiple wells in the semi-classical limit I,* Comm. in Partial Differential Equation 9(4) :337-408, 1984.

[23] O. LABLEE, *Spectre du Laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique,* Gazette des Mathématiciens, Société Mathématique de France :116, 2008.

[24] F. LAUDENBACH, *Calcul différentiel et intégral,* Editions de l'école polytechnique, 2000.

[25] J. MOSER, *The Analytic Invariants of an Area-Preserving Mapping Near a Hyperbolic Fixed Point,* Comm. on pure an d applied math, Vol. 9, 673-692, 1956.

[26] C. MARZ, *Spectral Asymptotics for Hill's Equation nera the potential maximum,* Asymptotics Analysis 5 :221-267, 1992.

[27] A. MARTINEZ, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, 2001.

[28] N. NADIRASHVILI, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator,* Math. USSR Sbornik, 61 : 225-238, 1988.

[29] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger operators on a complete Riemannian manifold*, Math. Notes. 54 :934-939, 1993.

[30] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1987.

[31] S. VU NGOC, *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités,* PhD Thesis Institut Fourier 1998.

[32] S. VU NGOC, *Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment,* Asymptotic analysis, vol. 24 (3-4), p.319-342, 2000.

[33] S. VU NGOC, *Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type*, Comm. Pure and Applied Math., vol 53, number 2, pp.143–217, 2000.

[34] S. VU NGOC, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global,* Panoramas et synthèses 22, SMF, 2006.

Olivier Lablée

Université Grenoble 1-CNRS
Institut Fourier
UFR de Mathématiques
UMR 5582
BP 74 38402 Saint Martin d'Hères
mail : lablee@ujf-grenoble.fr
http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜lablee/