



HAL
open science

Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques.

Frederic Brechenmacher

► **To cite this version:**

Frederic Brechenmacher. Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques.. 2008. hal-00339082v1

HAL Id: hal-00339082

<https://hal.science/hal-00339082v1>

Preprint submitted on 16 Nov 2008 (v1), last revised 1 Nov 2011 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques.

Frédéric Brechenmacher (¹).

Résumé.

Cette enquête s'appuie sur des méthodes quantitatives afin de dégager un corpus et une période de référence (1920-1938) à partir desquels seront mis en œuvre des jeux d'échelles entre local et global, temps court et temps long (1850-1938). La « théorie des matrices » des années trente manifeste une dynamique d'universalité qui se nourrit de phénomènes multiples et peut s'analyser en termes de passages au global de pratiques locales. Avant qu'un cadre disciplinaire, comme celui de l'algèbre linéaire, permette d'envisager des structures sous tendant les pratiques algébriques, les identités de telles pratiques ne portent le plus souvent pas de significations théoriques mais manifestent des aspects culturels propres à des réseaux dont les identités sont complexes.

L'adoption d'une terminologie universelle manifeste le rôle joué par la mécanique quantique comme moteur d'internationalisation et mêle le caractère d'« abstraction » prêté aux matrices dans la « théorie des formes », prédominante au début du siècle, à des pratiques opératoires sur des formes imagées, souvent élaborées en périphéries et appuyant des démarches d'appropriations de savoirs mathématiques. Cet article s'attache en particulier aux phénomènes collectifs de réception ou de circulation de textes par lesquels des idéaux d'« universalité » indissociables de la constitution de nouveaux centres en Grande Bretagne et aux Etats-Unis se mêlent à des idéaux de « simplicité » et « généralité » propres au réseau du « calcul des tableaux » dans le cadre de préoccupations pédagogiques élaborées par de nouvelles communautés d'enseignants-chercheurs.

Abstract. A history of the universality of matrices in mathematics.

This study tackles the various dimensions of a complex phenomenon of universalization in the history of mathematics. Our methodology resorts to a statistical survey in order to bring out a corpus and a historical periodization (1920-1938) along the line of "scale games" between the local and the global, the short-term and the long-term (1850-1938). The international "theory of matrices" of the 1930's highlights the interrelations and the structuring effects of local practices on the production of global ones. Because such practices were peculiar to individuals or networks and because they were resorting to some tacit knowledge, local ways of thinking, disciplinary ideals and internal philosophies, they point to some cultural and social issues related to disciplines and communities formations, evolutions and connections. By interrogating the cultural identities of such practices, this study aims at a deeper understanding of the history of linear algebra without focusing on issues related to the origins of theories or structures.

The adoption of a universal terminology of "matrices" highlights the role of quantum mechanics in a process of internationalisation and sheds some light on the interrelation of the "abstract" nature attributed to matrices in the theory of bilinear forms (most prominent at the beginning of the 20th century) and the various operatory processes resorting to pictorial representations which were often developed in peripheries. Ideals of universality were especially attributed to matrices during the development of academic mathematics in Great Britain and the United States. This paper especially

¹ Laboratoire de Mathématiques Lens (EA2462).

Fédération de Recherche Mathématique du Nord-Pas-de-Calais (CNRS, FR 2956).

Université d'Artois. Faculté des Sciences Jean Perrin, rue Jean Souvraz S.P. 18, 62 307 Lens Cedex France.

frederic.brechenmacher@euler.univ-artois.fr

raises some issues related to the collective phenonemons of appropriations and circulations of texts and point out the role of some pedagogical values of "simplicity" and "generality" taken up by new communities of teachers-cum-researchers in the constitution of unifying algebraic theories.

Introduction	p. 3
I. Universalité, périodisation et choix d'un corpus	p. 4
1. Période de référence.	p. 5
2. Le corpus des traités des années 1920.	p. 6
3. La théorie des matrices des années 1930.	p. 8
II. Jeux d'échelles sur la période 1850-1930.	p. 11
1. Universalité et histoire des mathématiques	p.12
2. Questions d'identités, appropriations d'un texte par ses lecteurs.	p.13
3. Circulation des textes et transmission sociale de faits culturels.	p. 16
4. Problématiques d'extensions, pratiques culturelles et réseaux.	p. 18
III. Pratiques, réseaux, interconnexions.	p. 21
1. Centres et périphéries.	p. 22
2. Pratiques et réseaux.	p.24
3. Unifications de pratiques et construction de cultures communes.	p. 25
Conclusion	p.28
Annexe 1. Une étude quantitative sur la terminologie matrice.	p. 31
1. A propos de l'universalité du terme « matrice » dans les mathématiques contemporaines.	p. 31.
2. Périodisation et étude quantitative.	p.32
3. Corpus et période de références.	p. 36
Annexe 2. Pratiques opératoires et décomposition matricielle chez Turnbull et Aitken.	p. 42
Annexe 3. Représentation graphique simplifiée d'un réseau de références.	p. 44
Annexe 4. Représentation graphique simplifiée du corpus formant la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes.	p. 45
Bibliographie	p. 46

Introduction.

Cette enquête pose comme problème historique l'« universalité » prêtée à la terminologie « matrice », envisagée dans ses différents aspects conceptuels et ses diverses matérialités. La prétention à l'universalité est l'un des aspects les plus spécifiques des savoirs mathématiques que ne peuvent saisir des études locales sur des temporalités courtes souvent privilégiées par des approches culturelles ou sociales des sciences. La méthodologie que nous mettons en action est basée sur le potentiel heuristique des méthodes quantitatives pour aborder des phénomènes collectifs de réception ou de transmission et leurs dynamiques. Comme l'a mis en évidence Catherine Goldstein⁽²⁾, les problématiques d'histoire sociale ou culturelle que les méthodes quantitatives visent à aborder ne peuvent faire l'économie, non seulement d'une réflexivité quant aux possibilités d'objectivisation du travail historique, mais aussi d'études qualitatives conjuguant analyses mathématiques, épistémologiques et, plus généralement, approches multiples sur l'histoire des sciences. Dans un premier temps, une étude bibliométrique sera mise en œuvre de manière opératoire pour dégager un corpus et ancrer une période de référence dont l'étude permettra de distinguer différents caractères d'universalité. Des méthodes d'analyses des réseaux permettront, dans un second temps, d'interroger ces caractères en dégagant des pratiques propres à des communautés. D'une part, nous proposons d'étudier, localement, la fabrication d'une universalité à partir d'une enquête portant sur une temporalité courte, les années trente du XX^e siècle, et sur un corpus constitué de traités publiés à cette époque. D'autre part nous mettrons en œuvre un double jeu d'échelles⁽³⁾, entre le local et le global, entre le temps court et le temps long, afin d'interroger la manière dont les textes de notre corpus sont fabriqués pour transcender leurs conditions historiques de production.

Nous aborderons notamment la manière dont la constitution d'une universalité, envisagée à travers la problématique des extensions, engage à la fois les mathématiques et des écritures de leur histoire. Si des publications de l'entre-deux guerres confèrent au terme « matrice » un statut universel au sein d'une théorie internationale, ce caractère se manifeste autant dans les rôles que joue l'histoire dans ces textes mathématiques que par l'envahissement de ces derniers par les représentations imagées des matrices. Nous verrons que ces références historiques héritent de certaines catégories élaborées dans les années 1880, comme celles d'« origine » ou d'« influence » mais aussi qu'elles développent ces catégories et leur en associent de nouvelles, comme celles d'« abstraction », de « simplicité » ou d'« universalité » qui continueront à structurer l'histoire des matrices jusque dans des textes qui nous sont contemporains. Il faudra aussi interroger les modalités par lesquelles des textes réalisent l'extension et l'unification de pratiques locales plus anciennes et comment les pratiques qu'ils développent seront-elles mêmes étendues par la suite. Nous verrons que, dans les années 1930, l'identité d'une méthode matricielle se tisse de pratiques différentes élaborées au sein de réseaux distincts. Une attention à la technicité même de ces pratiques donnera accès à des aspects culturels et sociaux propres à des communautés dont les identités sont elles mêmes problématiques. La question de la transmission et de l'appropriation de pratiques algébriques sera l'occasion de questionner la validité des cadres nationaux, institutionnels ou scientifiques via une étude des réseaux dans lesquels les textes circulent et sont lus à des niveaux différents. Il faudra aussi nous interroger sur la nature de la culture commune que manifeste la constitution à un niveau

² Au sujet des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques, voir Goldstein, 1999.

³ A propos des jeux d'échelles, voir Revel, 1996.

international de la théorie des matrices. Dans le cadre de ces problématiques, l'histoire de l'enseignement ne peut être dissociée de l'histoire des sciences et nous verrons notamment que, entre 1900 et 1930, des valeurs pédagogiques prêtées à la représentation matricielle sont à l'origine de nouvelles questions pour la recherche mathématique. Le croisement de problématiques d'histoire des sciences et d'histoire sociale sera l'occasion de présenter une histoire de l'algèbre linéaire qui ne se réduit pas à l'émergence de structures abstraites. Les dynamiques complexes d'universalité que nous mettrons en évidence permettront d'obtenir des résultats nouveaux quant aux rôles joués par des pratiques, savoirs, idéaux ou philosophies internes propres à des communautés.

I. Universalité, périodisation et choix d'un corpus.

Des publications relatives à l'histoire des matrices ont accompagné la parution de premières revues spécialisées d'histoire des mathématiques dans les années 1970. Dans le cadre de problématiques de recherches d'origines de théories algébriques comme celles des représentations de groupes ou des algèbres de Lie, Thomas Hawkins a d'abord dégagé différents rôles joués par la « théorie des matrices » avant de consacrer à ce sujet des publications spécifiques qui en ont structuré l'histoire (⁴). Cette structuration a par la suite été appropriée par de nouveaux travaux de recherches (⁵), des monographies (⁶), des dictionnaires ou des ouvrages de vulgarisation (⁷). L'historiographie distingue ainsi trois périodes : à l'origine, dans la « théorie des matrices » d'Arthur Cayley, 1858, d'une « algèbre symbolique » des matrices, suit une deuxième étape fondatrice de la « substance » des théorèmes de réductions canoniques des matrices comme le théorème des diviseurs élémentaires de Karl Weierstrass, 1868 et la synthèse du calcul symbolique des formes bilinéaires de Ferdinand Frobenius, 1878, puis une troisième étape de « développements » ou « diffusions ». La méthodologie qui sous tend cette structuration historique est celle d'une histoire conceptuelle, la sélection du corpus de textes sur lequel porte l'enquête est notamment basée sur l'identification rétrospective de publications dont la pertinence est jugée à l'aune de mathématiques postérieures à ces textes. Par exemple, une première période de l'histoire est associée aux travaux de mécanique d'auteurs comme Lagrange qui, bien qu'antérieurs d'un demi-siècle à l'introduction du terme « matrice » en mathématiques, sont reconnus comme pertinents car portant sur des systèmes d'équations différentiels rétrospectivement représentables sous forme matricielle. Un autre exemple est la « véritable origine » attribuée à un théorème énoncé par Weierstrass en 1868 auquel est associé la caractérisation des classes de similitudes de matrices (⁸), l'un des problèmes centraux de la théorie des matrices telle qu'elle est structurée de nos jours, et ce bien que Weierstrass lui même n'ait

⁴ Hawkins, 1971 à 1977.

⁵ Parshall, 1985.

⁶ Hawkins, 2000; van der Waerden, 1977.

⁷ Grattan-Guinness et Ledermann, 2003.

⁸ Dans la structuration donnée par Hawkins à l'histoire de la « théorie spectrale des matrices », une première étape voit une « origine » dans les travaux de mécaniciens du XVIII^e siècle impliquant des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants du type $AY''=BY$ où A est une matrice symétrique et B une matrice symétrique et définie. L'intégration de ces systèmes repose sur la recherche de valeurs propres λ_i telles que $AX=\lambda_i BX$ permettant d'écrire le système différentiel sous la forme $DY''=Y$ où $D=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale. A cette première étape succède un développement théorique initié par Cauchy, 1829 et complété par Weierstrass, 1858 et qui se caractérise par la démonstration de la nature réelle des valeurs propres des matrices symétriques. La troisième étape correspond à l'organisation d'une théorie, la théorie des formes bilinéaires fixée par Frobenius, 1878, autour d'un théorème énoncé par Weierstrass, 1868 permettant de caractériser les classes de similitude des matrices par un système complet d'invariants, les diviseurs élémentaires. Nous reviendrons plus loin sur ces questions lorsque nous aborderons la question de la culture algébrique commune portée, avant 1880, par le réseau de « l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes » dont l'étude est détaillée dans Brechenmacher, 2007.

jamais employé une telle terminologie ⁹). Notre objectif ne saurait être de remettre en cause le bien fondé de ce type d'histoire récurrente qu'il nous faut considérer comme une source parmi d'autres de notre propre enquête historique. S'il nous faudra préciser plus avant la manière dont les résultats de cette histoire rétrospective s'articulent avec notre propre problématique ¹⁰), nous nous contenterons dans un premier temps de remarquer qu'une question comme celle de la prétention à l'universalité des mathématiques ne peut être développée par les approches conceptuelles qui se focalisent sur les innovations de quelques individus de premier plan. L'universalité y joue en effet un statut d'hypothèse qui justifie de voir rétrospectivement des matrices jusque dans des travaux de mécanique du siècle des lumières ou même dans des textes japonais et chinois d'époques plus anciennes.

1. Période de référence.

Afin de préciser les critères à partir desquels sélectionner un corpus et une périodisation pertinents pour questionner une universalisation d'usage de la terminologie « matrice », nous avons mis en œuvre des méthodes quantitatives s'appuyant sur la base de données *Zentralblatt Math* ¹¹). Une étude sur le temps long, proposée en annexe, attire notre attention sur la période de l'entre deux guerres. La quantité d'entrées référencées s'y avère plus importante - en proportion comme en nombre absolu - que dans les périodes précédente et suivante et ne sera dépassée qu'à partir du milieu des années soixante-dix, époque qui voit apparaître de premiers travaux historiques sur la « théorie des matrices ». La période intermédiaire, [1946 ; 1975], se distingue quant à elle par une adéquation presque parfaite entre occurrences de la terminologie « matrice » dans les publications et dans les titres de ces publications. Nous aimerions questionner le rôle spécifique que semble jouer la période de l'entre deux guerre dans l'histoire de l'usage de cette terminologie dont les deux périodes suivantes semblent présenter deux autres étapes, à savoir la reconnaissance d'un sujet faisant l'objet de publications spécifiques puis un passage dans la culture commune des mathématiciens et son emploi au sein de tous types de sujets mathématiques. Dans cette première

⁹ D'un point de vue qui nous est contemporain, le théorème de réduction d'une matrice à coefficients complexes à sa forme canonique de Jordan est équivalent au théorème des diviseurs élémentaires. Tous deux permettent de caractériser les matrices semblables sur un corps algébriquement clos, c'est-à-dire les matrices A et B qui correspondent à une même transformation linéaire dans des bases différentes et que l'on peut transformer l'une en l'autre par une matrice de changement de bases $B=P^{-1}AP$, Ci-dessous, trois exemples de décompositions matricielles associées à la décomposition en diviseurs élémentaires d'un même polynôme caractéristique $|A-\lambda I|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3(\lambda-3)$.

<i>Formes de Jordan.</i>	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 0 & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 2 \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$
<i>Diviseurs élémentaires.</i>	$(\lambda-1), (\lambda-1),$ $(\lambda-2), (\lambda-2), (\lambda-2),$ $(\lambda-3)$	$(\lambda-1), (\lambda-1),$ $(\lambda-2)^3,$ $(\lambda-3)$	$(\lambda-1), (\lambda-1),$ $(\lambda-2), (\lambda-2)^2,$ $(\lambda-3)$

¹⁰ Notre enquête ne saurait se satisfaire de la dichotomie entre aspects internes et externes de l'activité scientifique visant à séparer des approches d'histoire sociale et culturelle d'une histoire conceptuelle. L'histoire rétrospective n'est pas exempte de résultats d'histoire sociale. Hawkins a notamment mis en évidence la constitution locale dans les années 1870 d'un idéal de généralité propre à un cercle de savants berlinois et dont il a évoqué les modalités du passage au global.

¹¹ Cette base, qui tire son nom du journal de comptes rendus *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* fondé en 1931, est éditée par la *Société Mathématique Européenne*, le *Fachinformationszentrum* de Karlsruhe, et la *Heidelberger Akademie der Wissenschaften* (<http://www.zentralblatt-math.org/>). Elle recense plus de 2,6 millions d'entrées bibliographiques depuis 1868 et son ambition est de couvrir la totalité du spectre des mathématiques pures et appliquées.

partie, ancrer notre étude dans la période 1920-1938 nous permettra de distinguer différents caractères d'universalité afin de structurer notre enquête.

Le choix de ce moment de référence permet également d'affiner notre méthodologie en adoptant comme source un journal de comptes rendus, le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, publié de 1868 à 1942, et dont l'objectif était de dresser un « annuaire des progrès des mathématiques » en proposant un référencement des publications accompagné de recensions et d'une inscription dans une classification des sujets mathématiques. Une étude quantitative sur les catégories structurant ce journal durant notre période permet d'observer ce que nous désignerons comme une dynamique d'universalité dans les usages de la terminologie « matrice » et qui se manifeste par une internationalisation et un envahissement progressif de toutes les rubriques de classification des mathématiques pures et appliquées. L'accroissement des usages du terme « matrice » dans de nouveaux sujets, dans des titres de publications et dans les différentes langues de publications, s'avère directement corrélé avec l'apparition des théories quantiques et des méthodes de la « mécanique des matrices » à partir de 1926. Un examen des lieux dans lesquels on publie met en évidence un rôle spécifique joué par des entrées publiées aux Etats-Unis dont les évolutions devancent de plusieurs années la dynamique générale. Les titres de ces publications identifient des sujets d'études sur les « matrices, notamment en relation avec l'algèbre abstraite, groupes, anneaux, corps ». Cet usage, qui reste quasiment exclusif jusqu'en 1935, avant de se répandre, notamment chez des auteurs publiant en Allemagne, sera entériné par une nouvelle classification adoptée en 1939 dans laquelle la sous section « matrices » sera insérée dans le nouveau chapitre « algèbre linéaire » et distinguée des sujets « déterminants » et « combinatoire » avec lesquels elle était mêlée depuis 1924. Précisons à présent les résultats obtenus par les démarches quantitatives en délimitant un corpus plus restreint constitué des entrées de type « livres » (manuels, traités, monographies) et en distinguant deux périodes délimitées par la diffusion des théories quantiques à partir de 1926. Le fait que les « livres » référencés sur la période 1920-1926 soient en majorité publiés en Allemagne et l'évolution spécifique des entrées publiées aux Etats-Unis dans la seconde période nous conduisent à questionner la pertinence des cadres nationaux.

2. Le corpus des traités des années 1920.

L'examen des traités des années 1920 permet d'identifier un usage dominant du terme « matrice » s'inscrivant dans la « théorie des formes, des déterminants et des invariants » dont les résultats principaux sont attribués à des auteurs allemands comme Frobenius ou Weierstrass. Cet usage s'est répandu en Allemagne à partir de la fin du XIX^e siècle et présente un caractère classique. Il se manifeste dans toutes les langues de publications ⁽¹²⁾, la théorie des formes représentant l'un des principaux sujets des traités d'algèbre. En raison des nombreuses « applications » de cette théorie, cet usage se manifeste également dans des traités de mathématiques élémentaires ⁽¹³⁾, sur les méthodes mathématiques de la physique ⁽¹⁴⁾, les équations différentielles ⁽¹⁵⁾, la géométrie ⁽¹⁶⁾, les équations intégrales ⁽¹⁷⁾ ou l'usage du calcul des vecteurs dans la théorie des invariants ou en

¹²Pour une référence de langue italienne, voir Scorza, 1921, de langue ukrainienne, voir Kravčuk, 1924.

¹³Weber, 1922.

¹⁴Madelung, 1922.

¹⁵Schlesinger, 1922.

¹⁶Ernesto Timerding, 1922.

¹⁷Kowalewski, 1925.

relativité⁽¹⁸⁾. La « notion » de matrice y joue un rôle secondaire, elle est employée pour manifester une identité revêtue par des notions différentes sur lesquelles porte une unique théorie (formes bilinéaires et quadratiques, substitutions linéaires) attribuant à ces objets un même calcul symbolique d'une part, une même représentation tabulaire d'autre part. En ce sens, les matrices sont qualifiées d'« abstraites » par opposition aux « significations » que portent les notions principales de la théorie⁽¹⁹⁾. Le « calcul des matrices », calcul symbolique sur des objets qui ne sont pas des nombres au sens classique mais sur lesquels on peut définir des opérations analogues à celles de l'arithmétique élémentaire bien que la multiplication soit non commutative et l'opération de division problématique, est distingué des méthodes principales de la théorie qui relèvent de calculs d'invariants numériques ou polynomiaux. On distingue en particulier les invariants d'une forme, comme ses déterminants et sous-déterminants, de la matrice dont sont extraits ces déterminants.

Notre étude quantitative permet d'observer que la dynamique d'universalité de l'usage de la terminologie « matrice » à partir de 1926 se développe en parallèle d'un effondrement du statut de la théorie des formes comme sujet principal des traités d'algèbre. Afin d'étudier ce phénomène, nous portons à présent notre attention sur les entrées publiées aux Etats-Unis. Si, avant les années trente, l'usage principal du terme matrice dans ces publications se situe dans le cadre, classique, des déterminants de la théorie des formes⁽²⁰⁾, un usage différent se manifeste dans les travaux de certains auteurs proches de l'« école de Chicago » comme ceux de Leonard Dickson et Joseph Wedderburn sur les algèbres associatives ou les travaux d'*analysis situs* d'Oswald Veblen⁽²¹⁾. On pourrait qualifier cet usage de « total » pour faire allusion à la notion de « total matrix algebra » employée par Wedderburn en référence au rôle essentiel joué par les matrices dans ses travaux visant l'étude de la « structure » des différents types d'objets sur lesquels on peut définir des opérations d'addition et de multiplication. Une communication faite par Dickson au congrès de Toronto de 1924 est particulièrement instructive. Cet acteur choisit en effet le cadre du premier congrès international d'après guerre auquel participent des mathématiciens allemands pour remettre en cause la structure de la théorie des formes. Sans aller jusqu'à rebaptiser cette théorie sous le nom de « théorie des matrices » comme le feront des auteurs proches de l'école de Chicago dans les années 1930, Dickson propose « une nouvelle théorie des transformations linéaires et des paires de formes bilinéaires ». En partant du problème de la « similitude des matrices » et en présentant comme corollaire la classification des « paires de matrices et donc des paires de formes bilinéaires », Dickson renverse la structure classique depuis la synthèse faite par le berlinois Frobenius en 1878⁽²²⁾. Ce renversement ne procède pourtant pas d'une innovation au sens classiquement attribué à ce terme. Une structuration théorique identique avait en effet déjà été

¹⁸ Study, 1923.

¹⁹ Une forme quadratique à deux variables, par exemple, peut s'interpréter comme l'équation d'une conique en géométrie analytique ou comme une forme prise par des nombres en arithmétique (comme la possibilité d'écrire des entiers comme somme de carrés)

²⁰ Pour des exemples d'auteurs américains privilégiant le terme déterminant avant 1930, voir Lowry, H ; 1926 ; Richardson, 1926 ; Barter, 1927. Comparer à Lecat, 1929 ou Iliovici, 1927.

²¹ Veblen 1923, p. iii. Voir aussi l'usage du « terme matrice » que développe Alexander, 1933 en théorie des nœuds. Au sujet des matrices d'entiers en « topologie combinatoire », voir König, 1936 et, à propos du problème des quatre couleurs, Whitney, 1937.

²² Dickson, 1924, p. 361.

La théorie de Frobenius prenait pour problème central l'équivalence des couples de formes (A, A') (pour la relation d'équivalence $ARB \Leftrightarrow \exists P, Q \in GL_n(\mathbb{E}), PAQ=B$). Dans le cas particulier où $A'=I$, la relation d'équivalence des couples (A, I) est identique à la relation de similitude $A'=P^{-1}AP$.

proposée par Camille Jordan en 1874 mais la vive querelle avec Leopold Kronecker que cette ambition avait provoqué avait enterré ce projet jusqu'à ce qu'à ce que de nouveaux travaux s'en revendiquent, comme ceux de Dickson à partir de 1900 ou de Séguier à partir de 1907 ⁽²³⁾. La « nouvelle théorie » implique cependant de rétrograder les notions de formes ou de substitutions ainsi que les méthodes de calculs d'invariants et place en son cœur la notion de matrice et les méthodes spécifiques d'un calcul matriciel visant l'obtention de « matrices canoniques ». Si la communication de Dickson passerait volontiers inaperçue dans l'optique d'une histoire conceptuelle cherchant à dresser des étapes des progrès des mathématiques, cette intervention cherche explicitement à donner un caractère global à un usage local du terme « matrice », propre à une petite communauté que Karen Parshall a qualifié d'« école de recherche mathématique », en un sens proche de celui pris par ce terme en histoire sociale des sciences ⁽²⁴⁾. Comme nous le verrons plus loin, cet usage porte un idéal d'universalité qui, par certains aspects, semble lui-même s'universaliser entre 1930 et 1940. Il nous faudra par conséquent questionner la nature locale et sociale de cet idéal et les modalités de son passage au global.

3. La théorie des matrices des années 1930.

Nous allons à présent nous intéresser aux traités sur la « théorie des matrices canoniques » qui apparaissent au début des années trente et adoptent tous la structuration théorique voulue par Dickson ⁽²⁵⁾. Certains auteurs de ces traités sont des convertis de fraîche date à un nouvel usage du terme matrice. Ainsi, le britannique Herbert Turnbull, qui avait publié en 1928 un traité sur la théorie des déterminants et des invariants ⁽²⁶⁾, s'associe en 1932 à Alec Aitken pour publier l'emblématique *Introduction to the Theory of Canonical Matrices*. Il ne s'agit pas là d'un cas isolé et de nombreux auteurs qui, avant les années trente, publiaient sur les déterminants, notamment dans des revues d'enseignement des mathématiques, développent de nouvelles problématiques de réductions canoniques des matrices. La principale différence entre l'usage associé à la terminologie matrice par ces problématiques et celui de la théorie des formes saute aux yeux. Alors que les représentations tabulaires étaient peu employées par la théorie classique, des représentations imagées envahissent la théorie des matrices des années 1930. Dans le sillage des ambitions formulées par Dickson en 1924, l'introduction du traité de Turnbull et Aitken présente l'utilisation des « propriétés » de l'« idiome matriciel » comme une rupture par rapport à l'usage « classique » de la notation des formes bilinéaires.

²³ Voir notamment le caractère local à Berlin d'un idéal de généralité de Kronecker ou Frobenius, Brechenmacher, 2008. Sur la postérité des pratiques de réductions canoniques de Jordan dans les travaux de Dickson sur les groupes linéaires et sur la généralisation qu'en fait ce dernier du « corps des entiers modulo p » au « corps de Galois général », voir Brechenmacher, 2006 a.

²⁴ Parshall, 2004 identifie cette « école de recherche mathématique » en montrant la continuité d'un « programme de Chicago en algèbre », de Moore à Albert et en analysant les rôles des « leaders » successifs et les orientations données par ceux-ci. Ces orientations « abstraite » et « structurale » se caractérisent d'abord par l'importance donnée à la théorie des groupes, objet de l'enseignement de Bolza dès 1893, des recherches théoriques de Moore sur les groupes simples et des travaux de Maschke sur les groupes finis linéaires. Lorsque Dickson sera aux commandes, l'attention se déplacera des groupes aux algèbres. Voir Fenster, 1997 & 1998.

²⁵ A propos du rôle de « modèle » joué par Dickson à Chicago, voir Fenster, 1997.

²⁶ Turnbull, 1928. Voir aussi Aitken, 1928.

Notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notation des formes bilinéaires :

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

Des valeurs pédagogiques associées à une représentation présentée comme « simple » ne peuvent être dissociées de l'objet même de la nouvelle organisation théorique à savoir « l'investigation systématique des types de transformations qui réduisent les matrices à leur forme la plus simple et la plus pratique » ou « forme canonique » ⁽²⁷⁾. Les démonstrations des théorèmes de réductions canoniques, les applications à différents problèmes comme la recherche des matrices commutant avec une matrice donnée sont autant d'exemples de l'efficacité de pratiques algébriques recourant à des formes imagées qui, dans les années trente, envahissent progressivement les textes mathématiques.

Poursuivons plus avant notre examen des traités des années 1930 afin de questionner la modernité des traités de théorie des matrices. Ces publications interviennent dans une période où d'autres traités visent le passage du local au global. Il y a tout d'abord les théories quantiques qui impliquent des bouleversements profonds des conceptions de la nature de la physique ainsi que du statut de l'algèbre et de ce que l'on désigne comme « abstrait » ⁽²⁸⁾. Il y a d'autre part, mais non indépendamment, la parution du célèbre traité d'« algèbre moderne » de Bartel Van der Waerden qui, lui aussi, a pour vocation de rendre globales des conceptions sur le statut de l'algèbre élaborées localement, notamment dans le centre du Göttingen. Si ce traité participe de l'effondrement du statut de la théorie des formes, il n'accorde aux matrices qu'un rôle secondaire. Ces dernières, selon une conception classique en Allemagne, sont considérées comme « abstraites » et c'est en vertu d'un changement de statut et de signification du qualificatif « abstrait » que, par un retournement de situation, la notion de matrice prime désormais sur celles de formes bilinéaires ou de substitutions ⁽²⁹⁾. L'abstraction des matrices tient à leur statut d'objet élémentaire de structures abstraites auxquelles est consacré le traité, les « modules sur un anneau » et « systèmes hypercomplexes ».

Nous ne développerons pas plus avant la description de cette « algèbre moderne » mais nous intéresserons à la manière dont celle-ci structure un traité publié en 1933 par l'un des doctorants de Dickson, Cyrus Colton Mac Duffee ⁽³⁰⁾, et intitulé *The theory of Matrices*. Ce traité est marqué par les principales caractéristiques de l'école de Chicago comme l'accent porté sur la théorie des algèbres. Ainsi, une matrice est « une suite de n^2 éléments, mais également beaucoup plus que cela car il s'agit d'un élément d'une algèbre totale de matrices pour laquelle les opérations d'addition et de multiplication sont définies. L'importance de la théorie des matrices provient des règles pour la combinaison des matrices tandis que le fait que ces dernières puissent être représentées par des

²⁷ Turnbull et Aitken, 1932, p. 2, trad. F.B.

²⁸ Lacki, 2000 ; Scholz, 2006 ; Evans & Torndike, 2007.

²⁹ Plus précisément l'« algèbre moderne » reprend la distinction établie par Noether entre les concepts de matrice et de transformation linéaire ce qui permet d'envisager les problèmes de représentations comme relatifs au choix de la base d'un espace vectoriel. Il s'agit là d'une conséquence de l'ambition d'unifier les théories algébriques par la théorie des représentations de groupes. Voir Moore, 1996, p. 670.

³⁰ Après son doctorat à Chicago, Mac Duffee séjourne à Princeton en 1921 à l'époque où Wedderburn y travaille sur la théorie des algèbres et des matrices. Il prend ensuite un poste à l'université de l'Ohio où il écrit son traité de 1933. A partir de 1935, Mac Duffee est à l'université du Wisconsin et publie un nouveau traité intitulé *An Introduction to Abstract Algebra*.

suites carrées est fortuit ». Le rôle qu'y joue l'abstraction de l'algèbre en référence à Van der Waerden, la place importante donnée aux calculs d'invariants, et notamment de déterminants, rendent cet ouvrage proche des traités de langue allemande ⁽³¹⁾. Comme l'illustre Mac Duffee qui, dans un second traité publié en 1941, abandonnera l'approche abstraite qui caractérisait sa publication de 1933 pour adopter des pratiques opératoires imagées et leurs significations, notamment géométriques en termes d'espaces vectoriels, la modernité de l'algèbre des années trente ne se réduit pas au passage au global de structures abstraites sur lequel a beaucoup insisté l'historiographie mais manifeste aussi une universalisation de procédés imagés de réductions canoniques.

Ces formes canoniques sont obtenues par des « transformations » normées par des critères de simplicité et qui s'appuient sur un caractère opératoire conféré à la forme matricielle que l'on « décompose » en « sous matrices » en cultivant l'analogie avec les figures de la géométrie (on parle ainsi de rectangle, triangle, diagonale) et par une articulation de procédures combinatoires, de décompositions polynomiales, d'un « calcul symbolique » des puissances de matrices, d'une arithmétique des lignes et des colonnes et d'un point de vue vectoriel de décomposition d'un espace en sous espaces stables par l'action d'une transformation linéaire (annexe 3). La diversité de ces procédés nous amène à envisager une histoire complexe se tissant de fils multiples, dépassant le cadre du passage au global d'idéaux d'universalités propres à l'école de Chicago. L'interaction entre mathématiques « élémentaires » et « modernes », préoccupations pédagogiques et de recherche qui accompagne le rôle essentiel donné à des procédures opératoires imagées se manifeste notamment en amont de notre période de référence, au sein de traités publiés dans différentes langues. Ces constatations nous conduisent à envisager l'universalité prêtée à la théorie matrices des années trente comme une tresse qu'il nous faudra démêler en questionnant les identités différentes revêtues par des pratiques opératoires et les modalités par lesquelles ces pratiques s'entremêlent en une unique méthode de décomposition matricielle ⁽³²⁾.

Nous verrons que, avant 1930, les adeptes de ces pratiques de décompositions forment des réseaux complexes qui ne s'identifient ni à une communauté nationale, ni à une unique théorie. En Allemagne, les usages du terme matrice dans l'« algèbre moderne » développée par des auteurs du centre de Göttingen comme Emmy Noether s'avèrent distincts de ceux d'auteurs comme Alfred Loewy, Wolfgang Krull ou encore Issai Schur. Certaines pratiques des matrices sont proches de l'usage classique comme celles mise en œuvre par Van der Waerden comme outil de représentation des groupes et des systèmes hypercomplexes, théorie dont l'un des acteurs, Frobenius, est également celui qui a structuré la théorie des formes. Dans d'autres traités, comme celui d'Hermann Weyl ou de nombreuses publications concernant le problème de la détermination de l'ensemble des matrices commutant avec une matrice donnée ⁽³³⁾, les matrices ne sont pas uniquement employées pour représenter des objets mais aussi une pratique de décomposition d'un problème complexe en une suite de problèmes simples. Le problème de la commutativité, central en théorie des représentations, joue un rôle important dans les premiers travaux des théories quantiques et la

³¹ Voir Schreiber et Sperner, 1932. Le traité d'« algèbre moderne » de Van der Waerden présente un classicisme par sa reprise des résultats sur les invariants comme les diviseurs élémentaires selon une structuration identique à celle donnée à la théorie des formes depuis 1878, structuration traduite dans le cadre des modules, systèmes hypercomplexes et de la théorie des représentations.

³² Voir la métaphore de la tresse employée à propos de l'universalité du cercle dans Goldstein, 1989.

³³ Weyl, 1923, p. 90. Voir aussi Krull, 1926 ; Schur 1927. Pour l'histoire des représentations de groupes, voir Hawkins, 1996 ; Haubrich, 1998 et Curtis, 1999.

pratique de décomposition matricielle se manifeste dans la constitution des méthodes de la « mécanique des matrices »⁽³⁴⁾. Nous n'avons pas affaire là à un phénomène unique mais à plusieurs et, comme l'a montré Goldstein pour le cas de la théorie des nombres, la coordination de ces phénomènes « n'est en rien évidente et constitue en elle-même un problème historique important »⁽³⁵⁾. Avant d'aborder, dans la troisième partie de cet article, ces questions relatives à la manière dont se constitue une universalité prêtée à la représentation matricielle, il nous faut questionner le statut d'« universalité » que des auteurs des années 1930 associent aux matrices, à la différence du statut d'« abstraction » qui caractérise l'usage classique de la théorie des formes.

II. Jeux d'échelles sur la période 1850-1930.

Examinons ce qui se présente comme commun dans les traités publiés dans les années 1930. Si des différences se manifestent aux niveaux des structurations théoriques adoptées, des méthodes employées ou même des définitions données au terme « matrice », l'un des principaux points communs tient à la place accordée à l'histoire. Ces références historiques s'avèrent indissociables des différentes organisations mathématiques développées dans ces traités, elles permettent d'en manifester la nouveauté ainsi que la légitimité par une inscription dans une histoire peuplée d'auteurs respectés⁽³⁶⁾. Ainsi les notes historiques proposées par Turnbull et Aitken en introduction de chaque chapitre illustrent les « nombreuses applications » des procédés de réduction canonique en produisant des exemples contemporains mais aussi une relecture rétrospective manifestant des appropriations d'une histoire longue. La bibliographie chronologique des *Lectures on matrices* publiées par Wedderburn en 1932 insiste sur le calcul sur des éléments de plusieurs dimensions en référence à une longue série de publications britanniques consacrées aux quaternions et à leurs applications en physique⁽³⁷⁾. Mac Duffee accompagne systématiquement les énoncés mathématiques de notes historiques et bibliographiques et met en perspective le caractère abstrait des matrices qui confère à celles-ci une priorité conceptuelle sur la notion de déterminant :

It was Cayley who seems first to have noticed that "the idea of matrix precedes that of determinant." More absolutely, we can say that the relation of determinant to matrix is that of the absolute value of a complex number to the complex number itself, and it is no more possible to define determinant without the previous concept of matrix or its equivalent than it is to have the feline grin without the Cheshire cat.

In fact, the importance of the concept of determinant has been, and currently is, vastly over-estimated.⁽³⁸⁾

Si ces écritures de l'histoire comportent des différences relatives aux différents statuts attribués au terme matrice, les points communs indiquent, réciproquement, des éléments d'une culture mathématique commune. Un premier point commun est la référence systématique à une histoire à

³⁴ Weyl, 1927 ; Wintner, 1927 ; Fantappiè, 1928 ; Van der Waerden, 1932 ; Bauer 1933 ; Albert, 1934 ; Schwerdtfeger, 1935. Le problème de la détermination de l'ensemble des matrices commutant avec une matrice donnée est le problème principal associé à la notion de matrice et, à la suite des travaux de Sylvester et Weyl des années 1880, il est associé à celui de l'expression de fonctions rationnelles de matrices. Ces problèmes, traités un nombre incalculable de fois entre 1880 et 1930 voient l'élaboration des principales notions de la théorie des matrices. L'apparition des théories quantiques donne à l'algèbre non commutative une nouvelle actualité.

³⁵ Goldstein, 1999, p. 192.

³⁶ Sur la question de la fabrication de l'histoire par les textes mathématiques, voir Goldstein, 1995, Dhombres, 1998 et Brechenmacher 2008 et 2007. Certaines publications de cette époque sont exclusivement dévolues à des développements historiques. Voir Klein, 1926 ; Conway, 1931 ; Muir, 1929 ; Miller, 1930 ; Bell, 1931.

³⁷ A propos du théorème fondamental de Wedderburn, 1907 sur les systèmes hypercomplexes, voir Parshall, 1985.

³⁸ Mac Duffee, 1941, p. v.

long terme qui plonge au cœur du XIX^e siècle -voir même jusqu'aux travaux de mécanique de Lagrange ou jusqu'au livre 7 des éléments d'Euclide -, Ainsi, chez Turnbull et Aitken Euclide se trouve-t-il associé dans une même phrase à Carl Gauss, Charles Hermite ou Henry Smith, chacune de ces références se voyant attribuée l'origine d'un aspect de la procédure du *p.g.c.d.* employée pour déterminer la « forme canonique rationnelle » des matrices. Dans un autre paragraphe, à propos de la forme canonique « classique », une publication contemporaine d'Aitken (1930), l'un des auteurs lui-même, est citée à la suite de travaux de Carl Jacobi (1857), Jordan (1870), Frobenius (1878), Eduard Weyr (1887), Dickson (1902), Schur (1909), Kurt Hensel (1926), chacun de ces personnages représentant l'origine d'une étape de l'organisation mathématique du chapitre à venir.

Second point commun, la reconnaissance d'un père fondateur en la personne de Cayley (1858), lui-même devancé par un précurseur, William Hamilton et ses quaternions (1853), et suivi de « redécouvertes » multiples comme chez Edmond Laguerre (1867) ou Frobenius (1878) ⁽³⁹⁾. Ces découvertes multiples permettent une transition logique entre le caractère fondateur attribué à Cayley pour la définition d'une structure d'algèbre et les auteurs considérés comme à l'origine du contenu des mathématiques exposées comme Weierstrass (1868) ou Jordan (1870) et dont aucun, à l'exception de Henry Smith (1861), n'employait le terme matrice. Se pose alors la question du demi-siècle séparant les années trente de ces pères fondateurs, problème auquel Mac Duffee répond par une réflexion en termes de nécessaires « développements » d'expositions à l'origine trop courtes voire manquant de « rigueur » ou de « généralité ».

1. Universalité et histoire des mathématiques

Ce second point commun de l'histoire écrite par des mathématiciens s'avère essentiel pour notre enquête. En effet, la structure en trois étapes de cette « histoire de Cayley comme fondateur », suivi de travaux responsables d'un contenu, eux même suivis de développements techniques, se présente systématiquement dans les publications et ce indépendamment de la langue, du lieu et, surtout, de l'époque de publication. On retrouve ainsi cette structuration aussi bien dans des publications d'avant guerre, comme l'encyclopédie franco allemande des sciences mathématiques, que dans les travaux d'histoire d'Hawkins des années 1970, eux-mêmes relayés jusqu'à nos jours. Cette structuration de l'histoire présente donc un caractère universel au sens où elle nous est contemporaine comme elle l'était de Mac Duffee (1933), Eduard Study (1907) ou Georg Scheffers (1890). Si, comme nous l'avons déjà évoqué, l'histoire écrite par les mathématiciens s'avère indissociable des mathématiques que ceux-ci développent, la mise en évidence du caractère universel de cette structuration historique semble indiquer la présence d'une universalité prêtée à une certaine organisation mathématique.

La structuration de l' « histoire de Cayley comme fondateur » a elle-même une histoire. On en trouve les premières traces dans les années 1880-1890 lorsque se constitue la théorie des « systèmes hypercomplexes » ou « algèbres linéaires associatives » chez des auteurs anglo-américains et

³⁹ Certaines publications de cette époque sont exclusivement dévolues à des développements historiques. Voir Klein, 1926 ; Conway, 1931 à propos de l'influence d'Hamilton sur la « pensée mathématique moderne » ; l'histoire des déterminants proposée par Muir, 1929 et Miller, 1930 ou l'association des matrices aux groupes et à la mécanique quantique chez Bell, 1931.

continentaux ⁽⁴⁰⁾. Ce phénomène nous amène à observer la constitution, à cette époque, d'un élément d'organisation mathématique dont nous sommes nous même contemporains et qui nous est d'ailleurs indiqué par les histoires écrites par les acteurs. Il s'agit des fameuses « découvertes multiples » qui manifestent la reconnaissance rétrospective d'une même théorie dans ce qui était auparavant perçu comme des théories distinctes, toutes susceptibles de généraliser des opérations sur les nombres, réels, complexes ou quaternions. Les matrices se voient alors attribuer un statut de notion « élémentaire » qui se rapporte, d'une part, à une qualification de simplicité - les matrices comme exemple le plus simple d'algèbre associative - et, d'autre part, à un caractère d'essentialité -, l'algèbre des matrices jouant un rôle essentiel dans les premiers résultats de classification des algèbres associatives et des algèbres de Lie ⁽⁴¹⁾. Ce caractère élémentaire va se perpétuer jusqu'à nos jours malgré tous les développements ultérieurs des mathématiques et de l'histoire des mathématiques. Reconnaisant, dans la manière dont des textes mathématiques de notre corpus sont fabriqués pour transcender leurs conditions historiques de production, des éléments provenant d'époques antérieures, nous proposons à présent de pratiquer des jeux d'échelles entre temps court et temps long afin d'examiner, à partir de notre période de référence, une histoire remontant jusqu'à l'introduction du terme matrice en mathématiques. Cette approche nécessite d'interroger les reconstructions rétrospectives qui permettent de mêler des pratiques auparavant hétérogènes. Elle nous permettra de porter de nouveaux regards sur des questions de postérité en termes de processus collectifs de fabrications et appropriations de savoirs. La postérité du mémoire de Cayley, en particulier, se limite-t-elle à un caractère de précurseur de structures algébriques, « pas supplémentaire vers l'abstraction » ⁽⁴²⁾, ou première définition de l'« addition des matrices » ⁽⁴³⁾ ?

2. Questions d'identités, appropriations d'un texte par ses lecteurs.

Il s'avère nécessaire de questionner les identités revêtues par des notions comme celle de forme bilinéaire sur une période antérieure à la construction d'identités mathématiques entre ces notions et la notion de matrice. Pour cette problématique, l'analyse quantitative portée sur les occurrences d'une terminologie n'est pas d'un grand secours. La nouvelle méthodologie que nous mettons en œuvre consiste à mener, à partir de notre corpus de référence, une recherche visant un épuisement systématique des indications bibliographiques. L'examen du corpus général obtenu permet alors d'étudier la manière dont les textes référencés se citent les uns les autres afin de distinguer des réseaux cohérents de textes. Des graphes permettent de représenter les liens entretenus par les différents textes d'un même réseau, ils manifestent notamment l'existence de nœuds dans l'entremêlement des références bibliographiques. Le graphe porté en annexe 2 donne la représentation simplifiée d'un réseau auquel nous allons nous intéresser plus particulièrement car il réunit, pour la première fois, des références aux matrices et aux formes bilinéaires. Il faut cependant remarquer que la *Théorie des matrices* de Cayley n'apparaît comme un nœud que rétrospectivement,

⁴⁰ Scheffers, 1890 attribue à Gauss l'origine des travaux sur les systèmes de nombres complexes tandis que pour Taber, 1889 ces travaux trouvent leurs origines chez Hamilton. Ces différences manifestent les réseaux distincts dans lesquels se situent les deux auteurs. Voir Brechenmacher, 200 ?.

⁴¹ Le rôle élémentaire joué par les matrices dans la théorie des algèbres associatives comme dans celle des algèbres de Lie est essentiel dans la rencontre, à cette époque de courants de recherches auparavant indépendants, à savoir les travaux sur les groupes continus développés sur le continent à la suite de Lie d'une part, l'étude des algèbres menée par des auteurs anglais et américains d'autre part. Voir Hawkins, 1972 ; Parshall, 1985 et Brechenmacher, 200?.

⁴² Grattan-Guinness, 1994.

⁴³ L'historiographie souligne souvent que Cayley n'est pas le premier à employer des opérations sur les tableaux. Pour décrire l'innovation de Cayley dans la problématique de recherche des origines des algèbres associatives, l'accent est souvent porté sur la définition de l'addition des matrices, voir Dieudonné, 1977.

après une éclipse d'une trentaine d'années, en raison de références effectuées à partir des années 1880 par des auteurs comme Sylvester ou Scheffers qui écrivent les premiers lignes de l' « histoire de Cayley comme fondateur ». Outre ces auteurs, parmi les principaux nœuds de notre réseau apparaît un texte publié par le pragois Eduard Weyr en 1890 et intitulé « Zur Theorie der bilinearen Formen »⁽⁴⁴⁾.

Ce texte est resté presque invisible aux yeux de l'historiographie. Hawkins et Parshall qualifient son contenu de « développements techniques » de travaux de Sylvester. Bien qu'il « mette en évidence que des systèmes hypercomplexes pouvaient être représentés par des matrices », les problématiques de quêtes d'origine n'attribuent à ce texte que quelques notes de bas de pages car « l'observation d'E. Weyr avait, bien entendu, déjà été faite par C. S. Peirce »⁽⁴⁵⁾. Ce jugement rétrospectif semble contredit par l'ampleur des références dont le mémoire de Weyr fait l'objet de la part de ses contemporains. Cette contradiction tient à ce que l'objet principal du mémoire est précisément la constitution d'une identité entre les matrices de Cayley et les formes bilinéaires de Frobenius, identité donnant aux matrices un statut élémentaire au sein de la théorie des formes et offrant par conséquent à la structuration de l' « histoire de Cayley comme fondateur » l'un de ses piliers qui, rétrospectivement apparaîtra naturel et ne sera pas questionné par l'historiographie⁽⁴⁶⁾. Weyr est pourtant, entre 1884 et 1889, le premier et le seul mathématicien du continent à faire explicitement référence aux matrices de Cayley. Or la lecture de Cayley par Weyr ne procède pas de la reconnaissance d'une « structure » unificatrice mais vise l'introduction, dans la théorie des formes, d' « un nouveau moyen d'action » basé sur la notion de « single quantity » rebaptisée « scalar matrizen »⁽⁴⁷⁾. Une matrice scalaire est à la fois un nombre a (un scalaire), et un système de nombres réduit à une diagonale composée de la succession d'un même scalaire. La pratique des matrices scalaires s'appuie sur cette dualité afin de factoriser les polynômes de formes de la théorie de Frobenius sur le modèle de polynômes de nombres :

$$\begin{aligned} a_0x^v+a_1x^{v-1}+\dots+a_v &= a_0(x-\rho_1)\dots(x-\rho_v), \\ a_0A^v+a_1A^{v-1}+\dots+a_v &= a_0(A-\rho_1)\dots(A-\rho_v), \end{aligned}$$

La première des équations ci-dessus donne la factorisation du polynôme caractéristique de la matrice A , un invariant obtenu par un calcul de déterminant. La seconde équation porte sur la factorisation d'un « polynôme de matrices », pratique basée sur la possibilité de considérer les racines ρ de l'équation comme des nombres ou des matrices scalaires.

La lecture que fait Weyr du mémoire de Cayley nous permet d'identifier l'objet de la « théorie » de 1858, question dont l'histoire attribuant à Cayley un rôle de fondateur ne s'est jamais préoccupée. L'objet du mémoire de 1858 n'est pourtant pas de généraliser avant l'heure les opérations de l'arithmétique à des objets de plusieurs dimensions comme les quaternions d'Hamilton mais d'énoncer un « théorème remarquable » selon lequel :

⁴⁴ Pour des éléments biographiques sur Weyr, voir Bečvář, 1995.

⁴⁵ Parshall, 1985, p. 288, trad. F.B.

⁴⁶ Voir Brechenmacher, 2002 à propos du caractère naturel de l'identité entre matrices et formes bilinéaires qui se manifeste particulièrement dans les descriptions du calcul symbolique des formes de Frobenius comme « équivalent » à l' « algèbre des matrices » tout en précisant que l'auteur n'employait pas ce terme. Voir Hawkins, 1977 et Parshall, 1985. Frobenius, contrairement à ce qui est souvent affirmé, connaissait les travaux sur les matrices qu'il cite dès 1878 pour leurs résultats et non en termes de développements équivalents et c'est donc sciemment qu'il n'emploie pas le *t. m.* avant les années 1890.

⁴⁷ A la suite de Goldstein, 1995, nous faisons ici usage de la notion de lecture d'un texte pour aborder des questions d'identités dans les manières dont un texte est approprié par des lecteurs dans des contextes multiples.

[...] toute matrice satisfait une équation algébrique de son propre ordre. [...] la loi pour la formation de ces équations peut être énoncée sous la forme condensée suivante, qui deviendra intelligible après étude du mémoire : le déterminant formé par une matrice soustraite à la matrice considérée comme une quantité simple associant la matrice unité, est égal à zéro ⁽⁴⁸⁾.

Or ce théorème est énoncé pour résoudre un problème précis, auquel est consacré la plus grande partie du mémoire, à savoir l'expression de fonctions homographiques de périodicité donnée (trouver $\varphi(x) = \frac{ax+\alpha}{bx+\beta}$ telle que $\varphi^\mu(x) = x$). Si l'on compose une fonction homographique par elle-même, on obtient ce que l'on peut considérer comme une fonction homographique au carré et l'objet de la théorie de 1858 est d'énoncer une méthode de calcul des fonctions, comme par exemple la racine carrée, d'une homographie (trouver $\varphi(x)$ telle que $\varphi^2(x) = x$).

Ce problème gagne à être placé dans le contexte social de la constitution d'une communauté mathématique académique impulsée par la génération d'acteurs qui précède Cayley à Cambridge dans la première moitié du XIX^e siècle et à laquelle l'historiographie a attribué la dénomination d'« école algébrique anglaise » ⁽⁴⁹⁾. La traduction du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* de Sylvestre Lacroix par Charles Babbage est souvent présentée comme exemplaire des efforts d'un groupe d'étudiants de Cambridge pour introduire les méthodes du calcul différentiel développées sur le continent à la suite des travaux de Gottfried Leibniz mais critiquées en Angleterre, depuis l'époque d'Isaac Newton, pour le caractère mécanique de leurs procédures et les paradoxes sur les quantités impossibles qu'elles impliquent. A ces critiques, les membres du « réseau de Cambridge » opposent une philosophie de l'algèbre qui se caractérise par l'importance donnée aux opérations par rapport aux objets. L'« algèbre symbolique » de Georges Peacock (1830) établit une distinction entre signification et symboles et implique une rupture avec le réalisme mathématique du XVIII^e siècle selon lequel à tout objet mathématique correspond dans la réalité un élément essentiel qui en constitue la légitimité ⁽⁵⁰⁾.

L'importance que prennent, dans le mémoire de Cayley, les questions liées à la réciprocity des opérations (puissances et racines de matrices) ou au caractère non commutatif de la multiplication renvoie à une préoccupation traditionnelle de l'école anglaise depuis les travaux de John Herschell (1813) sur la notation des opérateurs différentiels - la propriété $f^n(f(x))=f^{n+1}(x)$ - et leur généralisation par Babbage à des questions comme l'obtention de racines carrées de fonctions homographiques. C'est afin d'énoncer son théorème remarquable selon lequel toute fonction rationnelle d'une matrice, en particulier \sqrt{M} , peut s'exprimer comme un polynôme de degré inférieur à celui de la matrice elle-même, que Cayley définit, sur le modèle des réflexions sur le « langage » de l'algèbre développées par Augustus de Morgan (1841), des règles d'opérations sur les matrices. Si l'identité donnée par Cayley à la notion de matrice n'est pas celle d'un élément d'une algèbre associative et ne s'identifie d'ailleurs à aucune identité mathématique qui nous serait contemporaine ⁽⁵¹⁾, elle présente, avec la pratique polynomiale qui l'accompagne, une dimension sociale. Le contexte de l'héritage de l'école algébrique anglaise infuse le texte de Cayley, des problèmes posés au choix des termes « théorie », « règles », « loi » etc. Dans ce contexte, la spécificité conceptuelle d'une approche de l'algèbre symbolique s'avère indissociable d'éléments culturels et sociaux qui engagent

⁴⁸ Cayley, 1858, p., traduction F.B.

⁴⁹ Novy, 1968, p. 211-222 a le premier qualifié d'école algébrique anglaise le courant de pensée dont les acteurs principaux sont Babbage, Peacock, Gregory, de Morgan et Boole. A propos de l'influence de Boole sur Cayley dans le contexte des origines de la théorie des invariants, voir Crilly, 1986.

⁵⁰ Durand-Richard, 1990, p. 131. Voir aussi Durand-Richard, 1996.

⁵¹ Crilly, 1978 a souligné toute l'étrangeté pour les mathématiques contemporaines de l'emploi que fait Cayley de cette notion.

le statut de l'algèbre, une rupture avec le réalisme du XVIII^e siècle et dont l'historienne Marie-Josée Durand Richard a montré les relations avec la philosophie de Locke et le contexte plus général de l'Angleterre de la révolution industrielle.

3. Circulation des textes et transmission sociale de faits culturels.

Entre la publication du mémoire de 1858 et les années 1880, les quelques références à la « théorie des matrices » s'avèrent toutes le fait des rares auteurs qui, comme Cayley, occupent des positions académiques au Royaume-Unis (Smith, 1861 ; Charles Dogson, 1868 ; William Clifford, 1873) ou aux Etats-Unis (Benjamin Peirce, 1870, Sylvester, 1882). La forte dimension sociale que Cayley a donnée à son mémoire par la référence implicite à ses prédécesseurs n'en favorise certainement pas la circulation sur le continent européen. Il faut aussi remarquer que, du point de vue de ses stratégies de publications, Cayley publie ses travaux sur les « règles » du calcul des matrices en anglais et sur le sol britannique. Les « quantités simples » de Cayley s'identifient à des pratiques académiques de Cambridge qui se répandent ensuite à d'autres institutions universitaires britanniques puis américaines dans des contextes de création de communautés mathématiques en Grande Bretagne comme aux Etats-Unis. Examinons deux exemples de telles pratiques. A Oxford, Smith ancre ses travaux d'arithmétique et de théorie des nombres dans un réseau d'auteurs continentaux dont il œuvre à la diffusion des problématiques et résultats en Grande Bretagne. L'emploi que fait ce dernier des matrices de Cayley à partir de 1861 manifeste les identités complexes que celui-ci confère à ses travaux : à l'identité d'un réseau dont les grands noms sont Gauss ou Hermite s'ajoute l'inscription dans une tradition académique se reconnaissant des origines dans l'« école algébrique anglaise ».

Un autre exemple est donné par le cas de Sylvester. Celui-ci, malgré sa proximité avec Cayley, n'adopte la pratique de ce dernier qu'à partir des années 1880. Les motifs de cette lecture tardive sont multiples⁽⁵²⁾. Il y a d'abord un résultat sur le problème de l'expression des racines des « substitutions linéaires »⁽⁵³⁾ dont Cayley relève le caractère erroné en faisant référence à ses propres résultats de 1858. Il y a aussi les origines des préoccupations de Sylvester pour ce problème et pour lesquelles des questions techniques relatives à des travaux récents sont indissociables d'une dimension sociale plus large que manifeste la référence faite à Babbage. Après avoir été longtemps en marge des milieux académiques, Sylvester obtient en effet en 1876 une position lors de la fondation de l'université John Hopkins à Baltimore⁽⁵⁴⁾. Dans les cours qu'il élabore à cette période, Sylvester développe des préoccupations caractéristiques des débuts de sa carrière, lorsqu'il était proche du « réseau de Cambridge », comme la théorie des invariants et la théorie des matrices. A partir de 1883, lorsque Sylvester se voit attribuer la chaire d'Oxford⁽⁵⁵⁾, les nouvelles considérations de ce dernier relatives aux matrices impliquent un effet rétroactif sur l'histoire des mathématiques. La dénomination de « théorème de Cayley-Hamilton » illustre la façon dont l'adoption par Sylvester

⁵² En 1879, Sylvester fait encore référence aux « déterminants composés » pour ce qu'il qualifiera quelques années plus tard de produits de deux matrices. Sylvester, 1879. Pour expliquer ce nouvel intérêt pour la théorie des matrices, l'historiographie présente différents arguments comme un "retour subconscient" de la lettre de 1857 dans laquelle Cayley annonçait à Sylvester le contenu de sa théorie. Voir Parshall, 1985, 241.

⁵³ Sylvester, 1882a.

⁵⁴ Parshall, 1988.

⁵⁵ Avant de se voir attribuer des positions successives à Hopkins et Oxford, Sylvester est un acteur en périphérie du milieu académique britannique. Entre la période qui sépare ses études à Cambridge et l'obtention de positions académiques, les problématiques relatives aux matrices ou au thème de l'universalité désertent ses travaux. Parshall & Seneta, 1997 ont mis en évidence la stratégie de Sylvester consistant à s'appuyer sur des réseaux internationaux afin d'établir sa réputation

d'une conception des matrices comme quantité complexe vérifiant une équation algébrique s'accompagne d'une évolution des rôles historiques de Cayley et Hamilton, désormais associés dans la reconnaissance d'une priorité double sur l'énoncé d'un théorème précurseur de l'« algèbre universelle », conçue comme l'étude de divers systèmes de « formes symboliques » comme les matrices, les quaternions mais aussi les extensions de Grassmann ou la logique de Georges Boole. Le thème de l'universalité manifeste ici encore la dimension sociale d'un héritage du réseau de Cambridge. Il s'agissait en effet de l'un des thèmes principaux développés par des auteurs comme Peacock afin d'articuler l'« algèbre arithmétique », science des nombres, et l'« algèbre symbolique ». Dans cette séparation entre opérations et significations, l'algèbre arithmétique joue un double rôle, à la fois « science de la suggestion » (on en tire les « formes générales ») et lieu des « vérités contingentes » donc subordonnée à l'algèbre symbolique, lieu des « vérités nécessaires ». Il s'agit là du double principe de permanence de Peacock : ce qui a été découvert dans des cas particuliers sera universel⁽⁵⁶⁾.

L'introduction par Sylvester en 1850-1851 des termes « matrices » et « mineurs » manifestait déjà une ambition d'universalité. Il s'agissait de proposer une caractérisation des types d'intersections de deux coniques, problème classique pour lequel Sylvester souhaitait développer une approche « intrinsèque » par des méthodes de géométrie projective invariante par transformations homographiques⁽⁵⁷⁾. Traduit dans le « langage des déterminants », le problème conduisait à l'étude d'une équation algébrique dont le type de multiplicité des racines devait caractériser la nature des contacts entre coniques⁽⁵⁸⁾. Les occurrences de racines doubles et triples nécessitaient chacune l'examen de deux sous-cas abordés par l'étude des décompositions polynomiales du déterminant et de ses sous-déterminants, dénommés « mineurs ». La définition du terme « matrice » pour désigner la mère des mineurs extraits d'un déterminant manifestait explicitement un idéal d'universalité qu'illustre également l'introduction du traité sur les déterminants de Dogson, ou Lewis Carroll, dont la citation ci-dessous est à rapprocher de la métaphore employée par Mac Duffee, citée dans la première partie, selon laquelle les déterminants sont aux matrices comme le sourire félin au chat de Cheshire⁽⁵⁹⁾ :

Je suis conscient que le terme « Matrice » est déjà employé pour exprimer la signification que j'associe au terme « Bloc » ; ce premier terme signifie cependant davantage le moule ou la forme par laquelle des quantités algébriques peuvent être introduites plutôt qu'un assemblage concret de telles quantités ; par exemple $\frac{\binom{c}{c} \times \binom{c}{c}}{\binom{c}{c}}$ mériterait un tel nom, plutôt que $\frac{\binom{a+b}{e+f} \times \binom{c+d}{e+f}}{\binom{e+f}{e+f}}$. Dogson, 1868, trad. F.B.

Cet usage de la notation matricielle comme « forme universelle » s'appliquant à des significations diverses est également manifeste dans les premiers écrits de Cayley (1855) appliquant les matrices aux « fonctions linéaires » ou « quadratiques ».

⁵⁶ Voir Durand-Richard, 1996 à propos de l'articulation problématique de cette conception de l'algèbre et des travaux de Hamilton.

⁵⁷ Sylvester, 1851, p. 219. Voir à ce sujet Sinaceur, 1991, p. 126.

⁵⁸ Voir Brechenmacher, 2006d. Le type d'intersection de deux coniques étant caractérisé par le type de coniques dégénérées se trouvant dans le faisceau, il dépend donc de la nature des racines (valeurs propres) de $D(\lambda) = \det(\lambda U + \mu V) = 0$. La multiplicité de ces racines permet de distinguer entre contacts de premier, second et troisième ordres. Mais il y a deux types de points de contacts pour les second et troisième ordres et, pour les différencier il est nécessaire d'étudier les pgcd des mineurs du déterminant $D(\lambda)$. Darboux, 1874 puis Noether, 1898 verront dans ces travaux une première définition des diviseurs élémentaires introduits par Weierstrass, 1868 (facteurs invariants $D_i(\lambda)$).

⁵⁹ Mac Duffee, 1941, p. v.

A partir de 1882, Sylvester mêle la pratique spécifique développée par Cayley en 1858 à sa propre pratique de matrice-mère des mineurs. Il en résulte de nouvelles pratiques de factorisations des polynômes de matrices en « facteurs latents » $M - \lambda_i$ dont une synthèse est publiée en 1883 sous le titre « On the equation to the secular inequalities in the planetary theory ». Ce mémoire présente une « nouvelle méthode » pour « extraire la racine μ^e d'une substitution donnée » basée sur l'énoncé d'un « théorème général » dont le « rapprochement inattendu » qu'il permet entre les théories des invariants ou des quaternions appuie une revendication d'universalité. Les matrices de l'« algèbre universelle » généralisent les quaternions d'Hamilton –quantités d'ordre 4, à des quantités d'ordre 9 comme les nonions et, plus généralement, à des « m^2 -ions », non pas basés sur des significations géométriques en termes d'« espaces inconcevables » mais sur une « fondation algébrique ». Le terme « universel » employé par Sylvester indique que celui ne renonce pourtant pas aux relations de l'algèbre et du monde réel ; dans la tradition de l'école algébrique anglaise, ce terme fait en effet référence à Newton :

Ce qui intéresse le plus dans les résultats nouvellement acquis que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, c'est l'union ou bien l'anastomose dont ils offrent un exemple frappant et tout à fait inattendu entre les deux grandes théories de l'Algèbre moderne et de l'Algèbre nouvelle, dont l'une s'occupe des transformations linéaires, et l'autre de la quantité généralisée, de sorte qu'au même titre que Newton définit l'Algèbre ordinaire comme étant l'Arithmétique universelle, on pourrait très bien caractériser cette Algèbre-ci comme étant l'Algèbre universelle, ou au moins une de ses branches les plus importantes⁽⁶⁰⁾.

Sylvester désigne ses principaux résultats comme des « lois du mouvement dans le monde de l'algèbre universelle ». Une idée de mouvement est associée aux opérations sur les matrices en référence au temps pur de Newton, « un mouvement est une opération dans le monde de l'espace pur, une opération est un mouvement dans le monde de l'ordre pur »⁽⁶¹⁾. Sylvester développe notamment le « parallèle » entre la seconde loi de Newton et la « règle pour combiner ou multiplier les matrices » interprétée comme mouvement d'une ligne (ou colonne) d'une matrice fixe M sous l'action d'itérations de produits par une matrice $m - M, mM, m^2M, \dots$, itérations considérées comme autant de modifications d'« états » de la matrice initiale. Il en déduit ce qu'il désigne comme « The law of consentaneity » établissant la décomposition du mouvement d'une matrice en un ensemble de « mouvements parallèles »⁽⁶²⁾.

4. Problématiques d'extensions, pratiques culturelles et réseaux.

Au contraire des quantités simples de Cayley, les matrices mères des mineurs introduites par Sylvester en 1851 vont circuler au sein d'un réseau qui saluera les débuts d'une nouvelle théorie, la théorie des invariants, et se scindera en plusieurs branches après 1860⁽⁶³⁾. Mais la rapide et large circulation du terme « mineur » est surtout due à un réseau beaucoup plus large dans lequel Sylvester inscrit ces travaux et qui se présente comme une culture algébrique commune au XIX^e

⁶⁰ Sylvester, 1884b, p. 199

⁶¹ Sylvester, 1884, p. 33.

⁶² Mentionnons encore le cas de la « loi de réversibilité » selon laquelle les « racines latentes » d'un produit de matrices sont indépendantes de l'ordre d'opération (bien que le produit ne soit pas commutatif), loi comparée à celle selon laquelle l'énergie cinétique de l'action mutuelle de deux corps n'est pas affectée si l'on intervertit ces deux corps.

⁶³ Dans les années 1850, Hermite suit de près les travaux de Cayley et Sylvester sur les invariants et adopte la notion de mineur très rapidement dans ses travaux de théorie des formes. Pour ce qui est du deuxième réseau évoqué, de géométrie algébrique, voir Clebsch, 1876 ainsi que, pour les auteurs de langue italienne, Cremona 1866 ; Betti 1859 et Brioschi 1857 et, pour une référence en langue anglaise Spottiswoode, 1877.

siècle. En effet, lors de son introduction des matrices en 1851 comme lors de sa réappropriation de ce terme à partir de 1882, Sylvester relie ses travaux au thème de l' « équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes » ⁽⁶⁴⁾. Cette référence s'avère la manière dont des auteurs du XIX^e siècle identifient une pratique algébrique consistant à transformer les « formes » des systèmes linéaires par des décompositions des « formes » polynomiales d'une équation obtenue par des calculs de déterminants ⁽⁶⁵⁾. Ce caractère algébrique ne relève pas d'une identité théorique ou disciplinaire comme en donneront, dans les années 1880, la théorie algébrique de formes puis, dans les années 1930, la théorie des matrices ⁽⁶⁶⁾. A la permanence d'une pratique polynomiale dont l'origine est attribuée aux travaux de Lagrange sur les systèmes différentiels, il faut en effet opposer la diversité des méthodes élaborées dans les cadres théoriques distincts – mécanique céleste, géométrie analytique, arithmétique etc. - au travers desquels se déploie ce réseau. Si, parallèlement à cette variabilité des contextes, l'identité algébrique d'une pratique se manifeste dans ce réseau, cette identité relève de celle d'une histoire partagée. C'est en effet par des références à des travaux plus anciens que les auteurs du corpus comme Laplace, Cauchy, Sylvester, Hermite ou Weierstrass donnent à leurs travaux une identité dépassant les contextes dans lesquels ceux-ci s'inscrivent. A l'époque de Sylvester, la pratique algébrique qu'identifie la référence à l' « équation à l'aide de laquelle etc. » est associée aux problèmes posés par l'occurrence de racines multiples dans la dite équation, problèmes qui mettent en question la capacité de l'algèbre à donner lieu à des résolutions « générales », c'est-à-dire valables pour tous les cas singuliers, et non uniquement pour le cas générique des racines distinctes ⁽⁶⁷⁾.

L'identité algébrique du corpus large auquel se réfère Sylvester est à l'origine de la circulation de ses travaux sur le continent comme le manifestent l'intérêt ponctuel que leur porte Henri Poincaré en 1884 et surtout la série de travaux publiée par Weyr entre 1885 et 1890. La lecture que fait le géomètre de Prague des travaux sur les matrices mêle de nombreux textes de ce réseau large. A la nouvelle identité qui se construit entre matrices de Sylvester, de Cayley et quaternions de Hamilton se mêlent ainsi des travaux de Bernhardt Riemann de 1857 sur la caractérisation des systèmes

⁶⁴ Sylvester, 1852 & 1883.

⁶⁵ Brechenmacher, 2007. On interpréterait aujourd'hui cette pratique comme une méthode revenant à donner une expression polynomiale générale des vecteurs propres d'une matrice comme quotients de mineurs extraits du déterminant caractéristique $|A-\lambda I|$ et d'une factorisation de l'équation caractéristique par un terme linéaire : $|A-\lambda I|/(\lambda-\lambda_i)$ (où λ_i est une racine caractéristique de A). Une telle expression polynomiale s'identifie à un facteur près aux colonnes non nulles de la matrice des cofacteurs de $|A-\lambda I|$.

Une telle formulation introduit cependant dans le discours historique des aspects propres à la théorie des matrices, comme les termes « transformation » et « symétrique », qui sont absents de textes comme ceux de Lagrange et masquent le caractère spécifique d'une pratique originale. Lorsque Lagrange ramène l'intégration d'un système de n équations à celle de n équations indépendantes, le changement de forme du système n'est pas envisagé comme le résultat d'une transformation mais s'avère indissociable d'une représentation mécanique implicite selon laquelle les petites oscillations d'un système de n corps se comportent comme si elles étaient composées de n mouvements simples. Ce que nous désignerions aujourd'hui comme le caractère symétrique des systèmes linéaires mécaniques se manifeste comme une conséquence de la pratique algébrique originale élaborée par Lagrange et consistant, en un jeu sur les primes et les indices des coefficients des systèmes linéaires que l'on interpréterait aujourd'hui dans le cadre d'une orthogonalité duale, à réduire l'intégration de ces derniers à la décomposition algébrique d'une équation.

⁶⁶ Les références à l' « équation à l'aide de laquelle etc. » se font plus rares après 1880 à la suite de la parution de la théorie de Frobenius. Elles reprennent cependant dans les années trente au moment de l'effondrement du statut de référence donné à la théorie des formes en algèbre. Voir Toscano, 1928 ; Browne, 1930 ; Lusin, 1931 ; Itô, 1931

⁶⁷ Dans le cas générique toutes les matrices sont ainsi diagonalisables. Voir notamment la manière dont Cauchy critique l' « étendue » trop grande que l'on donne souvent aux formules de l'algèbre qui, pourtant, peuvent conduire à des expressions sans signification comme $\frac{0}{0}$ dans certains cas singuliers ». Voir surtout la manière dont Kronecker écrit une histoire de la généralité en algèbre lors de la querelle qui l'oppose à Jordan en 1874, Brechenmacher, 2008.

d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et qui proposaient une caractérisation des « substitutions linéaires semblables » par la « décomposition » d'une substitution A en un produit de trois substitutions de la forme :

$$(A) = (\alpha) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} (\alpha)^{-1}$$

Comme le relève Weyr, en cas d'occurrence de racines λ_i multiples, on ne peut pas, en général, caractériser la substitution A par une substitution semblable prenant une forme diagonale comme ci-dessus (⁶⁸). Weyr s'appuie sur les récents travaux de Sylvester afin de « rectifier » le résultat de Riemann par une décomposition en « compartiments » de la forme matricielle reflétant la décomposition de la forme polynomiale de l'équation caractéristique (⁶⁹). Entre 1885 et 1890, cette pratique de décomposition d'une matrice à sa forme canonique s'enrichit par un tissage complexe que manifeste une multiplicité de références à des travaux contemporains de Kronecker, Jordan, Weierstrass ou Study. La publication de 1890 sur la théorie des formes manifeste la maturité d'une pratique donnant un caractère opératoire à la représentation imagée des matrices et permettant une nouvelle approche du problème central de la théorie de Frobenius, la caractérisation des classes d'équivalence des formes bilinéaires. Dans le contexte du développement de la théorie des systèmes hypercomplexes, cette identification entre matrices et formes bilinéaires jouera un rôle important dans l'adoption, en Allemagne, de l'usage du terme matrice (⁷⁰). Celui-ci se répand notamment dans les recensions du *Jahrbuch* y compris à propos de travaux d'auteurs, comme Kronecker, qui n'emploient pourtant pas ce terme. Dans le cadre du calcul symbolique des formes de Frobenius par lequel, pour reprendre l'expression de Sylvester, « une matrice se fait dérober ses dimensions spatiales et représentée comme une somme linéaire » (⁷¹), les matrices sont cependant notées par des symboles alphabétiques. L'usage limité de la représentation matricielle manifeste la faible postérité de la pratique de décomposition de Weyr qui se heurte en effet à une structuration théorique donnant un caractère primordial aux calculs d'invariants et un rôle secondaire aux méthodes de réductions à des formes canoniques (⁷²), structuration rendue classique par des auteurs comme Frobenius ou Alfred Clebsch et popularisée par de nombreux traités publiés au tournant du siècle comme ceux Louis Sauvage en France ou Maxime Bôcher aux Etats-Unis (⁷³).

⁶⁸ Il est nécessaire de recourir à la forme canonique de Jordan ou à la forme canonique rationnelle des matrices.

⁶⁹ En termes contemporains, Weyr introduit la suite des dimensions des sous espaces caractéristiques d'un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension finie. Cette approche deviendra, dans les années 1930, la méthode la plus répandue de démonstration du théorème de Jordan de décomposition matricielle, voir Brechenmacher, 2006a. Contrairement aux approches basées sur les déterminants, la méthode de Weyr est valable pour les problèmes d'analyse fonctionnelle qui nécessitent le recours à la dimension infinie et connaîtra une nouvelle postérité après la seconde guerre, voir Dieudonné, 1946 et Novotný, 1953.

⁷⁰ Les nombreuses publications de langue anglaise sur les quaternions et algèbres qui font suite aux travaux de Sylvester sont aussi pour beaucoup dans la diffusion du terme matrice dont on observe un pic entre 1885 et 1895 et qui fait à cette époque l'objet de publications dans diverses langues comme le hollandais (van Wettum, 1891) ou le japonais (Kummamoto, 1888)

⁷¹ Sylvester, 1884, p. 220.

⁷² Cette tension se manifeste d'ailleurs entre les travaux de Boole et de Cayley dès les origines de la théorie des invariants (1840-1850), voir Wolfson, 2008.

⁷³ Les rares auteurs qui adoptent la décomposition matricielle de Weyr sont eux-mêmes en périphéries comme l'illustre l'exemple de Molien, 1893. Lorsque le caractère fondateur des travaux sur les représentations de groupes de ce dernier sera reconnu a posteriori par Frobenius en 1905, les pratiques matricielles seront reformulées dans le cadre du calcul

III. Pratiques, réseaux, interconnexions.

Les jeux d'échelles pratiqués dans la partie précédente montrent que l'universalité prêtée à la terminologie matrice dans les années 1930 manifeste, en parallèle de l'usage très répandu des matrices dans la théorie des formes, des rencontres d'autres pratiques développées au sein de réseaux plus restreints et qui s'avèrent indissociables d'aspects sociaux et culturels que nous aimerions à présent questionner. Nous avons vu que les traités sur la « théorie des matrices » proposent des écritures de l'histoire qui présentent des travaux distincts du passé comme participant d'une même théorie sous jacente et se focalisent sur des quêtes d'origines des notions et structures de l'algèbre linéaire. La prise en compte de la dimension sociale des travaux de Cayley substituée à ces problématiques d'origines et de diffusion des questions d'identités permettant d'envisager des circulations complexes qui ne se réduisent pas à des relations entre individus, aires géographiques ou cadres nationaux. Les approches historiques rétrospectives sont elles mêmes fondées sur un caractère élémentaire conféré aux matrices au sein d'une organisation théorique qui se met en place à partir de 1890 mais qui ne fait l'objet d'une culture commune partagée sur un plan international qu'à partir des années trente lorsque l'algèbre linéaire se constitue comme une discipline. L'universalité prêtée à des notions élémentaires de cette discipline comme les matrices leur confère un caractère naturel qui semble dénué d'histoire⁽⁷⁴⁾.

Elémentaire, la représentation matricielle a souvent été utilisée au sein des discours historiques comme une « notation » inoffensive. Il ne s'agit pourtant pas là d'un simple anachronisme de notation. Par exemple, le recours à une formulation matricielle pour décrire les travaux d'Elie Cartan sur les groupes continus et systèmes hypercomplexes introduit dans le discours historique des pratiques s'appuyant sur le caractère universel prêté à des notions absentes du texte original et qui masquent l'identité de pratiques spécifiques d'une part, de la multiplicité des réseaux dans lesquels s'inscrit l'auteur d'autre part⁽⁷⁵⁾. Si Cartan, en effet, est familier de travaux de réseaux dans lesquels l'usage du terme matrice s'intensifie, cet acteur veille toujours à distinguer les différentes notions et théories sur lesquelles il travaille et n'adopte l'usage unificateur des matrices qu'à l'occasion de sa collaboration avec Study pour l'encyclopédie mathématique franco-allemande. L'anachronisme terminologique implique des résonances conceptuelles qui « convoquent aussi implicitement des situations sociales inadéquates » et se double ainsi d'un « anachronisme sociologique »⁽⁷⁶⁾. Les conséquences en sont nombreuses. Les identités de réseaux jouant des rôles essentiels dans l'histoire de l'algèbre, comme celui de l'« équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes » sont passées inaperçues et, avec elles, des travaux, comme ceux de Weyr, ont basculé dans l'obscurité. Des approches d'histoire sociale fournissent des résultats qu'une dichotomie abusive pourrait amener à considérer comme propres aux approches conceptuelles en tant qu'elles concernent l'identification du temps de la création mathématique individuelle ou collective. Questionner les identités de pratiques qui ne relèvent pas simplement d'activités de

symbolique des formes et des invariants. Le mémoire de Weyr lui-même fera l'objet d'une communication de Frobenius dans laquelle la composition des compartiments de matrices est réduite à des invariants polynomiaux (Frobenius, 1911). La référence que fait Frobenius à Weyr est essentiellement due à l'adoption de la pratique des matrices scalaires pour des factorisations polynomiales dans la résolution de problèmes relatifs à la détermination de l'ensemble des matrices commutant à une matrice donnée, problème traité par Weyr à la suite des travaux de Sylvester sur les nonions.

⁷⁴ A propos de ce caractère naturel, voir notamment les commentaires de Châtelet lors de l'édition du tome 5 des Œuvres de Poincaré paru en 1950 et proposant une traduction systématique du texte original dans le vocabulaire des matrices.

⁷⁵ D'autres exemples des implicites liés à la notation matricielle et une discussion détaillée de leurs implications sur l'historiographie de l'algèbre linéaire sont proposés dans Brechenmacher, 2007.

⁷⁶ Goldstein, 2004, p 39.

recherche de nouveaux résultats ou de développements et diffusions permet en effet de problématiser la question de l'innovation mathématique à partir de laquelle est opérée la sélection rétrospective de quelques textes « fondateurs » et qui s'avère indissociable de la dimension sociale des échanges scientifiques et de la valorisation collective des résultats (⁷⁷). Envisager les héritages, permanences et évolutions de pratiques en termes de processus collectifs de fabrication et d'assimilation des savoirs amène à problématiser la question de l'identité de l'algèbre elle-même sur une période qui précède l'adoption d'identités théoriques ou structurelles.

1. Centres et périphéries.

Comme le manifestent les exemples de Smith, Sylvester ou Weyr, chaque auteur est susceptible de présenter des travaux dont les identités complexes reflètent les aspects culturels de réseaux multiples. Il faut à présent nous interroger sur la position périphérique de ces trois auteurs par rapport à la production mathématique de l'époque. Le fait que, contrairement à ses premiers travaux sur les matrices publiés en langue française à Paris ou en langue tchèque à Prague, Weyr publie son mémoire de synthèse en langue allemande et dans le premier numéro d'une revue éditée à Vienne, induit des questionnements quant aux rôles spécifiques que sont susceptibles de jouer des périphéries dans la construction de cultures communes en mathématiques. Ces rôles peuvent d'ailleurs participer d'une stratégie de construction de communautés mathématiques. Ainsi, Weyr, après des études à Göttingen et une participation à la Société Mathématique de France dès 1873, s'implique dans le développement du milieu académique pragois avec, notamment, la création d'une société savante et sa revue de langue tchèque. De telles ambitions semblent nécessiter un positionnement par rapport aux centres de la production mathématiques. Comme le manifeste sa publication de langue allemande de 1890, la problématique de l'universalité de l'algèbre, en tant que fait social propre au milieu académique britannique, ne se transmet pas chez Weyr qui rattache explicitement la « généralité » de sa décomposition matricielle à des idéaux qu'il prête à des auteurs du centre de Berlin comme Weierstrass, Kronecker ou Frobenius.

Le développement d'une première école de recherche américaine à la fin du XIX^e siècle donne un exemple de construction d'une culture commune à partir de pratiques culturelles propres à des réseaux distincts dans le cadre d'une dynamique entre centres et périphéries. Comme nous l'avons vu, depuis les premiers auteurs de l'école algébrique anglaise, des idéaux d'universalité ont été associés à l'algèbre dans le cadre d'entreprises de constitutions de communautés mathématiques et d'appropriations de savoirs développés dans les centres d'Europe continentale. A partir du développement de la théorie des algèbres dans les années 1880 et la reconnaissance par des auteurs continentaux, manifeste dans l'écriture de l'« histoire de Cayley comme fondateur », de l'apport d'auteurs anglo-américain, le terme « algèbre universelle » va progressivement renvoyer à l'étude générale des structures algébriques en relation avec l'analyse du langage mathématique proposée par la logique (⁷⁸). Dans le contexte de la constitution d'une communauté mathématique américaine, les matrices acquièrent un statut universel qui ne s'identifie cependant pas à l'« algèbre

⁷⁷ Goldstein 1995, p. 16.

⁷⁸ Au sujet des relations entre histoire de l'algèbre et développement de la théorie des modèles, originellement développée pour étudier les rapports entre langage et structures algébriques mais qui, progressivement s'orientera sur la recherche des rapports cachés entre différentes disciplines mathématiques, le plus souvent algébriques, voir Sinaceur, 1991 et Lascar, 1998.

universelle » développée par Sylvester à Hopkins et Oxford ou aux échos suscités par ces publications auprès d'auteurs comme Alfred Whitehead (⁷⁹).

Dans la dernière décennie du XIX^e siècle, lorsque de premières entrées publiées sur le territoire américain apparaissent dans le *Jahrbuch*, ces publications manifestent l'élaboration de pratiques spécifiques permettant l'appropriation de travaux propres à des réseaux variés envisagés comme participant d'une unique méthode matricielle dont la constitution progressive s'appuie sur la diversité de ces appropriations. Karen Parshall et David Rowe ont mis en évidence le rôle de l'« école de Chicago » dans la constitution d'une communauté mathématique américaine, les orientations « algébrique », « abstraite » et « structurale » attribuées à cette école caractérisent une méthodologie commune d'identification des objets mathématiques visant l'obtention de nouveaux résultats comme généralisations de théorèmes existants (⁸⁰). Ainsi, Dickson débute sa carrière par une entreprise de généralisation systématique des travaux de Jordan sur les groupes impliquant l'identification d'un objet, le corps fini, et son étude abstraite. Ces généralisations manifestent une appropriation, dans un cadre matriciel, des pratiques de réductions canoniques des substitutions linéaires du géomètre parisien auxquelles se mêlent des pratiques de calculs d'invariants de la théorie des formes ou de procédés d'itérations développés par William Burnside. Un autre exemple est celui de Veblen qui confère aux matrices un statut de notion centrale dans ses travaux de topologie et se réfère notamment aux « matrices de Poincaré » en hommage aux travaux d'un auteur n'employant pas ce terme (⁸¹). Une importance particulière est donnée à la classification des objets –

⁷⁹ Voir Gibbs 1886. Taber 1890. Chapman 1891. Mac Farlan 1891. Metzler 1892. Au sujet du thème de l'« algèbre universelle » et de sa relation, chez Whitehead avec la fondation de la géométrie dans le cadre du projet de Grassmann visant à libérer la pensée de toute intuition géométrique, voir Gandon, 2004.

Nous avons évoqué le rôle que joue l'usage du terme matrice comme pratique académique fondatrice de la présence de mathématiques au sein d'institutions britanniques puis américaines, comme l'université John Hopkins à la constitution de laquelle participe Sylvester. Les matrices sont également très présentes dès la création par ce même acteur du premier journal américain de dimension internationale. Une ambition d'universalité s'affirme également dans les travaux de B. Peirce à Harvard qui introduisent des concepts pour la détermination systématique de tables de multiplications d'« algèbres associatives linéaires » et épousent la philosophie de Hamilton selon laquelle des interprétations géométriques ou mécaniques ne sont pas des prérequis imposés au développement d'algèbres de dimensions arbitraires. En 1891, l'édition du traité *Linear Associative Algebra* que réalise l'un de ses fils, Charles Sanders Peirce, manifeste plus généralement un idéal d'universalité des mathématiques. Celles-ci sont envisagées comme vouées à s'étendre bien au-delà du domaine des quantités, et jusqu'à la sphère morale car, en une généralisation de la philosophie de Boole, à toute « forme matérielle » correspond une « forme de pensée ». Cette philosophie, selon laquelle la pensée humaine s'avère aussi large que l'univers physique dans laquelle elle s'exerce, accorde un rôle essentiel aux « formes externes » de la pensée comme les « symboles » de l'algèbre envisagés comme un langage tandis que les méthodes d'emploi de ces symboles constituent un « art » et leurs interprétations des « applications scientifiques ». Le traité de Peirce développe ainsi un alphabet, un vocabulaire, une grammaire et vise la « classification naturelle » des espèces d'algèbres linéaires. Lors de l'édition de ce traité au sein de l'*American Journal of Mathematics*, C. S. Peirce ajoute des notes et commentaires critiques exposant ses propres recherches sur la « logique des relations » par l'intermédiaire de l'introduction de la notation matricielle pour représenter des relations duales en logique. Des auteurs engagés dans le développement des mathématiques dans les universités américaines, comme Taber 1889 de l'université de Clark, verront là l'acte fondateur de la reconnaissance du caractère élémentaire des matrices au sein de la théorie des algèbres associatives.

⁸⁰ Parshall, 2004 et Fenster, 1997 & 1998. Le premier résultat fondamental de Moore, 1892 donne un exemple de cette méthodologie. Celui-ci définit une nouvelle classe de groupes finis simples par une généralisation des travaux de Felix Klein consistant à passer de la considération de corps particuliers au « cas général » des corps finis à q^n éléments et impliquant l'identification d'un objet, le corps fini, et son étude abstraite. La classification de Moore est basée sur l'énoncé du théorème fondamental des corps finis. Le cardinal d'un corps fini est nécessairement de la forme $q = p^n$, p premier. Pour tout q de cette forme, il existe un corps fini de cardinal q unique à isomorphisme près.

⁸¹ Voir Veblen 1923, p. iii. pour le statut central conféré aux « matrices de Poincaré » dans des travaux de topologie en hommage aux travaux d'un auteur n'employant pas ce terme (actes d'un colloque organisé à Harvard en 1916 par

comme les matrices « symétriques » ou « hermitiennes » - mais aussi à la recherche de théories unificatrices sous jacentes à des « théories parallèles », impliquant un « déplacement du formalisme par la généralisation et l'abstraction »⁽⁸²⁾. Après la théorie des groupes, des formes, des algèbres viennent le tour de l'arithmétique, de la théorie des fonctions, des équations intégrales etc., tous sujets dans lesquels l'unique terminologie « matrice » vient désigner des notions comme celles de « forme bilinéaire », « forme quadratique », « substitution », « système », « tableau » etc., que les publications du continent européen distinguent les unes des autres⁽⁸³⁾.

2. Pratiques et réseaux.

Au début du XX^e siècle, le développement de pratiques de décompositions de formes imagées se fait essentiellement en périphéries d'une théorie prédominante des formes et des invariants. Malgré les similitudes visuelles que ces décompositions peuvent présenter, celles-ci renvoient à une diversité de pratiques qui, le plus souvent ne sont pas identifiées de manière réflexive à des méthodes s'insérant dans des cadres théoriques spécifiques et, pour cette raison, sont indissociables des aspects culturels des réseaux auxquels elles s'identifient. S'il n'est pas possible de proposer ici une description exhaustive de ces réseaux, il faut remarquer que ceux-ci ne font pas tous usages du terme matrice comme dans le cas des ramifications du corpus centré sur le personnage d'Hermite, dont les entrées sont le plus souvent publiées en France et manifestent une forte proportion de travaux relatifs à l'arithmétique et la théorie des nombres. Ce réseau présente l'élaboration de pratiques de « calculs des tableaux », outil et mode de représentation très polysémique, employé au sein de sujets divers, mais qui relève d'une identité culturelle et de l'inscription dans une histoire longue se référant à la « notation des tableaux de Cauchy ». L'usage du terme « tableau » implique un faible écho du terme matrice chez les auteurs de langue française avant les années 1930, au contraire du terme « mineur » d'un emploi fréquent⁽⁸⁴⁾. Pour les auteurs de ce réseau, parmi lesquels Jordan, Poincaré, Hermann Minkowski, ou Albert Châtelet, le calcul des tableaux se rapporte à une démarche très générale de classification et de réduction d'un problème complexe - représenté par un tableau - à une suite de problèmes simples représentée par une décomposition du tableau initial à sa « forme canonique ». Les pratiques spécifiques donnant un caractère opératoire aux tableaux manifestent des aspects culturels propres à ce réseau, comme une philosophie interne de la généralité associée à un idéal de simplicité⁽⁸⁵⁾, mais aussi des savoirs tacites qui ne seront reconnus comme pouvant faire l'objet d'une explicitation théorique que dans la première décennie du XX^e siècle. Ces aspects culturels sont très différents de l'idée de mouvement associée à la représentation matricielle par des auteurs de langue anglaise en référence aux lois de mouvements algébriques de Sylvester ou au rôle que jouent les quaternions en physique. Nous avons vu également la dimension sociale que prend, pour le réseau de Chicago, un statut universel conféré aux matrices. Dans d'autres réseaux, la constitution

l'American Mathematical Society). Les matrices sont particulièrement présentes dans les actes des colloques américains depuis leur fondation en 1896 qui coïncide avec une dimension « nationale » donnée à l'A.M.S. en 1894. Ces colloques, constitués de cours donnés par des spécialistes, ont pour objectif de répandre au niveau national les développements les plus récents.

⁸² MacDuffee, 1940, p.v.

⁸³ Voir notamment les publications, comme celle de Phillips et Moore, 1912, qui visent explicitement à étendre l'emploi des matrices, ici en géométrie. Voir aussi Bennett, 1921.

⁸⁴ L'« étude bibliographique » de Stieltjes, 1890 sur la théorie des nombres fait un usage, exceptionnel dans ce réseau, du *t. m.* que l'auteur préfère au terme « tableau » lorsqu'il expose les travaux de Smith (forme normale de Smith d'une matrice à coefficients entiers). Il faut cependant remarquer que Stieltjes attribue le *t. m.* à Sylvester et ne fait aucune référence à Cayley.

⁸⁵ Les idéaux de simplicité de Jordan reposent notamment sur des méthodes élaborées pour la théorie des groupes, la signification du terme « simplicité » est bien peu simple en elle-même. Voir à ce sujet Brechenmacher, 2008.

de pratiques sur des formes imagées se caractérise par un idéal d'effectivité, comme dans un réseau centré sur Kronecker et dont un mémoire publié par Hensel en 1904 est bien représentatif ⁽⁸⁶⁾. Ailleurs, ces pratiques s'appuient sur la représentation géométrique de décomposition d'un espace et se revendiquent d'Hermann Grassmann ⁽⁸⁷⁾.

3. Unifications de pratiques et construction de cultures communes.

Des préoccupations propres à l'enseignement des mathématiques semblent jouer un rôle essentiel dans la rencontre, au début du XX^e siècle, de différentes pratiques culturelles. La constitution, à un niveau global, de l'universalité de la représentation matricielle manifeste en effet une dynamique de va-et-vient entre préoccupations de recherche et d'enseignement comme l'illustrent l'apparition, en France, de premiers écrits réflexifs sur le calcul des tableaux et sur les significations respectives des termes tableaux et matrices. Léon Autonne, professeur à la faculté des sciences de Lyon, publie, à partir de 1901, une série de traités d'algèbre et de géométrie algébrique. Cet acteur s'appuie sur des préliminaires consacrés à des exposés détaillés de la « théorie des matrices » afin d'exposer ses recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement. En expliquant de manière didactique comment former les « matrices partielles » d'un « tableau », les « définitions et notations », les « résultats déjà connus » qu'Autonne attribue à Weierstrass ou Frobenius et dont il considère l'acquisition nécessaire aux étudiants, forment en réalité un apport original qui organise en une synthèse cohérente des notions et méthodes extraites de réseaux distincts comme celui du calcul des tableaux, de la théorie des formes bilinéaires ou de ce qu'il désigne comme les travaux des « géomètres italiens » ⁽⁸⁸⁾. Il s'agit en effet d'obtenir une « matrice aussi simple que possible » - référence à Jordan - représentant des « formes types » (référence à Hermite) par des procédés de réduction interprétés dans le cadre géométrique (Poincaré), en relation avec un calcul symbolique (Frobenius) et des décompositions polynomiales d'invariants (Weierstrass). L'idéal de simplicité propre au réseau du calcul des tableaux évolue ; à l'ambition de généralité à laquelle il était classiquement associé s'ajoutent à présent les valeurs pédagogiques d'une représentation « simple », visuelle, « naturelle » permettant de « voir » les étapes d'une méthode de « décomposition ».

L'idée selon laquelle la maîtrise de la représentation matricielle permettrait d'assimiler plus « simplement » des « théorèmes généraux » de différentes théories est à la base des organisations didactiques de nombreux traités d'algèbre publiés à partir de 1910. Ainsi, dans l'introduction de son traité sur la théorie des groupes publié en 1916, Hans Blichfeldt encourage ses étudiants de Stanford à bénéficier des « avantages » procurés par l'« image mentale » de la « forme matricielle » pour acquérir une « pratique très avantageuse » permettant la « maîtrise rapide » des parties les plus difficiles portant sur la représentation des groupes ⁽⁸⁹⁾. Au début du siècle en France, dans un contexte d'accroissement de la population étudiante, du nombre de chaires et de laboratoires ⁽⁹⁰⁾, de jeunes enseignants chercheurs comme Autonne, de Séguier ou Châtelet prêtent aux matrices des valeurs pédagogiques présentant explicitement des ambitions d'unification du savoir mathématique

⁸⁶ Hensel, 1904, p.135.

⁸⁷ Pincherle, 1899. Volterra, 1889 & 1914. Heilinger et Toeplitz, 1906 & 1910.

⁸⁸ Nous ne pouvons qu'évoquer ici les nombreuses publications de langue Italienne qui emploient depuis le XIX^e siècle le terme matrice en géométrie algébrique. A propos des « écoles algébriques » Italiennes, voir Brigaglia, 2001, Brigaglia et Ciliberto, 2004 et Martini, 2004.

⁸⁹ Blichfeldt, 1916, p. vii. Voir aussi Cullis, 1913.

⁹⁰ Telkes, 1991, p. 451.

(⁹¹). Face à une explosion quantitative des publications et des sujets de recherches, l'ambition de reconstitution d'une unité des mathématiques est explicite, aussi bien dans les discours de nombreux savants que dans les actions menées par les sociétés mathématiques nationales et internationales (⁹²). Si de nouveaux concepts permettent de réorganiser le savoir mathématique en de vastes édifices conceptuels dans le cadre de l'essor de l'« algèbre abstraite » (⁹³), du raisonnement axiomatique (⁹⁴), des structures (⁹⁵), le rôle joué par l'enseignement dans la réorganisation du champ disciplinaire de l'algèbre dans les années 1900 à 1930 mériterait un examen plus approfondi. Ainsi, pour Châtelet, les matrices permettent de mettre en évidence un « rapprochement [...] fécond en suggestions », de mettre « le plus possible en évidence les relations mutuelles des faits et ce qui m'a paru leur véritable raison d'être », « cette notation conduit à des procédés de calcul uniques [...] et, en général, conduit au minimum de calculs » (⁹⁶). La notation des tableaux permet de faire le lien entre des théories distinctes par des méthodes efficaces (⁹⁷), simples et qui permettent généralisations et unifications. Comme le manifeste la critique émise par Picard dans son rapport sur la thèse de Châtelet (⁹⁸), à cette époque, une telle ambition ne semble cependant pas suffire à ce que l'on attend d'un mathématicien « créateur » présentant des résultats « qui lui sont propres ». L'originalité des procédés de Châtelet, que Picard désigne comme des « dessins montrant l'enchaînement des tableaux réduits dans divers exemples numériques », n'est que progressivement reconnue comme un objet d'étude légitime au sein des mathématiques.

Certaines préoccupations pédagogiques interrogent cependant directement la recherche sur des questions nouvelles. Se pose notamment la question de la possibilité de décomposer des matrices à des formes canoniques par des procédés effectifs, exigence auparavant propre à un réseau centré sur les travaux de Kronecker et qui s'associe désormais à des préoccupations pédagogiques visant l'obtention de procédés pouvant être effectivement – et non seulement théoriquement – mis en œuvre par les étudiants. L'examen des références des entrées publiées entre 1915 et 1935 dans le cadre de l'émergence de la « théorie des matrices canoniques » met en évidence la reconnaissance commune d'une origine dans un mémoire publié par Lattès en 1914 et intitulé « Sur une forme canonique nouvelle des substitutions linéaires ». La problématique de Lattès semble pourtant presque triviale. L'objet du mémoire porte sur la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, passée dans l'enseignement depuis les années 1880. Cette publication poursuit cependant une problématique pédagogique : Lattès propose en effet d'« abandonner » les calculs de déterminants et d'invariants polynomiaux, nécessitant des extractions de racines d'équations algébriques non réalisables en pratique lorsque le degré est supérieur à cinq, au profit de procédures d'itérations permettant la détermination effective d'une « forme canonique rationnelle » et, par conséquent, une procédure d'intégration des systèmes

⁹¹ Les valeurs unificatrices prêtées à la représentation matricielle manifestent des rencontres entre le réseau de Chicago et celui du « calcul des tableaux », dans le cadre d'une remise en cause de l'organisation de la théorie prédominante des formes bilinéaires et des invariants au profit de pratiques de réductions canoniques. L'importance donnée par Dickson à la notion de groupe linéaire en 1900 en hommage à Jordan est à l'origine d'une circulation rapide des travaux du mathématicien de Chicago auprès de Séguier ou Chatelet. Voir Brechenmacher, 2006a

⁹² Dhombres, 2004, p. 92.

⁹³ Mac Lane, 1975.

⁹⁴ Moore, 1995.

⁹⁵ Corry, 1996.

⁹⁶ Châtelet, 1911, p. 105.

⁹⁷ A propos du thème de l'analogie, de la polysémie et des pratiques d'écriture, voir Durand-Richard, 2008.

⁹⁸ Picard, 1911 dans Gispert, 1991, p. 409-410.

différentiels par des « dérivations successives »⁽⁹⁹⁾. L'ampleur des références au mémoire de Lattès manifeste la dimension culturelle de la réconciliation entre pratiques de réductions canoniques et procédés effectifs de calculs d'invariants, pratiques antagonistes depuis la querelle violente qui avait opposée, en 1874 Jordan et Kronecker et qui avait engagé les statuts respectifs de l'algèbre et de l'arithmétique⁽¹⁰⁰⁾.

Cette nouvelle articulation entre réductions canoniques et calculs d'invariants est fondatrice de la « théorie des matrices canoniques » qui se développe à partir de 1914 et qui regroupe des travaux élaborant des procédés rationnels de décomposition d'une matrice « en chaînes » de « matrices compagnons » d'une part⁽¹⁰¹⁾, et des procédés non rationnels de réduction à une suite de formes « canoniques classiques » appelées également « matrices de Jordan »⁽¹⁰²⁾. Au sein de cette « mathématique internationale » au sens donné à ce terme par Jean Dhombres⁽¹⁰³⁾, objet d'une coopération sans frontières et thème fréquent de communication dans les congrès, de nouvelles questions se posent et de nouvelles exigences sont formulées. On distingue par exemple entre preuve d'existence et preuve constructive, on cherche à reconnaître par une méthode effective si une chaîne de réduction peut être obtenue ou non par une suite finie d'étapes. Ces problématiques rencontrent progressivement d'autres usages du *t. m.* que nous avons déjà mentionné avec la généralisation des résultats obtenus pour des matrices à coefficients entiers aux anneaux principaux de l'algèbre abstraite⁽¹⁰⁴⁾, l'utilisation de la décomposition matricielle pour les théories des représentations de groupes abéliens⁽¹⁰⁵⁾, des modules de types finis⁽¹⁰⁶⁾, des algèbres associatives⁽¹⁰⁷⁾ ou de mécanique quantique. Ces rencontres se manifestent notamment dans les très nombreuses résolutions apportées au problème de la détermination des matrices commutant à une matrice donnée⁽¹⁰⁸⁾. La théorisation en terme de décomposition d'un espace sous l'action d'un opérateur des méthodes sous jacentes aux travaux d'Autonne ou Lattès prend une importance croissante dans les années vingt avec le développement de problématiques liées à la dimension infinie⁽¹⁰⁹⁾. Ces problématiques accélèrent la marginalisation d'invariants polynomiaux obtenus par des calculs de déterminants et donnent une nouvelle postérité aux procédés itératifs de la méthode de décomposition élaborée par Weyr⁽¹¹⁰⁾. Paradoxalement, cette postérité portée par la théorie des opérateurs annonce la fin d'un âge d'or pour la représentation matricielle. Le caractère unificateur de la théorie des matrices canoniques des années trente ne doit pas être perçu comme la manifestation d'un progrès irréversible et il n'est pas intemporel. Dans les années 1940-1950, la

⁹⁹ Par rapport aux méthodes rationnelles de réduction canonique déjà élaborées par Landsberg et Burnside, Lattès défend l'originalité de son approche par son caractère théorique qui donne à la forme rationnelle un statut de forme canonique à part entière, susceptible de refonder toute une culture commune. Le mémoire de Lattès est mis en concurrence avec un traité d'Hilton paru la même année. Hilton, 1914.

¹⁰⁰ Brechenmacher, 2008.

¹⁰¹ Kowalewski, 1916 ; Loewy, 1917 ; Krull, 1921 , Dickson, 1926 ; Polya, 1928 ; Bennett, 1931 ; Rutherford, 1932 ; Ingraham, 1933 ; Mac Duffey, 1933 ; Gantmacher, 1935 ; Cavalluci, 1937.

¹⁰² Burgess, 1916 ; Voghera, 1928 ; Aitken, 1928 ; Wellstein, 1930 ; Bell, 1930 ; Smale, 1930 ; Turnbull, 1931 ; Menge, 1932 ; Amante, 1933 ; Cherubino, 1936 ; Cramlet, 1938.

¹⁰³ Dhombres, 2004, p. 106

¹⁰⁴ Wedderburn, 1931 ; Mac Duffey, 1933 ; Ingraham et Wolf, 1937.

¹⁰⁵ Châtelet, 1922, 1923 ; de Séguier, 1925.

¹⁰⁶ Krull, 1926 ; Van der Waerden, 1931.

¹⁰⁷ Dickson, 1926.

¹⁰⁸ Kravčuk, 1924 ; Shoda, 1929 ; Bell, 1930 ; Rutherford, 1932 ; Williamson, 1934 ; Hopkins, 1934.

¹⁰⁹ Stone, 1932. Banach, 1932. Thomas, 1931. Gomes, 1933. Cooke, 1933. Schmidt, 1935., Levi-Civita, 1928. Davis, 1936.

¹¹⁰ La thèse de Krull, publiée en 1921, est le premier traité consacré à la décomposition rationnelle des matrices. Voir aussi Ingraham, 1932, p. 814.

tresse est démantelée et certaines notions qui participaient d'une même théorie en 1930 seront à nouveau perçues comme distinctes (¹¹¹).

Conclusion.

Dans la période de l'entre-deux guerres, le terme « matrice » investit des titres de travaux publiés dans toutes les langues et toutes les rubriques de classification. Si des méthodes d'analyse quantitative mettent en évidence le rôle joué par les théories quantiques comme moteur d'internationalisation et de diversification des usages de cette terminologie, cette dynamique d'universalité se nourrit de phénomènes multiples. En effet, si les méthodes de la mécanique des matrices s'appuient sur des décompositions de formes imagées, la dimension globale qu'acquiert de telles méthodes est le résultat de rencontre entre des pratiques diverses élaborées localement et dont les identités relèvent de réseaux complexes mêlant cadres nationaux, aires géographiques, sujets spécifiques, institutions etc. A la différence de la description comme d'une sorte de marche vers l'abstraction souvent proposée de la réorganisation du savoir mathématique que manifeste l'« algèbre moderne », nous avons vu que la méthode de décomposition matricielle réalise une cristallisation de pratiques opératoires renvoyant à des contextes variés et qui, sur le temps long, forment le caractère opératoire d'une forme de représentation. Cette construction d'une culture mathématique commune concerne autant les aspects techniques de ces pratiques que les identités sociales des réseaux qui leurs sont associés, elle s'accompagne de l'appropriation d'une histoire longue par laquelle des travaux distincts dans le passé sont présentés comme participant d'une même théorie sous jacente prétendant de ce fait à un statut « universel ». Démêler la tresse que forme cette théorie unificatrice permet d'enrichir l'histoire de l'algèbre linéaire en ne se focalisant pas sur la problématique de l'émergence de structures comme les anneaux ou modules mais en posant la question des communications de pratiques culturelles qui accompagnent les restructurations du champ des mathématiques et de l'histoire des mathématiques. En effet, avant qu'un cadre général comme celui de l'algèbre linéaire permette d'envisager des structures sous tendant les pratiques algébriques, les identités de telles pratiques ne portent le plus souvent pas de significations théoriques mais manifestent des aspects culturels comme des idéaux, savoirs tacites et philosophies internes propres à des réseaux. L'étude de la technicité même de ces pratiques permet ainsi d'interroger les modalités d'appropriation et de transmission de faits culturels.

L'adoption à un niveau local d'une même terminologie de matrice pour désigner des notions auparavant distinctes est un premier moteur d'universalité. Ces adoptions s'avèrent la conséquence de différents faits culturels propres à des contextes sociaux et institutionnels comme des idéaux d'universalité mais aussi des valeurs pédagogiques ou des qualificatifs d'abstraction. Des rencontres entre pratiques et réseaux impliquent des évolutions du champs des significations, l'idéal de simplicité, indissociable d'une philosophie de généralité, propre aux pratiques de réductions des tableaux s'enrichissant de valeurs pédagogiques et s'articulant avec des objectifs d'unifications par l'abstraction propres au centre de Göttingen ou aux idéaux d'universalités prêtées aux matrices par l'école de Chicago. Ces rencontres elles mêmes manifestent des phénomènes complexes d'universalité. La reconnaissance commune des travaux fondateurs de Jordan sur les groupes s'avère

¹¹¹ On distingue notamment entre l'algèbre linéaire en dimension finie et la théorie des opérateurs, entre ce qui tient d'une approche arithmétique valable dans anneau principal (théorie arithmétique des invariants de similitudes) et ce qui tient d'une approche algébrique dans un corps algébriquement clos (décomposition de Jordan d'un endomorphisme), entre la géométrie vectorielle (décomposition en sous espaces caractéristiques) et la géométrie euclidienne (matrices orthogonales).

ainsi à l'origine d'une intersection des pratiques du réseau du calcul des tableaux et de celles de l'école de Chicago avant la première guerre ; en 1932, les exposés d'Emmy Noether et Helmut Hasse au congrès de Zürich signalent la construction d'une « algèbre moderne » se reconnaissant rétrospectivement des racines aux Etats-Unis et en Allemagne et mettent en évidence une intensification des relations entre auteurs allemands et américains dans l'entre deux guerres (¹¹²). Certains aspects culturels propres à certaines pratiques et certains réseaux, acquièrent une dimension globale tandis que d'autres disparaissent et d'autres encore, à l'origine distincts les uns des autres et, parfois même en opposition, s'entremêlent pour donner naissance à de nouvelles modalités du savoir mathématique. Si la réorganisation du champ disciplinaire de l'algèbre et l'adoption de la représentation matricielle comme universelle manifestent la constitution d'une culture commune à un niveau international, cette unification n'implique pas une uniformisation des usages du terme « matrice ». Au contraire, des différences d'usages prolifèrent à mesure que les anciens édifices comme les théories des formes et des déterminants s'effondrent et permettent l'introduction des matrices dans les différentes strates de l'activité mathématique. A partir des années 1930 on trouve ainsi des publications relatives aux matrices pour des problématiques relevant de préoccupations d'enseignement comme de la recherche la plus avancée (¹¹³), les premières suscitant des publications dans toutes les langues et notamment les moins représentées comme le japonais ou le norvégien.

Si des savants comme Cartan, Poincaré ou Hilbert, qui se situent dans des centres de productions mathématiques à la croisée de différents réseaux, interviennent peu dans le corpus fourni par notre étude quantitative, des acteurs évoluant en périphéries jouent des rôles importants dans l'adoption d'une terminologie prétendant à l'universalité et appuyant des démarches d'appropriations de connaissances mathématiques, de constructions de nouveaux centres, comme celui de Chicago, de nouvelles communautés, comme, en France, celle des enseignants-chercheurs, mais aussi d'institutions internationales. L'adoption d'une terminologie commune doit être rattaché à l'idéal d'internationalisme scientifique du début du XX^e siècle qui porte l'ambition de la constitution d'un

¹¹² La parution, en 1927, d'une version révisée en langue allemande d'un traité de Dickson sur les algèbres associatives et la recension que fait Hasse de cette publication illustrent les influences complexes et réciproques qui amènent de nouvelles lectures de travaux publiés aux Etats-Unis et que Noether, Brauer, Hasse ou Artin réinterprètent dans le cadre des théories des entiers algébriques, des idéaux et anneaux, des représentations de groupes ou des corps de nombres p -adiques. Cette circulation des textes est à l'origine d'unifications entre approches auparavant différentes. Ainsi Noether fusionne, en 1929, les théories des représentations et des algèbres puis développe des relations entre algèbres non commutatives, algèbres commutatives et théorie des nombres.

Fenster et Schwermer, 2007 ont décrit la complexité de ces relations par l'étude de la correspondance de deux acteurs dans le cadre de l'un des principaux résultats d'algèbre linéaire de la période, le théorème selon lequel toute algèbre de degré fini à division normale sur un corps de nombres algébriques est cyclique. Voir notamment la manière dont l'exposé de Hasse sur le théorème principal de structure des algèbres semi-simple sur des corps de nombres algébriques attribue des éléments algébriques de sa démonstration à Noether et Brauer et des énoncés de cas particuliers à Dickson, Wedderburn et Albert. Le développement des communications entre « écoles de recherches » a été mis en relation avec les développements des recherches sur les structures sous tendant les objets algébriques dans Parshall, 2004. Voir aussi les exemples des développements de Noether, Brauer, Hasse et Artin relatifs à la théorie de structure des algèbres de Wedderburn ou les travaux de Jacobson sur les radicaux des anneaux de dimension infinie.

¹¹³ Ainsi Ilovici publie-t-il sur les matrices en 1927 dans les *Nouvelles annales* à propos de questions élémentaires tandis que, en 1926, Léon Brillouin publie un article intitulé « Les spectres de rotation, dans la nouvelle mécanique des quanta, avec le calcul des matrices » où les problématiques de réductions canoniques sont liées aux développements récents d'Heisenberg, Born et Jordan. En France, avant le développement de la théorie quantique, à la suite des nombreuses publications d'Autonne dans les *Nouvelles annales*, on utilise le terme matrices davantage dans des publications à visées d'enseignement. Voir, par exemple Godeaux, 1914 ou Byck, 1925. Cette tendance s'inverse à partir de 1926.

langage universel ainsi que d'une standardisation des notations et du vocabulaire mathématiques (¹¹⁴). Les pratiques locales élaborées en périphéries pour des appropriations de travaux de divers réseaux semblent jouer un rôle particulier dans la constitution d'une communauté mathématique internationale, comme le manifeste l'appropriation rapide de l'usage universel des matrices impulsé par des auteurs américains par des publications de langues japonaise (¹¹⁵), russe ou des acteurs publiant en langues française et allemande en périphérie des centres de Paris, Berlin ou Göttingen. C'est notamment en périphérie d'une théorie prédominante des formes et des invariants que se développent des pratiques opératoires sur des représentations imagées. Dans la théorie des formes bilinéaires, les formes canoniques sont obtenues, non par des pratiques de décompositions mais, *a posteriori*, par la recomposition d'une forme dont on a au préalable calculé les invariants (¹¹⁶). Au contraire du caractère statique de cette recomposition, la décomposition matricielle est un calcul qui met la représentation imagée en mouvement. Si nous avons vu des origines locales de ce caractère dynamique dans l'« algèbre universelle » de Sylvester, l'histoire de ces phénomènes apparaît particulièrement complexe. Ainsi, une idée de mouvement se manifeste dans les décompositions successives de problèmes complexes en étapes simples, comme autant de modifications d'états de la forme matricielle, à la manière des relations qu'entretiennent les images d'une bande dessinée, les plans d'un film, à un récit complexe, ou les tâches élémentaires d'une chaîne de montage à un produit fini. On pourrait encore citer le cubisme et les pratiques de décomposition du mouvement qui accompagnent le développement de la photographie pour évoquer une multitude de phénomènes dont nous n'avons qu'effleuré les dimensions sociales et culturelles et qui forment le contexte historique complexe dans lequel les matrices acquièrent le caractère universel d'une méthode de décomposition imagée.

¹¹⁴ Rasmussen, 1995.

¹¹⁵ Le cas des publications de langue japonaises ou russes justifieraient des études spécifiques. Voir aussi les travaux de langue anglaise publiés au Japon et leur usage des matrices dans la « théorie des déplacements », Morinaga, 1934 ; Nakano, 1934 ; Kawaguchi, 1934.

¹¹⁶ A propos de ce caractère statique, voir notamment l'exposé en français de la théorie de Frobenius par Sauvage, 1891 commenté dans Brechenmacher, 2006a.

ANNEXE 1.

UNE ETUDE QUANTITATIVE SUR LA TERMINOLOGIE MATRICE.

1. A propos de l'universalité du terme « matrice » dans les mathématiques contemporaines.

Afin d'expliciter notre questionnement à destination de lecteurs éventuellement plus familiers de l'universalité prêtée à d'autres objets mathématiques tels que les « nombres », « cercles » ou « équations », introduisons notre sujet par quelques remarques générales quant à l'emploi du terme matrice (*t. m.*) au sein de mathématiques qui nous sont contemporaines. Un examen des publications d'enseignement et de recherche met en évidence une diversité d'usages d'un terme que l'on emploie afin d'identifier non seulement des sujets d'études, des objets ou outils de classifications et de « représentations », mais aussi un « calcul ». Les auteurs de manuels font référence à une « notion », introduite par une définition, objet d'une « théorie des matrices », elle-même insérée dans une discipline, l'algèbre linéaire. Présentée comme l'une des briques élémentaires de l'algèbre linéaire, cette notion se trouve insérée à la base de curricula universitaires, à un niveau international et dépassant le champ des mathématiques (physique, biologie, économie etc.). L'articulation entre la notation par une lettre, envisagée comme un élément - un nombre - d'une structure algébrique et la notation par un tableau, composé lui-même de tels éléments ⁽¹⁾, manifeste une dualité des matrices. A la fois élément et élément-multiple, celles-ci permettent des dialectiques entre « concret » et « abstrait », mathématiques « pures » et « appliquées ». Le thème de l'« application » rejoint ici celui de la « représentation », l'usage des matrices permettant de mettre en évidence la capacité de l'algèbre linéaire à s'« appliquer » dans une diversité de domaines dont les objets, distincts, sont susceptibles d'une même « représentation matricielle » : applications linéaires, formes quadratiques, groupes discrets et de Lie, graphes, systèmes d'équations différentielles etc. D'un point de vue didactique, les matrices sont particulièrement investies dans l'acquisition de connaissances relatives aux structures. En tant qu'outil de « notation » par un tableau ou par un symbole alphabétique, les matrices permettent non seulement d'illustrer la généralisation des concepts de nombre et de polynôme que permettent des structures algébriques comme les « algèbres associatives », mais aussi la généralisation de méthodes de calculs, le « calcul des matrices » articulant opérations, relations d'équivalences arithmétiques et méthodes polynomiales associées à des calculs d'invariants comme les déterminants.

Au sein des objets et méthodes des mathématiques « pures » et « appliquées », le *t. m.* prétend à une certaine universalité qui ne semble pas indépendante du statut « élémentaire » conféré à ce terme. Afin de préciser ce qualificatif d'universalité, quittons à présent le cadre des considérations générales pour adopter des méthodes quantitatives, rendues possibles par la constitution de la base de données *Zentralblatt Math (ZM)* ⁽²⁾. La requête « matrice » introduite dans le moteur de recherche de la base permet des enquêtes quant à l'emploi de ce terme dans une ou plusieurs des catégories

¹ Cet usage ne se réduit pas à la donnée de tableaux de nombres réels mais porte plus généralement sur les éléments d'un anneau commutatif unitaire et donc sur des objets divers comme des polynômes ou... des matrices. Nous verrons plus loin que cette mise en abîme des matrices est cruciale pour la constitution des méthodes de décompositions matricielles.

² Zentralblatt MATH est édité par la *Société Mathématique Européenne*, le *Fachinformationszentrum* de Karlsruhe, et la *Heidelberger Akademie der Wissenschaften*. La base de données, publiée en coopération avec Springer-Verlag (<http://www.zentralblatt-math.org/>), recense plus de 2,6 millions d'entrées bibliographiques depuis 1868 et son ambition est de couvrir la totalité du spectre des mathématiques pures et appliquées.

de référencement ⁽³⁾. Sur un intervalle de cinq années, de 1996 à 2000, les occurrences du *t.m.* interviennent dans 7% des entrées référencées. Une comparaison par rapport aux occurrences d'autres termes mathématiques permet d'interroger un premier critère d'universalité, celui de la fréquence d'utilisation. L'usage du *t.m.* apparaît ainsi plus fréquent que celui des termes « cercle » (0,01%), « anneau » (2,4%) ou vecteur (5,2%); moins fréquent que celui d'« espace » (16%), de « fonction » (15,5 %), de nombre (12,8%), d'« ensemble » (12,7%) et dans les mêmes proportions que « point » (8,2%), « groupe » (8%), « corps » (8%), « structure » (7,7%) ou « variable » (6,4%).

La classification par sujets mathématiques des entrées bibliographiques apporte un deuxième type d'informations ⁽⁴⁾. Si des occurrences du *t. m.* interviennent dans chacune des rubriques de la classification, ce constat peut être affiné par une étude statistique sur la population des entrées bibliographiques ⁽⁵⁾. Deux fréquences sortent nettement du lot, la première est, sans surprise, associée à la rubrique « algèbre linéaire et multilinéaire ; théorie des matrices » (76,7 %), la seconde est une rubrique d'analyse, « suites, séries, sommabilité » (20,2%). Parmi les quatorze rubriques présentant une fréquence supérieure au troisième quartile de la série statistique (8,5 %), on trouve des sujets aussi divers que « combinatoires » (13,1 %), « anneaux associatifs et algèbres » (13,2%), « théorie quantique » (11,9%), « théorie des opérateurs » (9,8%), « statistiques » (8,7%). Dans les trente et une valeurs présentes dans l'intervalle interquartile ([3,7% ; 8,5%]), la rubrique « optique, théorie électromagnétique » (7%) côtoie « théorie des groupes et généralisations » (8,2%), « analyse harmonique abstraite » (6,5%), « informations et communications, circuits » (7,5%) ou encore « géophysique » (3,8 %). Cette enquête quantitative permet de préciser le qualificatif d'universalité prêté au *t.m.* dans les mathématiques qui nous sont contemporaines. D'une part, ce terme fait l'objet de la seule théorie explicitement référencée dans la rubrique « algèbre linéaire». D'autre part, les entrées de cette rubrique ne représentent que 12,5% de l'ensemble des entrées obtenues, le *t.m.* étant essentiellement employé au sein d'autres rubriques, toutes étant représentées et l'intervalle interquartile présentant un éventail de sujets très divers, de mathématiques dites pures comme de mathématiques dites appliquées.

2. Périodisation et étude quantitative.

Le premier problème qui se pose est celui des critères retenus pour la sélection d'un corpus et d'une périodisation. Si, à première vue, le moteur de la base *ZM* permet de lancer des recherches à partir de 1868, la démarche s'avère délicate à mettre en œuvre pour des enquêtes historiques. En effet, les entrées référencées sont, hormis les plus récentes, le résultat d'un projet de numérisation. Parmi les journaux numérisés, le *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* fondé en 1931 est à l'origine du nom de la base de données qui, depuis 2003, a également incorporé le contenu du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, journal publié de 1868 à 1942, et dont l'objectif était de dresser un « annuaire des progrès des mathématiques » en proposant un référencement des

³ Les requêtes portent en réalité sur les racines de ces termes afin d'en obtenir les occurrences dans toutes les langues référencées par *ZM* (par exemple, *matr**). Nous reviendrons plus loin sur les limites de ce type d'analyse quantitative mais précisons d'emblée que ce relevé ne porte pas sur la totalité des publications employant le *t.m.* mais sur les occurrences de ce terme dans un titre, un résumé, une recension ou des citations. Pour cette période, l'occurrence ne peut intervenir dans la classification car celle-ci est insérée sous forme codée.

⁴ <http://math-doc.ujf-grenoble.fr/MS2000/>

⁵ En prenant pour modalité la rubrique de classification et pour fréquence le rapport entre les entrées comportant le *t.m.* et l'effectif total des entrées. Les fréquences minimales et maximales sont respectivement de 1% et 76,7%, la moyenne de 7 %, l'écart type de 9,6% et la médiane de 6,1%. Parmi les fréquences les plus basses, on trouve « histoire et biographie » (1,2%) ou « topologie générale » (1%).

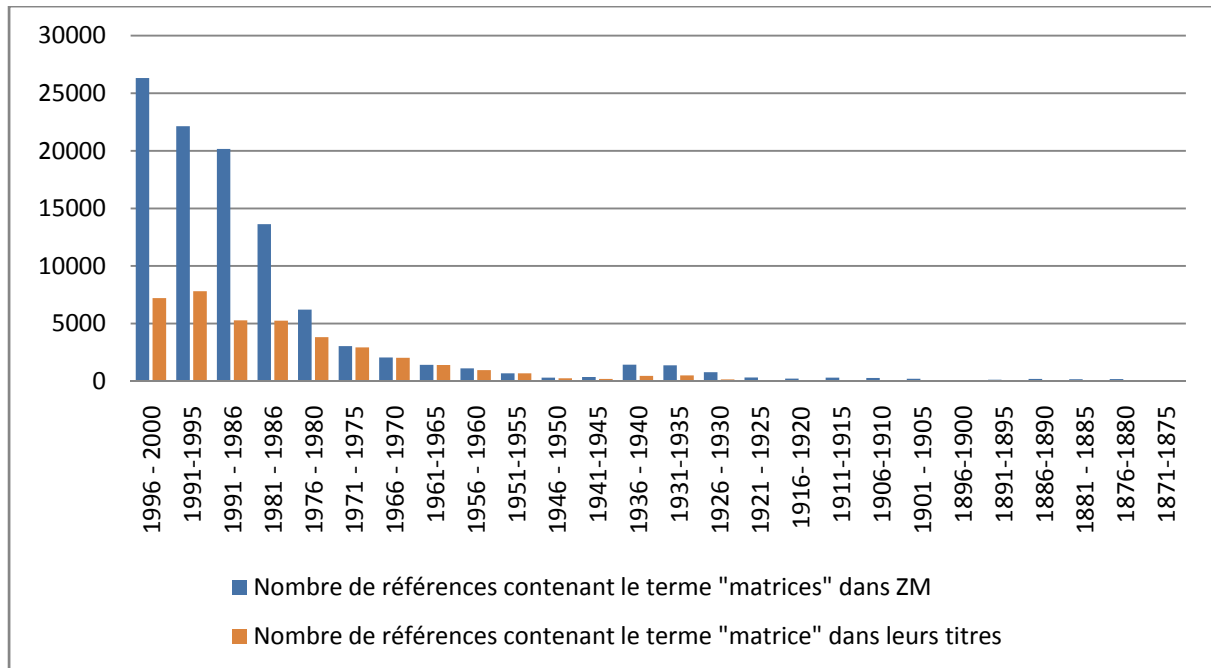
publications (titre, lieu, auteur) accompagné de recensions et d'une inscription dans une classification des sujets mathématiques dont la structure évolue sans cesse. L'entreprise de numérisation des entrées du *Jahrbuch* s'est accompagnée d'un programme d'enrichissement des contenus originaux par un référencement dans la classification actuellement en vigueur, des mots clés en langue anglaise et, dans certains cas, des commentaires critiques. Cet enrichissement a pour conséquence d'introduire dans la base de données des éléments d'analyse conceptuelle rétrospective que nous cherchons à éviter. Ainsi, une occurrence du *t. m.* peut survenir de manière anachronique dans une entrée bibliographique qui ne contient pas directement ce terme en raison de sa présence dans la rubrique de classification ajoutée lors de la numérisation (⁶).

Une difficulté supplémentaire est liée à l'utilisation du code source informatique AMSTeX qui, universalité oblige, utilise le code « matrix » pour l'affichage de toute représentation tabulaire. Ainsi, le moteur de recherche fait apparaître des occurrences du *t. m.* au sein de recensions ou de titres dont ce terme est absent mais présentant une représentation susceptible d'être à l'origine désignée par différents termes comme « tableau », « déterminant », « substitution », « forme bilinéaire », « système » etc. Il est par conséquent nécessaire de faire le tri des données par un dépouillement manuel des résultats obtenus par le moteur. Par exemple, sur la période 1871-1875 seules trois des cent-une entrées bibliographiques référencées correspondent à un usage réel du *t. m.*, toutes les autres provenant de la reconnaissance rétrospective d'une identité matricielle. La distinction entre ces deux types d'occurrences, originales et rétrospectives, donne un élément d'information quant à la constitution du caractère universel de l'usage du *t. m.* A partir de 1941, on obtient en effet une adéquation presque parfaite entre les deux types d'occurrences.

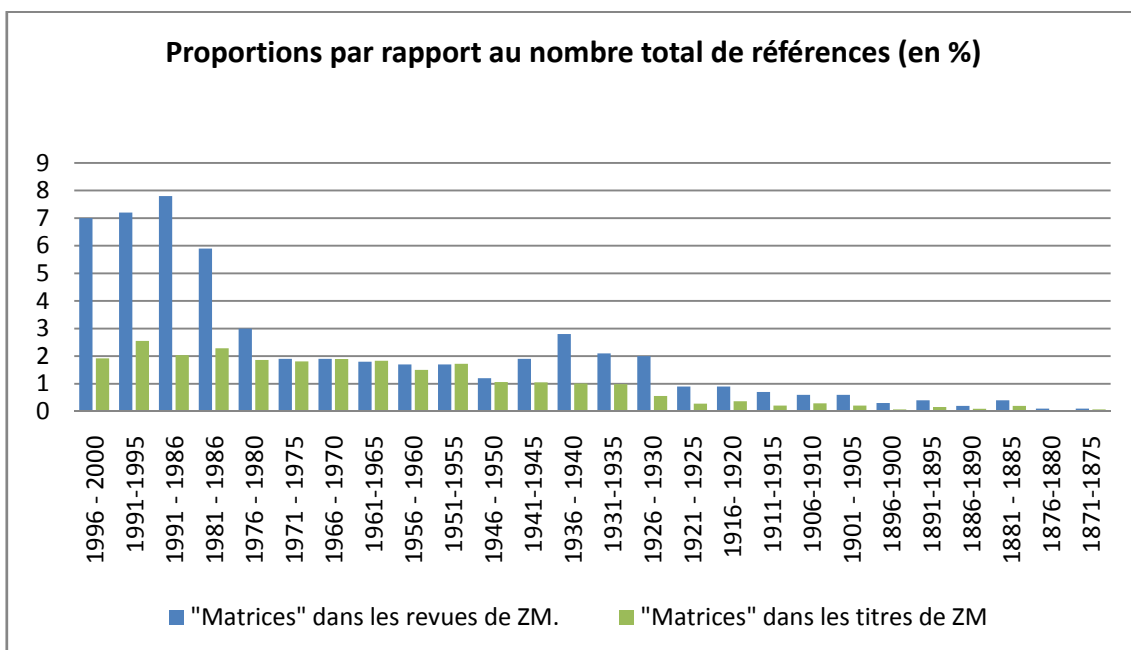
Périodes étudiées	Entrées obtenues par le moteur.	Occurrences originales.	Proportion (%)
1936 – 1940	1434	1275	88,9
1931-1935	1371	1073	78,3
1926 – 1930	774	572	73,9
1921 – 1925	322	138	42,9
1916- 1920	226	87	38,5
1911-1915	301	116	38,5
1906-1910	277	100	36,1
1901 – 1905	207	91	44
1896-1900	77	38	49,4
1891-1895	120	40	33,3
1886-1890	201	20	10
1881 - 1885	168	32	19
1876-1880	174	4	2,3
1871-1875	101	3	3

Le diagramme ci-dessous indique les résultats – après correction - d'une étude sur le temps long des entrées référencées par les matrices en général (*ERM*) en distinguant les cas d'occurrences dans les titres des entrées référencées (*TRM*) :

⁶ Au sujet des problèmes d'anachronisme posés par les méthodes quantitatives,, voir Goldstein, 1999, p. 193.

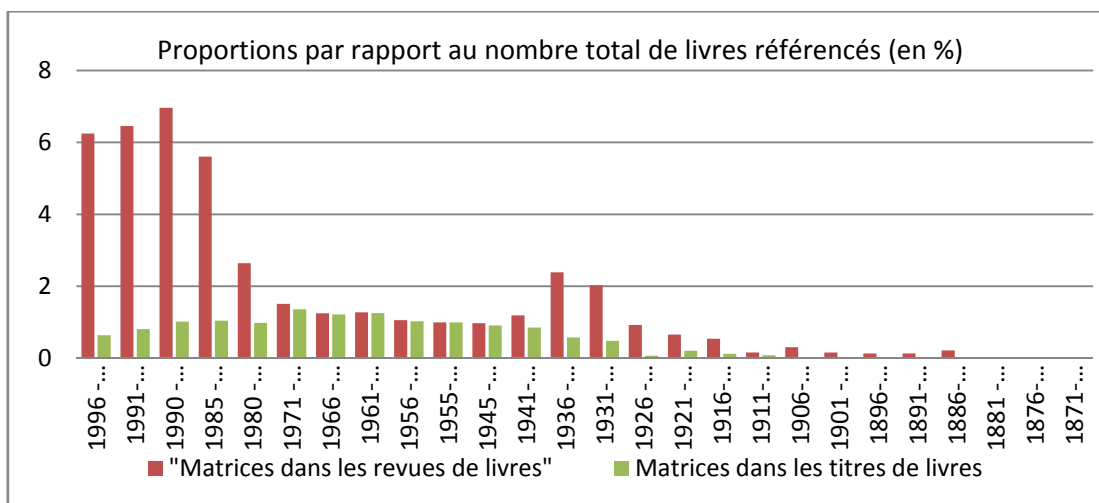


Si la montée en puissance que met en évidence ce diagramme doit être relativisée par la prise en compte de la croissance du nombre absolu d'entrées référencées au cours du temps, l'explosion à laquelle on assiste à partir de la deuxième moitié du XX^e siècle informe sur la manière dont un terme d'introduction récente - relativement à des termes comme « cercle » ou « équation » - peut acquérir une universalité sur un intervalle de temps court qui coïncide avec un changement d'échelle dans la production quantitative de publications mathématiques (⁷). Ce premier diagramme met également en évidence deux périodes semblant jouer un rôle particulier : la période de l'entre deux guerres d'une part, la période 1975-2000 d'autre part. Ces premières constatations sont affinées par le diagramme ci-dessous qui présente la proportion des *ERM* par rapport au nombre total d'entrées :

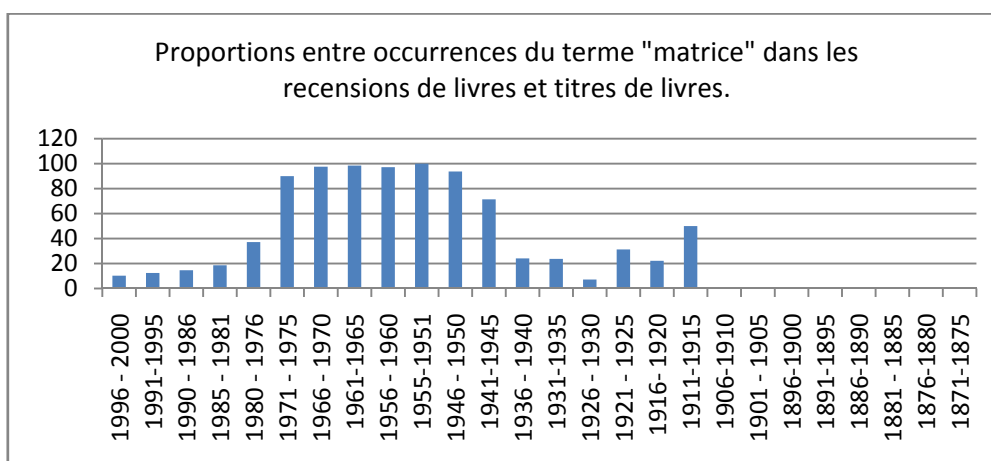


⁷ Le nombre total d'entrées référencées durant les cinq années séparant 1976 de 1980 est proche du double de celui de la période de quarante-cinq ans séparant 1868 de 1914.

Ce second diagramme nous amène à distinguer sept périodes pour une étude sur le temps long : à deux premières périodes - avant 1880 et [1880 ; 1900] (entre 0,3% et 0,4%) – suivent deux périodes de croissance - [1901 ; 1920] (de 0,6% à 0,9%); [1921 ; 1940] (de 1% à 3%) puis la période [1941 ; 1975] (entre 1,2% et 1,9%) et une nouvelle période de croissance, [1976 ; 2000] (entre 3% et 7,8%). Afin d'approfondir notre analyse, nous portons à présent notre attention sur les publications référencées par le type « livres » (manuels, traités, monographies) pour lequel la distinction entre occurrences dans les recensions (indiquant souvent l'utilisation du *t. m.* dans le sommaire de l'ouvrage) et dans les titres semble particulièrement pertinente.



Ce nouveau diagramme nous amène à confirmer le découpage de la périodisation et notamment la distinction entre les périodes [1921 ; 1940] et [1941 ; 1975]. En effet, d'une part la première de ces périodes se distingue par une forte croissance de l'emploi du *t. m.* dans les sommaires de livres, d'autre part cette proportion chute à partir de la guerre et reste à peu près stable jusqu'au milieu des années soixante dix. Cette seconde période se distingue cependant par une adéquation quasi-parfaite entre l'occurrence du *t. m.* dans le sommaire des ouvrages et dans les titres de ces ouvrages (⁸):



Ainsi, dans la période de l'entre deux guerres le *t. m.* est de plus en plus fréquemment employé dans les ouvrages et les publications sans pour autant être le plus souvent identifié aux sujets annoncés

⁸ Il faut garder à l'esprit les nombres absolus de publications. Ainsi la période [1911-1915] porte sur 3 occurrences dans les titres sur 6 livres référencés tandis que pour [1936 ; 1940] il s'agit de 14 occurrences sur 39.

par les titres de ces entrées. Dans la période [1941 ; 1975] au contraire, si les *ERM* chutent en proportion du nombre total d'entrées, ces publications font massivement usage du *t. m.* pour identifier leurs sujets d'études. Dans la dernière période, de 1976 à 2000, alors que la proportion comme le nombre absolu des *ERM* explosent, les *ERT* décroissent en proportion et l'usage du *t. m.* s'avère désormais plus répandu que les sujets d'études auxquels ce terme est associé. La démarche quantitative, utilisée ici de manière opératoire pour un découpage de la périodisation, permet également de formuler des hypothèses quant aux différents intervalles distingués. Pour les deux premières périodes, ancrées dans le XIX^e siècle, les données quantitatives amènent à reconnaître un accroissement de l'usage du *t. m.* sans pour autant nous renseigner encore sur les identités revêtues par ce terme ou sur ses modalités de circulation. La troisième période, du début du XX^e siècle à la fin de la première guerre met en évidence une croissance du simple au triple du nombre et de la proportion des *ERM* ainsi que l'apparition de « livres ». La période de l'entre deux guerre manifeste un changement d'échelle et il semble légitime d'émettre l'hypothèse que cette période joue un rôle crucial dans l'histoire de l'usage du *t. m.* dont les deux périodes suivantes semblent présenter deux autres étapes, à savoir la reconnaissance d'un sujet faisant l'objet de publications spécifiques (1941-1975) puis un passage dans la culture commune des mathématiciens et son emploi au sein de tous types de sujets mathématiques. Si la seule démarche quantitative ne saurait permettre de corroborer toutes ces hypothèses et d'approfondir les questions qu'elles suscitent, cette démarche peut cependant être poursuivie plus avant en fixant une problématique plus précise ainsi qu'un corpus et une période de référence à partir desquels mener l'étude.

3. Corpus et période de références.

Les informations apportées par les analyses qui précèdent nous amènent à nous concentrer sur la période de l'entre deux guerres. Nous nous attacherons plus particulièrement aux « livres », nettement plus nombreux en proportion que dans les périodes précédente et suivante mais se distinguant aussi par une faible occurrence d'*ERT*. Ce choix d'un corpus et d'une période de références nous permettra d'effectuer des changements d'échelles entre l'étude locale du contenu de quelques publications et une étude plus globale élargie à un corpus ou à une période plus vastes. Ce choix nous permet également d'affiner notre méthodologie. La période qui nous préoccupe permet en effet d'utiliser comme sources, non plus la base générale de *ZM* mais un journal de comptes rendus, le *Jahrbuch*⁹). Nous mènerons notre enquête par l'étude de cette publication périodique, et suivrons le biais de ne prendre en considération que les publications pour lesquelles le *t. m.* apparaît explicitement dans ce journal. Les conséquences de cette méthodologie étant, d'une part l'absence de certaines publications qui emploient explicitement le *t. m.* de notre relevé, d'autre part, et à l'opposé, la présence de certaines publications qui n'emploient pas le *t. m.* mais pour lesquelles ce terme a été employé par l'auteur de la recension soit directement, soit, plus indirectement, dans la classification par sujets ajoutée à l'entrée bibliographique. Ces phénomènes d'occurrences directes ou indirectes nous semblent particulièrement intéressants à considérer. Nous allons à présent approfondir notre étude quantitative en suivant les catégories structurant les entrées du *Jahrbuch*.

⁹ Le choix de l'étude du *Jahrbuch* justifie de débiter en 1920 la période après guerre car l'édition de 1919 comporte la recension des travaux russes publiés en temps de guerre.

- **La classification par sujets mathématiques.**

Dans la période de l'entre deux guerres la place attribuée au *t. m.* dans la classification du *Jahrbuch* évolue à deux reprises. Ce terme apparaît pour la première fois explicitement en 1924 dans le deuxième chapitre de la deuxième section, « Arithmétique et algèbre », intitulé : « Combinatoire. Déterminant et matrices. Littérature diverse » (*CDM*). A la fin de la période, en 1939, au sein de la section « C Arithmétique et algèbre », le premier chapitre est consacré à la combinatoire tandis que le deuxième prend le nom « Algèbre linéaire. Théorie des invariants » et distingue trois sous parties « a. Déterminants », « b. Matrices » et « c. Formes et invariants ». Cette autonomie conférée aux matrices à la fin de notre période vient renforcer l'une des hypothèses formulées lors de l'analyse quantitative sur les titres de publications. Avant 1924, le *t. m.* n'apparaît pas dans la classification et les *ERM* se concentrent pour plus d'un tiers dans le chapitre « Théorie des formes, déterminants. Théorie des invariants ». Les autres principaux sujets représentés étant les « équations différentielles et aux dérivés partielles » (16 %), la « théorie des groupes, théorie abstraite des corps et des modules » (11%), la « géométrie analytique et synthétique » (9%), la « géométrie des nombres, approximations diophantiennes » (8%) et l'« analyse vectorielle » (3,4 %) ⁽¹⁰⁾. A l'opposé de cette concentration, en 1939, le chapitre le plus représenté « b. Matrices » ne rassemblera plus que 12% des références, aucun autre chapitre ne dépassant les 7% et chaque section des mathématiques et de leurs applications comportant des *ERM*. Il faut donc observer, sur cette période, en parallèle de la reconnaissance, en deux étapes, des matrices comme sujet spécifique, une diversification d'usage dans les rubriques de classification et, alors même que les références au *t.m.* vont croissantes dans les titres de publications, un affaiblissement en proportion de la rubrique consacrée aux « matrices ».

Intéressons nous à la manière dont le *t. m.* apparaît de plus en plus massivement dans de nouveaux sujets sur la période 1924-1938. Tout d'abord la création de la rubrique *CDM* en 1924 s'accompagne d'un doublement des entrées référencées. Cet accroissement soudain s'avère une conséquence de la création de cette rubrique dont la plupart des entrées portent sur des sujets dont le seul rapport – à cette époque - avec les matrices tient à l'occurrence du terme dans la rubrique de classification du *Jahrbuch* : combinatoires, jeux mathématiques, statistiques ou applications des statistiques en psychologie, hérédité, biologie, économie, démographie ou problèmes de scrutins ⁽¹¹⁾. Cette rubrique tend également à absorber une partie importante des entrées auparavant référencées dans le cadre de la « théorie des formes » et notamment des travaux sur les déterminants ⁽¹²⁾. De 1925 à 1938, le nombre d'*ERM* croît de manière linéaire de 93 à 268 entrées. Une première évolution intervient en 1926 avec la création d'une nouvelle rubrique dans la section « physique mathématique », le « chapitre 2. Théorie quantique » qui regroupe alors 20% des entrées tandis que la rubrique *CDM* voit sa proportion chuter de 70% à 44%. De 1927 à 1938 la proportion des entrées de théorie quantique décroît progressivement de 20% à 5% tandis que la part des entrées du chapitre *CDM* poursuit sa décroissance. D'une part, à la suite de l'apparition des théories quantiques

¹⁰ Il faut ajouter six autres chapitres représentés à moins de 3% comme les « groupes continus et invariants différentiels » ou la théorie des « nombres hypercomplexes ». Des résultats semblables sont obtenus pour la période 1900-1919.

¹¹ On trouve par exemple dans cette rubrique une méthode pour « déterminer le nombre moyen des enfants légitimes par mariage », Gini, 1933, au côté « des équations différentielles de la théorie de croissance des organismes », Krostitzin, 1933, des « interactions non continues entre les hôtes et les parasites », Bailey, 1933, du « coefficient de l'élasticité de la demande » en économie, Schulz, 1933, ou du traité du calcul des probabilités de Borel, 1933. A la fin de notre période, de nombreux travaux portant sur ces sujets feront réellement usage des matrices, voir notamment les « lois fondamentales » des « fluctuations dans la lutte pour la vie » de Volterra, 1937.

¹² Le chapitre « théorie des formes » passe de 35% de références en 1923 à 4% en 1925. Pour les déterminants, voir par exemple Lecat, 1925 ; Byck, 1925 ; Muir, 1925 ; Bennett, 1925.

(¹³), les proportions de certaines catégories référencées depuis le début de la période comme les théories « des groupes et l'algèbre abstraite » (¹⁴), « des nombres », « des groupes continus et invariants différentiels », des « nombres hypercomplexes » (¹⁵), augmentent sensiblement. D'autre part, un nombre croissant d'ERM apparaissent dans des sujets de plus en plus divers dont certains s'accroissent de façon éphémère comme les « équations intégrales et l'analyse fonctionnelle » avec l'investissement des travaux sur le spectre des « matrices infinies » en théorie quantique (¹⁶), mais pour la plupart ne quittent plus le référencement sur toute la période comme la « géodésie et géophysique » (1927) (¹⁷), la topologie, l'hydrostatique, l'optique et l'astronomie (1928) , les probabilités (de 0,7% en 1929 à 5% en 1938), la théorie de la relativité (1930) (¹⁸), la logique (1931) (¹⁹), la théorie des fonctions de variables réelles ou complexes, les « fonctions de matrices » (²⁰), l'étude des variations (1932), l'« analyse pratique », la biologie (²¹), la théorie de la mesure (1933) (²²), les équations de Maxwell (²³), la psychologie (1934) (²⁴), la mécanique des systèmes élastiques (²⁵), la cristallographie (1935) (²⁶), l'ingénierie (1937) (²⁷), la biologie, la chimie (²⁸), les « fondements des mathématiques et la théorie des ensembles » (1937) ou encore la chronologie (1939) (²⁹).

¹³ Voir Heisenberg, 1925 ; Born, 1926 ; Frank et Jordan, 1926 ; Oppenheimer, 1927 ; von Neumann, 1932 ; Heisenberg, Schrödinger et Dirac 1934 ; Pauli, 1935.

¹⁴ Voir notamment les « anneaux de matrices » dans l'étude des nombres algébriques et corps de fonctions menée par Noether, 1926. Voir aussi Artin, 1927, 1950.

¹⁵ Voir von Neumann, 1927 & 1932, Albert, 1934 et Schwerdtfeger 1934 à propos des liens entre ces deux théories et la mécanique quantique par l'intermédiaire du problème de la détermination des matrices commutant à une matrice donnée. Voir également Birkhoff, 1937 à propos de la représentation des algèbres de Lie par des matrices.

¹⁶ Voir Bernkopf, 1967. Au sujet du spectre continu des matrices infinies, voir Wintner, 1926 ; Ingraham, 1926 ; Oppenheimer, 1927. Progressivement l'usage du terme « matrice hermitienne infinie » va être remplacé par celui d'« opérateur » sur un espace de Hilbert. Voir Stone, 1932, Banach, 1932, Delsarte, 1932 ou Davis, 1936. Le *t. m.* reste cependant d'un emploi courant jusqu'après guerre. Voir, par exemple Ulm, 1937 ou la notion de « matrices continuées » chez Hebroni 1938.

¹⁷ Lohan, 1933.

¹⁸ Murnaghan, 1931. Kwall, 1934.

¹⁹ Pour les « logiques nouvelles » et les « matrices infinies », voir Zawirski, 1932. Pour le calcul des matrices dans les algèbres de Boole, voir Neumann, 1933. A propos de la « tautologie » et de la « méthode matricielle », Lazerowitz, 1937 et les nombreux travaux logiques qui se développent à Varsovie. Les matrices sont également présentes dans les conséquences logiques tirées des « relations d'incertitude de Heisenberg », voir Février, 1937.

²⁰ Fantappié, 1928 ; Martis, 1928 ; Poly, 1928 ; Lappo-Danilevski, 1929 & 1935, Takahashi, 1932, Pelosi, 1932, Nakano, 1934, Schwerdtfeger, 1935.

²¹ Voir Hogben 1933, au sujet de la « notation des matrices » pour les « populations mendéliennes ».

²² Copeland, 1933.

²³ Voir Kwal, 1934. Les « opérateurs matriciels » en référence à la « théorie des électrons » de Dirac sont ici utilisés comme généralisation de l'usage des quaternions pour ces questions dans les travaux de langue anglaise depuis la fin du XIX^e siècle. A propos de l'« application des quaternions » dans la « physique moderne et de la « représentation matricielle des quaternions », voir Kwal, 1935 et Petiau, 1937.

²⁴ Voir l'« essai sur les principes des algorithmes primitifs » de Warrain, 1934.

²⁵ Voir les matrices oscillatoires de Gantmacher 1935.

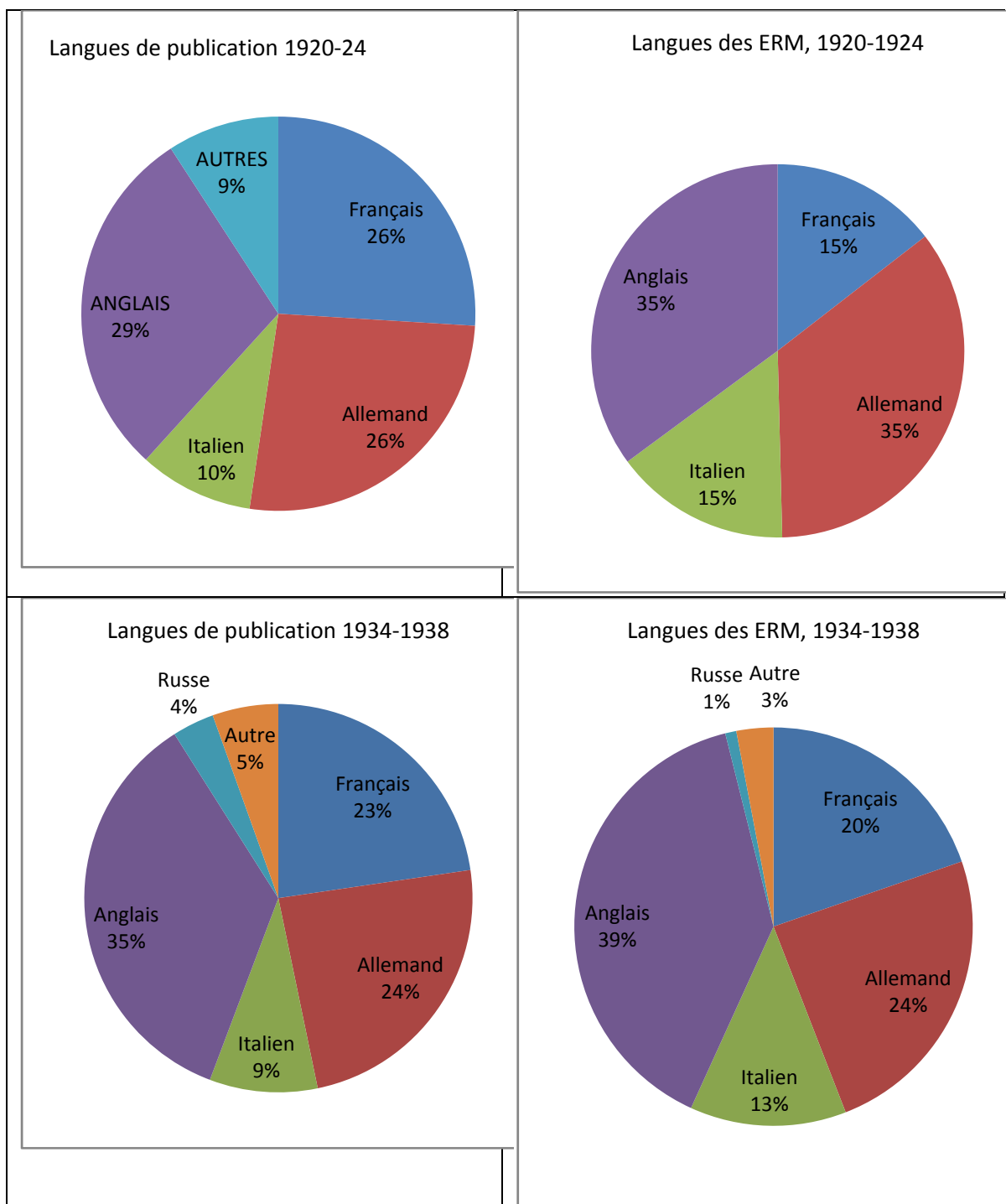
²⁶ A propos de développements sur les groupes cristallographiques dans le cadre des matrices, voir Seitz, 1935.

²⁷ Pour un exposé des usages de matrices pour les ingénieurs, voir Pipes, 1937.

²⁸ Barbensi, 1937.

²⁹ Voir les « nouvelles formules, très simples, très rapides » pour la « détermination de la date de Pâques » du frère Namase-Marie, 1939.

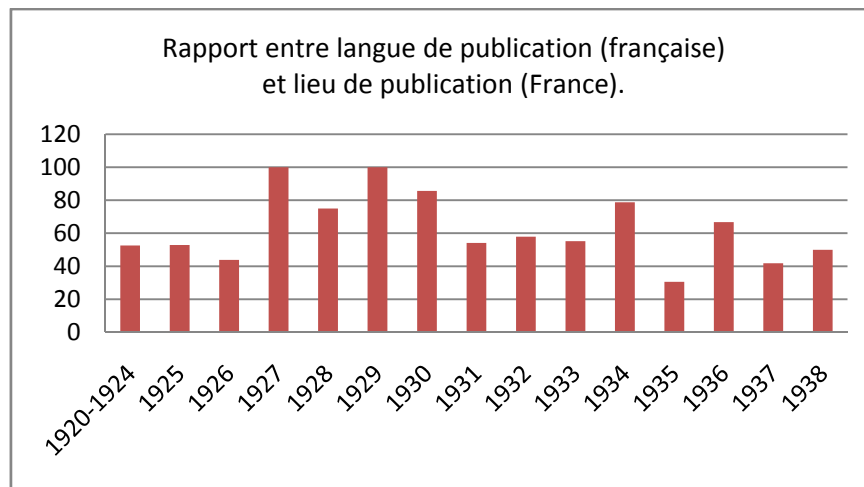
- Titres, langues et lieux de publications.



Une comparaison des répartitions des langues dans lesquelles on publie dans les cinq premières et cinq dernières années de notre période met en évidence une évolution notable. Au début de la période, les langues allemande, italienne et anglaise sont surreprésentées dans les *ERM* à l'opposé des publications de langue française dont la proportion s'avère de plus surévaluée par les recensions du *Jahrbuch* qui introduisent le *t. m.* pour commenter des travaux qui n'emploient originellement

pas ce terme ⁽³⁰⁾. A l'opposé de ce déséquilibre manifeste, dans les années 1934-1938 les parts des différentes langues dans les *ERM* rejoignent leurs proportions dans les publications globales. Le recours à un changement d'échelle confirme cette dynamique. Sur la période 1900-1920 d'une part, l'usage du *t. m.* est prédominant dans les publications de langues anglaise, allemande et italienne dans des proportions semblables à celles de 1920 à 1924 ; sur la période 1940-1960, d'autre part, cet usage s'équilibre dans les différentes langues occidentales. Une étude plus locale, sur l'intervalle [1925 ; 1933] permet de mettre en évidence des modalités de cette évolution. Nous développerons plus loin le cas des publications de langues allemande et italienne qui, au début de la période sont concentrées, pour les premières en « théorie des formes », « théorie des groupes » et « équations différentielles » et, pour les secondes en « géométrie analytique et synthétique » puis, à partir de 1926, dans les rubriques, « géométrie algébrique » et « vecteurs » nouvellement créées ⁽³¹⁾. Ces entrées suivent ensuite l'évolution générale décrite dans le paragraphe précédent.

Examinons plus avant le cas des publications de langue française. La proportion de ces entrées subit une augmentation brusque à la création du chapitre *CDM* avec l'apparition d'entrées portant sur des sujets divers comme la combinatoire, les jeux ou « l'arithmétique amusante » mais qui n'emploient pas elles même le *t. m.* ⁽³²⁾. Entre 1926 et 1934 cette proportion décroît à mesure que décroît la part du chapitre *CDM*. De 1934 à 1938, la proportion des entrées en langue française connaît une croissance continue de 14% à 23%. Cette évolution peut être mise en regard d'une analyse des lieux de publications.



Avant 1926, les auteurs publiant en France emploient rarement le *t. m.* à la différence d'auteurs publiant en Belgique, Suisse, Russie, Italie, Pologne, Tchécoslovaquie ou Roumanie. La période 1927-1931 manifeste un accroissement important de la part des entrées publiées en France par rapport à la période précédente. A partir de 1926 apparaissent en France des publications consacrées à la théorie quantique et à la mécanique des matrices et ⁽³³⁾, à partir de 1927 l'usage du *t. m.* s'accroît

³⁰ Tel est notamment le cas, depuis le début du XX^e siècle, des recensions portant sur les travaux de Cartan.

³¹ Nous ne pouvons qu'évoquer ici les nombreuses publications de langue Italienne qui emploient depuis le XIX^e siècle le *t. m.* dans des entrées de géométrie algébrique, voir le traité de Segre, 1920. Voir aussi Cherubino, 1923, à propos des « matrices de Riemann » sur les variétés en relation avec les fonctions thêta et abéliennes. A propos des « écoles algébriques » Italiennes, voir Brigaglia, 2001, Brigaglia et Ciliberto, 2004 et Martini, 2004.

³² Voir par exemple, Huber-Stoekar, 1937, sur l'« échiquier du diable » ; Devisme, 1937, pour une « contribution à l'étude du problème de timbres poste » ; Schreier, 1932 sur les systèmes d'élimination dans les tournois, Kraitchik, 1926 sur le « problème des reines » ou les actes des congrès internationaux de « récréations mathématiques ».

³³ Voir Brillouin, 1926 ; Bloch, 1930 ; Bauer, 1933 ; Broglie, 1934.

dans des domaines de plus en plus variés ainsi que dans les titres de publications. A partir de 1930 les auteurs de langue française contribuent à leur tour à la diversification de l'usage du *t. m.* comme le manifeste le cas de la théorie des probabilités (³⁴), domaine dans lequel ces auteurs introduisent un nouvel usage des matrices qui se répand ensuite au sein d'autres langues de publications.

Suivons à présent le cas, en quelque sorte inverse, des *ERM* de langue anglaise dont la proportion relative est très élevée au début de notre période et décroît légèrement à mesure que l'usage des matrices se répand. Les entrées publiées aux Etats-Unis sont largement majoritaires sur toute la période et leur évolution diffère des autres publications de langue anglaise qui suivent globalement la dynamique générale décrite précédemment. Dès le début de notre période, ces entrées se distinguent en adoptant le *t. m.* dans leurs titres et dans une grande variété de rubriques comme la topologie ou la théorie des fonctions réelles, présentes dès le début de la période, les équations intégrales (1925), équations algébriques (1926), courants électriques (1925), l'optique et l'hydrodynamique (1928) et la logique (1931) (³⁵). Les effets de l'apparition des théories quantiques sont accentués chez les auteurs publiant aux Etats-Unis et s'avèrent directement corrélé à un accroissement de l'usage du *t. m.* dans les titres de publications qui perdurera après le déclin relatif des entrées de théories quantiques (³⁶). De 1929 à 1935, ces auteurs semblent à l'origine d'une évolution radicale du contenu des publications du chapitre *CDM* dont la part des publications consacrées aux jeux, aux déterminant ou, à la combinatoire décroît au profit de nouveaux sujets d'études sur les « matrices » (³⁷). Parallèlement, l'investissement que font ces auteurs du *t. m.* dans les titres de la rubrique « algèbre abstraite, groupes, anneaux, corps » reste quasiment exclusif jusqu'en 1935 où cet usage s'accroît chez des auteurs publiant en Allemagne. Comme nous l'avons vu, cette évolution parallèle dans la reconnaissance d'un sujet spécifique portant sur les « matrices » en relation avec l'« algèbre abstraite » sera entérinée par la nouvelle classification de 1939 dans laquelle la sous section « matrices » sera insérée dans le nouveau chapitre « algèbre linéaire » et distinguée des « déterminants ».

³⁴ Voir Mazliak, 2007. A propos des « matrices stochastiques » et des « chaînes de Markoff », voir Hostinský, 1931 ; Fréchet, 1931 ; Moasil, 1932. Ostenc, 1933 ; Doeblin, 1936 ; Fréchet et Borel, 1938.

³⁵ Voir l'usage du *t. m.* en logique chez Foster, 1931 en référence à Peirce, 1870 et Schröder, 1895.

³⁶ Voir Wiener, 1928 ; Ruark, 1930.

³⁷ De 1929 à 1931, 60% des *ERT* du chapitre *CDM* sont publiées aux Etats-Unis, et, de 1929 à 1935, entre 75% à 100% des *ERT* du chapitre « théorie des groupes, algèbre abstraite ». Si l'usage du *t. m.* dans les titres de publications du chapitre *CDM* culmine à 18 % avant 1928 (essentiellement du fait d'auteurs publiant aux Etats-Unis ou en Italie), cette proportion passe à 24 % en 1930 et 47% en 1931 du seul fait des entrées publiées aux U.S.A. A partir de 1932, la proportion passe à 75% et l'usage du *t. m.* dans les titres des entrées de ce chapitre se répand progressivement dans des travaux publiés, dans l'ordre d'apparition, en Italie, au Japon, en URSS, Hollande, Pologne, Belgique, Roumanie, Hongrie, puis en France. A partir de 1937, la proportion des auteurs publiant aux Etats-Unis passe sous la barre des 30% du nombre total des *ERT* du chapitre *CDM*.

ANNEXE 2.

Pratiques opératoires et décomposition matricielle chez Turnbull et Aitken.

6. Matrices partitioned into Submatrices.

It is convenient to extend the use of the fundamental laws of combination for matrices to the case where a matrix is regarded as constructed not so much from elements as from submatrices, or minor matrices, of elements. For example, the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

can be written

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$

where

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}, R = [7, 8], S = [9].$$

Here the diagonal submatrices P and S are square, and the partitioning is diagonally symmetrical. In the general case there may evidently be n or fewer partitions row-wise or column-wise. Let B be a second square matrix of the third order similarly partitioned :

$$B = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 \\ R_1 & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & . & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & . \end{bmatrix}$$

then by addition and multiplication we have

$$A+B = \begin{bmatrix} P+P_1 & Q+Q_1 \\ R+R_1 & S+S_1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} PP_1+QR_1 & PQ_1+QR_1 \\ RP_1+SR_1 & RQ_1+SS_1 \end{bmatrix},$$

as may readily be verified. In each case the

resulting matrix is of the same order, and is partitioned in the same way, as the original matrix factors. For example, in AB the first element, PP_1+QR_1 , stands for a square submatrix of two rows and columns : and this is possible, since, by definition, both products PP_1 and QR_1 consist of two rows and two columns. [...]. Thus

$$PQ_1 + QS_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} [0] = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix},$$

giving the proper rectangular shape for the upper right hand minor. [...]

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \end{array} \times \begin{array}{c} \text{B}' \\ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \text{AB}' \\ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \end{array} ;$$

$$\begin{bmatrix} C_4(\alpha) & \cdot \\ \cdot & C_3(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \cdot & \cdot & & & \\ & \alpha & 1 & \cdot & & & \\ & & \alpha & 1 & & & \\ & & & & \alpha & 1 & \cdot \\ & & & & & \alpha & 1 \\ & & & & & & \alpha \end{bmatrix}.$$

[...] It is a help to form a staircase graphs of these chains as follows :

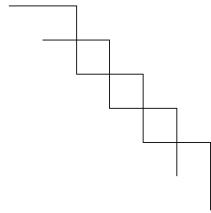


Fig. 1

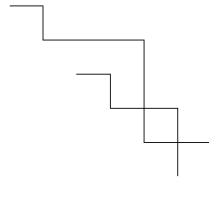


Fig. 2

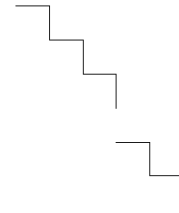


Fig. 3

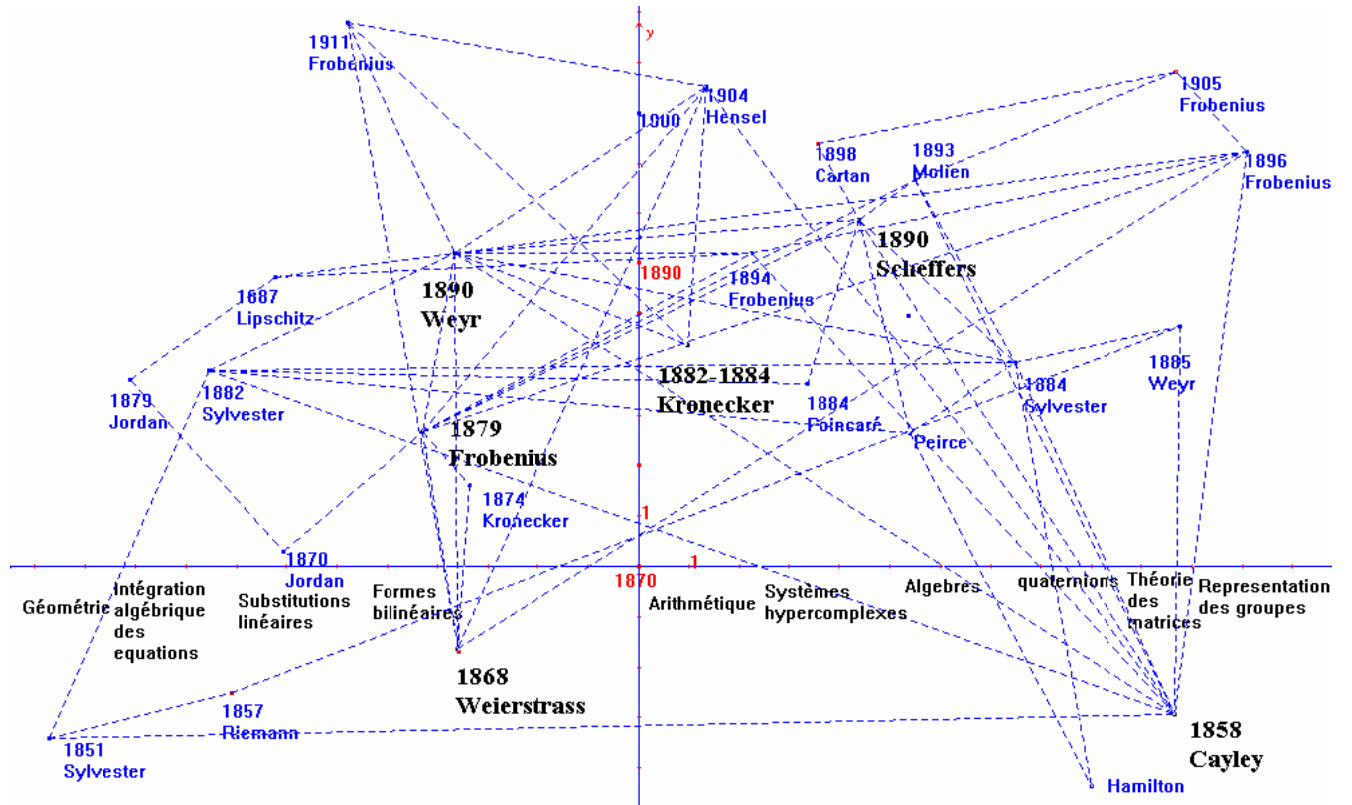
[...]

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & & & & \\ & \alpha & 1 & & & & \\ & & \alpha & & & & \\ \hline & & & \alpha & 1 & & \\ & & & & \alpha & & \\ \hline & & & & & \beta & 1 \\ & & & & & & \beta \\ \hline & & & & & & & \beta \end{bmatrix}$$

[Turnbull et Aiken, 5-6]

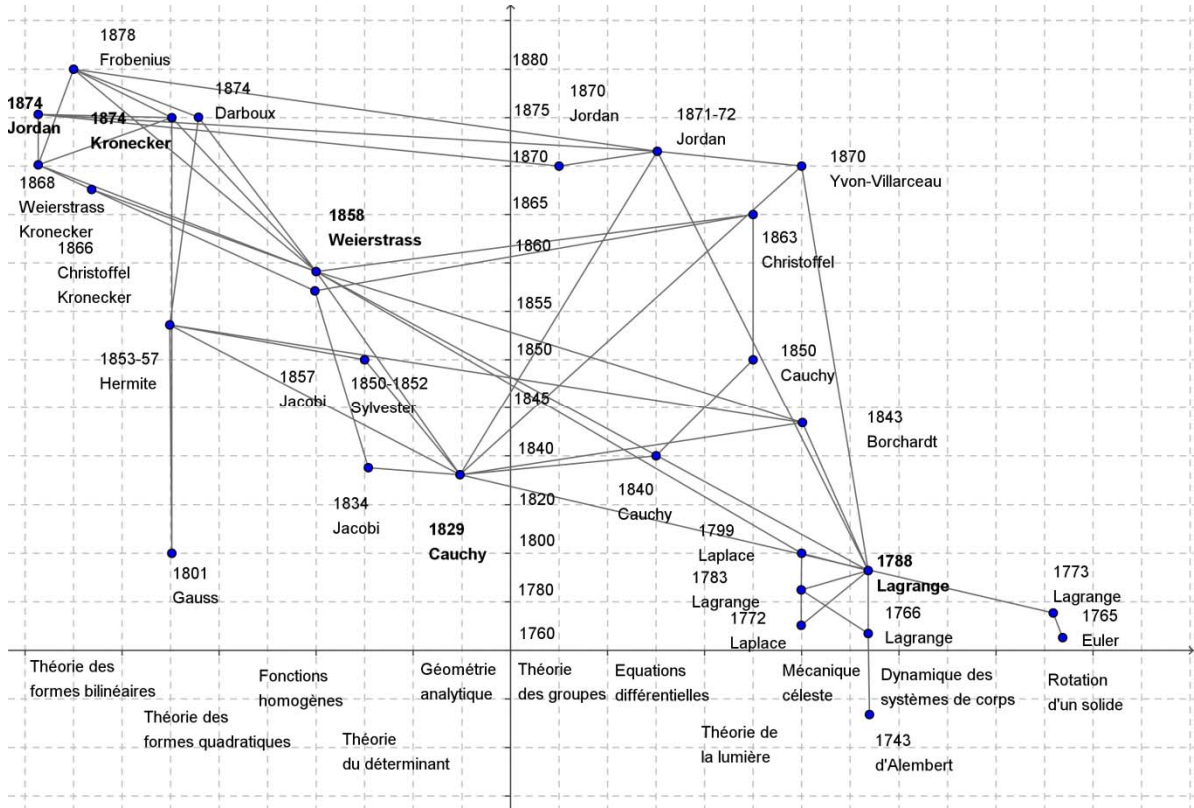
ANNEXE 3.

REPRESENTATION SIMPLIFIEE D'UN RESEAU DE REFERENCES.



ANNEXE 4.

Représentation graphique simplifiée du corpus formant la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes.



BIBLIOGRAPHIE.

- Albert (A. Adrian), 1934, « On a certain algebra of quantum mechanics », *Ann. of Math.*, (2) 35, p. 65-73.
- 1935, « On the construction of Riemann matrices », *Ann. of Math.* (2) 36, p. 376-394.
- 1937, *Modern higher algebra*. Univ. of Chicago Press.
- Albert (A. Adrian) et Hasse (Helmut), 1932 « A Determination of All Normal Division Algebras Over an Algebraic Number Field », *Transactions of the American Mathematical Society* 34, p. 722–726.
- Aitken (Alexander Craig), 1928, « Note on the elementary divisors of some related matrices », *Proc. Edimb. Math. Soc.* (2) 1, p. 166-168.
- 1934, « On the canonical form of the singular matrix pencil ». *Quarterly Journ.* 4, p. 241-245.
- Aitken (Alexander Craig) et Turnbull (Herbert Westren), 1932 *An introduction to the theory of Canonical Matrices*, Londres, Glasgow, Blame & Son.
- Alexander (James W.), 1933 « A matrix knot invariant », *Proceedings USA Academy*, 19, p. 272-275.
- Amante (Salvatore), 1933 « Sulla riduzione a forma canonica di una classe speciale di matrici », *Rendiconti Accad. d. L. Roma* (6) 17, p. 31-36, 431-436.
- Andoyer (Henri), 1900 *Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure. Tome I*. Paris, Gauthier-Villars.
- Artin (Emil), 1927a, « Über einen Satz von Herrn J. H. MaclaganWedderburn », *Abhandlungen Mathematisches Seminar, Universität Hamburg*, 5, p. 245–250.
- 1927b, « Zur theorie der hypercomplexen Zahlen », *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgeischen Universität*, 5, p. 215-260.
- 1950, « The influence of J. H. M. Wedderburn on the Development of Modern Algebra », *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56, p. 65–72.
- Autonne (Léon), 1903, « Sur la canonisation des formes bilinéaires », *Nouv. Ann.* (4) 3, p.57-64.
- 1905, *Sur les formes mixtes*. Lyon, A.Rey / Paris, Gauthier-Villars.
- 1909, *Sur les groupes de matrices linéaires non invertibles*, Ann. Univ. Lyon I fasc. 25.
- 1910 *Sur les matrices linéaires échangeables à une matrice donnée*, Paris, Gauthier-Villars.
- Babbage (Charles), 1817, « Observations on the Analogy which subsists between the Calculus of Functions and other branches of Analysis », *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 107, p. 197-216.
- Baker (Henry F.), 1902, « Further application of matrix notation to integration problems », *Lond. M. S. Proc.*, 34, p. 347-360.
- Bailey (Victor A.), 1933, « Non continuous interaction between hosts and parasites », *Proceedings Cambridge*, 29, p. 487-491.
- Banach (Stefan), 1932, *Théorie des opérateurs linéaires*, Varsovie.
- Barbensi (G.), 1937, *Elementi di matematica generale ad uso dei biologi e dei chimici*, Firenze, L. Nicolai.
- Bauer (Edmond), 1933, *Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la physique quantique*, Paris, Les presses universitaires de France. *Annales Institut Henri Poincaré*, 4, p. 1-170.
- Bečvář (Jindřich), 1995, *Eduard Weyr 1852--1903*. Prague, Prometheus, *Dějiny Matematiky /History of Mathematics* 2.
- Belhoste (Bruno), 1998, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, p. 289-304.
- Bell (Eric T.), 1927, *Algebraic arithmetic*. New York, American Math. Society (Colloquium Publications, Vol. VII).
- 1930, « A type of commutative matrices », *Bull. Calcutta Math.Soc.*, 22, p.53-60.

- 1931, *The queen of the sciences*. New York, G. E. Stechert (A century of progress series).
- Bennett (Albert A.), 1921, « Some algebraic analogies in matric theory », *Annals of Math.*, (2) 23, p. 91-96.
- 1925, « The notion "matrix of a determinant" ». *Amer. Math. Monthly*, 32, p. 182-185.
- 1931, « Construction of a rational canonical form for a linear transformation », *Amer. Math. Monthly*, 38, p. 377-383.
- Bernkopf (Michael), 1967, « A History of Infinite Matrices », *Arch. Hist. Exact Sci.* 4, p. 308-358.
- Bianchi (Luigi), 1923, *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*, Bologna, Zanichelli.
- Bieberbach (Ludwig), 1930, *Analytische Geometrie*, Leipzig, B. G. Teubner.
- Birkhoff (Garrett), 1916, « Infinite products of analytic matrices », *American M. S. Bull.*, 22, p. 271.
- 1937, « On the combination of subalgebras, Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices », *Ann. Math., Princeton*, (2) 38, p.526-532.
- 1938, « Fifty Years of American Mathematics », dans Archibald (Raymond C.), *Semicentennial Addresses of the American Mathematical Society 1888–1938*, New York, American Mathematical Society, p. 270-315.
- Birtwistle (George), 1928, *The new quantum mechanics*. Cambridge, University Press.
- Blichfeldt (Hans F.), 1917, *Finite collineation groups with an introduction to the theory of operators and substitution groups*, Chicago, The University of Chicago Press.
- Bloch (Eugène), 1930, *L'ancienne et la nouvelle théorie des quanta*, Paris, Hermann.
- Bliss (Gilbert), 1914, « A note on symmetrical matrices », *Amer. M. S. Bull.* (2) 20, p. 453-454.
- Bôcher (Maxime), 1907, *Introduction to higher algebra*. New York, The Macmillan Co.
- Boole (George), 1841, « Exposition of a general theory of linear transformation », *Cambridge Mathematical Journal* 3, p. 1-20.
- Borchardt (Carl), 1846, « Neue Eigenschaft der Gleichung, mit deren Hülfe man die saecularen Störungen der Planeten bestimmt », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 12, p. 38-45.
- Borel (Émile), 1933, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*. Paris, Gauthier-Villars, 1933.
- Born (Max), 1926, *Probleme der Atomdynamik*. Berlin, J. Springer.
- Born (Max) et Jordan (Paul), 1925, « Zur Quantenmechanik », *Zeitschr. fur Physik*, 34, p. 858-888.
- 1930 *Elementare Quantenmechanik*, Berlin.
- Born (Max) Heisenberg (...), Jordan (Paul), 1926 « Zur Quantenmechanik II », *Zeitschr fur physik* 35, p. 577-615.
- Bourbaki (Nicolas), 1960, *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann.
- Brauer (Richard), 1929, « Über Systeme hyperkomplexer Zahlen », *Mathematische Zeitschrift* 30, p. 79–107.
- Brauer (Richard), Hasse (Helmut) et Noether (Emmy), 1932, « Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren », *Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik* 167, p. 399–404.
- Brechenmacher (Frédéric), 2006a *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)*, Thèse de doctorat, Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales, Paris.
- 2006b, « Regards croisés sur Camille Jordan », *Matapli*, 78, p. 57-67.
- 2006c, « A controversy and the writing of a history: the discussion of "small oscillations" (1760-1860) from the standpoint of the controversy between Jordan and Kronecker (1874) », *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, 13, p. 941-944.

- 2006d, *Les matrices : formes de représentations et pratiques opératoires (1850-1930)*, Paris, Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Éducation Nationale, <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>.
- 2007, « L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766-1874) », *Sciences et techniques en perspective*, Ile série, fasc. 1, p. 5-85.
- 2008, « La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker ». *Revue d'Histoire des Mathématiques*, tome 13, fasc.2, p. 187-257.
- 200 ?, « Perspectives sur l'histoire de l'algèbre linéaire », à paraître en 2009.
- Brigaglia (Aldo), 2001, « The creation and persistence of national schools: The case of Italian algebraic geometry », dans Bottazzini (Umberto), Dahan (Amy) (éds.), *Changing Images in Mathematics*. London, Routledge, p. 187–206.
- Brigaglia (Aldo) et Ciliberto (Ciro), 2004, « Remarks on the relations between the Italian and American schools of algebraic geometry in the first decades of the 20th century », *Historia Mathematica*, 31, p. 310–319
- Brioschi (Francesco), 1857, « Notes sur deux théorèmes de géométrie », *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, I, p. 368-369.
- 1859, « Sur la résolution par radicaux des équations dont le degré est une puissance d'un nombre premier », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, XLVIII, p. 182-186.
- Brillouin (Léon), 1926, « Les spectres de rotation dans la nouvelle mécanique des quanta, avec le calcul des matrices », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 182, p. 374-376.
- 1936, « La théorie des matrices et la propagation des ondes », *J. Phys. Radium*, (7) 7, p. 401-410.
- Brogie (Louis de), 1934 *L'électron magnétique (théorie de Dirac)*. Paris, Hermann et Cie.
- Brodskij (M.), 1913, *Triangular and Jordan representations of linear operators*, Danskin, J. (trad. du russe Providence. 1971).
- Bromwich (T.J.), 1901a, « Canonical reduction of linear substitutions and bilinear forms with a dynamical application », *Proc. London Math. Soc.*, 32, p. 79-118, 321-352.
- 1901b, « Note on Weierstrass's reduction of a family of bilinear forms », *Proc. London Math. Soc.*, 32, p. 158-163.
- Brunel (George), 1888, « Sur les racines des matrices zéroïdales », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 106, p. 467-470.
- Buchheim (A.), 1884, « Proof of Professor Sylvester's "Third law of motion" », *Phil Mag.*, (5) 18, p. 459-460.
- 1885a, « On the theory of matrices », *Proc. London Math. Soc.* 16, p. 63-82.
- 1885b, « A theorem on matrices », *Mess. of Math.*, 14 , p. 167-168.
- 1886, « An extension of a theorem of Professor Sylvester's relating to matrices », *Phil. mag.*, (5) 22, p. 173-174.
- 1887, « On a theorem of Prof. Klein's relating to symmetric matrices », *Mess. of Math.*, (2) XVII., 79.
- Buhl (Adolphe), 1934, *Gravifiques groupes, mécaniques*. Paris, Gauthier-Villars.
- Bukreev (Boris), 1907, *Elemente der Determinantentheorie*. Kiew, Sep. aus Kiew Univ. Nr. 3, 4, 5.
- Burgess (Horace T), 1916, « On the matrix equation $BX=X$ », *Amer. Math. Monthly*, 23, p. 152-155.
- Burnside (William), 1899, « On the Reduction of Linear Substitution to its Canonical Form », *Proc. London math. soc.*, 30, p. 180-194.
- Byck (Marie), 1925, « Sur les déterminants dont les éléments sont des déterminants », *Enseignement*, 24, p. 101-105.
- Caratheodory (Constantin.), 1935, *Variationsrechnung und partielle differentialgleichungen erster ordnung*. Leipzig, B. G. Teubner.

Cartan (Élie), 1894, *Sur la structure des groupes simples finis et continus*, Thèse, Paris, 1894.

1898, « Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes », *Ann. fac. Sc. Toulouse*, 12B, 1-99.

1908, « Nombres complexes, exposé d'après l'article allemand de E. Study », *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome 1, vol. 1, p. 329-468. Paris, Gauthier-Villars; Leipzig, B.G. Teubner.

1933, *Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire*. Paris, Hermann .

1937, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Paris, Gauthier-Villars.

Cayley (Arthur), 1846 « Mémoire sur les les Hyperdéterminants (Traduction d'un Mémoire anglais inséré dans le 'Cambridge Mathematical Journal' Avec Quelques Additions de l'Auteur) », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 30, p. 1-37.

1855a, « Sur la Transformation d'une Fonction quadratique en elle-même par des Substitutions linéaires », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 50, p. 288-99.

1855b, « Remarque sur le Notation des Fonctions algébriques », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 50, p. 282-85.

1855c, « Recherches sur les matrices dont les termes sont des fonctions linéaires d'une seule indéterminée », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 50, p. 313-317.

1858, « A Memoir on the Theory of Matrices », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 148, p. 17-37.

1866 « A supplementary memoir on the theory of matrices », *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, CIVI, p. 25-35.

1874, « On the extraction of the square root of a matrice of the third order », *Proc. of Edinb.*, VII, p. 675-682..

1880, « On the matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and in connection therewith the function $\frac{ax+b}{cx+d}$ », *Mess. of Math.* 9, p. 104-10.

1885, «On the matrical equation $qQ-Qq=0$ », *Messenger of Mathematics*, XIV, p. 176-178.

Cauchy (Augustin L.), 1829 « Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes », *Exercices de mathématiques*, 4, in 1882-1974, *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, Paris, Gauthier-Villars et fils, (2) 9, p. 174-195.

Cavallucci (Leopoldo), 1937, « Riduzione di una matrice alla forma canonica nel suo campo di razionalità », *Rend. Sem. mat Univ. Padova*, 8, p. 92-109.

Cecioni (Francesco), 1910, « Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici », *Pisa Ann.*, 11, p. 140.

Chapman (C. H.), 1891 « On the matrix which represents a vector », *American J.*, XIII, p. 363-380.

Châtelet (Albert), 1911, « Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres », *Ann. Ec. Norm.* XXVIII, p. 105-202.

1913, *Leçons de théorie des nombres*. Paris, Gauthier Villars.

1922, "Groupes abéliens finis," *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 175, p. 85-87.

1925, *Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers*. Paris, Gauthier-Villars.

Cherubino (Salvatore), 1923, « Sulle varietà abeliane reali e sulle matrici di Riemann reali », *Batt. G.*, 61, p. 47-68.

1929, « Alcune osservazioni sulle matrici rettangolari e loro utilità per la decomposizione di una forma quadratica in somma di quadrati », *Rendiconti Istituto Lombardo*, (2) 62, p. 623-649.

1936a, « Le matrici canonizzanti », *Boll. Un. mat. Ital.*, 15, p. 105-108.

- 1936b, « Sulla riduzione delle matrici a forma canonica », *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. nat.*, (6) 23, p. 478-482, 647-653.
- 1940, *Lezioni di geometria analitica con elementi di proiettiva. Vol. 1. Coordinate nel piano e nello spazio. Elementi di calcolo di matrici*. Roma, Albrighi, Segati & Co.
- Chevalley (Claude), 1936, *L'arithmétique dans les algèbres de matrices*. Paris, Exposés mathématiques XIV.
- Chrystal (George), 1884, « Application of matrices to prove a theorem in spherical geometry », *Edinb. Math. Soc. Proc.*, II, p. 45-47.
- Clebsch (Alfred), 1863, « Über eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 62, p. 232-245.
- 1876 *Vorlesungen über Geometrie, von Alfred Clebsch. Bearbeitet und herausgegeben von dr. Ferdinand Lindemann, mit einem vorworte von Felix Klein*. Leipzig, B.G. Teubner.
- Clifford (William), 1875, « A Fragment on Matrices », dans Robert Tucker, , 1882, *Mathematical papers, by William Kingdon Clifford*. London, Macmillan and co., p. 337-384.
- Cooke (Richard G.), 1933, « On the transformation of some classes of infinite matrices into diagonal matrices », *Journal L. M. S.*, 8, p. 167-175.
- Conway (Arthur W.), 1931, « The influence of the work of Sir William Rowan Hamilton on modern mathematical thought », *Proceedings Royal Dublin Soc.*, 20, p. 125-128.
- Copeland (Arthur H.), 1933, « A matrix theory of measurement », *M. Z.*, 37, p. 542-555.
- Corry (Leo), 1996, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel et Boston, Birkhäuser Verlag.
- Cramlet (Clyde M.), 1938, « On the reduction of a representation to a classical canonical form », *Amer. math. monthly*, 45, p. 178-180.
- Cremona (Luigi), 1862, *Introduzione a una Teoria Geometrica delle Curve piane*. Bologne, 1862.
- Crilly (Tony), 1978, « Cayley's anticipation of a generalised Cayley-Hamilton theorem », *Historia Mathematica*, 5, p. 211-219.
- 1986, « The rise of Cayley's invariant theory », *Historia Mathematica*, 13, p. 241-255.
- 1988, « The Decline of Cayley's invariant theory », *Historia Mathematica*, 15, p. 33-348.
- 1999, « Arthur Cayley as Sadleirian Professor: A Glimpse of Mathematics Teaching at 19th-Century Cambridge », *Historia Mathematica*, 26, 2, p. 125-160.
- 2004, « The Cambridge Mathematical Journal and its descendants: the linchpin of a research community in the early and mid-Victorian Age », *Historia Mathematica*, 31, p. 455-497.
- 2006, *Arthur Cayley: Mathematician Laureate of the Victorian Age*, Baltimore, The Johns Hopkins University Press.
- Cullis (Cuthbert.E.), 1913, *Matrices and determinoids, vol 1*. Cambridge.
- Curtis (Charles W.), 1999, *Pioneers of representation theory : Frobenius, Burnside, Schur and Brauer*. Providence, Rhode Island.
- DARBOUX (Gaston), 1874, « Mémoire sur la théorie algébrique des formes quadratiques », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, XIX, p.347-396.
- Davis (Harold), 1936, *The theory of linear operators. From the standpoint of differential equations of infinite order*. Bloomington, The Principia Press, 1936.
- Delsarte (Jean), 1932, « Sur une équation matricielle », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 194, p. 514-516.

De Morgan (Augustus), 1837-49, « On the Foundations of Algebra », *Trans. Of the Camb. Phil. Soc.*, 7, p. 173-87, 287-300, 8, p. 139-42, 241-54, 1844-49.

Deruyts (Jacques), 1892, « Sur les relations qui existent entre certains déterminants », *Belg. Bull.*, XXIII, p. 507-521.

Deuring (Max), 1935, *Algebren*, Ergebnisse der Math. 4, Nr. 1.

Devisme (Jacques), 1937, « Contribution à l'étude du problème des timbres-poste », *Sphinx*, Bruxelles, 7, p. 202-203. C.-R. deuxième Congr. internat. Récréation math., Paris 1937, p. 55-56.

Dhombres (Jean), 2004, « Vicissitudes in Internationalisation : International Networks in Mathematics up until the 1920s », dans Charle (C.), Schriewer (J.), Wagner (P.) (ed.), 2004, *Transational Intellectual Networks, Forms of Academic Knowledge and the Search for Cultural Identities*. Frankfurt/New York, Campus Verlag, p. 81-114.

2002, « Réflexions intempestives sur l'enseignement et l'histoire : la composition des fonctions », *Histoire de l'enseignement des mathématiques*, *Bulletin de l'APMEP*, 439, p. 200-222.

1998 « Une histoire de l'objectivité scientifique et le concept de postérité », in Guesnerie (R.) et Hartog (F.), 1998, *Des sciences et des techniques : un débat*. Paris, Editions de l'EHESS, Armand Colin, p. 127-148.

Dickson (Leonard E), 1900, « Canonical Form of a linear Homogeneous Substitution in a Galois Field », *Amer. J. Math.*, 22, p. 121-137.

1901, *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*. Leipzig, Teubner.

1902, « A matrix defined by the quaternion group », *Amer. Math. Monthly*, 9, p. 243-248.

1907, « Modular theory of group-matrices », *American M. S. Trans.*, 8, p. 389-398.

1912, « Linear algebras », *Transactions of the American Mathematical Society*, 13, p. 59-73.

1913, « On the rank of a symmetrical matrix », *Annals of Math.*, (2) 15, p. 27-28.

1923, *Algebras and Their Arithmetics*. Chicago, University of Chicago Press.

1924, « A new theory of linear transformations and pairs of bilinear forms », *Proceedings of the international mathematical congress*, Toronto, University of Toronto Press, p. 361-363.

1926, *Modern algebraic theories*. Sanborn, Chicago.

1927, *Algebren und ihre Zahlentheorie*. Übersetzt von J. J. Burckhardt und E. Schubarth. Mit einem Kapitel über Idealtheorie von A. Speiser. Zürich, Orell Füssli.

Dieudonne (Jean), 1946, « Sur la réduction canonique des couples de matrices », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 74, p. 130-146.

1978, *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Paris, Hermann.

Dirac (Paul A.), 1930, *Quantum Mechanics*. Oxford.

Dogson (Charles), 1867, *An elementary treatise on determinants : with their application to simultaneous linear equations and algebraical geometry*, London, Macmillan and Co.

Doebelin (Wolfgang), 1936, « Sur les chaînes de Markoff », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 203, p. 1210-1211.

1938 « Sur l'équation matricielle $A^{t+s} = A^t \setminus A^s$ et ses applications aux probabilités en chaîne », *Bull. Sci. math.*, (2) 62, p. 21-32.

Drach (Jules) et Meyer (Wilhelm F.), 1907, « Théorie algébrique des formes bilinéaires », *Encyclopédie des sciences mathématiques*, I 2, p. 426-487, Paris, Gauthier-Villars, Leipzig, B.G. Teubner.

Durand-Richard (Marie Josée), 1990, « La Genèse de l'Algèbre Symbolique : Une Influence Possible de J. Locke », *Revue d'Histoire des Sciences*, 1990, XLIII, n° 2-3, p. 129-180

1996, « L'École algébrique anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance », dans Goldstein (C.), Gray (J.) & Ritter (J.) (éds.), 1996, *L'Europe mathématique. Mythes, histoires, identités*, Paris, Maison des sciences de l'homme, p. 445-477.

2008 *L'analogie dans la démarche scientifique*. Paris, l'Harmattan.

Ernesto Timerding (Heinrich) et Epstein (Paul), 1922, *Repertorium der höheren Mathematik*. Leipzig, B. G. Teubner.

Evans (James) et Thorndike (Alan S.) (éds.), 2007, *Quantum mechanics at the crossroads. New perspectives from history, philosophy and physics*. The Frontiers Collection, Berlin, Springer.

Fantappiè (Luigi), 1928a, « Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrici infinite nella teoria dei quanti », *Rendiconti Accad. d. L. Roma*, (6) 8, p. 645-650.

1928b « Le calcul des matrices », *C. R.*, 186, p. 619-621.

Fenster (Della D.), 1997, « Mentoring in Mathematics : The Case of Leonard Eugene Dickson », *Historia Mathematica*, 24, p. 7-24.

1998, « Leonard Eugene Dickson and his Work in the Arithmetics of Algebras », *Archive for History of Exact Sciences*, 52, p. 119-159.

Fenster (Della D.) et Schwermer (Joachim), 2005, « A Delicate Collaboration: Adrian Albert and Helmut Hasse and the Principal Theorem in Division Algebras in the Early 1930's », *Arch. Hist. Exact. Sci.* 59, p. 349-379.

Fenster (Della D.) et Parshall (Karen), 1994, « A profile of the American mathematical research community 1891–1906 », dans Knobloch (Eberhard) et Rowe (David) (éds.), 1994, *The History of Modern Mathematics*, vol. 3 : *Images, Ideas and Communities*, Academic Press, Boston, San Diego, etc., p. 179–227.

Février (P.), 1937, « Les relations d'incertitude de Heisenberg et la logique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 204, p. 481-483.

Folta (Jaroslav) et Nový (Lubős), 1965, « Sur la question des méthodes quantitatives dans l'histoire des mathématiques », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*. 1, p. 3–35.

Forsyth (Andrew R.), 1884, « Proof of a theorem by Cayley in regard to matrices », *Mess. of Math.*, 13, p. 139-142.

1930, *Geometry of four dimensions*. Cambridge, University Press.

Foster (Alfred L.), 1931, « Formal logic in finite terms », *Annals of Math.*, (2) 32, p. 407-430.

Fréchet (Maurice) et Borel (Émile), 1938, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, Paris, Gauthier-Villars.

Frank (J.) et Jordan (Paul.), 1926, *Anregung von Quantensprüngen durch Stösse*, Berlin, Springer.

Frank (Philipp.), Mises (R.), 1935, *Die differential- und integralgleichungen der mechanik und physik*. Braunschweig, Friedr. Vieweg & sohn.

Franklin (Philip), 1925, « The electric currents in a network », *Journ. of Math. Massachusetts*, 4, p. 97-102.

Frazer (R. A.), Duncan (W. J.) et Collar (A. R.), 1938, *Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equations*, Cambridge, University press.

Frenkel (Jacov), 1932, *Wave mechanics : I elementary theory*, Oxford, Clarendon press.

Fricke (Robert), 1924, *Lehrbuch der Algebra, verfasst mit benutzung von H. Webers gleichnamigem buche*. Braunschweig, Vieweg u. Sohn.

Frobenius (Ferdinand), 1878, « Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84, p. 343-405.

1879, « Theorie der linearen Formen mit ganzen coefficienten », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 86, p. 482-544.

1896a, « Ueber vertauschbare Matrizen », *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin*, p. 601-14.

- 1896b, « Ueber Gruppencharaktere », *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin*, p. 985-1021.
- 1897, « Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen », *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin*, p. 994-1015.
- 1903, « Theorie der hyperkomplexen Grössen », *Berl. Ber.*, p. 504-537, 634-645.
- 1910, « Ueber die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen », *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin*, p. 3-15.
- 1911 « Ueber den rang einer Matrix », *S'ber. Akad. d. Wiss. Berlin*, p. 20-29, 128-129.
- Fujiwara (Matsusaburo), 1932, *Algebra bd. I*, Tokio.
- Gandon (Sébastien), 2004, « Russel et l'*Universal Algebra* de Whitehead : la géométrie projective entre ordre et incidence (1898-1903), *Revue d'histoire des mathématiques*, 10, p. 187-256.
- Gantmacher (Felix), 1935, « The geometric theory of elementary divisors according to Krull », *Trans. Univ. Odessa. Math.*, 1, p. 89-108.
- 1959 *The theory of matrices*. New York, Chelsea.
- Gauss (Carl.Friedrich), 1801, *Disquisitiones arithmeticae*, Leipzig, Fleischer.
- Gibbs (J. Willard), « On multiple algebra », *Am. Ass.*, XXXV.
- Gini (Corrado), 1933, « Sur une méthode pour déterminer le nombre moyen des enfants légitimes par mariage », *Revue Inst. internar. Statistique*, 1 Nr. 1, p. 56-60.
- Gispert-Chambaz (Hélène), 1991, *La France mathématique. La société mathématique de France (1870-1914)*, Paris, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, N.34.
- Gispert (Hélène) et Tobies, (R.), 1996, « A comparative study on the French and German Mathematical Societies before 1914 » Goldstein (C.), Gray (J.) et Ritter (J.), 1996, *L'Europe mathématique*. Paris, Editions de la Maison des sciences de l'homme, p. 391-433.
- Godeaux (Lucien), 1915, « Sur l'emploi de certaines matrices de formes dans la résolution de problèmes de géométrie », *Ens. math.*, 17, p. 32-40.
- Goldstein (Catherine), 1989, « L'un est l'autre : pour une histoire du cercle », dans Serres, 1989 (éd.), *Éléments d'histoire des sciences*, Paris, Larousse, 1989, p.199-235.
- 1995, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis ,PUV (Histoires de science).
- 1997, « Sur quelques pratiques de l'information mathématique », *Solaris*, 4, p. 12210.
- 1999, « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, 3, 28, p. 187—214.
- Goldstein (Catherine), Gray (Jeremy) et Ritter (Jim) (dir.), 1996, *L'Europe mathématique : Mythes, histoires, identités -- Mathematical Europe: Myth, History, Identity*, Paris, Editions de la Maison des sciences de l'homme.
- Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) et Schwermer (Joachim) (Eds.), 2007, *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Heidelberg, Berlin, etc., Springer.
- Gomes (Ruy L.), 1933, « Opérateurs linéaires. Matrices limitées », *Rendiconti Acad. d. L. Roma*, (6) 17, p. 41-45.
- Grassman (Hermann), 1862, *Ausdehnungslehre*, Berlin.
- Grattan-Guinness (Ivor) et Ledermann (Walter), 1994, « Matrix theory », dans Grattan-Guinness (Ivor), 1994, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences*. London, p. 775-786.
- Gray (Jeremy), 2000, *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*. 2de ed. Boston , Birkhäuser.
- Haas (Arthur), 1928, *Materiewellen und quantenmechanik*. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.
- Hamilton (William R.), 1853, *Lectures on quaternions*, Dublin.

Hasse (Helmut), 1924, "Symmetrische Matrizen im Körper der rationalen Zahlen," *Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik*, 153, p. 12–43.

1928, « Review of *Algebren und ihre Zahlentheorie* », *Jahresbericht der DMV*, 37, 2. Abt., p. 90–97.

1932 « Strukturtheorie der halbeinfachen Algebren über algebraischen Zahlkörpern », dans Saxer(Walter), 1932, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zürich 1932*, II. Band, Sektions-Vorträge, p. 18–19.

Haubrich (Ralf), 1998, « Frobenius, Schur, and the Berlin algebraic tradition », dans Begehr (Heinrich) et al., 1998, *Mathematics in Berlin*. Berlin, Birkhäuser, p. 83-96.

Haupt (Otto), 1929, *Einführung in die Algebra*. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft.

Hawkins (Thomas), 1971, « The Origins of the Theory of Groups Characters », *Arch. His. Ex. Sci.*, 7, No. 2, p. 142-70.

1972, « Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory », *Arch. History for Exact Sci.*, 8, p. 243-287.

1975a, « Cauchy and the spectral Theory of Matrices », *Historia Mathematica*, 2, p. 1-20.

1975b, « The theory of Matrices in the 19th Century », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians : Vancouver*, 2, p. 561-70.

1977a, « Another Look at Cayley and the Theory of Matrices », *Arch. int. hist. sci.*, 26, p. 87-112.

1977, « Weierstrass and the Theory of Matrices », *Archive for History of Exact Sciences*, 17, p. 119-163.

1996, « From general relativity to group representations. The background to Weyl's Papers of 1925-26 », *SMF congrès de Nice*, p. 69-99.

2000, *Emergence of the theory of Lie groups an essay in the history of mathematics, 1869-1926*. New York, Berlin, Barcelone, Springer.

Hawkes (Herbert E.), 1905, « On quaternions Number Systems », *Math. An.*, 60, p. 437.

1910, « The reduction of families of bilinear forms », *Amer. Journ.*, 32, p. 101-114.

Hebroni (Pessach), 1938, « Sur les matrices continuisées à deux termes et leur application aux équations intégral-différentielles linéaires », *C. r. Acad. sci. Paris*, 207, p. 1371-1373.

Hecke (Erich), 1935, *Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*. Meddelelser København 13, Nr. 10, 16.

Heisenberg (Werner), Schrödinger (Erwin) et Dirac (Paul. A.), 1934 *Die moderne Atomtheorie. Die bei der Entgegennahme des Nobelpreises 1933 in Stockholm gehaltenen Vorträge*. Leipzig, Hirzel.

Hellinger (Ernst), Toeplitz (Otto), 1906, « Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen », *Gött. Nachr.*, p. 351-355.

1910, « Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen », *Math. Ann.*, 69, p. 289-330.

Hensel (Kurt), 1904, « Theorie der Körper von Matrizen », *Jl. f. Math.*, 127, p. 116-166.

Hensel (Kurt) et Landberg (Georg), 1902, *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*. Leipzig, B. G. Teubner.

1913, *Zahlentheorie*. Berlin, Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

Hermite (Charles), 1857, « Sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynômes homogènes du second degré », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 53, p. 271-274.

Herschel (John), 1820, *Examples of the Calculus of the Finite Differences*, Cambridge.

Hilbert (David), 1899, *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1899.

Hilton (Harold H.), 1909, « On the canonical form of a linear substitution », *Mess. of Math.*, 39, p. 24-26.

- 1912, « Substitutions permutable with a canonical substitution », *Mess. of Math.*, 41, p. 110-118.
- Hitchcock (Frank L.), 1922, « A solution of the linear matrix equation by double multiplication », *Nat. Acad. Proc.*, 8, p. 78-83.
- Hogben (Lancelot), 1933, « A matrix notation for Mendelian populations », *Proceedings Royal Soc. Edinburgh*, 53, p. 7-25.
- Hopkins (Charles), 1934, « An elementary proof of the theorem that the most general matrix commutative with a given n -rowed square matrix involves at least n arbitrary parameters », *Tôhoku Math. Journ.*, 39, p. 358-360.
- Hostinský (Bohuslav), 1931, *Méthodes générales du calcul des probabilités*. Paris, Mémorial sc. math., fasc. 52.
- Huber-Stoekar (E.), 1937, « L'échiquier du diable », C.-R. deuxième Congr. internat. Récréation math., Paris, p. 64-68.
- Hurwitz (Adolf), 1919, *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*. Berlin, Springer.
- Ingraham (Mark H.), 1926, « The infinite case of the equivalence of linear associative algebras to matrix algebras », *Bulletin A. M. S.*, 32, p. 589.
- 1933, « On the reduction of a matrix to its rational canonical form ». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39, p. 379-382.
- Ingraham (Mark H.) et Wolf (Margarete C.), 1937, « Relative linear sets and similarity of matrices whose elements belong to a division algebra », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 42, p. 16-31.
- Ito (Makoto.), 1932, « A geometrical study of the characteristic equation », *Tôhoku Math. Journal*, 35, p. 294-303
- Jensen (Hans), 1939, *Herleitung einiger ergebnisse der ausgleichsrechnung mit hilfe von matrizen*. København, Geodaetisk inst.
- Jordan (Camille), 1870, *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris.
- 1872, « Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 74, p. 1395-1399.
- 1873, « Sur les polynômes bilinéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 77, p. 1487-1491.
- 1874, « Mémoire sur les formes bilinéaires », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (2) 19, p. 35-54.
- 1906, « Réduction d'un réseau de formes quadratiques ou bilinéaires », *Jl. de math. pures et appl.* (6), t. II, p. 403-438 et t. III., p. 5-51.
- Jordan (Paul), 1936, *Anschauliche Quantentheorie. Eine Einführung in die moderne Auffassung der Quantenerscheinungen*. Berlin, Springer.
- Julia (Gaston) et Dufresnoy (J.), 1936, *Introduction mathématique aux théories quantiques*. Paris, Gauthier-Villars (Cahiers scientifiques, Fasc. XVI).
- Kawaguchi (Akitsugu), 1934, « The foundation of the theory of displacements. III », *Proceedings Acad. Tokyo*, 10, p. 133-136.
- Klein (Felix) et Courant (Richard), 1926, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. I*. Berlin, Springer (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 24).
- Knobloch (Eberhard), 1994, « From Gauss to Weierstrass : determinant theory and its historical evaluations », dans *The intersection of history and mathematics*, Basel, p. 51-66.
- König (Dénes), 1936, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft (Mathematik in Monographien, Bd. 16).
- Kotchine (N.), 1937, « Sur la décomposition d'une matrice à définition rationnelle », *Rec. math., Moscou*, (2) 2, p. 901-922.
- Köthe (Gottfried) et Toeplitz (Otto), 1934, « Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen », *J. f. M.*, 171, p. 193-226.

Kowalewski (Gerhard), 1916, « Natürliche Normalformen linearer Transformationen », *Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig*, 68, p. 325-335.

1925, *Einführung in die Determinantentheorie einschliesslich der Fredholmschen Determinanten*. 2. Berlin, de Gruyter & Co.

1937, *Magische Quadrate und magische Parkette*. Leipzig, K. F. Koehler.

Kraitchik (M.), 1926, *Le problème des reines*. I, II. Bruxelles, Imprimerie Flament.

Kravčuk (Mikhail), 1924, *Quadratische Formen und lineare Transformationen*. Kiev, Mem. Ac. Sc. 1, 3, 59 (Ukr., mit franz. Res.).

1927, « Ueber vertauschbare Matrizen », *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 51, p. 126-130.

Kreis (Henri), 1909, *Einige Anwendungen der Matricestheorie*. Progr. Gymn. u. Industrieschule in Winterthur, 1909/10.

Krull (Wolfgang), 1921, *Ueber Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie*. Freiburg.

1926, *Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen*. Heidelberg, Sitzungsberichte Heidelberg.

Kronecker (Leopold), 1874, « Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 59-76.

1890, « Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen », *Berl. Ber.*, p. 1225-1237.

Kumamoto (A.), 1888, « Zur Theorie der "Matrices" », *Tokio Math. Ges. III.*, p. 153-161.

Kwal (Bernard), 1934a, « La théorie des équations de Maxwell et le calcul des opérateurs matriciels », *Journ. de Phys., Radium* (7) 5, p. 445-448.

1934b, « Sur un système de matrices réelles qui intervient dans la théorie de l'électron magnétique lorsqu'on se place dans l'espace temps de la relativité restreinte », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 198, p. 1582-1584.

1935, « Sur la représentation matricielle des quaternions », *Bull. Sc. math.*, 59, p. 328-332.

Lacki (Jan), 2000, « The Early Axiomatizations of Quantum Mechanics : Jordan, von Neumann and the Continuation of the Hilbert Program », *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 24, p. 279-318.

Lagrange (Joseph-Louis), 1788, *Mécanique analytique*. 2^{de} ed, Paris, 1811-1815.

Laguerre (Edmond), 1867, « Sur le calcul des systèmes linaires », *Jour. Ec. Pol.*, LXII, p. 221-267.

Laisant (Charles A.), 1881, *Introduction à la méthode des quaternions*. Paris, 1881.

Laplace (Pierre-Simon de), 1775, « Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes », *Memoires de l'Académie des sciences de Paris*, Partie I, p. 325-366.

Lappo-Danilevski (J. A.), 1929, « Problème fondamental de la théorie des fonctions dans la classe des matrices, satisfaisant à des systèmes d'équations différentielles à coefficients rationnels », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 188, p. 982-984.

1934, « Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. I: Théorie générale des fonctions des matrices », *Trav. Inst. Stekloff*, 6, p. 1-151.

1935, « Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires. V: Théorie des matrices satisfaisantes à des systèmes d'équations différentielles à coefficients rationnels arbitraires », *Trav. Inst. Stekloff*, 7, p. 32-99.

Lascar (Jacques), 1998, « Perspective historique sur les rapports entre la théorie des modèles et l'algèbre. Un point de vue tendancieux », *Revue d'histoire des mathématiques*, 4, p. 237-260.

Lattes (S.), 1912, « Sur la réduction des substitutions linéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 155, p. 1482-1484.

1914, « Sur une forme canonique des substitutions linéaires », *Ann. Toulouse*, (3) 6, p. 1-84.

Laurent (Hermann), 1896, « Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions linéaires », *Nouv. Annales*, (3), 15, p. 345-365.

1897 « Applications de la théorie des substitutions linéaires à l'étude des groupes », *Nouv. Annales*, (3) 16, p. 149-168.

Lazerowitz (M.), 1937, « Tautologies and the matrix method », *Mind*, 46, p. 191-205.

Lecat (Maurice), 1910, *Leçons sur la théorie des déterminants à n dimensions avec applications à l'algèbre, à la géométrie, etc.* Gand, Hoste.

1925, « Permanent composé des déterminants d'une matrice », *Messenger*, 54, p. 172-173.

Levi-Civita (Tullio) et Duschek (Adalbert), 1928, *Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik.* Berlin, Springer.

Levinson (H. C.) et Zeisler (E. B.), 1929, *The law of gravitation in relativity.* Chicago, The University of Chicago Press.

Lewis (Clarence) et Langford (Cooper), 1932, *Symbolic logic.* New York, London, The Century Co.

Lie (Sophus), 1876, « Theorie der Transformationsgruppen. Erste Abhandlung », *Archiv für Math*, 1, p. 19-67.

Lipschitz (Rudolf), 1880, « Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 91, p. 619-621.

Littlewood (Dudley E.), 1940, *The theory of group characters and matrix representations of groups.* Oxford, Clarendon Press, London, Oxford Univ. Press.

Loewy (Alfred), 1896, « Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 123, p. 168-170.

1917, « Die Begleitmatrix eines linearen homogenen Differentialausdruckes », *Nachr.*, p. 255-263.

1918, « Ueber einen fundamentalsatz für Matrizen oder lineare homogene Differentialsysteme », *Sitzb. Heidel. Akad.*

1935, « Über ein Integralsystem mit Stieltjesschen Integralen, seine anschauliche Interpretation und den Infinitesimalkalkül für Matrizen », *Compositio math.*, 2, p. 417-423.

Lohan (Ralf), 1933, « Das Entwicklungsverfahren zum Ausgleichen geodätischer Netze nach Boltz im Matrizenkalkül », *Z. f. angew. Math.*, 13, p. 59-60.

Lowry (H. V.), 1926, « A curious determinant », *Math. Gazette*, 13, p. 27-28.

McCoy (Neal H.), 1935, « On the rational canonical form of a function of a matrix », *Amer. Journ. of Math.*, 57, p. 491-502.

Mac Duffee (Cyrus C.), 1928, « A correspondence between matrices and quadratic ideals », *Annals of Math.*, 29, p. 199-214.

1929, « On the independence of the first and second matrices of an algebra », *Bull. Amer. Math. Soc.*, 31, p. 71-90.

1931, « The discriminant matrix of a semi-simple algebra », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 33, p. 425-432.

1933, *The Theory of Matrices*, New-York, Chelsea.

1936, « On a fundamental theorem in matrix theory », *Amer. J. Math.*, 58, p., 504-506.

1940, *An Introduction to Abstract Algebra.* Dover, New York.

1943, *Vectors and Matrices.* Menasha, Wisconsin, The Mathematical Association of America, The collegiate Press.

- Mac Lane (Saunders), 1975, « History of abstract algebra: origin, rise and decline of a movement », *Texas Tech University, Mathematics Series*, no. 13.
- Macfarlane (Alex), 1891, « Principles of the algebra of physics », *American Assoc. for the advancement of science Proc.* XL, p. 65-117.
- Martini (Laura), 2004, « Algebraic research schools in Italy at the turn of the twentieth century : the cases of Rome, Palermo and Pisa », *Hist. Math.*, 31, No. 3, p. 296-309.
- Madelung (Erwin), 1922, *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*. Berlin, Springer.
- Marshall (J. B.), 1939, « On the extension of Fermat's theorem to matrices of order n », *Proc. Edinburgh math. Soc.*, (2) 6, p. 85-91.
- Maschke (Heinrich), 1898, « Die Reduction linearer homogener Substitutionen von enlicher Periode auf ihre kanonische Form », *Math. Ann.*, 50, p. 220.
- Mazliak (Laurent), 2007, « On the exchanges between Wolfgang Doeblin and Bohuslav Hostinský », *Revue d'histoire des mathématiques*, 15, p. 155-180.
- Mehrtens (H.), Bos (H.) et Schnieder (I.) (éds.), 1981, *Social history of Nineteenth Century Mathematics*. Bâle, Boston, Berlin, Birkhäuser.
- Menn (Fritz), 1934, *Die konvergenzfreien linearen Räume endlicher Stufe und die dazugehörigen Matrizenringe*. Münster, Westf. Diss.
- Menge (Walter O.), 1931, « Reduction of linear transformations to canonical forms ». *Bulletin A. M. S.*, 37.
1933 « Construction of transformations to canonical forms », *Amer. J. Math.*, 55, p. 671-682.
- Metzler (William H.), 1892, « On the Roots of Matrices », *Amer. J. Math.*, p. 326-377.
1893, « Matrices which represent vectors », *Boston Tech. Quart.* 6.
1914, « On the rank of a matrix », *Annals of Math.*, (2) 15, p. 161-165.
- Miller (George A.), 1916, « Finite groups represented by special matrices », *American M. S. Bull.*, 22, p. 291-292.
1930, « On the history of determinants », *Amer. Math. Monthly*, 37, p. 216-219.
- Ming (Nai-Ta), 1939, *Indexmethode zur Entwicklung der Determinanten für höhere Ordnung und zur Berechnung der Inversen Matrix (mit einer Tabelle von 1. bis 6. Ordnung der Determinanten)*. Leipzig, Robert Noske.
- Minkowski (Hermann), 1910, *Geometrie der Zahlen*. Leipzig, Teubner.
- Molien (Theodor), 1893, « Über Systeme höherer complexer Zahlen », *Math. Ann.*, 41, p. 83-156
1897, « Eine Bemerkung zur Theorie der homogenen substitutionsgruppe », *S'ber. Naturforscher-Ges. Univ. Jurjeff (Dorpat)*, 11, p. 259-74.
- Moisil (Grigore C.), 1932a, « Sur les sauts de probabilité dans les évolutions stochastiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 195, p. 507-509.
1932b, « Sur l'intégration des matrices », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 195, p. 456-458.
- Moore (Eliakim H.), 1892, « A doubly-infinite system of simple groups », *Mathematical Papers Read at the International Mathematical Congress Held in Connection with the World's Columbian Exposition*, Chicago, p. 208-242.
1893, « An universal invariant for Finite Groups of linear Substitutions: with applications in the Theory of the Canonical Form of a linear Substitution of Finite Period », *Math. Ann.*, 50, p. 213, 219.
1916, « On properly positive Hermitian matrices », *American M. S. Bull.*, 23, p. 66-67.
1922, « On the determinant of an Hermitian matrix of quaternionic elements », *American M. S. Bull.*, 28, p. 161.

Morinaga (Kakutaro), 1934, « An extension of parallel displacement by matrices », *Journal Hiroshima Univ.*, (A) 4, p. 127-140.

Muir (Thomas), 1885, « New relations between bipartite functions and determinants with a proof of Cayley's theorem in matrices », *Proc. London Math. Soc.*, 16, p. 276-286.

1906, *The theory of determinants in the historical order of Development*. Londres, Macmillan and Co.

1925, « The theory of compound determinants from 1900 to 1920 », *Proceedings Royal Soc. Edinburgh*, 45, p. 187-212.

1929, « The literature of Cayleyan matrices », *Transactions Royal Soc. South Africa*, 18, p. 219-227.

Murnaghan (Francis D.), 1938, *The theory of group representations*. Baltimore, The Johns Hopkins Press.

1931, « On the representation of a Lorentz transformation by means of two-rowed matrices », *Amer. Math. Monthly*, 38, p. 504-511.

Murnaghan (Francis D.) et Wintner (Aurel), 1931a, « A canonical form for real matrices under orthogonal transformations », *Proceedings USA Academy*, 17, p. 417-420.

Nakano (Hidegoro), 1934, « Über die Matrixfunktion », *Japanese Journ. of Math.*, 11, p. 9-13.

Namase-Marie (Frère), 1939, « Sur la détermination de la date de Pâques. Démonstration générale de la formule de Gauss. Nouvelles formules, très simples, très rapides, en fonction du seul millésime. Tables pour calculer la date de Pâques par ces formules », *Ann. Soc. sci. Bruxelles*, 59, p. 225-256.

Netto (Eugen), 1896, *Vorlesungen über Algebra*. Leipzig.

1910, *Die Determinanten*. Leipzig, Berlin, B. G. Teubner.

1915, *Grundlehren der Mathematik. 1. Teil, 2. Band: Algebra*. Leipzig, B. G. Teubner.

Noether (Emmy), 1926, « Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 157, p. 82-104.

1929, « Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie », *Mathematische Zeitschrift*, 30, p. 641-692.

1932, « Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie », dans Saxer (Walter), 1932, *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zürich 1932*, I. Band, Zürich-Leipzig, Orell-Füssli, p. 189-194.

Neumann (Bernhard), 1933, « Matrizenkalkül in der Booleschen Algebra », *Jahresbericht D. M. V.*, 42, p. 126-130.

Novotný (Miroslav), 1953, « Le noyau abstrait de la construction de Weyr des nombres caractéristiques des matrices », *Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk*, p. 41-51.

Nový (Lubos), 1968, « L'Ecole Algébrique Anglaise », *Revue de synthèse*, III° S., n°49-52, p. 211-222.

Nicoletti (Onorato), 1907, « Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari », *Annali di Mat.*, (3) 14, p. 265-325.

Oldenburger (Rufus), 1935, « Canonical triples of bilinear forms », *Tôhoku math. Journ.*, 41, p. 216-221.

Oppenheimer (J. Robert), 1927, « Zur Quantentheorie der kontinuierlichen Spektren », *Z. f. Physik*, 41, p. 268-293.

Ory (Herbert), 1928, « Sur l'équation $x^n = a$ où a est un tableau carré du deuxième ordre », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 187, p. 1012-1014.

Ostenc (Émile), 1933, « Sur les zéros des matrices stochastique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 196, p. 150-151.

Parshall (Karen H.), 1983, « In Pursuit of the Finite Division Algebra Theorem and Beyond : Joseph H.M. Wedderburn, Leonard E. Dickson, and Oswald Veblen », *Archives internationales d'Histoire des Sciences*, 33, p. 274-99.

- 1985, « Joseph H.M. Wedderburn and the Structure Theory of Algebras », *Archive for History of Exact Sciences*, 32, p. 223–349.
- 1988, « America's First School of Mathematical Research: James Joseph Sylvester at the John Hopkins University 1876–1883 », *Archive for History of Exact Sciences*, 38, p. 153–196.
- 1989, « Toward a History of Nineteenth-Century Invariant Theory », dans Rowe (D.) et McCleary (J.), 1989, *The History of Modern Mathematics*, Boston, Academic Press, Vol. 1, p. 157-206.
- 1991, « A Study in Group Theory : Leonard Eugene Dickson's *Linear Groups* », *The mathematical intelligencer*, 13, p. 7-11.
- 1998, *James Joseph Sylvester, life and work in letters*. Clarendon Press.
- 2004, « Defining a mathematical research school : the case of algebra at the University of Chicago, 1892-1945 », *Historia Mathematica*, 31, p. 263-278.
- 2006a, « The British development of the theory of invariants (1841–1895) », *British Society for the History of Mathematics Bulletin*, 21, p.186–199.
- 2006b, *James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World*. Baltimore, The Johns Hopkins University Press.
- Parshall (Karen H.) et Rowe (David E.), 1994, *The Emergence of the American Mathematical Research Community (1876–1900) : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E.H. Moore*. Providence, American Mathematical Society, Londre, Mathematical Society (AMS/LMS Series in the History of Mathematics, vol. 8).
- Parshall (Karen H.) et Seneta (Eugene), 1997, « Building an International Reputation: The Case of J.J. Sylvester (1814–1897) », *American Mathematical Monthly*, 104, p. 210–222.
- Pauli (Wolfgang), 1935, « Beiträge zur mathematischen Theorie der Diracschen Matrizen », *Zeeman-Festschr.*, p. 31-43.
- 1936, « Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac », *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 6, p. 109-136.
- Peacock (George), 1830, *Treatise of algebra*. Cambridge, Deighton.
- Peirce (Benjamin), 1870, *Linear Associative Algebra*. Lithographié.
- Peirce (Charles S.), 1873, « Description of a Notation for the Logic of Relatives, Resulting from an Amplification of the Conceptions of Boole's Calculus of Logic », *Mem. Amer. Acad. Arts. and Sci.*, 9, p. 317-89.
- Pelosi (Luisa), 1932, « Sull'esponenziale di una matrice, la cui equazione caratteristica è binomia », *Atti Pontificia Accad.*, 85, p. 336-344.
- Perron (Oskar), 1906, « Zur Theorie der Matrizes », *Math. Ann.*, 64, p. 248-263.
- Persico (Enrico), 1936, *Fondamenti della meccanica atomica*. Bologna, N. Zanichelli.
- Petiau (Gerard), 1937, « Sur la représentation matricielle des équations de Maxwell », *C. r. Acad. sci. Paris*, 204, p. 1710-1713.
- Phillips (H. B.) et Moore (C. L. E.), 1912, « A geometric use of matrices », *Americ. Math. Soc. Bull.*, (2) 18, p. 490.
- Petr (K.) et Sobotka (J.), 1905, « Über das Leben und die Tätigkeit von *Eduard Weyr* », *Casopis*, 34, p. 457-516.
- Pycior (Helena M.), 1982 « Early Criticism of the Symbolical Approach to Algebra », *Historia Mathematica*, 9, p. 392-412.
- 1981, « George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra » *Historia Mathematica*, 8, p. 23-45.
- 1979, « Benjamin Peirce's 'Linear Associative Algebra' », *Isis*, 70, p. 537-51.
- Pincherle (Salvatore), 1899, « Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif », *Math. Annalen*, 49, p. 325-383.
- Pipes (Louis A.), 1937, « Matrices in engineering », *Electr. Engineering*, p. 1177-1190.

- Plemelj (Jossip), 1901, « Ein Satz über vertauschbare Matrizen und seine Anwendung in der Theorie linearer Differentialgleichungen », *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, 12, p. 82-96.
- Poincaré (Henri), 1884 « Sur les nombres complexes », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 99 (1884), 740-42.
- Polya (George), 1928, « Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktionen im Matrizenkalkül », *Berlin. Sitzb.* (1928) 96-99.
- Porcu-Tortrini (Ernesta), 1927, « Calcolo delle potenze delle matrici di secondo ordine mediante riduzione alla forma canonica », *Atti Pontificia Accad.*, 80, p. 277-281.
- Rados (Gustav), 1897, « Zur Theorie der adjungirten Substitutionen », *Math Ann.*, 48, p. 417-424.
- Ravut (L.), 1894, « Résolution des équations des deuxième, troisième et quatrième degrés en prenant pour point de départ l'équation identique de Cayley sur les matrices », *Assoc. Franç. Caen*. XXIII, p. 285-294.
- 1898 « Remarques sur une matrice », *Nouv. Ann.*, (3) 17, p. 118-120.
- Rasmussen (Anne), 1995, *L'internationale scientifique (1890-1914)*. Thèse de doctorat, Paris, EHESS.
- Raiford (Theodore E.), 1936, « Geometry as a basis for canonical forms », *Amer. math. Monthly*, 43, p. 82-89.
- Revel (Jacques), éd, 1996, *Jeux d'échelles: La micro-analyse à l'expérience*. Paris, Gallimard/Le Seuil.
- Riemann (Bernhard), 1857, « Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten », *Œuvres*, p. 379-389.
- Ruark (Arthur E.) et Harold (Clayton), 1930, *Atoms, molecules and quanta*, New York, Mc Graw-Hill Book Co.
- Romanovsky (V.), « Sur les zéros des matrices stochastiques », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 192, p. 266-269.
- Rose (Clarence E.), 1940, *Matrix and tensor algebra for engineers and chemists*. New York, Chemical Publishing Co.
- Röseler (Hans), 1933, *Normalformen von Matrizen gegenüber unitären Transformationen*. Darmstadt, Diss.
- Rosental (Claude), 2003, *La trame de l'évidence. Sociologie de la démonstration en logique*. Paris, PUF.
- Rusam (Friedrich), 1934, *Matrizenringe mit Koeffizienten aus endlichen Ringen ganzer Zahlen*. Erlangen, Diss.
- Rutherford (Daniel E.), 1932a « On the canonical form of a rational integral function of matrix », *Proc Akad. Wet. Amsterdam*, 35, p. 870-875.
- 1932b, « On the rational commutant of a square matrix », *Proceedings Amsterdam*, 35, p. 870-870
- Sauvage (Louis), 1891, « Théorie des diviseurs élémentaires et applications », *Annales de l'école Normale*, III 8, p. 285-340.
- Scheffers (Georg), 1891, « Zurückführung komplexer Zahlensysteme », *Math. Ann.*, 39, p. 292-390.
- Schlesinger (Ludwig) 1908, *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*. Leipzig.
- 1929, « Über den Logarithmus einer Matrix », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 161, p. 199-200.
- 1922, *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage*. 3. Auflage. Berlin, W. de Gruyter.
- Schneider (Hans), 1977, « The concepts of irreducibility and full indecomposability of a matrix in the works of Frobenius, König and Markov », *Linear Algebra and Appl.*, 18 (2), p. 139-162.
- Scholz (Ehrard), 2006, « Introducing groups into quantum theory (1926-1930) », *Historia Mathematica*, 33, p. 440-490.
- Schluckebier (Marie-Luise), 1935, *Äquimodulare Matrizen*. Bonn, diss.

Schouten (Jan A.) et Struik (Dirk J.), 1935, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. Groningen, P. Noordhoff.

Schmidt (Harry), 1935, *Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung*. Leipzig, M. Jänecke.

Schreier (J.), 1932, « Sur les systèmes d'élimination dans les tournois », *Mathesis Polska*, 7, p. 154-160.

Schreier (Otto) et Sperner (Emanuel), 1932, *Vorlesungen über Matrizen*. Leipzig, B. G. Teubner.

1935, *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*. Leipzig, B. G. Teubner.

Schubring (Gert), 1996, « Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth century Europe », dans Goldstein (C.), Gray (J.) et Ritter (J.), 1996, *L'Europe mathématique*. Paris, éditions de la Maison des sciences de l'homme, p. 347-363.

Schur (Issai), 1901, *Über eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*. Berlin, diss.

1905, « Zur theorie der vertauschbaren Matrizen », *Crelle*, 130, p. 66-76.

1907 « Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen », *Crelle*, 132, p. 85-137

1909 « Ueber die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen », *Math. Ann.*, 66, p. 488-510.

1927 « Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe », *Berlin Stzb.*, p. 58-75.

1936 *Die algebraischen Grundlagen der Darstellungstheorie der Gruppen. Vorlesungen über Darstellungstheorie*. Zürich, Frey & Kratz.

Schwerdtfeger (Hans), 1934a, « Sur les racines caractéristiques des matrices de formes linéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 199, p. 508-510.

1934b, « Remarques sur les matrices à formes linéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 199, p. 1086-1089.

1935a, « Sur les fonctions de matrices », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 201, p. 414-416.

1935b, *Beiträge zum Matrizen-Kalkül und zur Theorie der Gruppenmatrix*. Bonn, diss.

1938, *Les fonctions de matrices. I. Les fonctions univalentes*. Paris, Hermann.

Scorza (Gaetano.), 1921a, « Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann », *Palermo Rend.*, 45, p. 1-204.

1921b, *Corpi numerici ed algebre*. Messina, Principato.

Schulz (Hans), 1933, « The standard error of the coefficient of elasticity of demand », *Journal Amer. Statistical Association*, 28, p. 64-69.

Seguier (J. A., de), 1902, « Sur la forme canonique des substitutions linéaires », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 30, p. 247-252.

1907, « Sur la théorie des matrices », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 145, p. 1259.

1908, « Sur la théorie des matrices », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 36, p. 20-40.

Segre (Corrado), 1884, « Sulla Teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni », *Atti della R. Accademia dei Lincei, Memoire Seri terza*, XIX, p. 127-148.

1900, « Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice », *Rom. Acc. L. Rend.* (5), p. 253-260.

1921, « Mehrdimensionale Räume », *Encykl. d. math. Wiss.*, III C 7, p. 769-972.

Seitz (Frederick), 1935, « A matrix-algebraic development of the crystallographic groups », *Z. f. Kristallographie*, (A) 90, p. 289-313, 91, 336-366.

- Shoda (Kenjiro.), 1929, « Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen », *Math. zeits.*, 29, p. 696- 712.
- Sinaceur (Hourya), 1991, *Corps et modèles*, Paris, Vrin.
- Smale (Stephen), 1930, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, New York.
- Spottiswoode (William), 1877, « On Hyperjacobian surfaces and curves », *Phil. Trans.*, CLXVII, p. 351-366.
- Soleillet (Paul), 1936, « Sur l'interprétation de la phase dans les matrices de la mécanique quantique », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 203, p. 1333-1335.
- Sono (S.), 1928, *Gruppentheorie*. Tokyo.
- Smith (Henry John S.), 1861, « On systems of linear indeterminate equations and congruences », *Philos. Trans.*, cli, p. 293-326.
- Stein (Johannes), 1914, *Beiträge zur Matrizenrechnung mit Anwendung auf die Relativitätstheorie*. Leipzig.
- Stephanos (Cyparissos), 1883, « Sur la théorie des quaternions », *Math. An.*, 22, p. 329.
- 1900, « Sur une extension du calcul des substitutions linéaires », *Journ. de Math.*, (5), 6, p. 73-128.
- Stieltjes (Thomas J.), 1890, « Sur la théorie des nombres. Étude bibliographique », *Toulouse Ann. IV.*, p. 1-103.
- Stone (Marshall H.), 1932, *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*. New York, American Mathematical Society (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. XV).
- Study (Eduard), 1889, « Über Systeme von complexe Zahlen », *Göttingen Nachr.*, p. 237-68.
- 1923, *Einleitung in die Theorie der Invarianten linearen Transformationen auf Grund der Vektorenrechnung. I. Teil*. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn.
- Stuyvaert (Modeste), 1907, *Cinq études de géométrie analytique*. Liège, Mém. (3) 7.
- Sylvester (James Joseph), 1850, « On the intersections, contacts and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates », *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, p. 262-282.
- 1851a, « Enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order ; on the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions », *Phil. Mag.*, I, p. 116,295, 415, 1851.
- 1851b, « On the relations between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions », *Philosophical Magazine*, I. p. 295-305.
- 1852, « Sur une propriété nouvelle de l'équation qui sert à déterminer les inégalités séculaires des planètes », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 438-440.
- 1879, « Sur les déterminants composés ». *Borchardt J.*, LXXVIII, p. 49-68.
- 1881, « On Tchebycheff's Theory of the Totality of the Prime Numbers Comprised With Given Limits », *American Journal of Mathematics* 4, p. 230-47.
- 1882a, « Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 94, p. 55-59.
- 1882b, « Sur les Racines des Matrices unitaires », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 94, p. 396-99.
- 1883a, « On the equation to the Secular Inequalities in the Planetary Theory », *Phil. Mag.*, 16, p. 267-69.
- 1883b, « Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 97, p. 1336-40.
- 1884a, « On the Three Laws of Motion in the World of Universal Algebra », *John Hopkins University Circulars*, 3, p. 33-34.

- 1884b, « On involutants and other allied species of invariants to matrix systems », *John Hopkins University Circulars*, 9-12, p. 34, 35.
- 1884c, « Lectures on principles of universal algebra », *American Journal of Mathematics*, VI, p. 270-286.
- 1904-12 *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, Ed. H.F. Baker. 4 vol. Cambridge : University Press ; Reimpression ed., New York : Chelsea Publishing Co., 1973
- Taber (Henry), 1889, « On the Theory of Matrices », *American Journal of Mathematics*, 11, p. 337-95.
- 1891a, « On the matricial equation $\varphi\Omega = \Omega\varphi$ », *Proc Amer. Acad. Boston*, 26, p. 64-66.
- 1891b, « On certain properties of symmetric, skew symmetric, and orthogonal matrices », *Lond. M. S. Proc.*, XXII, p. 449-469.
- 1893, « On a theorem of Sylvester's relating to non-degenerate matrices », *Proc. Amer. Acad. Boston*, 27, p. 46-55.
- Takahashi (Shin-ichi.), 1932, « Zum verallgemeinerten Infinitesimalrechnung der Matrizen », *Japanese Journ. of Math.*, 9, p. 27-46.
- Tait (Peter G.), 1867, *An elementary treatise on quaternions*, Oxford.
- Telkes (Eva), 1991, « Présentation de la Faculté des sciences et de son personnel, à Paris (1901-1939) », *Rev. hist. sci.*, 44, p. 451-475.
- Thomas (Tracy), 1931, *The elementary theory of tensors, with applications to geometry and mechanics*. New York, McGraw-Hill Book Co.; London, McGraw-Hill Publishing Co.
- Turnbull (Herbert W.), 1928, *The theory of determinants, matrices, and invariants*. London.
- 1934, « Diagonal matrices », *Proceedings Cambridge*, 29, p. 347-372.
- 1935 « On the reduction of singular matrix pencils », *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (2) 4, p. 67-76.
- Tyrda (J.), 1971, « On the origin of the theory of matrices », *Acta Historiae Rerum Naturalium necnon technicarum*, p.335-354.
- Ulm (Helmut), 1937, « Elementarteilerttheorie unendlicher Matrizen », *Math. Ann.*, 114, p. 493-505.
- Ullmo (Jean), 1929, « Sur les symboles mathématiques employés en physique théorique », *Bulletin sc. Math.*, (2) 53, p. 109-128.
- Vaidyanathaswami (R.), 1932, « On the canonical reduction of Hermitian forms », *Proceedings 19th Indian Congress Bangalore*, p. 135.
- Van der Waerden (Bartel L.), 1930 *Moderne Algebra*. Berlin, Springer.
- 1932, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Berlin, Springer.
- 1977, *A history of algebra*. Berlin, Springer.
- Van Wettum (Th. B.), 1891, « De quaternion van Hamilton als matrix van Cayley », *Nieuw Archief*, XVII, p. 206-216.
- Veblen (Oswald), 1921 « On matrices whose elements are integers », *Annals of Math.*, (2) 23, p. 1-15.
- 1922, « The Cambridge Colloquium, 1916. Part II: O. Veblen. Analysis Situs », *Amer. Math. Soc., Colloquium Lectures*, vol. V, New York, Amer. Math. Soc. V.
- Véronnet (Alexandre) et Villat (Henri), 1933, *Le calcul vectoriel. Cours d'algèbre de mathématiques spéciales et de mathématiques générales*. Paris, Gauthier-Villars, 1933.
- Vitali (Giuseppe), 1929, *Geometria nello spazia hilbertiano*. Bologna, N. Zanichelli.
- Voghera (G.), 1928, « Sulla forma canonical delle matrici », *Boll. Un. mat. Ital.*, 7, p.32-34.

Vogt (H.), 1919, « Réduction à une forme normale d'un système d'équations différentielles simultanées linéaires à coefficients constants », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, XIX, p. 201.

Volterra (Vito), 1889, « Delle variabili complesse negli iperspazi », *Rom. Acc. L. Rend.*, (4), p. 158-165, 291-299.

1914, « Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali », *Rom. Acc. L. Rend.*, p. 266-269.

1937, *Fluctuations dans la lutte pour la vie. Leurs lois fondamentales et de réciprocité*. Confér. Réunion. internat. Math., Paris.

Volterra (Vito) et Hostinský (Bohuslav), 1938, *Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles*. Paris, Gauthier-Villars.

Von Neumann (John), 1927, « Zur Theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen », *Sitzungsberichte Akad. Berlin*, p. 76-90.

1929, « Über analytische Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen », *Math. Zeitschr.*, t. XXX, p. 3-42.

1932, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin, Springer.

Voss (A.), 1890, « Über die mit einer bilinearen Form vertauschbaren Formen », *Münch. Ber.* 19, p. 283-300.

Warrain (Francis), 1934, *Essai sur les principes des algorithmes primitifs. Addition - Soustraction - Multiplication - Division - Puissances - Racines*. Paris, Hermann.

Warwick (Andrew), 1992 *Cambridge Mathematics and Cavendish Physics, Cunningham, Campbell and Einstein's Relativity, 1905-1911*. *Studies in History and Philosophy of Science*, 23, 4, 1992, p. 625-656 et 24, 1, 1993, p. 1-25.

Weber (Heinrich), 1898, *Lehrbuch der Algebra*. Brunswick.

Weber (Heinrich), Wellstein (Josef) et Epstein (Paul), 1922, *Enzyklopädie der Elementarmathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende*. Leipzig, B. G. Teubner.

Wedderburn (Joseph H. M.), 1907, « On hypercomplex number systems », *Proc. London Math. Soc.* 6, p. 77-118.

1913, « Note on the rank of a symmetrical matrix », *Annals of Math.*, (2) 15, p. 29.

1921, « On division algebras », *Transactions of the American Mathematical Society*, 22, p. 129-135.

1914, « On matrices whose coefficients are entire functions », *Amer. M. S. Bull.*, (2) 21, p. 69.

1915, « On matrices whose coefficients are functions of a single variable », *Trans. Amer. Math. Soc.*, 16, p. 328-322.

1926, « Note on matrices in a given field », *Annals of Math.*, 27, p. 245-248.

1934, *Lectures on Matrices*, New York, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 17.

1938, « The canonical form of a matrix », *Ann. of Math.* 39, p. 178-180.

Wellstein, (Julius), 1909, « Die Dekomposition für Matrizen », *Gött. Nachr.*, p. 77-99

Weierstrass (Karl), 1858, « Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 207-220.

1868, « Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen », *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, p. 310-338,

Weil (André), 1934, « Une propriété caractéristique des groupes finis de substitutions », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 199, p. 180-182.

1935, « Über Matrizenringe auf Riemannschen Flächen und den Riemann-Rochschen Satz », *Abhandl. Hamburg*, 11, p. 110-115.

Weyl (Hermann), 1918, *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, Vorlesung über allgemeine Relativitätstheorie.

- 1923, *Mathematische Analyse des Raumproblems*. Berlin, Springer.
- 1928, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*. Leipzig, Hirzel.
- 1937a, « Riemannsche Matrizen und Faktorensysteme », *C. R. Congr. internat. Math.*, Oslo, 2, p. 3.
- 1937b, « Note on matric algebras », *Ann. Math. Princeton*, (2) 38, p. 477-483.
- Weyr (Eduard), 1884a, « Sur la théorie des quaternions », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 98, p. 906-8, 1320-3.
- 1884b, « Über den Hauptsatz der Matrizentheorie », *Prag. Ber.*, p. 148-152.
- 1885a « Sur la théorie des matrices », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 100, p. 787-89.
- 1885b, « Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces », *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 100, p. 966-69.
- 1887a, « Notes sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales », *Bull. sci. math.*, XVI, p. 205-215.
- 1887b, « Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices » *S'ber. d. K. Böhm. Ges.d. Wiss. Prag.*, p. 616-8.
- 1890, « Zur Theorie der bilinearen Formen », *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1, p. 161-235.
- Whitehead (Alfred), *A treatise on universal algebra*. Vol. I. Cambridge, The University Press; New York, The Macmillan Co.
- Whitney (Hassler), 1936, « Matrices of integers and combinatorial topology », *Bull Amer math. Soc.*, 42, p. 816.
- 1937, « A numerical equivalent of the four color map problem », *Mh. Math. Phys.*, 45, p. 207-213.
- Williamson (John), 1934, « Sets of semi-commutative matrices », *Proceedings Edinburgh Math. Soc.*, (2) 3, p. 179-188, 231-240.
- 1935, « The simultaneous reduction of two matrices to triangle form », *Amer. Journ. of Math.*, 57, p. 281-293.
- 1937, « On the normal forms of linear canonical transformations in dynamics », *Amer. J. Math.*, 59, p. 599-617.
- 1939, « The exponential representation of canonical matrices », *Amer. J. Math.*, 61, p. 897-911.
- Wiener (Norbert), 1928, « Coherency matrices and quantum theory », *Journal of Math. Massachusetts*, 7, p. 109-125.
- Wilkosz (Witold), 1937, « Les matrices dans la théorie des espaces vectoriels », *Ann. Soc. Polonaise Math.*, 15, p. 73-82.
- Wintner (Aurel), 1926, « Über gewisse Eigenschwingungen mit kontinuierlichem Spektrum », *Annalen d. Physik*, 81, p. 577-586, 846-854.
- 1928, « Über die Grundlagen des matrizenmechanischen Umdeutungsprinzips und über eine Spektraltheorie der Bohrschen fastperiodischen Funktionen », *Z. f. Physik*, 48, p. 149-161.
- 1929, *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*.
- Wittmeyer (Helmut), 1935, *Einfluss der Änderung einer Matrix auf die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems, sowie auf die charakteristischen Zahlen und die Eigenvektoren*. Darmstadt, diss.
- Wolfson (Paul R.), 2008, « George Boole and the origins of invariant theory », *Historia Mathematica*, 35, p. 37-46.
- Zariski (Oscar), 1935, *Algebraic surfaces*. Ergebnisse d. Math. 3, Nr. 5.
- Zawirski (Zygmunt), 1932, « Les logiques nouvelles et le champ de leur application », *Revue de Métaphys. et de Morale*, 39, p. 503-519.
- Zyliński (E.), 1934, « Sur quelques espaces linéaires », *Bulletin Acad. Polonaise*, p. 208-211.