



**HAL**  
open science

## Évaluation de la qualité d'estimation en fonction de la perte de capteurs

Vincent Sircoulomb, Ghaleb Hoblos, Houcine Chafouk, José Ragot

► **To cite this version:**

Vincent Sircoulomb, Ghaleb Hoblos, Houcine Chafouk, José Ragot. Évaluation de la qualité d'estimation en fonction de la perte de capteurs. D. Lefebvre, H. Chafouk, A El Hami, M. Ben-nouna. Diagnostic des systèmes complexes, Graphics Assala, pp.9-26, 2008. hal-00333206

**HAL Id: hal-00333206**

**<https://hal.science/hal-00333206>**

Submitted on 22 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Évaluation de la qualité d'estimation en fonction de la perte de capteurs

Vincent Sircoulomb\* \*\* — Ghaleb Hoblos\* — Houcine Chafouk\* — José Ragot\*\*

\* *Institut de Recherche en Systèmes Électroniques EMbarqués (IRSEEM)  
Technopôle du Madrillet, Avenue Galilée, B.P. 10024  
F-76801 St Étienne du Rouvray cedex  
{sircoulomb,hoblos,chafouk}@esigelec.fr*

\*\* *Centre de Recherches en Automatique de Nancy (CRAN) - UMR CNRS 7039  
2 avenue de le forêt de Haye  
F-54516 Vandoeuvre lès Nancy cedex  
Jose.Ragot@ensem.inpl-nancy.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cet article étudie la qualité d'estimation de filtres non linéaires en fonction de la perte de capteurs. Dans un environnement non linéaire décrit par une représentation d'état, les filtres de Kalman à différence centrale, les filtres de Kalman d'ensemble et les filtres particuliers sont testés sur un système d'ordre 2. Leur comportement relativement aux capteurs disponibles est alors étudié, dans le but de comparer leur qualité d'estimation, en évaluant des critères tels que la variance des erreurs d'estimation ainsi que les grammiens d'observabilité.*

*ABSTRACT. This paper deals with the estimation quality of nonlinear filters in relation to sensors losses. In a nonlinear state space representation setting, Central Difference Kalman Filter, Ensemble Kalman Filter and Particle Filter are tested on a second order system. Their comportment in relation to the available sensors are then studied, in order to compare the estimation quality by computing criteria such as variances of estimation errors and observability gramian.*

*MOTS-CLÉS: Non linéaire, Filtre de Kalman, Filtre de Monte Carlo, Observabilité, Grammien*

*KEYWORDS: Nonlinear, Kalman Filter, Monte Carlo filter, Observability, Gramian*

---

## 1. Introduction

La demande croissante de tolérance aux fautes dans des procédés automatisés de plus en plus complexes ne peut être atteinte que par l'utilisation d'algorithmes de détection et d'isolation de défauts (Fault Detection and Isolation -*FDI*- en anglais) efficaces et des concepts d'accommodation à ces défauts et de reconfiguration des systèmes de commande. Par conséquent, la validation de données des procédés complexes et les techniques d'estimation d'état sont de plus en plus utilisées dans la détection de défauts, notamment ceux de la production et du transport d'énergie (Deog *et al.*, 1990), (Chowdhury *et al.*, 1991), de l'aéronautique (Ochi *et al.*, 1991) ou de l'industrie chimique (Ragot *et al.*, 2005). Un banc de filtres de Kalman peut par exemple être utilisé afin de générer des résidus sensibles aux défauts (Sircoulomb *et al.*, 2005). Ces résidus sont alors utilisés afin de détecter et d'isoler ces défauts, et reconfigurer la loi de commande et/ou l'algorithme *FDI*.

Un niveau acceptable d'amplitudes de résidus dépend directement de la précision et de la robustesse des estimateurs ; en d'autres termes, les valeurs estimées doivent être le plus proche possible des valeurs réelles. De plus, la plupart des systèmes complexes étant non linéaires, les reconSTRUCTEURS d'état doivent s'accommoder du mieux possible de cette difficulté supplémentaire. Par ailleurs, si une perte de capteur intervient mais que le système considéré demeure observable, le maintien des performances de l'algorithme *FDI* va dépendre de la manière dont les estimateurs sont affectés par cette perte d'information. Le but de cet article est d'étudier la qualité d'estimation de filtres non linéaires en fonction de la perte de capteurs.

Le problème est tout d'abord posé dans la section 2. Dans le but d'évaluer la qualité d'estimation, la section 3 propose divers critères, basés sur la variance des erreurs d'estimation et le grammien d'observabilité. Les filtres non linéaires testés sont alors présentés dans la section 4. Enfin, la section 5 est dédiée à l'implémentation de ces estimateurs sur un système fortement non linéaire, dans le but d'analyser et de comparer leur comportement en fonction de la perte de capteurs.

## 2. Positionnement du problème

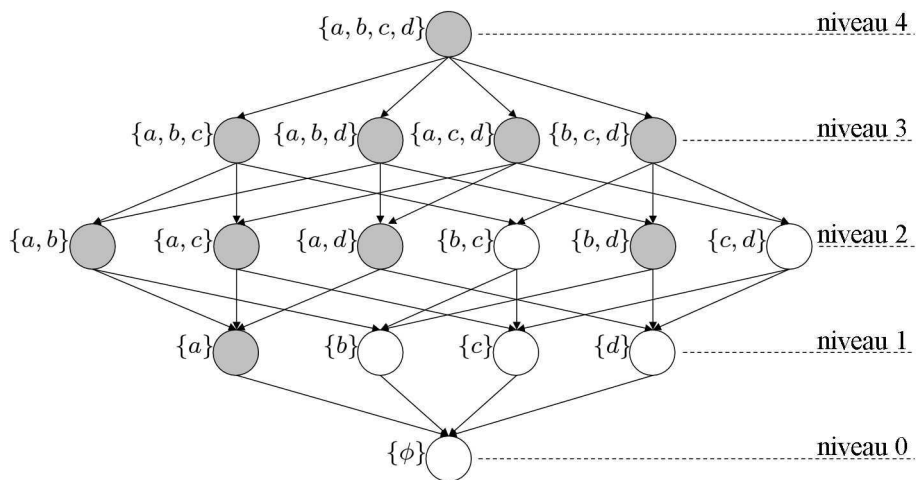
Soit le système non linéaire à temps discret suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), k) + \mathbf{v}(k) \end{cases} \quad [1]$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur d'état,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  le vecteur de commande,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  le vecteur de mesure,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_w}$  le bruit de dynamique,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$  le bruit de mesure et  $k \in \mathbb{N}$  le temps (discret).

Supposons maintenant qu'un défaut de capteur soit détecté et isolé par un algorithme *FDI*. La possibilité d'accommoder la loi de commande ou l'algorithme *FDI* du système considéré dépend de l'observabilité de ce dernier par rapport au

nouveau sous-ensemble de capteurs (c'est-à-dire tous les capteurs excepté le défectueux). D'où l'utilité d'analyser l'observabilité du système par rapport à chaque sous-ensemble de capteurs possible. Cette analyse peut être synthétisée dans un *graphe orienté* (Staroswiecki *et al.*, 1999). Sur un tel schéma, un noeud représente un sous-ensemble de capteurs et une flèche entre deux noeuds une perte de capteur. Une couleur particulière est associée à chaque noeud : gris si le système est observable par le sous-ensemble considéré et blanc sinon. Un exemple de graphe orienté est présenté sur la figure 1, pour un ensemble de capteurs  $\{a, b, c, d\}$  de cardinal 4.



**Figure 1.** Exemple de graphe orienté

Sur l'exemple de la figure 1, où chaque niveau est associé à un nombre de capteurs particulier, du fait que chaque noeud de niveau supérieur à 3 est gris, le système demeure observable même lors de la perte d'un capteur, quel qu'il soit. En l'occurrence, une accommodation est réalisable, et une condition nécessaire pour utiliser un algorithme *FDI* modifié est par la même validée. Cependant, cette perte de capteur est synonyme d'une diminution de la quantité d'information utilisée pour estimer l'état et la sortie du système, ce qui se traduit par des estimées moins précises. De ce fait, les amplitudes des résidus indicateurs de défauts vont nécessairement augmenter, ce qui engendre deux problèmes. Le premier est un accroissement du risque de fausse alarme si le seuil de détection n'est pas réadapté. Le second est qu'il s'avère impossible de détecter un défaut de faible amplitude, lequel devient insignifiant devant le niveau des résidus. Le but de cet article est donc d'étudier la qualité d'estimation de filtres non linéaires en fonction de la perte de capteurs.

### 3. Critères d'évaluation de la qualité d'estimation

Il existe différents critères permettant d'évaluer la qualité de l'estimé fourni par un filtre d'état à partir d'un ensemble donné de capteurs. Par la suite, seront uniquement considérés la variance de cet estimé et le grammien d'observabilité.

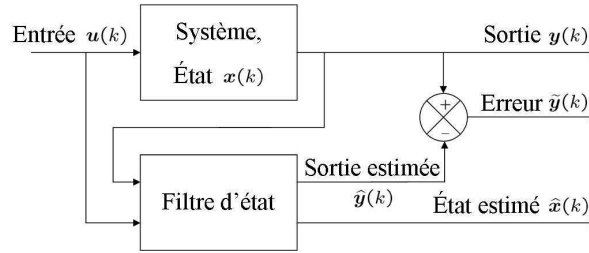
#### 3.1. Variance

Dans ce qui suit, on appelle variance d'un filtre la norme euclidienne de l'erreur  $\tilde{\mathbf{y}}(k)$  d'estimation de sa sortie :

$$V(k) = \|\tilde{\mathbf{y}}(k)\| \quad [2]$$

La figure 2 illustre le principe de calcul de  $\tilde{\mathbf{y}}(k)$  à partir d'un filtre et des mesures disponibles. Lorsque l'on souhaite exprimer la variance indépendamment du temps, on considère la moyenne de  $V(k)$  sur la longueur de la simulation, notée  $L$  :

$$V = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L V(k) \quad [3]$$



**Figure 2.** Principe du filtrage d'état

#### 3.2. Grammien d'observabilité

Le grammien d'observabilité, noté  $\mathbf{W}_o(k)$ , est une matrice semi-définie positive, de dimension  $n_x \times n_x$ , solution de l'équation de Lyapunov suivante (Wu *et al.*, 2000) :

$$\mathbf{A}(k)\mathbf{W}_o(k) + \mathbf{W}_o(k)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{C}^T(k)\mathbf{C}(k) = \mathbf{0}_{n_x \times n_x} \quad [4]$$

où les jacobiens  $\mathbf{A}(k)$  et  $\mathbf{C}(k)$  sont calculés comme suit :

$$\mathbf{A}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k)} \quad \mathbf{C}(k) = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k)} \quad [5]$$

Soient  $\lambda_i(k)$  la  $i^{\text{ième}}$  valeur propre de  $\mathbf{W}_o^{-1}(k)$  et  $\lambda_{\max}(k)$  la plus grande des valeurs propres de  $\mathbf{W}_o^{-1}(k)$  :

$$\lambda_{\max}(k) = \max_{1 \leq i \leq n_x} \lambda_i(k) \quad [6]$$

Plus la quantité  $\rho(k) = \sqrt{\lambda_{\max}(k)}$  est faible, meilleure est la qualité d'estimation du filtre considéré (Staroswiecki, 2002). De même que pour la variance,  $\rho$  représente la moyenne de  $\rho(k)$  sur l'intervalle de temps considéré lors de la simulation :

$$\rho = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \rho(k) \quad [7]$$

#### 4. Techniques de filtrage non linéaire

Dans un cadre stochastique, l'estimateur d'état le plus connu est le filtre de Kalman (Kalman, 1960), également connu sous le nom de filtre linéaire gaussien optimal. Cependant, dans le monde réel, la plupart des systèmes ne respectent malheureusement pas les hypothèses exigées par la conception de tels filtres. En ce qui concerne les systèmes non linéaires, le premier outil développé fut le filtre de Kalman étendu (*EKF*) ; mais ce reconstruteur d'état présente certains inconvénients, tels que le calcul des jacobiens de fonctions non linéaires (ce qui peut parfois s'avérer non trivial), et surtout diverger dans certains cas (Anderson *et al.*, 1979). Un certain nombre de travaux ont abouti à des résultats intéressants, et ce grâce aux filtres de Kalman Unscented (*UKF*) (Julier *et al.*, 1997), à différence centrale (*CDKF*) (Nørgaard *et al.*, 2000), et d'ensemble (*EnKF*) (Burgers *et al.*, 1998). Ces trois estimateurs présentent théoriquement de meilleures performances que l'*EKF*, mais sont basés sur des développements empiriques (Julier *et al.*, 1994).

Une approche plus générale est disponible grâce aux filtres de Monte Carlo, également appelés filtres particuliers (*PF*) (Arulampalam *et al.*, 2002), (Doucet, 1998). Cet outil est beaucoup plus puissant que les précédents, mais également plus coûteux en terme de temps de calcul, et de surcroît plus difficile à synthétiser.

Cette section présente tout d'abord la problématique du filtrage optimal. Ensuite, les différents filtres utilisés dans cette contribution seront présentés et leur paramétrage étudié.

##### 4.1. Problématique du filtrage optimal

Le filtre optimal est décrit par la densité de probabilité  $p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k))$  (Anderson *et al.*, 1979), laquelle est récursivement calculable à partir des équations du filtrage bayésien optimal [8].

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k)) &= \int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{x}(k)).p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k)).d\mathbf{x}(k) \\
p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k+1)) &= \frac{p(\mathbf{y}(k+1)|\mathbf{x}(k+1)).p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k))}{\int_{\mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{y}(k+1)|\mathbf{x}(k+1)).p(\mathbf{x}(k+1)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k)).d\mathbf{x}(k+1)}
\end{aligned} \tag{8}$$

où la notation  $\mathbf{y}(i \rightarrow k)$  représente la concaténation horizontale des sorties entre les instants discrets  $i$  et  $k$ . L'état estimé  $\hat{\mathbf{x}}$  peut alors être calculé à partir de l'un des deux critères d'optimalité :

– optimalité au sens des moindres carrés :

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbb{E}(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k)) = \int_{\mathbb{R}^{n_x}} \mathbf{x}(k).p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k)).d\mathbf{x}(k) \tag{9}$$

– optimalité au sens du maximum *a posteriori* :

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \arg \left\{ \max_{\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^{n_x}} p(\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(0 \rightarrow k)) \right\} \tag{10}$$

Malheureusement, les équations [8] ne peuvent être analytiquement résolues, excepté dans le cas gaussien, ce qui conduit au filtrage de Kalman. Dans les autres cas, l'unique moyen de les résoudre est d'utiliser une procédure de simulation de type Monte Carlo, ce que font les filtres particuliers.

#### 4.2. Filtres testés

Les filtres de Kalman non linéaires testés dans cet article sont le *CDKF* et l'*EnKF*. Chacun de ces estimateurs présente un paramètre spécifique, lesquels sont respectivement notés  $h$  et  $N$ . Leur algorithme est donné ci-dessous :

##### 1) Initialisation :

- $n_a = n_x + n_w$
- $\sigma_x = 2.n_x + 1$
- $\sigma_a = 2.n_a + 1$
- $W_{m_a}(i) = \begin{cases} (h^2 - n_a)/(h^2) & \text{si } i = 1 \\ 1/(2.h^2) & \text{si } 2 \leq i \leq n_a + 1 \end{cases}$
- $W_{m_x}(i) = \begin{cases} (h^2 - n_x)/(h^2) & \text{si } i = 1 \\ 1/(2.h^2) & \text{si } 2 \leq i \leq n_a + 1 \end{cases}$

- o  $W_{c1} = 1/(4.h^2)$
- o  $W_{c2} = (h^2 - 1)/(4.h^2)$

## 2) Étape de prédiction :

- o  $\hat{\mathbf{X}}(k) = [\hat{\mathbf{x}}^T(k) \mathbf{0}_{1 \times n_w}]^T$
- o  $\mathbf{P}_{aa}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx}(k) & \mathbf{0}_{n_x \times n_w} \\ \mathbf{0}_{n_w \times n_x} & \mathbf{P}_{ww}(k) \end{bmatrix}$
- o  $\mathbf{S}_{aa}(k) = \sqrt{\mathbf{P}_{aa}(k)}$
- o  $\hat{\mathbf{X}}(i, k) = \begin{cases} \hat{\mathbf{X}}(k) & \text{si } i = 1 \\ \hat{\mathbf{X}}(k) + h [\mathbf{S}_{aa}(k)]_{i-1} & \text{si } 2 \leq i \leq n_a + 1 \\ \hat{\mathbf{X}}(k) - h [\mathbf{S}_{aa}(k)]_{i-n_a-1} & \text{si } n_a + 2 \leq i \leq \sigma_a \end{cases}$
- o  $[\hat{\mathbf{x}}^T(i, k) \quad \hat{\mathbf{w}}^T(i, k)]^T = \hat{\mathbf{X}}(i, k) \quad i = 1, \dots, \sigma_a$
- o  $\hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(i, k), \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{w}}(i, k), k) \quad i = 1, \dots, \sigma_a$
- o  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \sum_{i=1}^{\sigma_a} W_{ma}(i) \hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k)$
- o  $\mathbf{P}_{xx}(k+1|k) = \sum_{i=2}^{n_a+1} (W_{c1} \|\hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}(i+n_a, k+1|k)\|^2 + W_{c2} \|\hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k) + \hat{\mathbf{x}}(i+n_a, k+1|k) - 2\hat{\mathbf{x}}(1, k+1|k)\|^2)$

## 3) Étape de correction :

- o  $\mathbf{S}_{xx}(k+1|k) = \sqrt{\mathbf{P}_{xx}(k+1|k)}$
- o  $\hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k) = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) & \text{si } i = 1 \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + h [\mathbf{S}_{xx}(k+1|k)]_{i-1} & \text{si } 2 \leq i \leq n_x + 1 \\ \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) - h [\mathbf{S}_{xx}(k+1|k)]_{i-n_x-1} & \text{si } n_x + 2 \leq i \leq \sigma_x \end{cases}$
- o  $\hat{\mathbf{y}}(i, k+1|k) = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k), \mathbf{u}(k+1), k+1) \quad i = 1, \dots, \sigma_x$
- o  $\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \sum_{i=1}^{\sigma_x} W_{mx}(i) \hat{\mathbf{y}}(i, k+1|k)$
- o  $\mathbf{P}_{yy}(k+1|k) = \sum_{i=2}^{n_x+1} (W_{c1} \|\hat{\mathbf{y}}(i, k+1|k) - \hat{\mathbf{y}}(i+n_x, k+1|k)\|^2 + W_{c2} \|\hat{\mathbf{y}}(i, k+1|k) + \hat{\mathbf{y}}(i+n_x, k+1|k) - 2\hat{\mathbf{y}}(1, k+1|k)\|^2) + \mathbf{P}_{vv}(k+1)$
- o  $\mathbf{Y}(k+1|k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}^T(2, k+1|k) - \hat{\mathbf{y}}^T(n_x+2, k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}^T(n_x+1, k+1|k) - \hat{\mathbf{y}}^T(\sigma_x, k+1|k) \end{bmatrix}$
- o  $\mathbf{P}_{xy}(k+1|k) = \sqrt{W_{c1}} \mathbf{S}_{xx}(k+1|k) \mathbf{Y}(k+1|k)$
- o  $\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}_{xy}(k+1|k) \mathbf{P}_{yy}^{-1}(k+1|k)$



- o  $\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)(\mathbf{y}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k))$
- o  $\mathbf{P}_{xx}(k+1) = \mathbf{P}_{xx}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{P}_{yy}(k+1|k)\mathbf{K}^T(k+1)$

---

algorithme du CDKF, dans le cas d'un bruit de mesures additif (Van Der Merwe, 2004)

---

1) Initialisation.

2) Étape de prédiction :

- o  $\hat{\mathbf{x}}(i, k) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{P}_{xx}(k)) \quad i = 1, \dots, N$
- o  $\hat{\mathbf{w}}(i, k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{n_w \times 1}, \mathbf{P}_{ww}(k)) \quad i = 1, \dots, N$
- o  $\hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(i, k), \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{w}}(i, k), k) \quad i = 1, \dots, N$
- o  $\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k)$
- o  $\tilde{\mathbf{x}}(i, k+1|k) = \hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \quad i = 1, \dots, N$
- o  $\mathbf{P}_{xx}(k+1|k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{x}}(i, k+1|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(i, k+1|k)$

3) Étape de correction :

- o  $\hat{\mathbf{y}}(i, k+1|k) = \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(i, k+1|k), \mathbf{u}(k+1), k+1) \quad i = 1, \dots, N$
- o  $\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{y}}(i, k+1|k)$
- o  $\tilde{\mathbf{y}}(i, k+1|k) = \hat{\mathbf{y}}(i, k+1|k) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) \quad i = 1, \dots, N$
- o  $\mathbf{P}_{yy}(k+1|k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{y}}(i, k+1|k)\tilde{\mathbf{y}}^T(i, k+1|k) + \mathbf{P}_{vv}(k+1)$
- o  $\mathbf{P}_{xy}(k+1|k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{\mathbf{x}}(i, k+1|k)\tilde{\mathbf{y}}^T(i, k+1|k)$
- o  $\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}_{xy}(k+1|k)\mathbf{P}_{yy}^{-1}(k+1|k)$
- o  $\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)(\mathbf{y}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k))$
- o  $\mathbf{P}_{xx}(k+1) = \mathbf{P}_{xx}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{P}_{yy}(k+1|k)\mathbf{K}^T(k+1)$

---

Algorithme de l'EnKF (Burgers et al., 1998)

Les nomenclatures utilisées sont :

– d'une manière générale :  $\mathbf{P}_{ab} = \mathbb{E}[(\mathbf{a} - \mathbb{E}(\mathbf{a}))(\mathbf{b} - \mathbb{E}(\mathbf{b}))^T]$ , où  $T$  représente l'opération de transposition,

– l'état augmenté  $\mathbf{X}$  inclut le bruit de procédé :  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{w}^T]^T$ ,

– du fait qu'une matrice de covariance est symétrique et définie positive, les matrices  $\mathbf{S}$  peuvent être calculées à partir de la décomposition de Cholesky,

- $[\mathbf{M}]_i$  est la  $i^{\text{ième}}$  colonne de  $\mathbf{M}$ ,
- $\|\mathbf{M}\|^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}^T$  et  $\|\mathbf{M}\|_{\mathbf{P}}^2 = \mathbf{M}\mathbf{P}\mathbf{M}^T$ ,
- d'une manière générale :  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{P})$  signifie que  $\mathbf{x}$  est généré selon une loi normale, de moyenne  $\mathbf{m}$  et de covariance  $\mathbf{P}$ .

En ce qui concerne les filtres particulaires (avec  $N$  : nombre de particules), nous nous sommes limités au choix le plus simple et néanmoins le plus populaire, à savoir utiliser le noyau de transition pour la densité d'importance. L'algorithme résultant de ce choix est présenté ci-dessous :

1) Initialisation :

- $\hat{\mathbf{x}}(i, k) \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}(0), \mathbf{P}_{xx}(0)) \quad i = 1, \dots, N$
- $W(i, k) = \frac{1}{N} \quad i = 1, \dots, N$

2) Étape de prédiction :

- $\hat{\mathbf{w}}(i, k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}_{n_w \times 1}, \mathbf{P}_{ww}(k)) \quad i = 1, \dots, N$
- $\hat{\mathbf{x}}(i, k+1) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(i, k), \mathbf{u}(k), \hat{\mathbf{w}}(i, k), k) \quad i = 1, \dots, N$

3) Étape de correction :

- $\tilde{\mathbf{y}}(i, k+1) = \mathbf{y}(k+1) - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(i, k+1), \mathbf{u}(k+1), k+1) \quad i = 1, \dots, N$
- $K(i, k+1) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \cdot \det(\mathbf{P}_{vv}(k+1))}} \exp\left(-\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}}(i, k+1)\|_{(\mathbf{P}_{vv}(k+1))^{-1}}^2\right)$
- $\tilde{W}(i, k+1) = K(i, k+1)W(i, k) \quad i = 1, \dots, N$
- $W(i, k+1) = \frac{\tilde{W}(i, k+1)}{\sum_{j=1}^N \tilde{W}(j, k+1)} \quad i = 1, \dots, N$

4) Étape de rééchantillonnage des particules (optionnel)

5) Estimation de l'état :

- Dans le cas du maximum *a posteriori* :  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}(i, k)$  tel que  $W(i, k) \geq W(j, k) \forall j \in \{1, \dots, N\}, j \neq i$
- Dans le cas des moindres carrés :  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \sum_{i=1}^N W(i, k)\hat{\mathbf{x}}(i, k)$

---

*Algorithme du PF, dans le cas de bruits gaussiens et d'une densité d'importance égale au noyau de transition (Doucet, 1998)*

Pour le choix des paramètres des filtres utilisés, nous adoptons les mêmes valeurs que dans (Siracoulomb *et al.*, 2006), c'est-à-dire  $h = \sqrt{3}$  pour le *CDKF*,  $N = 500$  particules pour l'*EnKF* et  $N = 1000$  particules pour le *PF*. Ce dernier filtre estimera l'état à partir de l'optimalité au sens des moindres carrés et procédera à un rééchantillonnage systématique en utilisant l'indicateur basé sur l'entropie du système de particules (Douc *et al.*, 2005).

## 5. Résultats et discussion

Dans cette section, nous décrivons en premier lieu le système considéré, puis analysons son observabilité. Nous comparons alors la précision de l'état estimé à partir des résidus fournis par chacun des filtres considérés. Cette étude comparative est réalisée pour chaque sous-ensemble possible de capteurs.

### 5.1. Système considéré

#### 5.1.1. Description du système

Le système que nous avons choisi d'étudier est une extension à l'ordre 2 d'un modèle fréquemment rencontré dans la communauté du filtrage particulière (voir par exemple (Arulampalam *et al.*, 2002), (Doucet, 1998)). Il est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 0.5x_1(k) + \frac{25x_1(k)}{1+(x_1(k))^2} + 8\cos(1.2k) + x_2(k) + w_1(k) \\ x_2(k+1) &= 8\sin(x_1(k)) + 8\sin(1.2x_2(k)) + w_2(k) \\ y_1(k) &= \frac{(x_1(k))^2}{20} + v_1(k) \\ y_2(k) &= x_2(k) + v_2(k) \end{aligned}$$

[11]

où  $x_1(k)$  et  $x_2(k)$  sont les deux composantes du vecteur d'état  $\mathbf{x}(k)$  à l'instant  $k$ , et  $y_1(k)$  et  $y_2(k)$  les mesures réalisées par deux capteurs disposés sur le système.  $\mathbf{v}(k) = [v_1(k) \ v_2(k)]^T$  et  $\mathbf{w}(k) = [w_1(k) \ w_2(k)]^T$  sont les bruits de mesure et de dynamique. Ces derniers sont orthogonaux entre eux, distribués selon des lois normales centrées de covariances respectives  $\mathbf{R}_{vv}$  et  $\mathbf{R}_{ww}$ .

#### 5.1.2. Observabilité du système considéré

Du fait que chaque composante de  $\mathbf{x}(k)$  est directement mesurée, il est évident que le système est observable. Soit  $\mathcal{O}_1(k)$  (respectivement  $\mathcal{O}_2(k)$ ) la matrice d'observabilité du système linéarisé, observé à partir du seul capteur 1 (respectivement capteur 2), c'est-à-dire celui mesurant  $y_1$  (respectivement  $y_2$ ). Ces matrices sont exprimées dans l'équation [12] :

$$\mathcal{O}_1(k) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ c_1 a_{11} & c_1 a_{12} \end{bmatrix} \quad \mathcal{O}_2(k) = \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} \end{bmatrix} \quad [12]$$

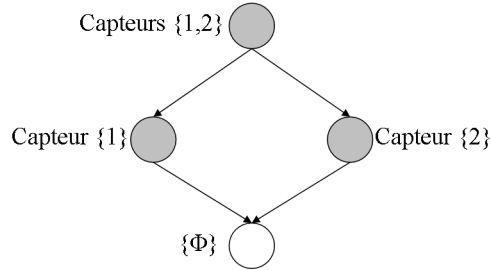
où  $\mathbf{A}(k) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{C}(k) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$  sont les jacobiens décrits dans la section 3.2, et ici définis par :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{(x_1(k))^4 - 48(x_1(k))^2 + 51}{2(x_1(k))^4 + 4(x_1(k))^2 + 2} & a_{21} &= 8 \cos(x_1(k)) & c_1 &= \frac{1}{20} \\ a_{12} &= 1 & a_{22} &= 9.6 \cos(x_2(k)) & c_2 &= 1 \end{aligned} \quad [13]$$

À partir du critère de Kalman, il est possible de dire que le système est localement observable autour du point  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  à partir du capteur  $i$  si  $\mathcal{O}_i(k)$  est une matrice de rang plein (i.e.  $\text{rang}(\mathcal{O}_i(k)) = n_x = 2$ ). On montre facilement que :

$$\begin{aligned} \text{rang}(\mathcal{O}_1(k)) &= 2 \quad \forall \mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{rang}(\mathcal{O}_2(k)) &= 2 \Leftrightarrow x_1(k) \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad [14]$$

Par la suite, nous supposons que ces valeurs très particulières ne sont jamais atteintes par  $x_1(k)$ . Donc, du fait que le système est localement observable pour n'importe quel point de l'espace d'état, le système [11] est globalement observable en utilisant uniquement l'un des deux capteurs. Cette configuration est illustrée par le graphe orienté de la figure 3.



**Figure 3.** Graphe orienté du système considéré

## 5.2. Comparaison des performances des filtres

Soient les matrices de covariance suivantes :  $\mathbf{R}_{ww} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{R}_{vv} = a\mathbf{I}$ , où  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $\mathbf{I}$  représente la matrice identité de dimension adéquate. Les écarts-types des bruits sont supposés connus. Par conséquent, les covariances des filtres peuvent être paramétrées à partir de ces valeurs.

Par la suite,  $V_{\text{filtre}}$  (défini dans [3]), avec  $\text{filtre} = \{CDKF, EnKF, PF\}$  décrira la variance des erreurs d'estimation du filtre considéré.  $\rho_{\text{filtre}}$  (défini dans [7]) symbolisera la racine carrée de la plus grande valeur propre de l'inverse du grammien d'observabilité, calculée à partir des valeurs obtenues par le filtre considéré.

### 5.2.1. Résultats obtenus en utilisant les deux capteurs

Les différentes valeurs de  $V_{\text{filtre}}$  et  $\rho_{\text{filtre}}$  en fonction de  $a$  figurent dans les tableaux 1 et 2.

$a$	1	10	50	100	500	1000
$V_{CDKF}$	7.78	9	12.15	14.84	28	39.65
$V_{EnKF}$	0.8	2.9	7.63	11.25	25.88	37.91
$V_{PF}$	1.31	3.07	7.59	11.32	25.94	37.96

**Tableau 1.** Variance des filtres en fonction de la covariance du bruit de mesure, en utilisant les capteurs 1 et 2

$a$	1	10	50	100	500	1000
$\rho_{CDKF}$	8.82	9.72	10.22	10.05	9.7	9.39
$\rho_{EnKF}$	8.54	9.28	8.85	10.22	10.11	9.59
$\rho_{PF}$	8.56	9.74	9.49	9.64	9.97	10.31

**Tableau 2.** Valeur de  $\rho$  des filtres en fonction de la covariance du bruit de mesure, en utilisant les capteurs 1 et 2

### 5.2.2. Résultats obtenus en utilisant un seul capteur

Maintenant, étudions la qualité d'estimation des filtres en fonction de  $a$ , mais en utilisant cette fois un seul capteur. Les résultats obtenus avec le capteur 1 sont donnés dans les tableaux 3 et 4, et ceux issus de l'utilisation du capteur 2 sont regroupés dans les tableaux 5 et 6.

$a$	1	10	50	100	500	1000
$V_{CDKF}$	7.83	9.27	12.71	15.28	29.54	41.04
$V_{EnKF}$	6.66	8.09	10.93	14.23	29.21	40.94
$V_{PF}$	6.85	8.15	10.96	14.24	29.25	40.92

**Tableau 3.** Variance des filtres en fonction de la covariance du bruit de mesure, en utilisant le capteur 1

$a$	1	10	50	100	500	1000
$\rho_{CDKF}$	106	126.5	123.62	127.2	113.77	108.09
$\rho_{EnKF}$	376	321.97	260.27	254.5	209.66	242.3
$\rho_{PF}$	156	175.35	181.44	268.59	235.05	277.67

**Tableau 4.** Valeur de  $\rho$  des filtres en fonction de la covariance du bruit de mesure, en utilisant le capteur 1

### 5.2.3. Analyse des résultats obtenus

A partir des résultats regroupés dans les précédents tableaux, nous remarquons que les performances affichées par les  $PF$  et  $EnKF$  sont assez proches, et ce quelle

$a$	1	10	50	100	500	1000
$V_{CDKF}$	8.37	9.32	12.15	15.21	28.48	40.68
$V_{EnKF}$	0.84	3.07	7.73	11.24	26.57	39.37
$V_{PF}$	1.31	3.26	7.81	11.3	26.72	39.41

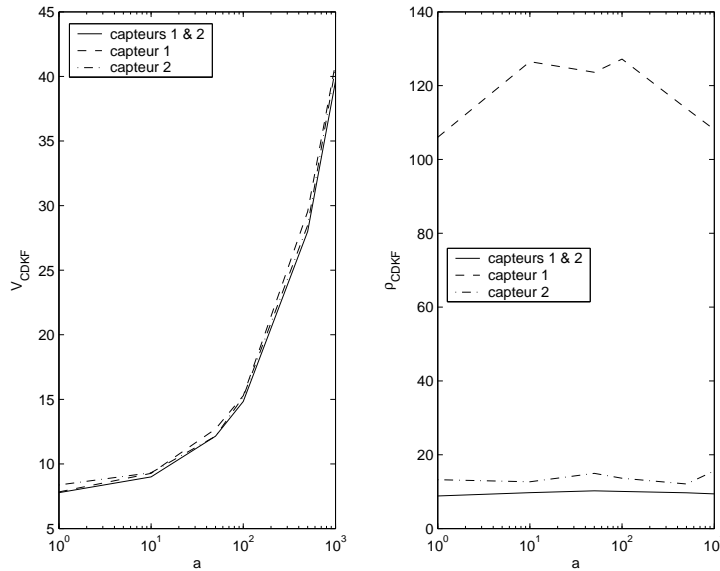
**Tableau 5.** Variance des filtres en fonction de la covariance du bruit de mesure, en utilisant le capteur 2

$a$	1	10	50	100	500	1000
$\rho_{CDKF}$	13.22	12.67	14.94	13.64	12.07	15.63
$\rho_{EnKF}$	13.61	14.01	12.88	15.13	14.36	15.47
$\rho_{PF}$	14.69	14.52	13.65	14.86	14.91	16.45

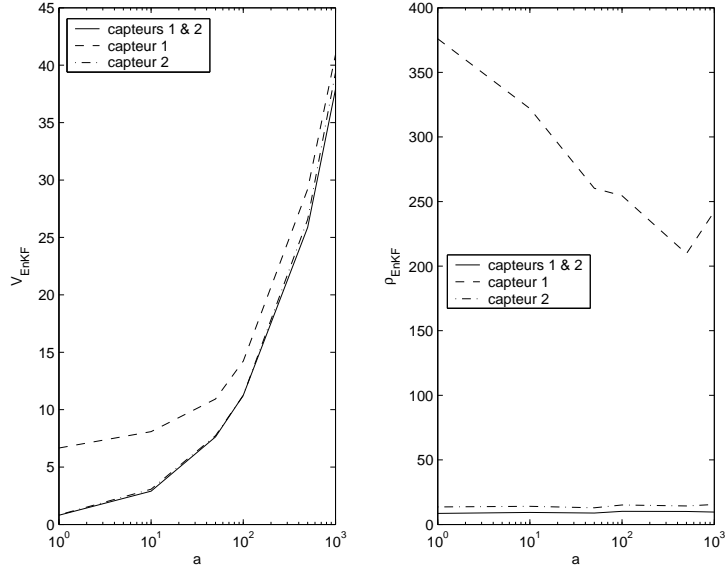
**Tableau 6.** Valeur de  $\rho$  des filtres en fonction de la covariance du bruit de mesure, en utilisant le capteur 2

que soit la configuration envisagée. Par ailleurs, dans le cas d'un fonctionnement en mode nominal (c'est-à-dire lorsque les deux capteurs sont sains et donc disponibles), ils surclassent nettement le *CDKF* pour un bruit de mesures d'écart-type faible. Ces résultats sont les même que ceux détaillés dans (Sircoulomb *et al.*, 2006).

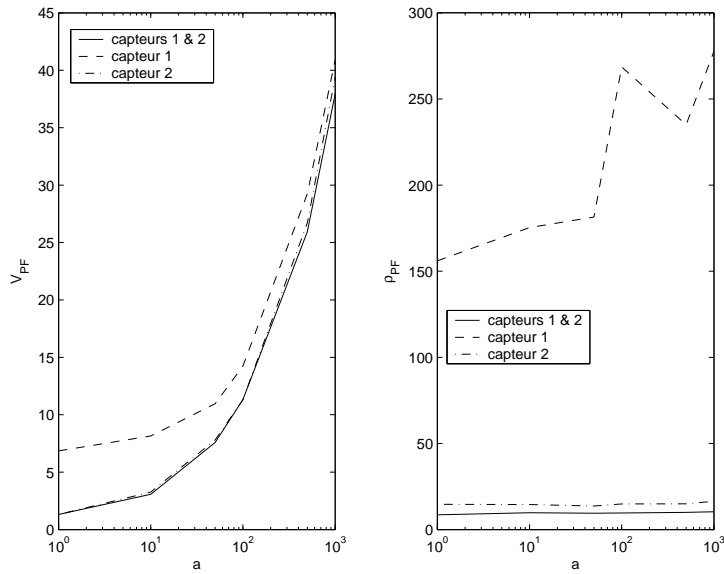
Les évolutions en fonction de l'écart-type du bruit de mesure des variances et des valeurs de  $\rho$  des filtres sont illustrées par les figures 4, 5 et 6.



**Figure 4.** Evolutions de  $V_{CDKF}$  et  $\rho_{CDKF}$  en fonction de  $a$ , pour chaque sous-ensemble de capteurs



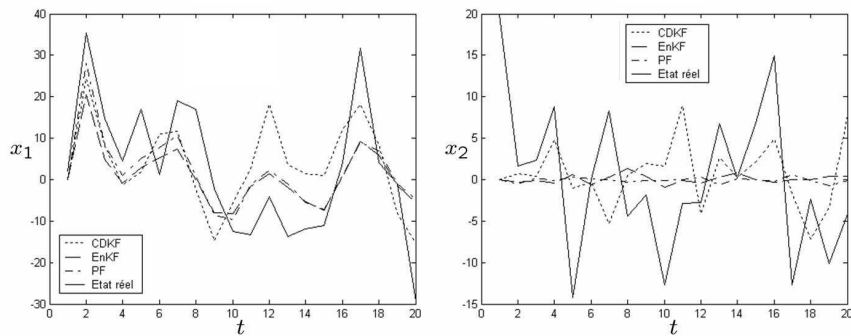
**Figure 5.** Evolutions de  $V_{EnKF}$  et  $\rho_{EnKF}$  en fonction de  $a$ , pour chaque sous-ensemble de capteurs



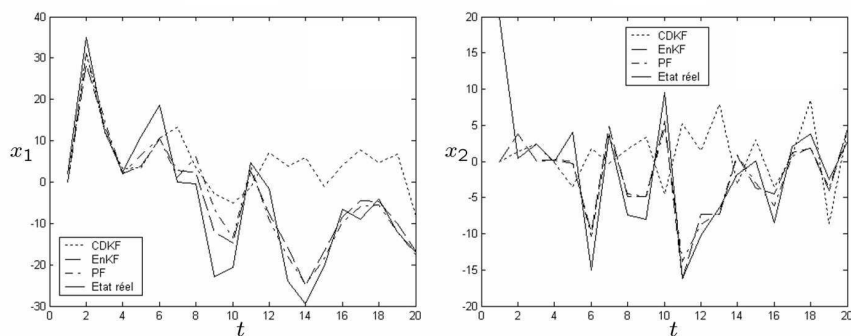
**Figure 6.** Evolutions de  $V_{PF}$  et  $\rho_{PF}$  en fonction de  $a$ , pour chaque sous-ensemble de capteurs

Tout d'abord, en tenant compte dans leur globalité des évolutions de  $\rho$  et  $V$ , il apparaît clairement que la perte du capteur 1 affecte peu la précision d'estimation des filtres. A l'opposé, la perte du capteur 2 va pénaliser les estimations, comme l'atteste l'élévation de la valeur de  $\rho$  et l'augmentation des variances du *PF* et de l'*EnKF*. Enfin, la figure 4 nous permet de noter que le *CDKF* ne semble affecté par aucune perte de capteur.

Ces résultats sont confirmés sur les figures 7, 8 et 9, pour de faibles niveaux de variance ( $a = 10$ ) : les estimations du *PF* et du *EnKF* sont relativement précises si les deux capteurs sont disponibles (figure 9), et à peine dégradées si seul le capteur 2 est utilisé (figure 8). Si seul le capteur 1 est sain, la précision d'estimation de  $x_1$  à partir des *PF* et *EnKF* est équivalente à celle issue de l'utilisation du *CDKF* (Figure 7a). En revanche, en ce qui concerne  $x_2$ , les estimations des *PF* et *EnKF* sont toujours voisines de 0 (Figure 7b).

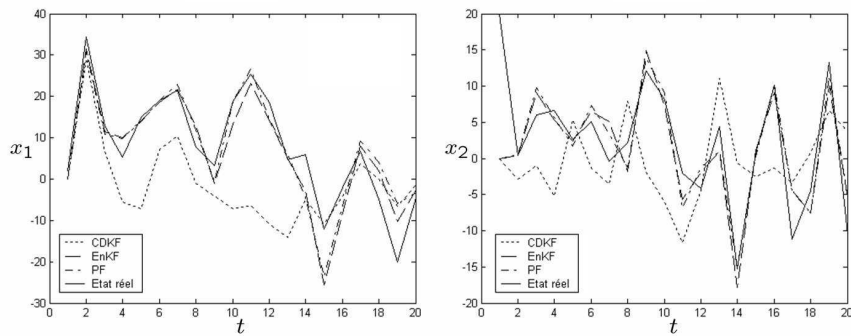


**Figure 7.** États réel et estimés à partir du capteur 1, en fonction du temps ( $t$ )



**Figure 8.** États réel et estimés à partir du capteur 2, en fonction du temps ( $t$ )





**Figure 9.** États réel et estimés à partir des capteurs 1 et 2, en fonction du temps ( $t$ )

## 6. Conclusion

Sur le système considéré, la précision d'estimation de chacun des filtres considérés (*CDKF*, *EnKF* et *PF*) n'est pas altérée par la perte du capteur 1. En revanche, la perte du capteur 2 dégrade nettement la qualité d'estimation des *PF* et *EnKF*, en particulier celle de la seconde composante du vecteur d'état. Le *CDKF* est le seul filtre conservant approximativement ses performances en cas de perte d'un capteur. Si un capteur devait être rendu redondant, cela devrait donc être le 2.

L'*EnKF* semble être le meilleur choix du fait qu'il procure globalement de meilleurs résultats que le *CDKF* (en particulier dans le cas d'un faible bruit de mesure). Par ailleurs, sa qualité d'estimation avoisine celle du *PF* avec moitié moins de particules (donc un temps de calcul moindre), et de surcroît un paramétrage plus simple.

Indépendamment de l'exemple étudié, nous avons fourni une méthodologie générale applicable à l'analyse de tout système muni d'un réseau de capteurs.

Ce travail présente différentes perspectives : tout d'abord, développer un algorithme permettant à la fois de sélectionner le meilleur estimateur d'état possible et d'opérer une redondance matérielle dans le but de doubler les capteurs dont la perte engendrerait une sérieuse dégradation de la qualité d'estimation. Ce point est traité dans (Sircoulomb *et al.*, 2007a), (Sircoulomb *et al.*, 2007b). Deux autres points sont également envisageables : premièrement, améliorer l'algorithme des filtres en propageant non pas des covariances mais leur racines carrées. Deuxièmement, étudier la sensibilité des résidus générés en fonction de la perte de capteur, avec un seuil adaptatif.

## 7. Bibliographie

- Anderson B., Moore J., *Optimal filtering*, Prentice Hall inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- Arulampalam S., Maskell S., Gordon N., Clapp T., « A tutorial on Particle Filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking », *IEEE transactions on Signal Processing*, vol. 50, n° 2, p. 174-188, 2002.
- Burgers G., Van Leeuwen P., Evensen G., « Analysis scheme in the Ensemble Kalman Filter », *Monthly Weather Review*, vol. 126, p. 1719-1724, 1998.
- Chowdhury F., Christensen J., Aravena J., « Power system fault detection and state estimation using Kalman Filter with hypothesis testing », *IEEE transactions on Power Delivery*, vol. 6, n° 3, p. 1025-1030, 1991.
- Deog O., Hee N., « Instrument failure detection and estimation methodology for the nuclear power plant », *IEEE transactions on Automatic Control*, vol. 37, n° 1, p. 21-30, 1990.
- Douc R., Cappé O., « Comparison of resampling schemes for Particle Filtering », *Proceedings of the 4<sup>th</sup> international symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, 2005.
- Doucet A., On sequential simulation based methods for Bayesian filtering, Technical report n° CUED/F-INFENG/TR310, Signal processing group, department of engineering, university of Cambridge, 1998.
- Julier S., Uhlmann J., A general method for approximating nonlinear transformations of probability distributions, Technical report, Robotic research group, department of engineering science, university of Oxford, 1994.
- Julier S., Uhlmann J., « A new extension of Kalman Filtering to nonlinear systems », *11<sup>th</sup> international symposium on aerospace/defence sensing, simulation and controls*, vol. multi-sensor fusion, tracking and ressource management II, Orlando, Florida, U.S.A., 1997.
- Kalman R., « A new approach to linear filtering and prediction problems », *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, Series D*, vol. 82, p. 35-45, 1960.
- Nørgaard N., Poulsen O., Ravn O., « New developments in state estimation for nonlinear systems », *Automatica*, vol. 36, p. 1627-1638, 2000.
- Ochi Y., Kanai K., « Design of restructurable flight control systems using feedback linearisation », *Journal of guidance*, vol. 14, n° 5, p. 903-911, 1991.
- Ragot J., Maquin D., « Data reconciliation : a robust approach using contaminated distribution. Application to a biochemical process. », *IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- Sircoulomb V., Hoblos G., Chafouk H., « A fault tolerant Kalman Filter Bank », *International Conference on Modelling and Simulation MS'05*, Rouen, France, 2005.
- Sircoulomb V., Hoblos G., Chafouk H., Ragot J., « Analysis and comparison of nonlinear filtering methods », *2006 IAR Annual meeting*, Nancy, France, 2006.
- Sircoulomb V., Hoblos G., Chafouk H., Ragot J., « Analyse et synthèse de redondance de capteurs en vue d'améliorer l'estimation d'état d'un système », *Colloque Interdisciplinaire en Instrumentation (C2I) 2007*, Nancy, France, 2007a.
- Sircoulomb V., Hoblos G., Chafouk H., Ragot J., « Sensor network design for improving estimation quality », *Submitted to International Journal of Modelling and Simulation*, 2007b.

- Staroswiecki M., « On reconfigurability with respect to sensor failures », *IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- Staroswiecki M., Hoblos G., Aïtouche A., « Faut tolerance analysis of sensor systems », *38<sup>th</sup> IEEE CDC*, vol. 4, Phoenix, Arizona, U.S.A., p. 3581-3586, 1999.
- Van Der Merwe R., Sigma-Point Kalman Filters for probabilistic inference in dynamic state-space models, PhD thesis, Faculty of the OGI school of Science & Engineering, 2004.
- Wu N., Zhou K., Salomon G., « On reconfigurability », *IFAC Safeprocess'00*, Budapest, Hungary, p. 846-851, 2000.