



HAL
open science

beta-crusts locaux et reconstruction de courbes sans intersection

Sébastien Bougleux, Mahmoud Melkemi, Abderrahim Elmoataz

► **To cite this version:**

Sébastien Bougleux, Mahmoud Melkemi, Abderrahim Elmoataz. beta-crusts locaux et reconstruction de courbes sans intersection. Journées GTMG 2007, Mar 2007, Valenciennes, France. hal-00333378

HAL Id: hal-00333378

<https://hal.science/hal-00333378>

Submitted on 23 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

β -crusts locaux et reconstruction de courbes sans intersection

S. BOUGLEUX¹, M. MELKEMI² & A. ELMOATAZ³

¹GREYC CNRS UMR 6072 - Equipe Image

sbougleu@greyc.ensicaen.fr

²LMIA - Equipe MAGE

mahmoud.melkemi@uha.fr

³LUSAC - Equipe VAI

elmoataz@chbg.unicaen.fr

Résumé

Dans cet article, nous considérons le problème de la reconstruction de courbes à partir d'un ensemble de points du plan. Pour résoudre ce problème, nous proposons d'utiliser une famille de graphes de voisinage inclus dans le graphe de Gabriel. Le voisinage utilisé est le β -voisinage, initialement défini dans le contexte des β -squelettes, mais appliqué aux arêtes du diagramme de Voronoï. Cette famille de graphes inclut le crust local. Cette formulation nous permet de concevoir des algorithmes efficaces pour reconstruire des courbes, en utilisant la connaissance a priori que les courbes à reconstruire sont sans intersection. Nous montrons, à travers plusieurs exemples, que les algorithmes proposés améliorent les résultats obtenus avec le crust local lorsque l'ensemble de points est de faible densité.

Mots-clés : Interpolation, Reconstruction de courbes, Diagramme de Voronoï.

1 Introduction

Reconstruire la forme d'objets à partir d'un ensemble fini P de points mesurés sur la frontière de ces objets est une étape importante dans de nombreux domaines d'application, tels que la vision par ordinateur, l'analyse d'images ou encore la modélisation de formes. Dans cet article, les objets considérés sont des courbes de \mathbb{R}^2 sans intersection, et la reconstruction consiste à trouver une interpolation polygonale de P , topologiquement équivalente aux courbes.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème de reconstruction à partir de P . Parmi elles, les méthodes basées sur les graphes de voisinage, et plus particulièrement sur la triangulation de Delaunay, fournissent une interpolation adéquate autant en pratique qu'en théorie, si P est un échantillon suffisamment dense de courbes. Conceptuellement, les graphes de voisinage connectent des points de P si ces points sont voisins relativement à une mesure définie à partir de P . Le voisinage, qui permet de générer les arêtes, peut être interprété comme l'élément structurant des graphes. Les premiers travaux de reconstruction de formes, basés sur des graphes de voisinage, sont issus des méthodes de regroupement et de description de nuages de points. Les principaux graphes utilisés par ces méthodes sont le graphe de Gabriel, le graphe des k -plus proches voisins, l'arbre de recouvrement minimum ou encore le graphe de voisinage relatif [OT04].

Une catégorie importante de ces graphes considère le voisinage des arêtes comme l'union et/ou l'intersection de disques. L'arête appartient alors au graphe si l'intérieur de son voisinage est vide de l'ensemble des points de P . Parmi ces graphes, on peut distinguer ceux définis avec un paramètre, permettant ainsi de décrire P à plusieurs niveaux de détails. Les α -formes [EKS83] sont générées avec des disques vides de rayon α . Les β -squelettes [KR85] sont formés avec deux disques vides de même rayon. Des extensions de ces deux descripteurs ont été proposées en utilisant les γ -graphes de voisinage [Vel88]. Etant donné que la triangulation de Delaunay est générée avec les disques vides de rayon maximal, elle inclut la plupart des graphes décrits ci-dessus. Tandis que le voisinage de ces graphes est défini en utilisant

un paramètre global, celui des A -formes [MM95, Mel97], est défini à partir d'un ensemble de points de contrôle A . Les arêtes de cette famille de graphes sont générées par des disques vides de points de $P \cup A$. Les A -formes sont également des sous-graphes de la triangulation de Delaunay. Le choix des points de l'ensemble A est lié à l'axe médian des formes à reconstruire. Comme l'axe médian peut être approximé par un sous-ensemble des arêtes du diagramme de Voronoï [BA92], les sommets de Voronoï sont des bons candidats pour l'ensemble A .

Indépendamment, une notion similaire aux A -formes a été proposée pour définir le crust de P [ABE98], dans le cas spécifique de la reconstruction de courbes fermées sans intersection. Le crust est un cas particulier des A -formes, où A correspond à l'ensemble de tous les sommets du diagramme de Voronoï de P . De plus, il a été montré que le crust donne toujours une reconstruction topologiquement équivalente aux courbes échantillonnées, si P est suffisamment dense et si les courbes sont deux fois différentiables [ABE98]. Le calcul du crust nécessite d'utiliser le diagramme de Voronoï de P , ainsi que la triangulation de Delaunay de $P \cup A$. Afin d'améliorer la complexité de ce calcul, une version locale du crust, appelée le crust local, a été proposée dans [Gol99], et préalablement étudiée sous une autre forme dans [Att97]. Elle ne nécessite de calculer que la triangulation de Delaunay de P , et fournit des résultats équivalents à ceux obtenus avec le crust. De plus, les arêtes de Voronoï dont les arêtes duales de Delaunay n'appartiennent pas au crust local permettent d'approximer l'axe médian des courbes reconstruites [Gol99]. Ce sous-graphe du diagramme de Voronoï est appelé l'anti-crust.

D'autres méthodes de reconstruction de courbes utilisent des graphes de voisinage. C'est le cas des méthodes utilisant les α -formes [BB97], les β -squelettes [ABE98] ou encore l'arbre de recouvrement minimum [FG95]. Dans [DK99], le crust des plus proches voisins est proposé comme une alternative au crust et au crust local. Comme toutes les méthodes de reconstruction précédentes ne permettent pas de garantir la reconstruction à partir d'échantillons de courbes ouvertes et/ou qui ne sont pas deux fois différentiables, les idées proposées dans [DK99] ont été étendues en incorporant des paramètres liés à la densité locale et à l'acuité [DMR00, DW01]. Le cas des courbes avec intersections a également été proposé dans [Len06] en utilisant les mêmes idées.

L'objectif principal de cet article est de décrire une famille hiérarchique de graphes dont le voisinage est défini sur les arêtes du diagramme de Voronoï. Notre travail s'inspire de deux propriétés du crust local et de l'anti-crust que nous démontrons. Premièrement, le crust local est un sous-graphe du graphe de Gabriel. Deuxièmement, les arêtes de l'anti-crust sont générées en utilisant des disques de Gabriel. Basés sur ces propriétés, nous étendons le voisinage de Gabriel des arêtes de Voronoï au β -voisinage, initialement défini pour les β -squelettes [KR85]. Lorsque β est fixé, ce voisinage nous permet de définir deux types de graphes, l'un sous-graphe du diagramme de Voronoï, et l'autre sous-graphe du graphe de Gabriel. Nous appelons respectivement ces graphes le β -axe médian et de β -crust local. À partir de là, nous montrons que certaines propriétés du β -voisinage permettent de concevoir des algorithmes, efficaces et sans paramètre, pour extraire des courbes de la triangulation de Delaunay. Ces algorithmes exploitent comme connaissance a priori que les courbes à reconstruire sont sans intersection. Une hypothèse similaire a également été considérée dans [Hiy06]. Les graphes obtenus avec nos algorithmes sont des collections de courbes polygonales fermées ou ouvertes. Nous montrons expérimentalement qu'ils améliorent les résultats obtenus avec le crust local [Gol99] et le crust des plus proches voisins [DK99], lorsque l'ensemble de points n'est pas dense.

Le reste de cet article est organisé de la façon suivante. La prochaine section rappelle les concepts sur lesquels reposent les graphes et les algorithmes que nous proposons. La section 3 présente le β -voisinage des arêtes de Voronoï, les β -axes médians et les β -crusts locaux. Nous discutons ensuite des différences avec le crust local. Dans la section 4 nous proposons un algorithme qui calcule la valeur maximum de β pour laquelle les β -crusts locaux reconstruisent des courbes sans intersection. Dans la section 5 nous proposons un deuxième algorithme qui améliore les résultats obtenus avec le premier algorithme.

2 Définitions préliminaires

Soit P un ensemble fini de N points distincts de \mathbb{R}^2 . Nous supposons que P est en position générale. Dans cette section, nous rappelons quelques définitions et propriétés nécessaires pour la compréhension des graphes et des algorithmes présentés à la section 3, à la section 4 et à la section 5.

2.1 Diagramme de Voronoï et Triangulation de Delaunay

Dans ce papier, le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay de l'ensemble P sont les deux structures de données fondamentales utilisées pour calculer des interpolations polygonales de P .

Soit $\|p - q\|$ la distance Euclidienne entre deux points p et q de \mathbb{R}^2 . Le *polygone de Voronoï* d'un point $p_i \in P$, noté $V(p_i, P)$, est l'ensemble des points $p \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|p - p_i\| \leq \|p - p_j\|$, pour tout point $p_j \in P$. Le *diagramme de Voronoï* de P est l'ensemble des polygones $V(P) := \{V(p_i, P), \forall p_i \in P\}$. Deux points sont voisins dans $V(P)$ si l'intersection de leurs polygones est non vide.

La triangulation de Delaunay de P , notée $D(P)$, est le dual topologique et géométrique du diagramme de Voronoï de P . Trois points de P forment un triangle dans $D(P)$ si il existe un cercle passant par ses sommets et dont l'intérieur est vide de points de P . Un triangle de $D(P)$ est le dual d'un sommet de $V(P)$, une arête de $D(P)$ est le dual d'une arête de $V(P)$, et un sommet de $D(P)$ est le dual d'un polygone de $V(P)$.

Pour le détail de ces deux concepts, on peut se référer à [AK00]. En particulier, l'enveloppe convexe de P , notée $conv(P)$, correspond à la frontière de $D(P)$. C'est à dire aux arêtes de $D(P)$ incidentes à un seul triangle de $D(P)$. Ces arêtes sont duales d'une arête infinie de $V(P)$. Pour simplifier les notations, nous supposons que toutes les arêtes de $V(P)$ sont finies. Le cas des arêtes infinies sera développé à la section 3.4.

2.2 Graphe de Gabriel et β -squelettes

Soient p_i et p_j deux point de P . Soit $B(p_i p_j)$ le disque fermé, de diamètre $p_i p_j$, circonscrit à p_i et p_j . Le *graphe de Gabriel* [GS69] de l'ensemble P , noté $GG(P)$, connecte deux points p_i et p_j de P si le disque $B(p_i p_j)$ est vide de point de $P \setminus \{p_i, p_j\}$. Le disque $B(p_i p_j)$ est appelé *disque de Gabriel*. Alternativement, deux points p_i et p_j de P sont connectés par une arête dans $GG(P)$ si il n'existe pas de point $p_k \in P$ tel que $\angle p_i p_k p_j \geq \pi/2$, où $\angle p_i p_k p_j$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{p_k p_i}$ et $\overrightarrow{p_k p_j}$. Les arêtes du graphe de Gabriel ont également la propriété de couper leurs arêtes duales de Voronoï.

Egalement basés sur la notion de voisinage vide, les β -*squelettes* de P [KR85] décrivent une famille hiérarchique de graphes indexés par une valeur réelle positive β . Le β -voisinage d'une paire de points p_i et p_j de P , noté $N_\beta(p_i p_j)$, est défini comme l'union des deux disques de rayon $\beta \|p_i - p_j\|/2$, si $\beta \geq 1$, circonscrits aux points p_i et p_j . Lorsque $\beta \leq 1$, $N_\beta(p_i p_j)$ est défini comme l'intersection des deux disques de rayon $\|p_i - p_j\|/2\beta$, circonscrits aux points p_i et p_j . Etant donnée une valeur de β , l'arête $p_i p_j$ est une arête du β -squelette de P si $N_\beta(p_i p_j)$ est vide de points de $P \setminus \{p_i, p_j\}$. La famille des β -squelettes de P inclut le graphe de Gabriel de P pour $\beta = 1$. De plus, pour tout $\beta \geq 1$, les β -squelettes de P sont des sous-graphes de $D(P)$. Ce n'est pas nécessairement le cas lorsque $\beta < 1$.

2.3 Axe médian

L'*axe médian* d'une collection Γ de courbes de \mathbb{R}^2 , est la fermeture de l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 situés à égale distance d'au moins deux points de Γ . Il peut être interprété comme la version continue du diagramme de Voronoï. C'est un des concepts les plus importants pour décrire et analyser les formes [Blu67]. Il peut être approximé par un sous-ensemble des arêtes du diagramme de Voronoï d'un échantillon dense des courbes [BA92]. Dans le cas des courbes sans intersection et deux fois différentiables, l'axe médian n'intersecte jamais les courbes. Ce sont ces propriétés qui sont exploitées dans de nombreuses méthodes d'échantillonnage et de reconstruction de courbes [Att97, ABE98, DK99].

2.4 Crust local et anti-crust

Soient $p_i p_j$ une arête de $D(P)$ et $v_i v_j$ son arête duale de Voronoï. L'arête $p_i p_j$ appartient au *crust local* de P [Gol99, GS01], noté $LC(P)$, si $p_i p_j$ appartient à $D(P \cup \{v_i, v_j\})$. Alternativement, l'arête $p_i p_j$ appartient à $LC(P)$ si il existe un cercle circonscrit à $p_i p_j$ et dont l'intérieur ne contient ni v_i ni v_j . Ce test local peut être formalisé en considérant les deux disques ouverts $b(p_i p_j v_i)$ et $b(p_i p_j v_j)$ circonscrits

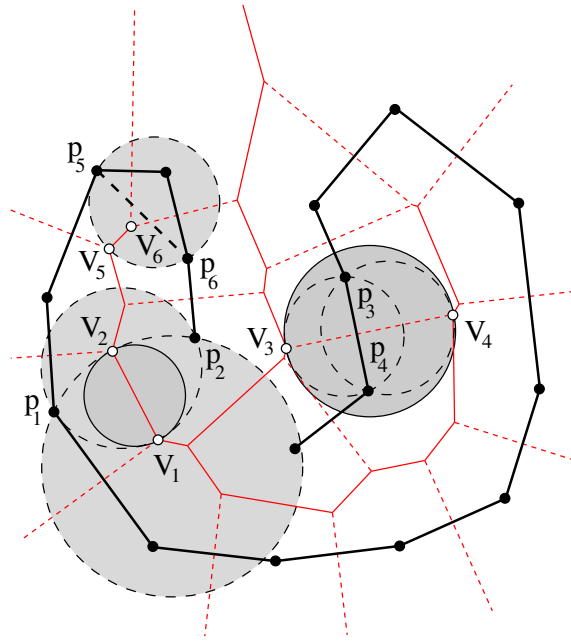


FIG. 1 – Illustration de la preuve de l’observation 1 et de la preuve du lemme 1.

aux triangles $p_i p_j v_i$ et $p_i p_j v_j$:

$$p_i p_j \in LC(P) \Leftrightarrow \begin{cases} b(p_i p_j v_i) \cap \{v_j\} = \emptyset, \text{ et} \\ b(p_i p_j v_j) \cap \{v_i\} = \emptyset. \end{cases} \quad (1)$$

Du fait de la dualité entre les arêtes $p_i p_j$ et $v_i v_j$, les deux tests de l’équation (1) sont équivalents : $b(p_i p_j v_i) \cap \{v_j\} = \emptyset \Leftrightarrow b(p_i p_j v_j) \cap \{v_i\} = \emptyset$. Ainsi, un seul des deux tests est nécessaire pour déterminer si $p_i p_j$ appartient à $LC(P)$ [GS01].

Les arêtes de Voronoï, duales des arêtes de Delaunay qui n’appartiennent pas au crust local de P , constituent l’*anti-crust* de P [Gol99], noté $AC(P)$. Ce graphe fournit une approximation de l’axe médian des courbes reconstruites par le crust local.

3 β -crusts locaux et β -axes médians

Dans cette section, nous présentons les familles de graphes qui sont à la base des méthodes de reconstruction de courbes, et d’approximation de l’axe médian de ces courbes, présentées aux sections 4 et 5.

3.1 Idée intuitive

Les graphes que nous proposons s’inspirent de deux propriétés du crust local et de l’anti-crust. Premièrement, le crust local est un sous-graphe du graphe de Gabriel. Cette propriété, indirectement mentionnée dans [Gol99], implique que les arêtes de $LC(P)$ ne coupent jamais les arêtes de $AC(P)$. Ainsi, le crust local et l’anti-crust sont consistents avec les définitions d’une courbe deux fois différentiable et de son axe médian. Ils le sont également pour n’importe quelle courbe qui ne coupe pas son axe médian.

Observation 1 $LC(P) \subset GG(P)$.

Preuve : Soit $p_i p_j$ une arête qui n’appartient pas à $GG(P)$. Soit $v_i v_j$ l’arête duale de $p_i p_j$. Dans le but d’obtenir une contradiction, supposons que $p_i p_j \in LC(P)$. D’après la définition de $GG(P)$, nous avons $p_i p_j \cap v_i v_j = \emptyset$ (ou l’un des sommets de $v_i v_j$), i.e. les sommets v_i et v_j sont situés du même côté de $p_i p_j$.

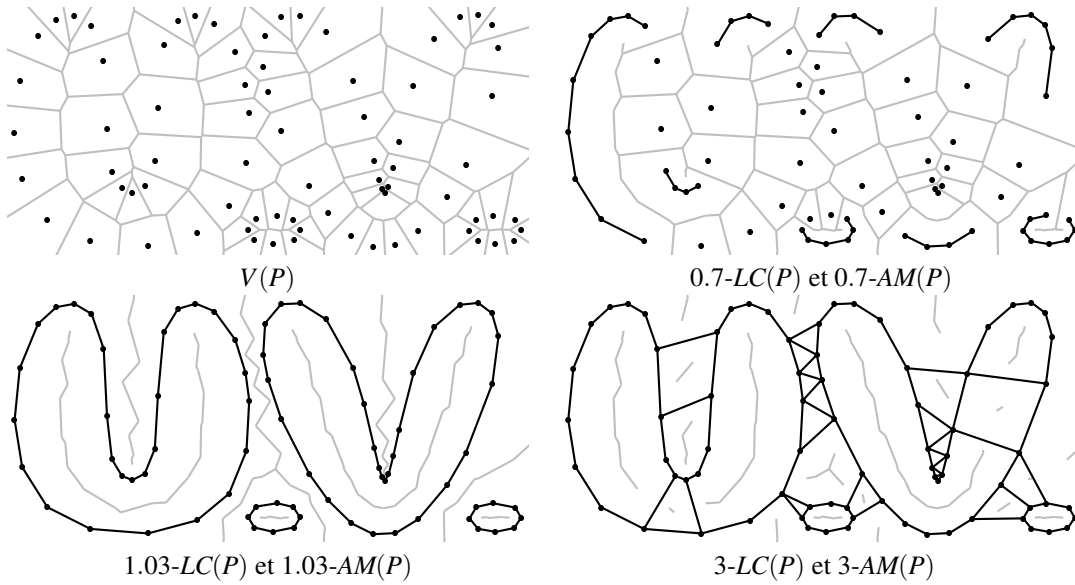


FIG. 2 – Graphes de la famille des β -crusts locaux (traits foncés) et des β -axes médians (traits clairs).

Soit v_i le plus proche sommet de p_i et de p_j . Comme illustré à la figure 1 (sommets p_5 , p_6 et v_5 , v_6), ceci implique que $v_i \in b(p_i p_j v_j)$. Alors à partir de l'équation (1), $p_i p_j \notin LC(P)$. \square

La deuxième propriété que nous utilisons concerne les arêtes du diagramme de Voronoï. L'anti-crust de P peut être formalisé en utilisant des disques de Gabriel définis sur les arêtes du diagramme de Voronoï de P . En effet, une arête $v_i v_j \in V(P)$ est incluse dans $AC(P)$ si et seulement si le disque fermé, de diamètre $v_i v_j$, est vide de points de P .

Lemme 1 $v_i v_j \in AC(P) \Leftrightarrow B(v_i v_j) \cap P = \emptyset$.

Preuve : Soit $p_i p_j$ l'arête de Delaunay duale de $v_i v_j$. D'après la définition de l'anti-crust et l'équation (1), on a $v_i v_j \in AC(P) \Leftrightarrow v_j \in b(p_i p_j v_i)$ (et $v_i \in b(p_i p_j v_j)$). Comme illustré à la figure 1 (points p_1 , p_2 , p_3 et p_4), ceci est équivalent à $B(v_i v_j) \subset b(p_i p_j v_i)$ (et respectivement $B(v_i v_j) \subset b(p_i p_j v_j)$). Alors, les points p_i et p_j ne sont pas dans $B(v_i v_j)$. Comme ce sont les deux plus proches points du milieu de $v_i v_j$, il n'existe pas d'autres points de P dans $B(v_i v_j)$. \square

A partir de l'observation 1 et du lemme 1, on peut en déduire qu'une arête de $D(P)$ appartient au crust local si elle est entièrement incluse dans le disque de Gabriel de son arête duale de Voronoï. Basé sur cette propriété, nous généralisons les définitions du crust local et de l'anti-crust afin d'obtenir un ensemble de solutions au problème de la reconstruction de courbes.

3.2 Principales définitions et propriétés

Nous proposons d'étendre les propriétés du crust local et de l'anti-crust (Observation 1 et Lemme 1) en utilisant des β -disques¹ pour définir le voisinage des arêtes de Voronoï qui approximent l'axe médian.

Soient $v_i v_j$ une arête de $V(P)$ et $p_i p_j$ son arête duale de Delaunay. Soit $N_\beta(v_i v_j)$ le β -voisinage de $v_i v_j$, de rapport de taille $\beta \in]0, +\infty[$ (voir Section 2.2 pour la définition de N_β). Afin de préserver les propriétés liées au graphe de Gabriel, l'arête $p_i p_j$ doit se situer dans la partie de \mathbb{R}^2 bornée par les deux droites, parallèles à $p_i p_j$, qui passent par les sommets de $v_i v_j$. Cette partie de \mathbb{R}^2 , notée $H(v_i v_j)$, peut s'écrire comme l'ensemble des points $p \in \mathbb{R}^2$ tels que $\angle v_i v_j p < \pi/2$ et $\angle v_j v_i p < \pi/2$. Alors, nous définissons le voisinage de $v_i v_j$ comme l'intersection de $N_\beta(v_i v_j)$ et de $H(v_i v_j)$. Selon que cette intersection soit vide ou non de p_i (et de p_j), l'arête $v_i v_j$ appartient au β -axe médian de P , noté β -AM(P), ou l'arête $p_i p_j$

¹d'autres types de voisinage peuvent également fournir des résultats intéressants

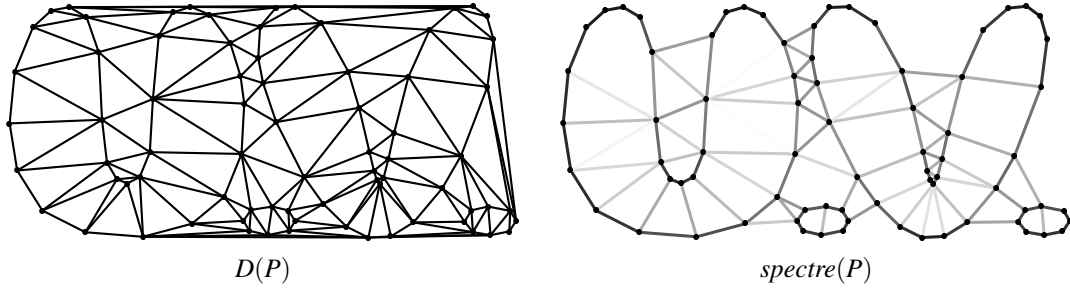


FIG. 3 – Illustration du spectre des β -crusts locaux sur les arêtes de $D(P)$. Le niveau de gris d'une arête représente son poids. L'ordre d'apparition des arêtes dans la famille des β -crusts locaux s'effectue du noir vers le blanc.

appartient au β -crust local de P , noté β -LC(P) :

$$v_i v_j \in \beta\text{-AM}(P) \Leftrightarrow N_\beta(v_i v_j) \cap H(v_i v_j) \cap \{p_i, p_j\} = \emptyset, \quad (2)$$

$$p_i p_j \in \beta\text{-LC}(P) \Leftrightarrow N_\beta(v_i v_j) \cap H(v_i v_j) \cap \{p_i, p_j\} \neq \emptyset. \quad (3)$$

Le β -crust local de P est donc l'ensemble des arêtes de $D(P)$ entièrement incluses dans le β -voisinage de leurs deux :

$$p_i p_j \in \beta\text{-LC}(P) \Leftrightarrow p_i p_j \subset N_\beta(v_i v_j). \quad (4)$$

Par construction du voisinage, les β -crusts locaux sont des sous-graphes du graphe de Gabriel.

Théorème 1 $\beta\text{-LC}(P) \subseteq GG(P)$, $\forall \beta \in]0, +\infty[$.

Ainsi, on en déduit que $\beta\text{-LC}(P)$ est l'ensemble des arêtes de $GG(P)$ dont les sommets sont inclus dans le β -voisinage de leurs deux.

En faisant varier β , les β -crusts locaux (et les β -axes médians) de P décrivent une famille hiérarchique de graphes. Ceci est dû à la relation d'inclusion qui existe entre les différents β -voisinages.

Théorème 2 $\forall \beta, \beta' \in]0, +\infty[$, $\beta < \beta' \Leftrightarrow \beta\text{-LC}(P) \subseteq \beta'\text{-LC}(P) \Leftrightarrow \beta'\text{-MA}(P) \subseteq \beta\text{-AM}(P)$.

Preuve : Soient $p_i p_j$ une arête de $\beta\text{-LC}(P)$ et $v_i v_j$ son arête duale de Voronoï. A partir de l'équation (4), on a $p_i p_j \subset N_\beta(v_i v_j)$. Soit $\beta' > \beta$. Par définition, $N_\beta(v_i v_j) \subset N_{\beta'}(v_i v_j)$, et donc $p_i p_j \subset N_{\beta'}(v_i v_j)$. \square

De plus, la famille des β -crusts locaux de P , et celle des β -axes médians, sont finies. Le nombre de graphes de ces deux familles est borné par le nombre d'arêtes du graphe de Gabriel de P . En effet, pour chaque arête $p_i p_j$ de $GG(P)$, il existe une valeur $\beta > 0$ telle que $p_i p_j$ appartient à $\beta\text{-LC}(P)$, et $p_i p_j$ n'appartient pas à $\beta'\text{-LC}(P)$, pour tout $\beta' < \beta$. Autrement dit, la valeur de β à partir de laquelle l'arête $p_i p_j$ est incluse dans la famille des β -crusts locaux. Par dualité, c'est également la valeur de β à partir de laquelle l'arête duale de $p_i p_j$ est exclue de la famille des β -axes médians. Cela permet de d'associer un poids à chaque arête de $D(P)$. Le poids d'une arête $p_i p_j \in D(P)$, noté $w(p_i p_j)$, est défini par :

$$w(p_i p_j) := \begin{cases} \beta : \{p_i, p_j\} \subset \partial N_\beta(v_i v_j) & \text{si } p_i p_j \in GG(P), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5)$$

Basé sur la relation d'inclusion énoncée au théorème 2, les arêtes de $D(P)$ sont ordonnées selon l'ordre croissant de leurs poids : $p_i p_j \leq p_k p_l \Leftrightarrow w(p_i p_j) \leq w(p_k p_l) \Leftrightarrow w(p_i p_j)\text{-LC}(P) \subseteq w(p_k p_l)\text{-LC}(P)$. Alors, nous définissons le spectre des β -crusts locaux de P , noté $\text{spectre}(P)$, comme l'ensemble des arêtes de $D(P)$ ordonnées selon la relation précédente. Soient β_{\min} et β_{\max} la valeur minimale et la valeur maximale des poids des arêtes de $GG(P)$. Etant donné une valeur $\beta \in [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, cette valeur sépare le spectre de P en deux sous-ensembles disjoints d'arêtes : celles qui ont un poids inférieur ou égal à β appartiennent à $\beta\text{-LC}(P)$, et celles qui ont un poids supérieur à β ont leurs deux qui appartiennent à $\beta\text{-AM}(P)$. Le β -crust local coïncide avec le graphe de Gabriel lorsque $\beta \geq \beta_{\max}$. Ceci montre que le nombre maximum de β -crusts locaux construits à partir de P correspond au nombre d'arêtes de $GG(P)$ (certaines arêtes peuvent avoir des poids égaux). Un exemple de spectre est illustré à la figure 3 en associant un niveau de gris à chaque arête de $D(P)$. Plus l'arête est foncée, plus son poids est faible, et plus cette arête est présente dans la famille des β -crusts locaux.

3.3 Définitions alternatives

Afin de calculer efficacement le poids des arêtes de $D(P)$ et le spectre de P , nous montrons que les notions abordées dans la section précédente peuvent se définir alternativement en utilisant les angles des triangles de $D(P)$.

Le β -voisinage peut s'exprimer en utilisant l'angle $\theta \in]0, \pi[$ défini par :

$$\theta(\beta) := \begin{cases} \pi - \arcsin(\beta) & \text{si } \beta \in]0, 1], \\ \arcsin(1/\beta) & \text{si } \beta \in [1, +\infty[. \end{cases} \quad (6)$$

Soit $v_i v_j$ une arête de $V(P)$. Alors $N_\beta(v_i v_j)$ est l'ensemble des points $p \in \mathbb{R}^2$ tels que $\angle v_i p v_j \geq \theta(\beta)$ (voir Fig. 4(a)). Soit $p_i p_j$ l'arête duale de $v_i v_j$. On en déduit alors les trois lemmes suivants.

Lemme 2 $\forall \beta \in]0, +\infty[, p_i p_j \in \beta\text{-LC}(P) \Leftrightarrow$ (i) $p_i p_j \in GG(P)$ et (ii) $\angle v_i p_i v_j \geq \theta(\beta)$.

Preuve : Nous montrons l'équivalence à partir de l'équation (3). La condition (i) assure que $H(v_i v_j) \cap \{p_i, p_j\} \neq \emptyset$. De plus, d'après la définition de N_β , on a $\angle v_i p_i v_j \geq \theta(\beta)$ et $\angle v_i p_j v_j \geq \theta(\beta)$. Par conséquent, $N_\beta(v_i v_j) \cap \{p_i, p_j\} \neq \emptyset$. Comme p_i et p_j sont situés à égale distance de $v_i v_j$, on a $\angle v_i p_i v_j \geq \theta(\beta) \Leftrightarrow \angle v_i p_j v_j \geq \theta(\beta)$, d'où la condition (ii). \square

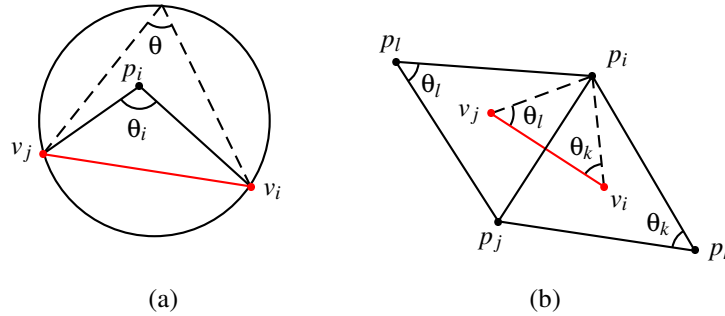


FIG. 4 – Relations angulaires.

Lemme 3 $\forall \beta \in]0, +\infty[, p_i p_j \in \beta\text{-LC}(P)$ si et seulement si :

- (i) $\angle p_i v_i v_j < \pi/2$ et $\angle v_i v_j p_i < \pi/2$, et
- (ii) $\angle p_i v_i v_j + \angle v_i v_j p_i \leq \pi - \theta(\beta)$.

Preuve : La condition (i) assure que $H(v_i v_j) \cap \{p_i, p_j\} \neq \emptyset$. La condition (ii) est obtenue à partir de la condition (ii) du lemme 2, en remarquant que $\angle p_i v_i v_j + \angle v_i v_j p_i = \pi - \angle v_i p_i v_j$ (voir Fig. 4(a)). \square

Le lemme 3 peut être utilisé pour calculer efficacement le β -crust local et le β -axe médian de P , lorsque les coordonnées des sommets de $V(P)$ sont connus. Dans le cas où la structure principale est $D(P)$, il est plus efficace d'utiliser une expression qui ne dépend que des coordonnées des points de P . Soient $p_i p_j p_k$ et $p_i p_j p_l$ les deux triangles de $D(P)$ incidents à l'arête $p_i p_j$ (voir Fig. 4(b)).

Lemme 4 $\forall \beta \in]0, +\infty[, p_i p_j \in \beta\text{-LC}(P)$ si et seulement si :

- (i) $\angle p_i p_k p_j < \pi/2$ et $\angle p_j p_l p_i < \pi/2$, et
- (ii) $\angle p_i p_k p_j + \angle p_j p_l p_i \leq \pi - \theta(\beta)$.

Preuve : Soit $v_i v_j$ l'arête duale de $p_i p_j$. Par dualité, les sommets v_i et v_j sont les centres des cercles circonscrits aux triangles $p_i p_k p_j$ et $p_i p_l p_j$. D'après la formule de l'aire de $p_i p_k p_j$, on peut montrer que $\sin(\angle p_i p_k p_j) = \|p_i - p_j\|/2\|p_i - v_i\|$. D'autre part, comme $p_i p_j$ est perpendiculaire à $v_i v_j$, on a $\sin(\angle p_i v_i v_j) = \|p_i - p_j\|/2\|p_i - v_i\|$. Donc $\angle p_i v_i v_j = \angle p_i p_k p_j$. De même, on obtient $\angle v_i v_j p_i = \angle p_j p_l p_i$. Alors, la condition (ii) du lemme 3 est équivalente à la condition (ii) du lemme 4. \square

Les conditions (i) et (ii) du lemme 4 permettent de redéfinir les poids des arêtes de $D(P)$ en utilisant uniquement les angles des triangles de $D(P)$. L'équation (5) est alors remplacée par l'équation suivante :

$$w(p_i p_j) := \begin{cases} \angle p_i p_k p_j + \angle p_j p_l p_i & \text{si } \angle p_i p_k p_j < \pi/2 \text{ et } \angle p_j p_l p_i < \pi/2, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7)$$

La valeur de β , qui correspond au poids d'une arête, est obtenue par l'équation inverse de l'équation (6) :

$$\beta(\theta) := \begin{cases} 1/\sin(\pi - \theta) & \text{si } \theta > \pi/2, \\ \sin(\pi - \theta) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (8)$$

Les lemmes 3 et 4 permettent de traiter le cas des arêtes de l'enveloppe convexe de P , sans modifier les concepts abordés à la section 3.2.

3.4 Cas des arêtes de l'enveloppe convexe

Pour l'instant, nous avons supposé que toutes les arêtes de $V(P)$ sont finies, i.e. toutes les arêtes de $D(P)$ sont incidentes à exactement deux triangles de $D(P)$. Or, les arêtes de $\text{conv}(P)$ ne sont incidentes qu'à un seul triangle de $D(P)$. Leurs arêtes duales ne possèdent qu'un seul sommet dans $V(P)$. Dans ce cas, le β -voisinage des arêtes de Voronoï ne peut pas être directement défini à partir de $V(P)$.

Afin de définir le β -voisinage des arêtes infinies de $V(P)$, nous considérons le diagramme de Voronoï de $P \cup P'$, où P' est un ensemble fini de points vérifiant : $D(P) \subset D(P \cup P')$. Les points de P' sont sélectionnés sur les arêtes infinies de $V(P)$. Ainsi, pour prendre en compte le cas des arêtes infinies de $V(P)$, les β -crusts locaux et les β -axes médians de P sont définis en utilisant $V(P \cup P')$ et $D(P \cup P')$, et en ne considérant que les arêtes dont les sommets appartiennent à P .

En utilisant les lemmes 3 et 4, les β -crusts locaux et les β -axes médians de P peuvent être intégralement calculés à partir de $D(P)$ et de $V(P)$. Pour cela, un seul des deux angles est considéré dans les conditions (i) et (ii) si l'arête de Delaunay appartient à $\text{conv}(P)$. Conceptuellement, ceci revient à ajouter à P' un point à l'infini sur chaque arête infinie de $V(P)$.

3.5 Différences avec le crust local et reconstruction

Etant donnée une valeur de β , le β -crust local est l'ensemble des arêtes de $D(P)$ qui sont complètement incluses dans le β -voisinage de leurs duaux. Lorsque $\beta = 1$, le β -voisinage d'une arête $v_i v_j$ de $V(P)$ est le disque de Gabriel $B(v_i v_j)$. D'après le théorème 1, le 1-crust local de P correspond alors au crust local de P . De plus, la relation d'inclusion entre les β -crusts locaux (Théorème 2), lorsque β varie, permet d'écrire le théorème suivant.

Théorème 3 *Le crust local est relié à la famille des β -crusts locaux par les trois propriétés suivantes :*

- (i) $LC(P) = 1-LC(P)$,
- (ii) $\forall \beta \in]0, 1]$, $\beta-LC(P) \subseteq LC(P)$.
- (iii) $\forall \beta \in [1, +\infty[$, $LC(P) \subseteq \beta-LC(P)$.

La propriété (ii) du théorème 3 montre que le crust local contient tous les β -crusts locaux pour lesquels $\beta \leq 1$. La propriété (iii) montre que pour $\beta > 1$, les β -crusts locaux sont au moins constitués des arêtes du crust local. Cela permet d'apporter un premier élément d'amélioration des résultats obtenus avec le crust local.

Soit Γ une collection de courbes de \mathbb{R}^2 et P un échantillon quelconque de Γ . Comme illustré à la figure 5, le crust local peut ne pas reconstruire correctement Γ à partir de P . Dans ce cas, trois configurations sont rencontrées :

- Toutes les arêtes correctes sont présentes dans $LC(P)$ et au moins une arête est incorrecte.
- Aucune arête incorrecte n'est présente dans $LC(P)$ et il manque au moins une arête correcte.
- $LC(P)$ inclut à la fois des arêtes correctes et incorrectes.

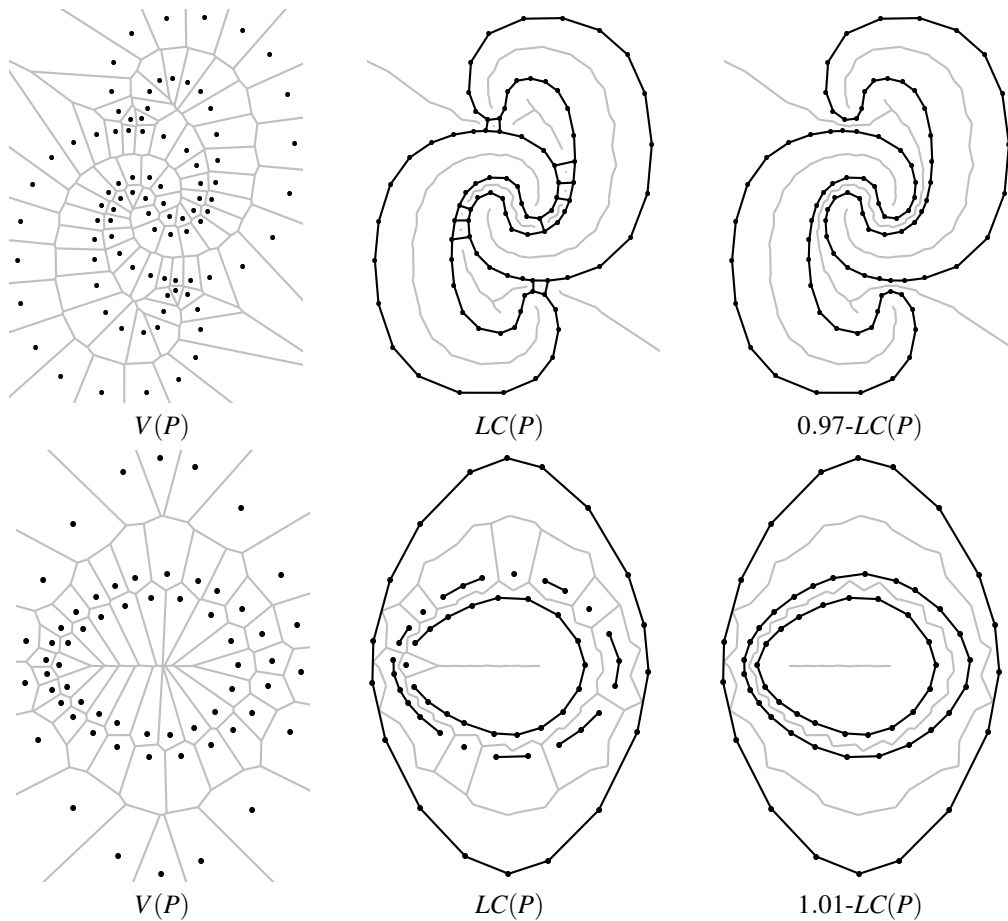


FIG. 5 – La reconstruction avec β - $LC(P)$ est correcte, tandis que celle avec $LC(P)$ ne l'est pas.

Dans les deux premières configurations, il existe un β -crust local capable de reconstruire correctement Γ si le poids de toutes les arêtes correctes de $D(P)$ est inférieur au poids des arêtes incorrectes de $D(P)$. La section 4 présente un algorithme qui permet de calculer un tel graphe dans le cas de courbes sans intersection. Dans la troisième configuration, il ne peut pas exister de β -crust local qui reconstruit correctement Γ . Nous discuterons de ce problème à la section 5.

4 β -crust local optimal pour courbes sans intersection

Dans cette section, nous proposons une méthode pour calculer la valeur maximum de β pour laquelle il existe un graphe, de la famille des β -crusts locaux de P , qui reconstruit une collection de courbes fermées ou ouvertes, sans intersection. Nous appelons cette valeur la valeur optimale de β , notée β_{opt} .

D'après la définition du spectre de P , $\beta_{\text{opt}}\text{-}LC(P)$ correspond l'ensemble des arêtes de $D(P)$ qui ont un poids inférieur ou égal à β_{opt} . Pour calculer $\beta_{\text{opt}}\text{-}LC(P)$, l'idée est d'ajouter les arêtes de $D(P)$ à un graphe G , initialement vide, dans l'ordre défini par le spectre de P . Les arêtes sont ajoutées tant que le degré de chacun de leurs sommets dans G est strictement inférieur à deux. Dans le cas contraire, au moins un sommet de G aurait un degré égal à trois à l'issue de l'insertion de l'arête dans G . Ceci représenterait donc une collection de courbes avec une intersection, ce qui contredit l'hypothèse concernant la topologie de la solution (courbes sans intersection). Au cours du parcours du spectre, plusieurs arêtes de $D(P)$ peuvent avoir le même poids. Dans ce cas, si l'une d'entre-elles a un degré égal à deux, alors aucune de ces arêtes n'est ajoutée à G .

Le calcul du spectre de P est résumé par l'algorithme 1. Pour chaque arête de $D(P)$, son poids est donné

par l'équation (7). Le spectre est alors représenté par un dictionnaire L dont la clef est le poids des arêtes, et dont la valeur est la liste des arêtes associées à un poids. Insérer une arête $p_i p_j \in D(P)$ à L revient à insérer la paire $(w(p_i p_j), p_i p_j)$ si la clef n'existe pas, ou à ajouter l'arête $p_i p_j$ à la liste des arêtes indexées par la valeur de $w(p_i p_j)$ si cette clef existe. Les éléments de L sont triés selon l'ordre croissant des poids.

Algorithme 1 $spectre(P, D)$

Entrée: la triangulation de Delaunay D de l'ensemble de points $P \subset \mathbb{R}^2$.

Sortie: le dictionnaire $L = \{(w_1, E_1), \dots, (w_m, E_m)\}$ ordonné tel que $w_1 \leq \dots \leq w_m$.

```

 $L \leftarrow \emptyset$ 
pour chaque arête  $p_i p_j \in D$  faire
  si  $p_i p_j \in conv(P)$  alors
     $p_k \leftarrow p \in P$  tel que le triangle  $p_i p_j p \in D$ 
    si  $\angle p_i p_k p_j < \pi/2$  alors
       $w \leftarrow \angle p_i p_k p_j$ 
    sinon  $w \leftarrow +\infty$ 
  sinon
     $p_k, p_l \leftarrow \{p \in P \text{ tel que le triangle } p_i p_j p \in D\}$ 
    si  $\angle p_i p_k p_j < \pi/2$  et  $\angle p_j p_l p_i < \pi/2$  alors
       $w \leftarrow \angle p_i p_k p_j + \angle p_j p_l p_i$ 
    sinon  $w \leftarrow +\infty$ 
  insérer  $p_i p_j$  dans  $L$  à la clef  $w$ 
retourner  $L$ 

```

Le calcul complet de $\beta_{opt}\text{-}LC(P)$ est résumé par l'algorithme 2. Le graphe $\beta_{opt}\text{-}AM(P)$ est également extrait de $V(P)$ avec cet algorithme. Il correspond à l'ensemble des arêtes du spectre dont le poids est strictement supérieur à β_{opt} .

Algorithme 2 $\beta_{opt}\text{-}LC(P)$

Entrée: un ensemble fini de points $P \subset \mathbb{R}^2$.

Sortie: le graphe $G = (V, E)$ correspondant à $\beta_{opt}\text{-}LC(P)$, le graphe $G' = (V', E')$ correspondant à $\beta_{opt}\text{-}MA(P)$, et le poids optimal β_{opt} .

```

1:  $V \leftarrow P$ 
2:  $E, V', E' \leftarrow \emptyset$ 
3:  $w \leftarrow 0$ 
4:  $D \leftarrow D(P)$ 
5:  $L \leftarrow spectre(P, D)$ 
6:  $k \leftarrow 0$ 
7: pour  $k = 1, \dots, taille(L)$  faire
8:    $E_k \leftarrow$  l'élément de  $L$  ayant la clef  $w_k$ 
9:   pour chaque arête  $p_i p_j$  dans  $E_k$  faire
10:    si  $(deg(p_i, G) < 2)$  et  $(deg(p_j, G) < 2)$  alors
11:       $deg(p_i, G) \leftarrow deg(p_i, G) + 1$ 
12:       $deg(p_j, G) \leftarrow deg(p_j, G) + 1$ 
13:    sinon aller à la ligne 15
14:    $E \leftarrow E \cup E_k$ 
15:    $w \leftarrow w_k$ 
16: pour  $l = k, \dots, taille(L)$  faire
17:    $E_k \leftarrow$  l'élément de  $L$  ayant la clef  $w_k$ 
18:   pour chaque arête  $p_i p_j$  dans  $E_k$  faire
19:      $E' \leftarrow E' \cup \{dual(p_i p_j)\}$ 
20: retourner  $G, G'$  et  $\beta(w)$  (Eq. 8)

```

L'algorithme 2 peut être vu comme une méthode de seuillage, où le seuil est automatiquement calculé

en utilisant les propriétés topologiques de la solution souhaitée. Des exemples de reconstruction sont illustrés à la figure 6 sur des échantillons quelconques de courbes fermées sans intersection. Comme le β_{opt} -crust local reconstruit correctement lorsque le crust local reconstruit correctement (Théorème 3), les exemples montrent les différences entre ces deux graphes. Les résultats sont aussi comparés à ceux obtenus avec le crust des plus proches voisins de P [DK99], noté $NVC(P)$ dans les exemples.

5 Amélioration des résultats

L'algorithme 2 permet de reconstruire des courbes sans intersection en utilisant la famille des β -crusts locaux. En fonction de la répartition des points de P , il peut ne pas exister de β -crust local qui reconstruit correctement les courbes. Comme illustré à la figure 7, de nombreuses arêtes correctes peuvent manquer. Ceci provient du fait que le spectre ne peut pas être séparé en deux sous-ensembles disjoints d'arêtes tels que la reconstruction soit correcte. Au moins une arête de $D(P)$ a un poids plus faible que la valeur maximum du poids des arêtes correctes. Dans ce cas, on peut remarquer que le crust local ne reconstruit pas non plus correctement les courbes (Théorème 3).

La reconstruction peut être considérablement améliorée en modifiant légèrement l'algorithme 2. Au lieu d'arrêter l'ajout des arêtes au graphe G lorsque l'une d'entre-elles a un degré deux (ligne 13), l'arête duale de l'arête courante est ajoutée au graphe G' , et le spectre est parcouru jusqu'à son dernier élément. Ainsi, toutes les arêtes de $D(P)$ sont parcourues dans l'ordre croissant de leurs poids, et ajoutées à la reconstruction si elles n'impliquent pas une intersection (sommet de degré trois). Le spectre est représenté par la liste L des arêtes de $D(P)$, triées dans l'ordre croissant de leurs poids : $L := \{e_1, \dots, e_m : e_i \in D(P), w(e_1) \leq \dots \leq w(e_m)\}$.

Cette méthode est résumée par l'algorithme 3, dont la complexité est en $O(N \log N)$. Les graphes G et G' , obtenus avec l'algorithme 3, ne correspondent pas nécessairement à un β -crust local ou à un β -axe médian. Par contre, ils incluent le β_{opt} -crust local et le β_{opt} -axe médian (Algorithm 2). Des résultats obtenus avec l'algorithme 3 sont illustrés aux figures 8 et 9 sur des échantillons peu denses de courbes fermées. On peut remarquer qu'ils améliorent les résultats obtenus avec le crust local et le crust des plus proches voisins.

Algorithme 3 *recons*(P)

Entrée: un ensemble fini de points $P \subset \mathbb{R}^2$.

Sortie: le graphe $G = (V, E)$ correspondant aux courbes, et le graphe $G' = (V', E')$ correspondant à l'approximation de l'axe médian des courbes.

```

1:  $V \leftarrow P$ 
2:  $E, V', E' \leftarrow \emptyset$ 
3:  $w \leftarrow 0$ 
4:  $D \leftarrow D(P)$ 
5:  $L \leftarrow \text{spectre}(P, D)$ 
6:  $k \leftarrow 0$ 
7: pour  $k = 1, \dots, \text{taille}(L)$  faire
8:    $pq \leftarrow L[k]$ 
9:   si  $(\text{deg}(p, G) < 2)$  et  $(\text{deg}(q, G) < 2)$  alors
10:      $E \leftarrow E \cup \{pq\}$ 
11:      $\text{deg}(p, G) \leftarrow \text{deg}(p, G) + 1$ 
12:      $\text{deg}(q, G) \leftarrow \text{deg}(q, G) + 1$ 
13:   sinon  $E' \leftarrow E' \cup \{\text{dual}(pq)\}$ 
14: retourner  $G$  et  $G'$ 

```

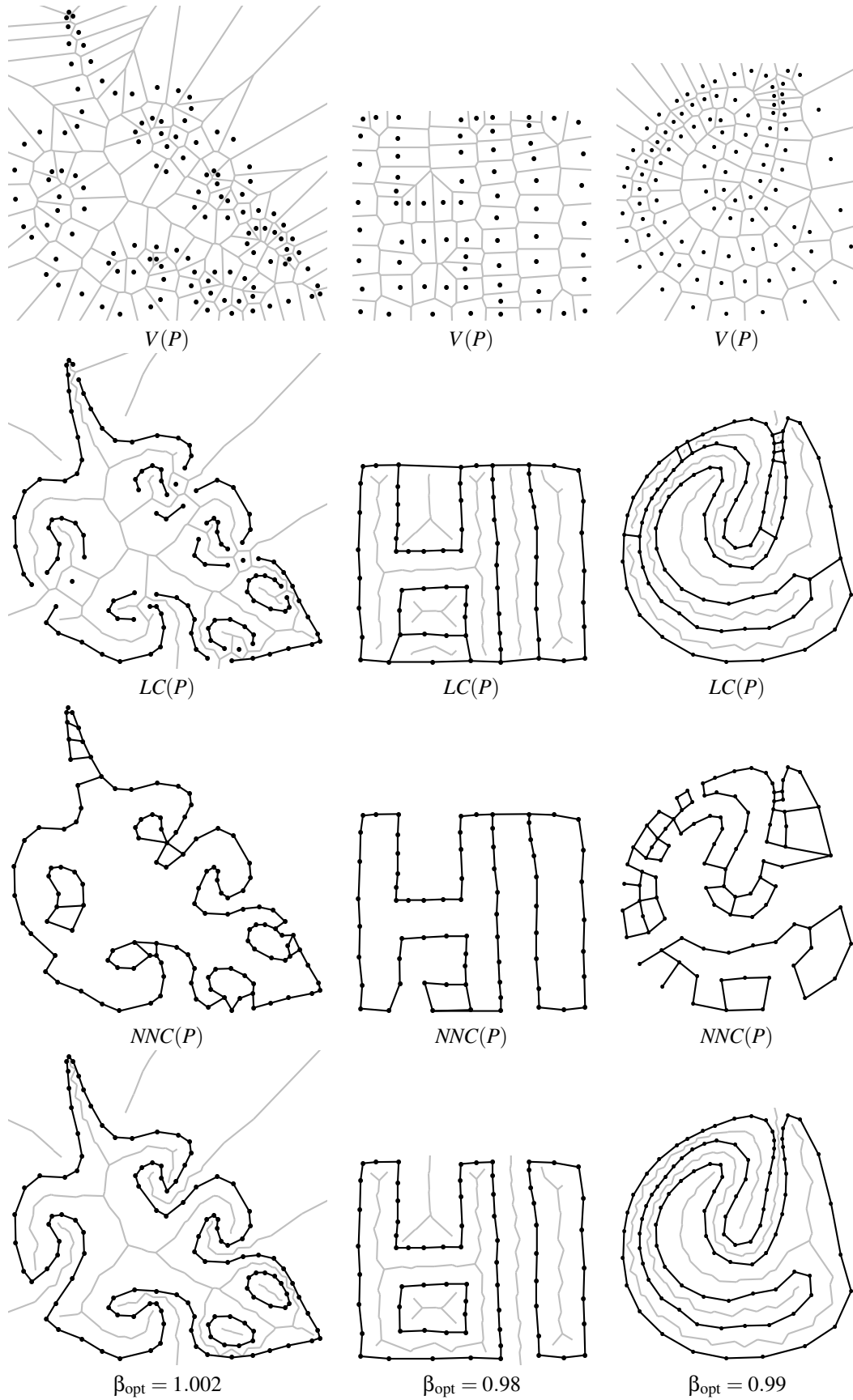


FIG. 6 – Exemples de reconstruction avec l’algorithme 2 (dernière ligne), et comparaisons des résultats avec ceux obtenus à partir du crust local et du crust des plus proches voisins.

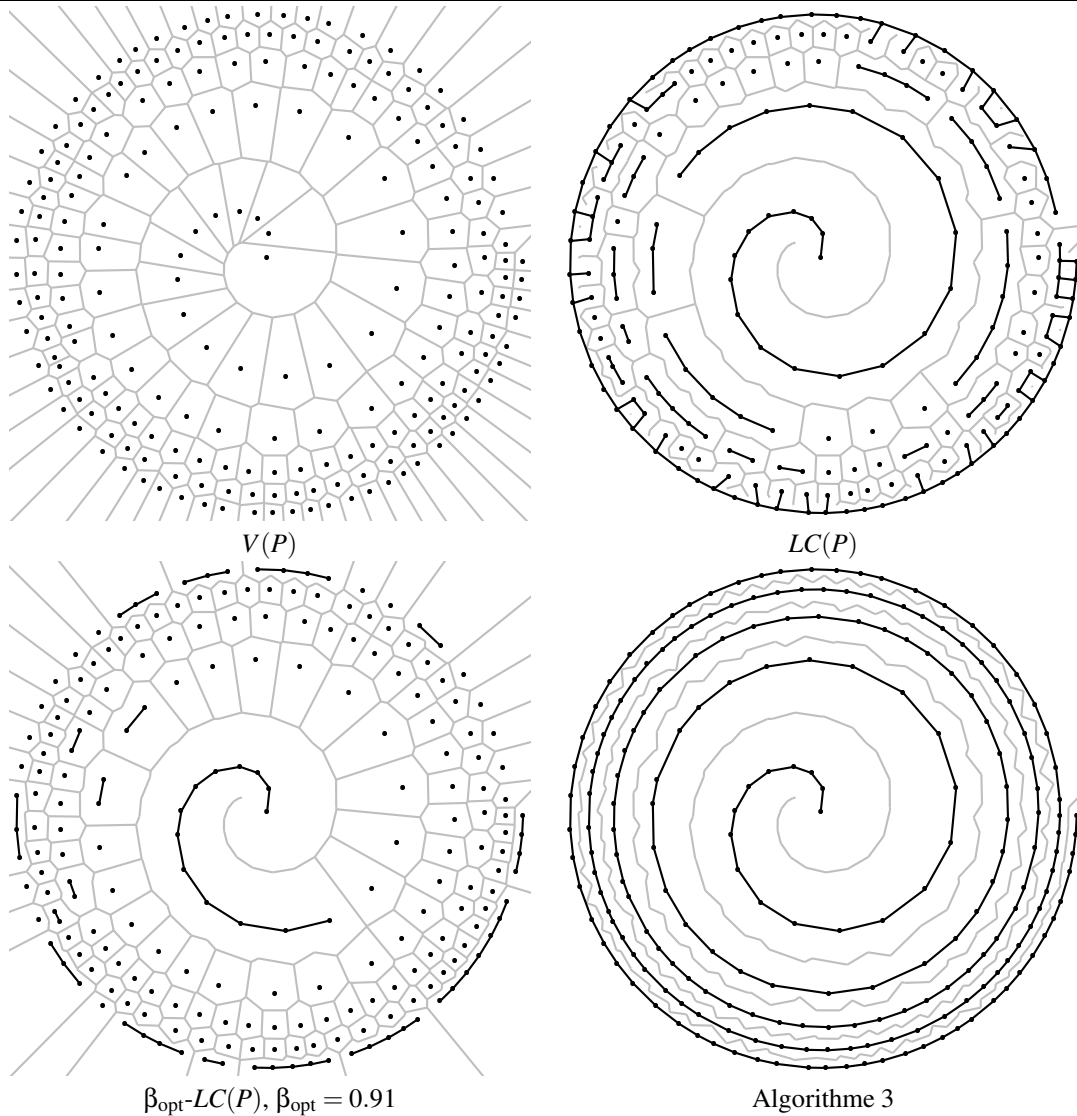


FIG. 7 – Les reconstructions avec l’algorithme 2 et le crust local ne sont pas correctes, tandis que la reconstruction avec l’algorithme 3 l’est.

6 Conclusion

Dans cet article, le problème de la reconstruction de courbes sans intersection, à partir d’un ensemble de points de \mathbb{R}^2 , est formulé en utilisant une famille hiérarchique de graphes de voisinage. Le voisinage est défini sur les arêtes du diagramme de Voronoï, comme l’union ou l’intersection de deux disques de même rayon, paramétré par un rapport de taille β . Les graphes de cette famille, que nous appelons les β -crusts locaux, sont des sous-graphes du graphe de Gabriel. De plus, pour $\beta = 1$, le β -crust local correspond au crust local.

Basés sur des propriétés des β -crusts locaux, deux algorithmes sont proposés pour extraire des courbes sans intersection à partir de la triangulation de Delaunay. Le premier calcule la valeur maximum de β pour laquelle le β -crust local reconstruit des courbes sans intersection. Le second algorithme améliore les résultats obtenus avec le premier algorithme, tout en simplifiant la méthode. Chacun de ces algorithmes fournit également une approximation de l’axe médian des courbes reconstruites.

Dans de futurs travaux, nous proposerons d’établir le lien entre la valeur de β et la valeur du paramètre ε qui intervient dans l’ ε -échantillonnage [ABE98].

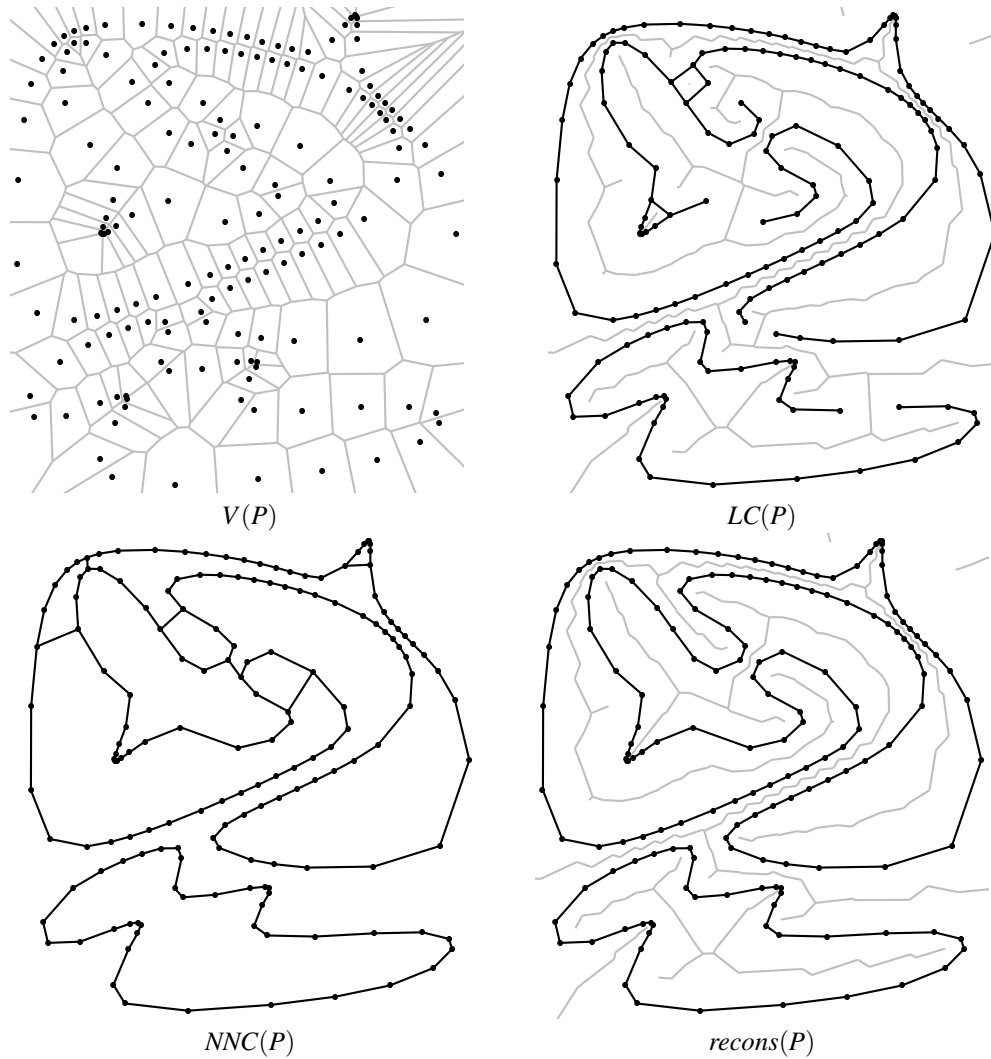


FIG. 8 – Reconstruction avec l’algorithme 3 et comparaison des résultats avec le crust local et le crust des plus proches voisins.

Références

- [ABE98] N. Amenta, M. W. Bern, and D. Eppstein. The crust and the β -skeleton : combinatorial curve reconstruction. *Graphical Models and Image Processing*, 60(2) :125–135, 1998.
- [AK00] F. Aurenhammer and R. Klein. Voronoi diagrams. In J. Sack and G. Urrutia, editors, *Handbook of Computational Geometry*, chapter V, pages 201–290. Elsevier Science Publishing, 2000.
- [Att97] D. Attali. r -regular shape reconstruction from unorganized points. In *Proc. of the 13th annual Symp. on Computational Geometry*, pages 248–253. ACM Press, 1997.
- [BA92] J. W. Brandt and V. R. Algazi. Continuous skeleton computation by Voronoi diagram. *CVGIP : Image Understanding*, 55(3) :329–337, 1992.
- [BB97] F. Bernardini and C. L. Bajaj. Sampling and reconstructing manifolds using alpha-shapes. In *Proc. of the 9th Canadian Conf. on Computational Geometry*, pages 193–198, 1997.
- [Blu67] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380. MIT Press, 1967.

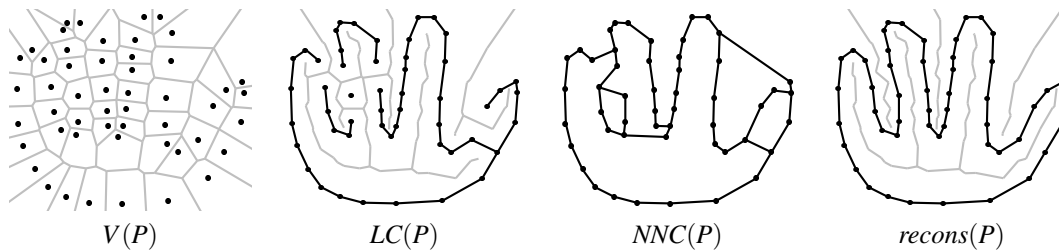


FIG. 9 – Reconstruction avec l’algorithme 3 et comparaison des résultats avec le crust local et le crust des plus proches voisins.

- [DK99] T. K. Dey and P. Kumar. A simple provable algorithm for curve reconstruction. In *Proc. of the 10th Symp. on Discrete Algorithms*, pages 893–894. ACM/SIAM, 1999.
- [DMR00] T. K. Dey, K. Mehlhorn, and E. A. Ramos. Curve reconstruction : Connecting dots with good reason. *Computational Geometry*, 15(4) :229–244, 2000.
- [DW01] T. K. Dey and R. Wenger. Reconstructing curves with sharp corners. *Computational Geometry*, 19(2-3) :89–99, 2001.
- [EKS83] H. Edelsbrunner, D. G. Kirkpatrick, and R. Seidel. On the shape of a set of points in the plane. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-29 :65–75, 1983.
- [FG95] L. H. De Figueiredo and J. De Miranda Gomez. Computational morphology of curves. *Visual Computing*, 11 :105–112, 1995.
- [Gol99] C. Gold. Crust and anti-crust : a one-step boundary and skeleton extraction algorithm. In *Proc. of the 15th annual Symp. on Computational Geometry*, pages 189–196. ACM Press, 1999.
- [GS69] K. R. Gabriel and R. R. Sokal. A new statistical approach to geographic variation analysis. *Systematic Zoology*, 18(3) :259–278, 1969.
- [GS01] C. Gold and J. Snoeyink. A one-step crust and skeleton extraction algorithm. *Algorithmica*, 30(2) :144–163, 2001.
- [Hiy06] H. Hiyoshi. Closed curve reconstruction from unorganized sample points. In M. L. Gavrilova, editor, *Proc. of the 3rd Int. Symp. on Voronoi Diagrams in science and engineering*, pages 122–131. IEEE Computer Society, 2006.
- [KR85] D. G. Kirkpatrick and J. D. Radke. A framework for computational morphology. In G. T. Toussaint, editor, *Computational Geometry*, pages 217–248. Elsevier, 1985.
- [Len06] T. Lenz. How to sample and reconstruct curves with unusual features. In *Proc. of the 22nd European Workshop on Computational Geometry*, pages 29–32, 2006.
- [Mel97] M. Melkemi. A-shapes of a finite point set. In *Proc. of the 13th annual Symp. on Computational Geometry*, pages 367–369. ACM Press, 1997.
- [MM95] M. Melkemi and L. Melkemi. An algorithm for detecting dot patterns. In R. A. Earnshaw and J. A. Vince, editors, *Computer graphics : developments in virtual environments*, pages 161–169. Academic Press Ltd., 1995.
- [OT04] J. O’Rourke and G. T. Toussaint. Pattern recognition. In J. E. Goodman and J. O’Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 51, pages 1135–1162. Chapman & Hall, second edition, 2004.
- [Vel88] R. C. Veltkamp. The γ -neighborhood graph for computational morphology. In *Proc. of Computing Science in the Netherlands’88*, pages 451–462, 1988.