HAL open science

Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification.

Thomas Delzant, Misha Gromov

To cite this version:

Thomas Delzant, Misha Gromov. Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification.. 2007. hal-00331531

HAL Id: hal-00331531

https://hal.science/hal-00331531v1

Preprint submitted on 17 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Submitted exclusively to the London Mathematical Society
doi:10.1112/0000/000000

Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification

Thomas Delzant et Misha Gromov

Résumé. *Nous présentons une approche asymptotique à la théorie de la petite simplification, et l'appliquons à l'étude des groupes de Burnside libres.*

Abstract

We present an asymptotic approach to small cancelation theory, and apply this method to the study of the free Burnside groups.

English Summary

The point of this article is to give a detailed account of the asymptotic approach to small cancellation theory outlined in [**15**] and to apply it to the study of free Burnside groups of sufficiently large exponent. This approach to small cancellation theory is more geometric than the traditional ones. It is based on the idea of *mesoscopic curvature*, which interpolates between the classical concept of negative sectional curvature in Riemannian geometry and its asymptotic counterpart, hyperbolicity [**14**].

In Riemannian geometry, curvature is a *local* invariant defined in terms of the derivatives of the metric tensor of a manifold. One is then faced with the fundamental challenge of deducing global topological properties of the manifold from properties of its curvature. For instance, the Cartan-Hadamard theorem implies that every complete manifold of non-positive sectional curvature is covered by Euclidian space; in particular, if the manifold is compact then its fundamental group is infinite.

A.D. Alexandroff encapsulated (local) negative and non-positive curvature in a way that makes sense in more general geodesic metric spaces: a geodesic space has curvature $\leqslant 0$ (respectively $\leqslant -1$) if every point of the space has a neighbourhood in which each geodesic triangle is no fatter than the triangle with the same edge lengths in the euclidean (respectively hyperbolic) plane. One again has a version of the Cartan-Hadamard theorem: if the space is complete then all triangles in the universal cover (not just small ones) enjoy this thinness property, i.e. the cover is CAT(0) (respectively CAT(-1)). The corresponding developability theorems for orbi-spaces also hold: e.g. the (orbi-space) universal cover of a complete non-posivitely curved space is a CAT(0) space (with trivial local groups). We refer to the book of M. Bridson and A. Haefliger [**3**] for a thorough study of these matters and applications to group theory.

Hyperbolicity, in the sense of Gromov [**14**], provides a fundamentally different concept of negative curvature: it is a property of the *asymptotic* geometry of a space, largely insensitive to local structure. A geodesic metric space is *hyperbolic* if and only if all the geodesic triangles in that space are uniformly close (in the Hausdorff sense) to triangles in a tree. This concept enables one to understand and explore in a unified way geometric aspects of Kleinian groups, the theory of groups on trees – simplicial (Bass, Serre) or real (Morgan, Shalen) – and the

---

2000 *Mathematics Subject Classification* **** (primary), **** (secondary)..

Acknowledgements of grants and financial support should be included here. Last edit: MRB 30 July 2008

theory of small cancellation groups, both classical (Dehn, Tartakovski, Greendlinger, Lyndon, Novikov-Adian) and layered (Rips, Olshanskii).

The notion of *mesoscopic curvature* provides an interpolation between the microscopically-controlled geometry of a CAT(-1) space and the macroscopic concept of hyperbolicity. A scale σ is fixed and an error ε is specified; these are positive numbers with $\varepsilon \ll 1$. By definition, a metric space is $\mathrm{CAT}_\sigma(-1,\varepsilon)$ if all of the balls of radius σ in that space satisfy Alexandorff's CAT(-1) condition with an error bounded by ε (see subsection 3.2). There is a version of the Cartan-Hadamard theorem for $\mathrm{CAT}_\sigma(-1,\varepsilon)$ spaces: if such a space is simply-connected and locally simply-connected, and the size of σ dominates ε sufficiently, say $\sigma \geqslant 10^{10}\varepsilon^{1/6}$, then the space is hyperbolic. Note that this is fundamentally different to the classical Cartan-Hadamard theorem: instead of passing from the microscopic to the global scale with a hypothesis that controls the local geometry, one is now passing from a fixed finite scale to the global scale without worrying about the local geometry, although one does need to require some form of local simple-connectedness. In the present paper we prove a further variant of the Cartan-Hadamard theorem that is very much in the same spirit: it again involves the passage from a fixed finite scale to a global scale, but now we concentrate purely on hyperbolicity rather than the $\mathrm{CAT}_\sigma(-1,\varepsilon)$ condition. Moreover, with applications to small cancellation theory in mind, instead of proving the theorem just for metric spaces, we prove it for compact orbi-spaces P where the atlas of charts reflects the mesoscopic nature of what we are doing: the charts are simply-connected length spaces, the change-of-chart maps are isometries (hence P has a natural length structure), and for every point $x \in P$ there is a chart $\phi : U_i \to P$ and a pre-image $\tilde{x} \in U_i$ such that the ball of radius σ about $\tilde{x}$ is δ-hyperbolic and ϕ_i sends this ball onto the corresponding ball about x. Such charts are called σ-utile – see section 4.1 for details.

Theorem (Théorème 4.3.1). *Let $\delta > 0$, let $\sigma > 10^5\,\delta$ and let P be an orbi-space with an atlas of charts as described above. Then*

(i) *P is developable, i.e. its orbi-space universal cover $\widehat{P}$ is simply a metric space.*
(ii) *This universal covering is δ'-hyperbolic, with $\delta' = 200\delta$.*
(iii) *If $(U,\varphi,\tilde{x})$ is a σ-utile chart for a neighbourhood of $x \in P$ and $x' \in \widehat{P}$ is a preimage of x then the lift $(U,\tilde{x}) \to (\widehat{P},x')$ restricts to an isometric embedding on the ball of radius $\sigma/10$ about $\tilde{x}$.*

Our main interest in $\mathrm{CAT}_\sigma(-1,\varepsilon)$ spaces and mesoscopic curvature comes from the fact that any group satisfying a sufficiently strict small cancellation cancellation (or graded small cancellation condition) will act nicely on such a space (this is proved in section 5). Thus one obtains a geometric model for such groups that is both simpler to work with and finer than the Cayley graph. We shall llustrate this last assertion by providing a relatively short geometric proof of the celebrated Novikov-Adian Theorem establishing the infinitude of the free Burnside groups of sufficiently large odd exponent. In fact, we shall prove the following more general theorem, the first detailed proof of which was given by Ivanov and Ol'shanskii [**19**].

Theorem. *If G is a non-elementary hyperbolic group without torsion, then there exists an integer n such that for every odd integer $m > n$, the quotient of G by the subgroup generated by all m-th powers g^m is infinite.*

In a moment we shall describe the $\mathrm{CAT}_\sigma(-1,\varepsilon)$ spaces naturally associated to small-cancellation presentations. This construction suggests a more general formulation of the small cancellation condition in terms of groups acting properly and cocompactly by isometries on hyperbolic spaces. In fact one should go further and formulate it simply in terms of the geometry of families of lines in hyperbolic spaces — this is what is achieved in Definition 5.5, and it is in

these terms that we state the basic *Very Small Cancellation Theorem* (5.5.2), which is proved by application of a version of the Cartan-Hadamard Theorem. Our proof that the universal cover of a small cancellation complex with a sufficiently small parameter is $\mathrm{CAT}_{r_0}(-1,\varepsilon_0)$ relies on Theorem 5.5.2. (Here ε and r_0 are constants fixed once and for all). The construction used in the proof enables one to deduce the two principal conclusions of small cancellation — that the presentations are aspherical and that the groups presented are hyperbolic.

Suppose, then, that we are given a finite group-presentation $\mathcal{P} = \langle a_1, \ldots, a_r; R_1, \ldots, R_l\rangle$, and let $G_{\mathcal{P}}$ be the group that it defines. The standard van Kampen CW-complex $\Pi_{\mathcal{P}}$ with fundamental group $G_{\mathcal{P}}$ is obtained from the wedge W_r of r circles (oriented and labelled $a_1, \ldots, a_r$) by attaching l discs $D_1, \ldots, D_l$, the attaching map of D_i being the edge-path labelled by the word R_i. To endow this space with a geometry, one proceeds in two steps: first, one scales the metric on the 1-skeleton W_r so that each edge has length $k = \frac{\min|R_j|}{2\pi \sinh r_0}$, where r_0 is a large constant; next, the 2-cell D_i corresponding to R_i is metrized as a hyperbolic cone of radius r_0 that has curvature -1 away from the centre and has a cone angle $2\pi\frac{R_i}{\min|R_j|} \geqslant 2\pi$ at the apex.

The key parameter in our approach to small cancellation theory is $\lambda = \Delta/\rho$ where $\rho := \min|R_j|$ and Δ is the length of the longest piece in the presentation (subword common to two relations, inverses of relations, or cyclic conjugates). The Very Small Cancellation Theorem Theorem (5.5.2) shows that if λ is sufficiently small, then the universal cover of Π (given the induced length metric) is $\mathrm{CAT}_{r_0/10}(-1,\varepsilon_0)$, where ε_0 is a universal constant. To be definite, we can take $\varepsilon_0 = 10^{-50}$ and $r_0 = 10^5$. (See section 5.3 and follow the references there to see why these constants suffice, and note that thoughout the paper, although the actual values of the various constants are of little important, their sizes relative to each other are crucially important, and must be kept track of throughout.)

In order to motivate the definition of our geometric (asymptotic) small cancellation hypothesis (Definition 5.5.1), we consider the following description of how the geometry on the universal cover of $\Pi_{\mathcal{P}}$ derives from the action of the free group $F = F(a_1, \ldots, a_r)$ on the tree T that is its Cayley graph. Each non-trivial element $w \in F$ has a unique invariant axis $A(w)$ in T, which it translates by a distance $[w]$; if w is cyclically reduced then $[w] = |w|$. Let $\mathcal{R}$ be the set of conjugates of the relations R_i. Then $\rho = \min[R_i]$ and Δ is the diameter of the largest intersection of any pair of distinct axes $A(R)$, $A(R')$ with $R, R' \in \mathcal{R}$. Consider the space obtained from $\Pi_{\mathcal{P}}$ (metrized as above) by puncturing the discs at their centres and taking the universal cover Y of the resulting space. Y can be constructed directly from the tree T by *coning-off* the axes of the elements of $\mathcal{R}$, attaching to each the boundary line of the universal cover of a punctured disc of radius r_0 in hyperbolic plane. We can recover $\tilde{\Pi}_{\mathcal{P}}$ by taking the quotient of Y by the obvious action of the normal closure of $\mathcal{R}$, completing the metric to reintroduce the missing cone points. A crucial observation is that at points a distance $r_0/2$ from one of the missing cone points in Y, the map $Y \to \tilde{\Pi}_{\mathcal{P}}$ is an isometry on large balls; those of radius $r_0/10$, say. Since $\tilde{\Pi}_{\mathcal{P}}$ is $\mathrm{CAT}(-1)$ near the cone points, it follows that $\tilde{\Pi}_{\mathcal{P}}$ will be $\mathrm{CAT}_{r_0/10}(-1,\varepsilon_0)$ if Y is. It is in proving that Y has this property that one sees why it is important to control $\lambda = \Delta/\rho$.

An advantage of viewing the construction of $\tilde{\Pi}_{\mathcal{P}}$ in the above manner is that it begs to be generalized: instead of starting with the free group F acting on the tree T, one can start with a group G acting properly and cocompactly on a δ-hyperbolic space, where δ is suitably small compared to r_0; one can then quotient G by a set $\mathcal{R}$ of relations, expecting to get a hyperbolic group provided that $\Delta(G, X)$, the amount of overlap of (fattened pseudo-) axes of conjugates of these relations, is sufficiently small compared to ρ, the infimum of the distances elements of $\mathcal{R}$ move points of X. (The invariant $\Delta(G, X)$ plays the role that the Margulis constant plays in the setting where G is the fundamental group of a negatively curved manifold acting on its universal covering.) As in the construction of $\tilde{\Pi}_{\mathcal{P}}$, in order to obtain the desired hyperbolicity

on balls of a suitable size, one has to understand the effect of coning-off the (now fattened) lines in the manner described above.

Let $\bar{X}$ be the space obtained by taking the quotient of the coned-off space by the normal subgroup $N \subset G$ generated by $\mathcal{R}$ (with the cone points put back), and let $\bar{G} = G/N$. Then $\bar{G}$ will act properly and cocompactly on $\bar{X}$ and our mesoscopic form of the Cartan-Hadamard theorem will allow us to deduce that $\bar{X}$ is hyperbolic from the knowledge that it is hyperbolic on a suitable scale; in particular $\bar{G}$ will be hyperbolic.

This strategy for constructing hyperbolic quotients $\bar{G}$ is pursued in detail in subsections 5.1 to 5.6, with the Very Small Cancellation Theorem (5.5.2) playing an important role.

Once one has $\bar{G}$ and $\bar{X}$ in hand, it is natural to want to iterate the above process, replacing the action of G on X by the action of $\bar{G}$ on $\bar{X}$ and adding more relations to pass to a futher quotient. Of course, in order to do this one needs the new action to satisfy the appropriate small cancellation conditions. This means that one has to estimate $\Delta(\bar{G}, \bar{X})$ in terms of $\Delta(G, X)$ (subsection 5.9) and to understand the elementary subgroups of $\bar{G}$ in terms of G (subsection 5.10).

So far we have said nothing about how our approach recovers and generalizes the standard asphericity result for small cancellation presentations. This is the subject of subsection 5.7. Maintaining the above notation, and assuming that the various constants are chosen so that the above strategy succeeds, we have:

THEOREM. *If X is an aspherical CW complex, then $\bar{X}$ is also.*

The main point in the proof is this: from Rips's combing argument (see e.g. [**7**], chap.5, prop. 1.1) one knows that in order to prove that $\bar{X}$ is aspherical it is enough to show that one can contract any sphere $S_r \to \bar{X}$ of dimension ≥ 2 that has diameter less than $r_0/2$. But any such sphere is either in the $r_0/2$ neighbourhood of the image of X (which retracts to a space covered by X and therefore is aspherical) or else lies in the image of the interior of one of the cones attached to X in the construction of $\bar{X}$, and this retracts to the cone point.

In Section 6 we apply the foregoing constructions to prove the version of the Novikov-Adian theorem stated earlier.

1. *Introduction*

Le but de cet article est d'exposer de façon détaillée l'approche asymptotique de la théorie de la petite simplification exposée dans [**15**], basée sur l'idée de *courbure mésoscopique*, et de l'appliquer à l'étude du groupe de Burnside libre d'exposant suffisament élevé.

La courbure, en géométrie riemanienne, est un invariant *local* défini en terme des dérivées du tenseur métrique. Un problème fondamental de la géométrie des variétés riemaniennes est de décrire des propriétés topologiques globales d'une variété en connaissant les propriétés de son tenseur de courbure. Ainsi, le théorème de Cartan-Hadamard montre qu'une variété complète à courbure négative est revêtue par un espace euclidien. Si elle est compacte son groupe fondamental est donc infini. La courbure négative au sens d'Alexandroff joue un rôle analogue pour l'étude des espaces métriques : définie au niveau microscopique, elle exige que chaque petit triangle de l'espace métrique considéré soit plus fin qu'un triangle euclidien ayant mêmes longueurs des côtés. On renvoie au beau traité [**3**] de M. Bridson et A. Haefliger pour une étude approfondie de cette notion et son application à la théorie géométrique des groupes.

La notion d'hyperbolicité est -au contraire- une notion *asymptotique* : un espace métrique est hyperbolique si ses triangles géodésiques sont uniformément proches (au sens de Hausdorff) de triangles d'un arbre réel. Cette idée, apparue en 1987 dans [**14**], a permi de comprendre de façon unifiée l'étude géométrique des groupes kleiniens, la théorie des groupes opérant

dans les arbres (Bass, Serre) et des groupes opérant dans les arbres réels (Morgan, Shalen), la théorie des groupes à petite simplification (Dehn, Tartakovskii, Lyndon) et des groupes à petite simplification itérée (Rips, Olshanskii).

La notion de *courbure mésoscopique* est une version intermédiaire entre la notion microscopique d'espace CAT(-1) et la notion macroscopique d'espace hyperbolique. Si σ (l'échelle) et ε (l'erreur) sont deux nombres réels positifs (avec $\varepsilon \ll 1$), on dira qu'un espace métrique est $\mathrm{CAT}_\sigma(-1,\varepsilon)$ si ses boules de rayon σ satisfont l'inégalité CAT(-1) d'Alexandroff avec une erreur d'au plus ε. Le théorème de Cartan-Hadamard de [**15**] montre en particulier que, si un espace est simplement connexe, localement simplement connexe, si l'echelle σ est grande devant ε, par exemple $\sigma > 10^{10}\varepsilon^{1/6}$, alors il est hyperbolique.

L'intérêt principal de cette notion est qu'elle va nous permettre d'équiper les groupes à petite simplification, ou à petite simplification itérée, d'une géométrie plus simple et plus commode à utiliser que la géométrie à large échelle du graphe de Cayley.

Si $\mathcal{P} = \langle a_1, \ldots, a_r; R_1, \ldots, R_l\rangle$ est une présentation, et $G_\mathcal{P}$ le groupe qu'elle définit, on peut fabriquer le CW complexe de Van-Kampen $\Pi_\mathcal{P}$ en attachant au bouquet $W_r$de r cercles, l disques $D_1, \ldots, D_l$, l'application d'attachement de D_i sur W étant la relation R_i. Par construction le groupe fondamental de $\Pi_\mathcal{P}$ est $G_\mathcal{P}$. Pour équiper ce CW complexe d'une géométrie, on procède en deux temps. On renormalise la métrique naturelle de W_r en la divisant par $k = \frac{\min|R_j|}{2\pi \sinh r_0}$; où r_0 est une constante suffisament grande. On équipe alors le disque D_i de la métrique hyperbolique isométrique au cône de révolution de courbure -1, de rayon r_0 et d'angle au sommet $2\pi\frac{R_i}{\min|R_j|} \geqslant 2\pi$. Le théorème de la toute petite simplification (Théorème 5.5.2) montre que si la constante λ de la théorie combinatoire de la petite simplification (le rapport entre la longueur de la plus grande pièce et la longueur de la plus petite relation) est suffisament petite, muni de sa structure de longueur naturelle, le revêtement universel de Π est $\mathrm{CAT}_{r_0/10}(-1,\varepsilon_0)$, où ε_0 est une constante fixée. Cela suffit en particulier à établir l'hyperbolicité du groupe $G_\mathcal{P}$ et l'asphéricité de $\Pi_\mathcal{P}$, qui sont les deux résultats principaux de la théorie classique de la petite simplification. Nous verrons (6.1) que l'action obtenue de $G_\mathcal{P}$ sur le revêtement universel de Π est beaucoup plus hyperbolique -en un sens précis- que son action sur son graphe de Cayley.

Cette approche asymptotique se généralise immédiatement au cas où, au lieu d'être un bouquet de cercles, W est le quotient d'un espace métrique δ-hyperbolique par l'action d'un groupe discret co-compact, ce qui permet d'obtenir une version géométrique de la théorie de la petite simplification dans un groupe hyperbolique. On obtient ainsi (6.2) une nouvelle démonstration du théorème de Novikov-Adian sur l'infinité du groupe de Burnside libre d'exposant impair suffisament élevé.

Remarques historiques. Le groupe de Burnside libre *B(r,n)* est le quotient du groupe libre à r générateurs par le sous-groupe normal engendré par les puissances n-ième de tous ses éléments, et le problème de Burnside (1902) est de savoir si ce groupe est fini ou non (voir [**13**] pour un survey de cette question et des problèmes qui lui sont liés). Pour les petits entiers (2,3 (Burnside), 4 (Burnside, Sanov), 6 (Hall)), on sait que c'est le cas. Dans une série d'articles publiés en 1968, P.S. Novikov et S.I Adian démontrent que le groupe *B(r,n)* est infini si $n \geqslant 4381$ est impair, borne qui sera ramenée à 665 dans le livre d'Adian [**1**]. Leur démonstration repose sur une analyse très approfondie de la théorie combinatoire de la petite simplification, inventée par Tartakovskii [**27**] à la fin des années 1940, améliorée par Greendlinger [**12**] en 1960. En 1966, Lyndon [**20**] propose une approche topologique de la théorie de la petite simplification (méthode des diagrammes), retournant ainsi aux idées géométriques de Dehn (solution algorithmique du problème du mot et de la conjugaison dans un groupe de surface). A la fin des années 70, E. Rips [**25**] invente la théorie itérée de la petite simplification, et l'idée de triangle fin dans un graphe de Cayley, posant ainsi les germes de la théorie des espaces et des groupes hyperboliques ([**14**] 1985). En 1982 A.Y. Olshanskii parvient à simplifier la

démonstration de Novikov-Adian par l'utilisation des "diagrammes gradués", sa méthode marchant pour des entiers impairs suffisamment grands (voir [**23**]). En 1992, S. Ivanov [**18**] et I. Lysenok [**22**] établissent l'infinité de $B(r,n)$ pour n pair suffisamment grand ($n \geqslant 2^{48}$, et $n \geqslant 8000$ respectivement) par des méthodes généralisant respectivement celles d'Olshanskii et d'Adian-Novikov. D'autres remarques de nature historique se trouvent dans le survey d'Adian et Lysenok [**2**], le livre d'Olshanskii [**24**] et celui de Lyndon-Schupp [**21**].

Remerciements. Les auteurs remercient le rapporteur pour sa lecture attentive et ses critiques constructives.

2. *Espaces métriques δ-hyperboliques, quasi-convexité.*

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques propriétés des espaces métriques hyperboliques, et de définir l'invariant Δ utile pour l'étude quantitative des sous-groupes élémentaires de groupes hyperboliques. On renvoie à [**14**], [**7**] pour une étude détaillée des espaces métriques hyperboliques et de leurs sous-ensembles quasi-convexes.

On fixe un espace métrique géodésique X. On supposera que X est un espace *propre* : ses boules fermées sont compactes. Dans X la distance entre deux points x, y, notée $|x-y|$, est la longueur d'un segment géodésique $[x,y]$. Dans toute la suite nous supposerons que X est δ-hyperbolique au sens où tous les triangles géodésiques sont δ-fins; rappelons cette définition.

Finesse des triangles. Soit $T = [x,y] \cup [x,z] \cup [y,z]$ un triangle géodésique (la réunion de trois géodésiques). On dit que T est δ-fin si tout point de $[x,y]$ est à une distance inférieure à δ de la réunion des deux autres cotés de T. On dit que X est δ-hyperbolique si tout triangle géodésique de X est δ-fin.

On fixe, dans toute la suite, un espace métrique géodesique δ-hyperbolique X.

2.1. *Hyperbolicité*

Rappelons la définition du produit hyperbolique : pour tout triplet x, y, z de points de X, on pose :

$$\langle x, y\rangle_z = \frac{1}{2}(|x-z| + |y-z| - |x-y|).$$

La définition de la δ-hyperbolicité entraine en particulier (voir [**14**], [**7**] I.3.1) :

$$\forall x, y, z, t, \qquad \langle x, y\rangle_t \geqslant \min(\langle x, z\rangle_t, \langle y, z\rangle_t) - \delta.$$

Nous utiliserons librement les lemmes suivants.

Lemme 2.1.1 (Approximation par un arbre, [**14**], [**7**]). *Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ points de X, et $Y \subset X$ une réunion de segments géodésiques $Y = \cup_{1 \leqslant i \leqslant n}[x_0, x_i]$. Il existe un arbre métrique T, une application continue $F : Y \to T$ telle que :*

(1) *Pour tout i, la restriction de F à $[x_0, x_i]$ est une isométrie.*
(2) *F est une isométrie à $2\delta\,(\log_2(n)+1)$ près, plus précisément :*

$$|x-y| - 2\delta\,(\log_2(n)+1) \leqslant |F(x) - F(y)| \leqslant |x-y|.$$

□

Lemme 2.1.2 (Quasi-géodésiques discrètes, [**8**] 1.3.4). *Soit $x_n \in X$ une suite (finie ou non) de points.*

(1) *On suppose que :* $\forall i, \langle x_{i-1}, x_{i+1}\rangle_{x_i} \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{Min}(|x_i - x_{i+1}|, |x_i - x_{i-1}|) - \alpha - \delta$. *Alors* $|x_i - x_j| \geqslant \alpha|i-j|$.
(2) *Si de plus* $\alpha \geqslant 9\delta$ *et si pour tout* i *on a* $\langle x_{i-1}, x_{i+1}\rangle_{x_i} \leqslant \beta$, *alors la géodésique brisée* $[x_n, x_{n+1}] \cup [x_{n+1}, x_{n+2}] \cup \ldots \cup [x_{m-1}, x_m]$ *est à une distance inférieure à* $10\delta + \beta$ *de tout géodésique* $[x_n, x_m]$. *Réciproquement, tout point de*$[x_n, x_m]$ *est situé à une distance inférieure à* $10\delta + \beta$ *de cette géodésique brisée.* □

Définition 2.1.3 (Géodésique locale). *Une* α*-géodésique locale est une courbe paramétrée par la longueur d'arc dont tout sous-segment de longueur* α *est géodésique.*

Théorème 2.1.1 (Stabilité des géodésiques locales). *Soit* $\alpha > 100\delta$, $c : [a, b] \to X$ *une* α*-géodésique locale, et* $\bar{c}$ *une géodésique joignant* $c(a)$ *à* $c(b)$. *Alors tout point de* c *(resp.* $\bar{c}$*) est* 10δ*-proche d'un point de* $\bar{c}$ *(resp.* c*).*

Démonstration. On applique 2.1.2 à une subdivision de $c\,[a, b]$ en intervalles de longueurs comprises entre 40δ et 50δ. □

Lemme 2.1.4. *Soit* $\alpha > 100\delta$ *et* $c : [a, b] \to X$ *et* $c' : [a', b'] \to X$ *deux* α*-géodésiques locales. On suppose que* $|c(a) - c'(a')| \leqslant d; |c(b) - c'(b')| \leqslant d$. *Alors tout point de* c *situé à une distance supérieure à* d *de* $c(a)$ *et* $c(b)$ *est dans le* 30δ *voisinage de l'image de* c'.

Démonstration. En considérant les deux triangles fin $c(a), c(b), c'(b)$ et $c(a), c'(a), c'(b)$, on voit que si c et c' sont deux géodésiques dont extrémités sont d-proches, alors tout point de c situé à une distance $> d$ de $c(a)$ et $c(b)$ est à une distance $\leqslant 2\delta$ d'un point de c'. On applique alors le théorème de stabilité des géodésiques locales. □

2.2. *Ensembles quasi-convexes.*

Rappelons ici la définition de quasi-convexité.

Définition 2.2.1. *Un sous-ensemble* C *de* X *est dit* α*-quasi-convexe si pour tout couple* (x, y) *d'éléments de* C *et tout point* z *d'une géodésique* $[x, y]$, *la distance de* z *à* C *est inférieure à* α.

Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble. On note Y^{+d} l'ensemble des points situés à une distance inférieure à d de Y. Si C et C' sont deux sous-ensembles, on pose

$$\Delta(C, C') = \mathrm{diam}(C^{+20\delta} \cap C'^{+20\delta}).$$

Lemme 2.2.2. *Soient* C, C' *deux sous-ensembles* 10δ*-quasi-convexes.*
(1) *L'ensemble* $C^{+20\delta} \cap C'^{+20\delta}$ *est* 10δ*-quasi-convexe.*
(2) *Soient* A, B *deux constantes positives. On suppose que* $\Delta(C^{+A}, C'^{+A}) \geqslant B$. *Alors* $C^{+20\delta} \cap C'^{+20\delta}$ *contient un segment géodésique de longueur* $\geqslant B - 2A - 200\delta$. *Donc* $\Delta(C, C') \geqslant B - 2A - 200\delta$.

Démonstration. Soient $x, y \in C^{+20\delta} \cap C'^{+20\delta}$ et $[x, y]$ une géodésique entre ces points. Soient x_1, y_1 des projections de x, y sur C, c'est-à-dire des points réalisant le minimum

de distance. Par finesse des triangles, la géodésique $[x, y]$ reste dans le 2δ voisinage de $[x, x_1] \cup [x_1, y_1] \cup [y_1, y]$; mais $[x, x_1]$ et $[y, y_1]$ sont de longueur $\leqslant 20\delta$. Donc le segment $[x', y']$ obtenu en tronquant $[x, y]$ de 20δ aux deux bouts est dans $C^{+14\delta}$ et aussi dans $C'^{+14\delta}$, donc dans $C^{+20\delta} \cap C'^{+20\delta}$; comme un point de $[x, x']$ est distant d'au plus 10δ de x ou x' il est dans le 10δ voisinage de $C^{+20\delta} \cap C'^{+20\delta}$, et de même pour $[y, y']$. Ceci prouve (1).

On peut supposer que $B \geqslant 2A + 200\delta$. Soient x, y deux points de $C^{+A+20\delta} \cap C'^{+A+20\delta}$ distants d'au moins B, x', y' des points de C distants d'au plus $A + 20\delta$ de x, y, respectivement et σ le segment géodésique obtenu en tronquant $[x, y]$ de $A + 100\delta$ à chaque extrémité. Par construction la longueur de σ est supérieure à $B - 2A - 200\delta$. En appliquant la propriété de finesse des triangles aux deux triangles (x, x', y) puis (x', y', y), on voit que tout point de σ est 2δ-proche de $[x', y']$, et donc contenu dans $C^{+20\delta}$, par quasi-convexité. En échangeant le rôle de C et C' on voit qu'il est aussi contenu dans $C'^{+20\delta}$. □

2.3. *Sous-groupes élémentaires; généralités.*

Soit G un groupe discret co-compact d'isométries de l'espace métrique géodésique δ-hyperbolique propre X. Rappelons (voir [**14**], [**7**] chap. 9) qu'un élément g de G est dit *elliptique* si l'orbite d'un point x_0 est bornée, et que g est dit *hyperbolique* si il n'est pas elliptique. Dans ce dernier cas, il existe deux points distincts du bord, notés $g^+ \text{et} g^-$, tels que l'on ait $\lim_{n\to+\infty} g^n x_0 = g^+ \text{et} \lim_{n\to-\infty} g^n x_0 = g^-$. La co-compacité de G dans X assure qu'il n'y a pas d'éléments paraboliques, c'est-à-dire que tout élément est soit elliptique, soit hyperbolique.

Un sous-groupe de G est dit *elliptique* s'il a une orbite bornée. Comme nous avons supposé G discret, un sous-groupe de G est elliptique si et seulement si il est fini.

Un sous-groupe $E \subset G$ est dit *élémentaire* s'il ne contient pas de sous-groupe libre à deux générateurs; si E est élémentaire et n'est pas elliptique, il contient un élément hyperbolique g. Notant $g^+ \text{et} g^-$ les deux points fixes de g sur le bord de X, on montre que E est un sous-groupe du stabilisateur $E(g)$de l'ensemble $\{g^+, g^-\}$. Notons que $E(g)$ est lui-même un groupe élémentaire : c'est le groupe élémentaire maximal contenant g. Nous noterons E^+ le sous-groupe d'indice au plus 2 de E qui fixe g^+. Ce groupe E^+contient un unique sous-groupe fini maximal F, qui est normal dans E^+, et le quotient E^+/Fest isomorphe au groupe infini cyclique $\mathbb{Z}$. Un élément de E^+ est dit *primitif* si son image est un générateur de ce groupe cyclique.

Définition 2.3.1. *Si un sous-groupe élémentaire E de G, contenant un élément hyperbolique g, permute les deux points fixes g^+ et g^- de g sur ∂X,on dit que E est de type* diédral. *Un élément h de ce groupe est dit de type* diédral *dans E si il permute g^+ et g^-.*

Définition 2.3.2. *Soit $g \in G$. On définit successivement :*
La longueur de translation de g, $[g] = \min |x - gx|$.
L'ensemble $C_g = \{x \in X / |x - gx| \leqslant \max([g], 20\delta)\}$.

Proposition 2.3.3. *Soient $g \in G, x \in X, A > 0$.*

(1) *Soit d la distance de x à C_g. Si $d \geqslant 8\delta$, alors $|x - gx| \geqslant \max\{[g], 20\delta\} + 2d - 8\delta$.*
(2) $\{x \in X / |x - gx| \leqslant [g] + A\} \subset \{x \in X / d(x, C_g) \leqslant \frac{A+8\delta}{2}\}$.
(3) *C_g est 8δ-quasi-convexe.*

Démonstration. On considère une projection y de x sur C_g. Comme y est dans C_g et $|x-y|$ est minimale on a $|y-gy| = \max([g],\, 20\delta)$. Montrons que :

$$(*) \qquad \min(\langle x, gy\rangle_y; \langle y, gx\rangle_{gy}) \leqslant 2\delta.$$

Quitte à changer g en g^{-1}, il suffit de vérifier la première inégalité. Supposons par l'absurde que$\langle x, gy\rangle_y\rangle 2\delta$. Soit $p \in [y, gy]$ le point situé à une distance 2δ de y. Par l'inégalité triangulaire, on a $|p-gp| \leqslant |p-gy| + |gy-gp| = |y-gy|$, et donc $p \in C_g$. D'autre part, la finesse des triangles de l'espace X montre que p est situé à une distance inférieure ou égale à δ du point p' de $[x, y]$ situé à une distance 2δ de y. Donc la distance de x à p est strictement inférieure à celle de x à y, ce qui contredit le fait que y soit une projection de x sur C_g.

De $(*)$ on déduit que la distance de y à $g.y$ est supérieure à la somme $\langle x, gy\rangle_y + \langle y, gx\rangle_{gy} + 6\delta$. Puis, en regardant l'arbre d'approximation des 4 points x, y, gx, gy, on voit que :

$|x-gx| \geqslant |x-y| + |y-gy| + |gy-gx| - (\langle x, gy\rangle_y + \langle y, gx\rangle_{gy}) - 4\delta$.

Donc : $|x-gx| \geqslant 2|x-y| + |y-gy| - 8\delta$.

Les points (1) et (2) en résultent.

Pour montrer (3), on utilise la 8δ-convexité de la fonction distance ([**7**] 10.5.8), qui implique en particulier que si y, z sont deux points de C_g, alors pour tout point $p \in [y, z]$, on a l'inégalité $|p-gp| \leqslant \max(|y-gy|,\, |z-gz|) + 8\delta \leqslant \max([g],\, 20\delta) + 8\delta$. En appliquant (1), on voit que la distance de p à C_g ne peut excéder 8δ. □

Le résultat suivant, bien connu des spécialistes, est l'analogue du théorème du point fixe de Cartan Bruhat Tits, valable pour les espaces métriques à courbure négative (le point 1 est le Lemma 3.3 p.460 de [**3**]).

Proposition 2.3.4.

(1) *Si H est un sous-groupe fini de G, l'ensemble $C_H = \{x \in X / \forall h \in H |x-hx| \leqslant 10\delta\}$ est non vide.*

(2) *Si de plus $\alpha \geqslant 10\delta$ et C est un ensemble α-quasi convexe H-invariant, alors C_H rencontre $C^{+\alpha}$.*

Démonstration. On montre directement le point (2), le cas (1) étant le cas particulier où C est X tout entier. Soit $x_0 \in C$, Hx_0 son orbite et $x_1 = h.x_0 \in Hx_0$ le point de cette orbite où la distance à x_0 est maximale. Soit $d = |x_0 - x_1|$. Soit m le milieu d'un segment $[x_0, x_1]$. Notons que par quasi-convexité, $m \in C^{+\alpha}$. Montrons que $m \in C_H$, autrement dit que si $g \in H$ alors $|m-gm| \leqslant 10\delta$.

Posons $y_0 = g.x_0$ et $y_1 = g.x_1$ et considérons les projections p_0 et p_1 de ces points sur$[x_0, x_1]$. Comme $|x_0 - x_1| \geqslant |y_i - x_j|$, en considérant le triangle x_0, x_1, y_1, l'hypothèse d'hyperbolicité montre que $|y_i - p_i| \leqslant |x_i - p_i| + 2\delta$. Quitte à échanger les indices 1 et 2 on peut supposer que p_0 est à gauche de p_1 sur $[x_0, x_1]$.

On a alors : $|y_0 - y_1| \leqslant |y_0 - p_0| + |p_0 - p_1| + |p_1 - y_1|$.

Par isométrie : $|y_0 - y_1| = |x_0 - x_1| = |x_0 - p_0| + |p_0 - p_1| + |p_1 - x_1|$.

En soustrayant : $0 \leqslant (|y_0 - p_0| - |x_0 - p_0|) + (|p_1 - y_1| - |x_1 - p_1|)$.

Ainsi : $|\,|y_0 - p_0| - |x_0 - p_0|\,| \leqslant 2\delta$ et $-|y_1 - p_1| - |x_1 - p_1|\,| \leqslant 2\delta$.

En considérant l'arbre d'approximation des 5 points, x_0, x_1, y_0, y_1, gm on en déduit que le milieu m de $[x_0, x_1]$ est 10δ-proche de $g.m$, et donc contenu dans C_H. □

Remarque. La proposition précédente montre que si un groupe G est discret co-compact dans X, il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupe finis : de fait si D est le diamètre de X/G muni de sa structure de longueur naturelle, le résultat précédent

montre que si F est un sous-groupe fini de G et x_0 un point base de X, F est conjugué à un groupe d'isométries déplaçant x_0 d'au plus $2D + 10\delta$.

Proposition 2.3.5.

(1) *Soit $h \in G$ tel que $[h] \geqslant 100\delta$. Si $x_0 \in C_h$, la géodésique brisée $L = \cup_{i\in\mathbb{Z}}[h^i x_0, h^{i+1}x_0]$ est une $[h]$-géodésique locale, et est 10δ-quasi-convexe. De plus h est hyperbolique et C_h est contenu dans le 10δ-voisinage de L.*

(2) *Soit $E^+(h)$ le sous-groupe élémentaire maximal contenant h et Fson sous groupe fini maximal. Alors pour tout $x \in C_h$, et tout f de F, on a $|x - fx| \leqslant 100\delta$.*

Démonstration. 1. Soit x_0 tel que $|x_0 - hx_0| = [h], \text{et} x_n = h^n x_0, n \in \mathbb{Z}$. Si m_0 désigne le milieu d'une géodésique $[x_0, x_1]$ et si $m_i = h^i m_0$, on voit que $|m_i - m_{i+1}| = [h]$. Ainsi, la réunion des segments $h^i[x_0, x_1]$ est une $[h]$-géodésique locale. Grâce au lemme 2.1.4 on voit que cette courbe reste 10δ-proche de toute géodésique joignant deux de ses points. Pour voir que C_h est contenu dans le 10δ-voisinage de L on peut raisonner comme à la proposition 2.3.4, en projetant sur L au lieu de C_h.

2. Soit $h^\pm$ les points fixes de h à l'infini. La réunion $\mathcal{L}$ des droites joignant ces deux points est 4δ-quasi-convexe et F invariante. D'après 2.3.4 , il existe un point de $\mathcal{L}^{+4\delta}$ qui soit dans C_h. Il existe donc un point x_0 de $\mathcal{L}$tel que pour tout f dans F on ait$|x_0 - fx_0| \leqslant 30\delta$. En faisant agir les puissances de h on voit qu' il existe deux suites de points $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(x_n)_{n\leqslant 0}$ qui tendent vers $h^\pm$ et qui satisfont la même inégalité. Comme tout point de C_h est 10δ-proche d'un point de $[x_{-n}, x_n]$ pour n suffisamment grand, la quasi-convexité de la fonction distance permet de conclure. □

2.4. *L'invariant Δ.*

Soit G un groupe d'isométries d'un espace hyperbolique X. On définit l'invariant $\Delta(G, X)$, utile pour l'étude des groupes hyperboliques dont tout sous-groupe élémentaire est cyclique, fini ou non.

Définition 2.4.1. *Si $f, g \in G$, on pose $\Delta(f, g) = \Delta(C_f, C_g) = \operatorname{diam}(C_f^{+20\delta} \cap C_g^{+20\delta})$. On définit aussi $\Delta(G, X) = \max \Delta(C_f, C_g)$, le maximum étant pris sur les couples d'éléments f, g tels que $[f], [g] \leqslant 100\delta$ et f, g n'engendrent pas un groupe élémentaire.*

Remarque. L'invariant $\Delta(G, X)$ joue le rôle de la constante de Margulis définie pour les variétés à courbure négative *minorée*. Mais il n'y a pas de constante de Margulis uniforme pour toutes les variétés de courbure $\leqslant -1$. Dans la construction du groupe de Burnside libre (section 6), le point clé est de contrôler, à chaque étape, le rapport $\frac{\Delta}{\delta}$, où δ désigne la constante d'hyperbolicité de X.

Lemme 2.4.2. *On suppose que tout sous-groupe élémentaire de G est cyclique fini ou infini. Si $[g] \leqslant 100\delta$ et si f, g n'engendrent pas un sous groupe élémentaire, $\Delta(g, fgf^{-1}) \leqslant \Delta(G, X)$.*

Démonstration. Sinon, comme $\Delta(g, fgf^{-1}) \geqslant \Delta(G, X)$, g et fgf^{-1} engendrent un groupe élémentaire. Si g est hyperbolique, f laisse stable les points fixes à l'infini de g, donc f et g engendrent un groupe élémentaire. Si g est d'ordre fini, comme g et fgf^{-1} engendre un groupe élémentaire, celui-ci est cyclique fini; nommons-le C. Comme g et fgf^{-1} ont même ordre, ces deux éléments engendrent le même sous-groupe fini de C : en effet dans un groupe fini cyclique,

deux éléments de même ordre engendrent le même sous-groupe. Donc en fait $fgf^{-1} = g^k$pour un certain k : ainsi, le groupe cyclique C est normalisé par f. On en déduit que le sous-groupe engendré par f, g est élémentaire, donc cyclique, et en fait f et g commutent. □

Proposition 2.4.3. *On suppose que tout sous-groupe élémentaire de G est cyclique. Soient f, g deux isométries qui n'engendrent pas un sous-groupe élémentaire.*

(1) *Si $[g] \leqslant 100\delta$, alors $\Delta(f, g) \leqslant [f] + \Delta(G, X) + 1000\delta$.*
(2) *En toute généralité, $\Delta(f, g) \leqslant 2([f] + [g]) + \Delta(G, X) + 2000\delta$.*

Démonstration. Si f et g sont de longueur de translation inférieure à 100δ, il n'y a rien à montrer. Sinon, on peut supposer que $[f] \geqslant 100\delta$. Alors f est hyperbolique. Soit $x_0 \in C_f$. Alors (2.3.5) C_f est contenu dans le 10δ-voisinage de la géodésique locale $L = \cup_{i\in\mathbb{Z}}[f^i x_0, f^{i+1}x_0]$ que l'on identifie par une isométrie locale à la droite $\mathbb{R}$. Soit p une projection sur L. Notons que f agit sur L comme translation de longueur $[f]$. Donc, si on note additivement cette translation, on peut choisir p de sorte que :

$$(*) \qquad p(fx) = p(x) + [f].$$

Vérifions le point 1. Raisonnant par l'absurde, supposons que $\Delta(f, g) \geqslant [f] + \Delta(G, X) + 1000\delta$. Alors, en appliquant 2.2.2 à $C = L$, $C' = C_g$ il existe un segment σ de longueur $\geqslant [f] + \Delta(G, X) + 800\delta$ contenu dans $L^{+20\delta} \cap C_g^{+20\delta}$. Sur le sous-segment initial σ'de longueur $\Delta(G, X) + 800\delta$ de σ, $h = f^{-1}gf$satisfait $|hx - x| \leqslant [g] + 200\delta = [h] + 200\delta$. Donc (2.3.3 (1)) σ' est distant d'au plus 104δde $C_h$etlesegmentσ''obtenu en tronquant σ'de104δaux deux extrémités est de longueur supérieure à $\Delta(G, X) + 500\delta$, est 20δ-proche de C_h tout en étant contenu dans $C_g^{+20\delta}$. Ainsi σ'' est contenu dans $C_g^{+20\delta} \cap C_{f^{-1}gf}^{+20\delta}$. En appliquant 2.4.2 , on en déduit que f et g engendrent un groupe élémentaire.

Vérifions le point 2. Raisonnant par l'absurde encore, on suppose donc que $[g] \geqslant 100\delta$. Soit L'une $[g]$-géodésique locale g -invariante joignant g^- à g^+. Comme $C_f \subset L^{+40\delta}$ et $C_g \subset L'^{+40\delta}$, alors $L^{+60\delta} \cap L'^{+60\delta}$contient un segment σ de longueur $\geqslant 2([f] + [g]) + \Delta(G, X) + 2000\delta$. Comme σ est 60δ-proche de L et L', le segment σ' obtenu en tronquant σ d'une longueur 60δ au deux bouts est 10δ-proche de L et L'. Sur la partie initiale σ'' de longueur $|\sigma| - [f]$ de ce segment, $(*)$ montre que f agit presque comme une translation de longueur $[f]$ (à 20δ-près), et de même pour g : c'est à dire qu'un point x de σ' est envoyé par f à une distance inférieure à 20δ du point de σ situé à une distance $[f]$ de x (et de même pour g). Donc sur la partie initiale σ'' de longueur $\geqslant [f] + [g] + \Delta(G, X) + 1500\delta$ de σ', l'isométrie fg agit presque comme une translation (à 40δ-près) de longueur $[f] + [g]$, et de même pour gf. Donc sur σ'', l'isométrie $h = f^{-1}g^{-1}fg$ déplace tous les points d'au plus 80δ. Le segment σ''' obtenu en tronquant σ au deux bouts d'une longueur 40δ est donc contenu dans $C_h^{+20\delta}$, et est de longueur $> \Delta(G, X) + [f] + 1000\delta$.

Ainsi $\mathrm{diam}(C_h^{+20\delta} \cap C_f^{+20\delta}) \rangle \Delta(G, X) + [f] + 1000\delta$. On peut alors appliquer le point 1 au couple (f, h) : ces deux isométries engendrent un groupe élémentaire, donc cyclique. De même pour g et h. Donc f et g sont dans un même groupe cyclique. □

3. *Courbure mesoscopique et hyperbolicité.*

Dans ce paragraphe, nous revenons en détail sur l'idée de *courbure mésoscopique*, introduite dans [**15**]. On fixe un espace métrique X, supposé géodésique. Dans cet espace, la distance entre deux points x, y est notée $|x - y|$.

Si κ est un nombre réel négatif, on note X_κ le plan hyperbolique de courbure κ; X_0 désigne quant à lui le plan Euclidien, et par abus, $X_{-\infty}$ est un arbre réel universel, c'est à dire qui

contient isométriquement plongé tout arbre métrique enveloppe convexe d'un nombre fini de points.

3.1. *Courbure au sens d'Alexandroff.*

Rappelons la définition *intégrale* (par opposition à différentielle) d'espace métrique à courbure $\leqslant \kappa$, en terme d'inégalité de comparaison. Pour une étude approfondie de cette notion, le lecteur est invité à consulter le traité de M. Bridson et A. Haefliger [**3**].

Soit $T = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x] \subset X$ un triangle géodésique et $\kappa \leqslant 0$. Le *triangle de comparaison* T^*_κ de T est le triangle de X_κ $[x^*, y^*] \cup [y^*, z^*] \cup [z^*, x^*]$ ayant les mêmes longueurs de cotés. Pour que celui-ci existe, il suffit que $\kappa \leqslant 0$.

L'application de comparaison c_k est l'application $c_\kappa : T^*_\kappa \to T$ dont la restriction à chaque coté est une isométrie.

Définition 3.1.1 (Gromov [**14**]). *On dit que X satisfait l'inégalité* CAT(κ) *si pour tout triangle c_κ diminue les distances :*

$$|u - v| \geqslant |c_\kappa(u) - c_\kappa(v)|.$$

Un théorème de Cartan (pour $\kappa \leqslant 0$), Toponogov, Alexandroff, dit que si une variété riemanienne est à courbure sectionnelle $\leqslant \kappa$ alors elle satisfait localement -en tant qu'espace de longueur- l'inégalité CAT(κ).

Un théorème important, dit de Cartan-Hadamard affirme que pour $\kappa \leqslant 0$ si un espace métrique géodésique compléte X satisfait localement cette inégalité, alors son revêtement universel la satisfait globalement. On a ainsi un résultat qui permet de passer de l'echelle microscopique (tenseur de courbure) à l'échelle macroscopique (inégalité de Toponogov). L'idée de courbure *mésoscopique* permet d'étudier des espaces qui sans satisfaire localement l'inégalité CAT(-1) la satisfont avec une petite erreur au regard des diamètres des triangles étudiés, typiquement des espaces proches, au sens de Hausdorff, d'espaces CAT(-1). Le point clef étant le fait que l'inégalité qui sert à définir la propriété CAT(-1) est formulée dans *la logique du premier ordre des espaces métriques* (voir [**16**], 3.28).

3.2. *Espaces* $\mathrm{CAT}_\varepsilon(\kappa)$

L'idée de la définition de $\mathrm{CAT}_\varepsilon(\kappa)$ consiste à perturber l'inégalité CAT(κ) pour étudier des espaces proches (au sens de Hausdorff) d'espaces CAT(κ).

Quand on considère un espace métrique de 5 points (x, y, z, u, v) proche -au sens de Hausdorff- d'un 5-uplet d'un espace métrique (x', y', z', u', v') tel que u' (resp. v') soit sur une géodésique $[x', y']$(resp$[x', z']$), il n'y a pas de raison pour que les points u, v se trouvent encore sur des géodésiques $[x, y], [x, z]$. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 3.2.1. *Soient $(x, y, z; u, v) \in X$ un pentagone (5 points ordonnées). On appelle* brisure *de $(x, y, z; u, v)$ la quantité $\beta(x, y, z; u, v) = \max(|x - u| + |u - y| - |x - y|; |x - v| + |v - z| - |x - z|)$.*

A ce pentagone, on associe le triangle redressé x^*, y^*, z^*de X_κ dont les longueurs des cotés sont $|x - u| + |u - y|, |x - v| + |v - z|$ et $|y - z|$, si ces nombres satisfont l'inégalité triangulaire, et le triangle applati de cotés$|x - u| + |u - y|, |x - v| + |v - z|, ||x - u| + |u - y| - |x - v| - |v - z||$ sinon. Par construction, il existe un point u^*de$[x^*, y^*]$ et un point v^*de$[x^*, z^*]$dontles

distances à x^* sont $|x-u|$ et $|x-v|$. Notons que si la brisure est nulle il s'agit du triangle de comparaison ordinaire.

Définition 3.2.2. *Soit $\varepsilon : [0,\infty[\to \mathbb{R}\cup\infty$ une fonction, et $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$.*
On dit que X est $\mathrm{CAT}_\varepsilon(\kappa)$ si pour tout pentagone $(x,y,z;u,v)$ de brisure β, on a l'inégalité de comparaison :

$$|u-v| \leqslant |u^*-v^*| + \varepsilon(\beta).$$

On dit que X est $\mathrm{CAT}(\kappa)$ à ε_0-près, ou que X est $\mathrm{CAT}(\kappa,\ \varepsilon_0)$ si X est $\mathrm{CAT}_\varepsilon(\kappa)$ pour $\varepsilon(t)=\infty, t\neq 0$ et $\varepsilon(0)=\varepsilon_0$.
Par définition, si l'espace X est $CAT_\varepsilon(\kappa)$, il est $CAT(\kappa,\ \varepsilon_0)$ avec $\varepsilon_0=\varepsilon(0)$.

Exemple 3.2.3. *Pour $\kappa=-\infty$, l'inégalité $\mathrm{CAT}(-\infty,\varepsilon_0)$ est (exactement) la définition de la ε_0-hyperbolicité. Elle entraine l'inégalité $\mathrm{CAT}_\varepsilon(-\infty)$ pour $\varepsilon(\beta)=4\varepsilon_0+2\beta$.*

Malheureusement pour $\kappa>-\infty$ la situation est plus compliquée. La proposition suivante montre que, quitte à renormaliser, on peut toujours se ramener au cas où $\kappa=-1$.

Proposition 3.2.4 (Lemme de renormalisation). *L'espace métrique X est $\mathrm{CAT}_\varepsilon(\kappa)$ si et seulement si l'espace métrique αX satisfait l'inégalité $\mathrm{CAT}_{\alpha.\varepsilon}(\frac{\kappa}{\alpha^2})$. En particulier, si $\kappa<0$, alors X est $\mathrm{CAT}(\kappa,\varepsilon_0)$ si et seulement si$\sqrt{-\kappa}X$ est $\mathrm{CAT}(-1,\sqrt{-\kappa}\varepsilon_0)$.* □

Proposition 3.2.5. *Soit $\varepsilon_{-1}(\beta)=2\beta+2\sqrt{2\beta}$ (donc $\varepsilon_{-1}(\beta)\leqslant 10(\sqrt{\beta}-\beta)$ si $\beta<10^{-4}$). Si X est $\mathrm{CAT}(-1)$, il est $\mathrm{CAT}_{\varepsilon_{-1}}(-1)$. Si $\kappa<0$ et X est $\mathrm{CAT}(\kappa)$, alors X est $\mathrm{CAT}_{\varepsilon_k}(\kappa)$, pour $\varepsilon_k(\beta)=\frac{2\beta+2\sqrt{2\beta}}{\sqrt{-k}}$. Si X est $\mathrm{CAT}(\kappa,\varepsilon_0)$ il est $\mathrm{CAT}(\kappa',\varepsilon_0)$ si $\kappa'>\kappa$.*

Démonstration. De fait, si (x,y,z) est un triangle du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$, la brisure β du pentagone $(x,y,z;u,v)$ étant fixée, la distance $d$de u à la géodésique $[x,y]$est maximale si le triangle x,y,u est isocèle et dans ce cas est donnée par la formule :

$$\cosh d\ \cosh|\frac{x-y}{2}| = \cosh\frac{|x-y|+\beta}{2} = \cosh|\frac{x-y}{2}|\ \cosh\frac{\beta}{2} + \sinh|\frac{x-y}{2}|\ \sinh\frac{\beta}{2}.$$

Donc si $0\leqslant\beta\leqslant 1/2$, $\frac{d^2}{2}\leqslant\beta$, et $d\leqslant\sqrt{2\beta}$. En particulier, si $\beta<1/2$ et si u' est le point de $[x,y]$ situé à une distance $|x-u|$de$x$, la distance de u à u' est inférieure à $d+\beta\leqslant\beta+\sqrt{2\beta}$. De même, avec des notations évidentes, la distance de v à v' est inférieure à $\beta+\sqrt{2\beta}$.
Soient Y,Z les points situés sur les demi-droite d'origine x passant par y,z à une distance $|x-u|+|u-y|$et $|x-v|+|v-z|$de x. La distance de Y à Z est supérieure à celle de x à y , donc l'angle en x de ce triangle est supérieur à celui du triangle x^*,y^*,z^* ([**10**] Livre 1 prop. XXV ou la loi du cosinus hyperbolique), et donc la distance de u' à v' est supérieure à celle de u^* à v^*. □

Proposition 3.2.6. *Soit X un espace métrique $\mathrm{CAT}(-1,\varepsilon_0)$ alors X est $(\ln 3+2\varepsilon_0)$-hyperbolique.*

Démonstration. En effet le plan hyperbolique est ln 3-hyperbolique ([**7**], I.4.1). □

Proposition 3.2.7. *Soit X un espace métrique géodésique. Supposons que pour tout 5-uplet $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$, il existe un 5-uplet $(x_i^*)_{1\leqslant i\leqslant 5}$dans un espace métrique* $\mathrm{CAT}(-1)$ *tel que $\|x_i - x_j| - |x_i^* - x_j^*\| \leqslant \alpha$. Alors X est $\mathrm{CAT}_\varepsilon(-1)$, avec $\varepsilon(x) = \varepsilon_{-1}(x + 3\alpha) + \alpha$. En particulier, si $\alpha\langle 10^{-3}$, l'espace X est $(\ln 3 + 10\sqrt{3\alpha})$-hyperbolique, donc 2-hyperbolique.*

Démonstration. De fait, l'inégalité définissant cette propriété ne concerne que 5 points; en changeant $x_i$enx_i^*, on augmente la brisure d'au plus 3α, et la distance de u^* à v^* ne diffère de la distance de u à v que d'au plus α. □

Rappelons que si ω est un ultrafiltre non principal, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espaces métriques uniformément bornés, on définit $\lim_\omega(X_n)$ comme l'espace métrique quotient $\Pi X_n/\sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence $y \sim y'$ si et seulement si $\lim_w d(y_n, y'_n) = 0$. L'espace $\lim_w X_n$ est toujours complet, et il est géodésique si les $X_n$le sont (voir [**9**]).

Le fait que la propriété $\mathrm{CAT}(-1, \varepsilon_0)$ soit formulée dans la logique du premier ordre des espaces métriques a une conséquence immédiate. (Noter que u appartient à un segment géodésique $[x, y]$ peut d'écrire $|x - u| + |u - y| = |x - y|$.

Proposition 3.2.8. *Soit (X_n) une suite d'espaces métriques uniformément bornés. On suppose que pour tout ultrafiltre non principal ω, l'espace limit $\lim_w(X_n)$ est $\mathrm{CAT}(-1)$. Alors pour tout $\varepsilon_0 > 0$, il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ l'espace X_n est $\mathrm{CAT}(-1, \varepsilon_0)$.*

3.3. *Propriétés d'ε-convexité de la distance.*

Rappelons qu'une fonction d'une variable réelle est convexe si

(C) $\forall x, y\ \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(t)$.

Elle est dite convexe à ε près si

(C_ϵ) $\forall x, y\ \forall t \in [0, 1], f(tx + (1 - t)y) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(t) + \varepsilon$.

Dans un espace $\mathrm{CAT}(0)$ la fonction distance est convexe ([**11**] II.2.2); par comparaison, on en déduit :

Proposition 3.3.1. *Dans un espace $\mathrm{CAT}(0, \epsilon_0)$ la fonction distance est convexe à $2\epsilon_0$ près : si deux géodésiques c, c' sont paramétrées à vitesse constante la fonction $d(c(t), c'(t))$ est convexe à $2\varepsilon_0$ près.* □

Corollaire 3.3.2. *Deux géodésiques d'un espace $\mathrm{CAT}(0, \varepsilon_0)$ dont les extrémités sont à une distance inférieure à d restent à une distance inférieure à $d + 2\varepsilon_0$.* □

3.4. *Contraction stricte en courbure négative.*

Dans cette section, on fixe une constante ε_0 positive et un espace métrique géodésique X, que l'on suppose $\mathrm{CAT}(-1, \varepsilon_0)$. Nous allons étudier la géométrie de cet espace à l'échelle mésoscopique σ : il faut penser que σ est de l'ordre de $\varepsilon_0^{1/6}$ est un nombre petit mais infiniment grand devant ε_0. Pour fixer les idées on peut prendre $\sigma \geqslant 10^5\varepsilon_0^{1/6}$ et $\varepsilon_0 < 10^{-50}$; intuitivement, à l'échelle σ et avec une erreur petite, l'espace se comporte comme un espace $\mathrm{CAT}(0)$.

Lemme 3.4.1. *Soit $L \subset X$ une géodésique (finie ou non). Soit $p : X \to L$ une projection, c'est-à-dire une application qui réalise le minimum de distance.*

(1) *Si p(a) est la projection d'un point a sur L et $x \in L$ alors*

$$|x - p(a)| \leqslant 2\max(\sqrt{|x-a| - |a-p(a)|}; |x-a| - |a-p(a)|) + 4\sqrt{\varepsilon_0}.$$

(2) *Pour tous $a, b \in X$ on a $|p(a) - p(b)| \leqslant |a - b| + 4\sqrt{\varepsilon_0}$.*

(3) *Si h est la distance d'un segment $[a, b]$ à L, on a :*

$$(|p(a) - p(b)| - 4\sqrt{\varepsilon_0})\cosh(h - 2\varepsilon_0) \leqslant |a - b|.$$

Démonstration. Considérons, dans le plan hyperbolique, le triangle $T^* = (a^*, p(a)^*, x^*)$, de comparaison de $(a, p(a), x)$, et notons L^* la droite orientée passant par $p(a)^*$ et x^*. Soit y^* la projection de a^*sur cette droite. Notons que y^* est situé à droite de x^*: en effet, la distance $|t - a^*| : L \to \mathbb{R}$ est convexe; donc comme $|p(a)^* - a^*| \leqslant |x^* - a^*|$, le minimum de distance est atteint à gauche de x^*. En appliquant le théorème de Pythagore hyperbolique, au triangle a^*, y^*, x^*, on voit que :

$$\cosh|a^* - y^*|\cosh|y^* - x^*| = \cosh|a^* - x^*|.$$

Si y^* est situé à gauche de $p(a)^*$, on a donc :

$$\cosh|x^* - y^*| \leqslant \frac{\cosh|a^* - x^*|}{\cosh|p(a)^* - x^*|} \leqslant \exp|x - a| - |p(a) - x|$$

et :

$$|x^* - y^*| \leqslant \arg\cosh(\exp|x - a| - |p(a) - a|) \leqslant 2\max(\sqrt{|x-a| - |a-p(a)|},\ |x-a| - |a-p(a)|).$$

Si y^* est à droite de $p(a)^*$, alors le théorème de Pythagore hyperbolique appliqué au triangle $a^*, y^*, p(a)^*$ montre que

$$\cosh|a^* - y^*|\cosh|y^* - p(a)^*| = \cosh|a^* - p(a)^*|$$

mais par comparaison, $|a^* - y^*| \geqslant |a - y| - \varepsilon_0 \geqslant |a - p(a)| - \varepsilon_0$, donc $\cosh|y^* - p(a)^*| \leqslant \frac{\cosh|a-p(a)|}{\cosh|a-p(a)|-\varepsilon_0} \leqslant \exp\varepsilon_0 \leqslant 1 + 2\varepsilon_0$, d'où $|y^* - p(a)^*| \leqslant 2\sqrt{\varepsilon_0}$ et on en déduit (1) par addition.

Pour (2) on applique d'abord le (1) avec $p(b) = x$. On en déduit de la même façon que la distance du projetté orthogonal de a^* sur la droite $[p(a)^*, p(b)^*]$ se situe à une distance inférieure à $2\sqrt{\varepsilon_0}$ de $p(a)^*$. Soit b^* le point du plan hyperbolique situé du même coté que a^* de L^*, et tel que le triangle $a^*, b^*, p(b)^*$ soit un triangle de comparaison de $a, b, p(b)$. Quitte à changer a en b on pouvait supposer que $|a - L| \geqslant |b - L|$, et donc que $|a^* - p(b)^*| \geqslant |b^* - p(b)^*|$. Alors pour tout u^* de $[p(a)^*, p(b)^*]$, le segment $[b^*, u^*]$ rencontre $[a^*, p(b)^*]$ en un point v^*. Donc la projection de b^* sur le segment $[p(a)^*, p(b)^*]$ se trouve à une distance de $p(b)^*$ inférieure à $2\sqrt{\varepsilon_0}$. Toujours par convexité, la projection de b^* sur L^* se trouve à droite de $p(b)^*$ ou bien à gauche mais à une distance inférieure à $4\varepsilon_0$ de ce point. Par convexité, on a donc :

$$|p(a) - p(b)| = |p(a)^* - p(b)^*| \leqslant |p(a^*) - p(b^*)| + 4\sqrt{\varepsilon_0} \leqslant |a^* - b^*| + 4\sqrt{\varepsilon_0} = |a - b| + 4\sqrt{\varepsilon_0},$$

ce qui montre (2).

Soit h (resp h^*) la distance de $[a, b]$ à L (resp. de $[a^*, b^*]$ à L^*). Par comparaison on a l'inéalité $h^* \geqslant h - 2\varepsilon_0$, mais la géométrie hyperbolique classique ([**4**] C.1.15) montre que $\cosh h^*$ $|p(a^*) - p(b^*)| \leqslant |a^* - b^*|$, et on en déduit (3) grâce à ce qui précède. □

Proposition 3.4.2. *Soient $[a, b]$ et $[a', b']$ deux segments géodésiques.*

Soit h le maximum de distance d'un point de $[a, b]$ à $[a', b']$. Supposons qu'il existe un point m sur $[a, b]$ situé à une distance supérieure à $A \geqslant 100\sqrt{\varepsilon_0}$ de a et b et tel que $d(m, [a', b']) = h$. Alors $h \leqslant 10\varepsilon_0 + \frac{8}{\sqrt{A}}\varepsilon_0^{1/4}$. En particulier (faire tendre A vers $+\infty$) si deux géodésiques bi-infinies sont à distance bornée l'une de l'autre, cette distance est inférieure à $10\varepsilon_0$.

Démonstration. Quitte à restreindre l'intervalle, on peut supposer que la distance de m à a et b est A. La fonction distance $d(x,[a',b'])$ est convexe à $2\varepsilon_0$ près. Donc si elle atteint son maximum h en m on a $d(x,[a',b']) \geqslant h-2\varepsilon_0$, pour tout x de $[a,b]$, et donc pour tout $y \in [a',b']$ la distance de y à $[a,b]$ est supérieure à $h-2\varepsilon_0$.

Soit $q(a)$ et $q(b)$ des projections de $p(a)$et $p(b)$ sur $[a,b]$. Comme $|p(a)-a| \leqslant h$ et $h-2\varepsilon_0 \leqslant |q(a)-p(a)|$; ainsi $|a-p(a)|-|p(a)-q(a)| \leqslant 2\varepsilon_0$ et donc 3.4.1 (1) appliqué en remplaçant a par $p(a)$et x par a montre que $|a-q(a)| \leqslant 8\sqrt{\varepsilon_0}$. Mais alors 3.4.1 (2) (appliquée à $p(a)$ et $p(b)$) montre que $|a-b|-16\sqrt{\varepsilon_0} \leqslant |q(a)-q(b)| \leqslant |p(a)-p(b)|+4\sqrt{\varepsilon_0}$. Donc $|p(a)-p(b)| \geqslant |a-b|-20\sqrt{\varepsilon_0}$. Alors le point (3) de 2.4.1 de montre que $\cosh(h-2\varepsilon_0) \leqslant \frac{2A}{2A-24\sqrt{\varepsilon_0}} \leqslant \frac{1}{1-12\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{A}}$, d'où le résultat si $A \geqslant 100\sqrt{\varepsilon_0}$. □

Comme $\varepsilon_0 < 10^{-50}$, on a $200\varepsilon_0 < 1000\sqrt{\varepsilon_0} < \frac{\varepsilon_0^{1/6}}{10}$. Il en résulte que :

Proposition 3.4.3. *Soit $\alpha \geqslant 10^5\varepsilon_0^{1/6}$, et $c:[a,b]\to X$ une α-géodésique locale. Alors c reste à une distance inférieure à $h \leqslant 10(20\varepsilon_0+\frac{8}{\sqrt{\alpha}}\varepsilon_0^{1/4}) \leqslant \frac{\varepsilon_0^{1/6}}{10}$ de toute géodésique joignant ses extrémités.* □

Remarque. Ce résultat donne des renseignements sur les a-géodésiques locales avec $a \simeq 10^5\varepsilon_0^{1/6}$ qui tend vers zéro avec ε_0. La δ-hyperbolicité usuelle donne un résultat analogue pour $a \simeq 100\delta$.

A vrai dire nous utiliserons cette proposition pour des espaces métriques δ-hyperboliques dont toute boule de rayon $r_0 > 20\delta$ est $\mathrm{CAT}(-1,\varepsilon_0)$.

Proposition 3.4.4. *Soit X un espace métrique géodésique δ-hyperbolique, avec $\delta \geqslant 1$. On suppose que toute boule de rayon $r_0 > 10\delta$ de X est $\mathrm{CAT}(-1,\varepsilon_0)$, et que $\delta > \max(10^5, \varepsilon_0^{1/6})$.*

(1) *Si deux géodésiques infinies ont même extrémités, elle sont à une distance $\leqslant \frac{\varepsilon_0^{1/6}}{10}$ l'une de l'autre.*
(2) *Soit g une isométrie de X. On suppose $[g] \geqslant 10^5\varepsilon_0^{1/6}$; alors g est une isométrie hyperbolique. De plus $[g^n] \geqslant n([g]-\varepsilon_0^{1/6})$.*

Remarque. Cette proposition est surtout utile pour $\varepsilon_0 < 10^{-20}$. Sinon la δ-hyperbolicité fait donne un renseignement tout aussi précis ([CDP], prop. 10.6.4).

Démonstration. Considérons deux géodésiques L, L'ayant même extrémités : celles-ci sont 2δ-proche. Soit p un point de L où le maximum de distance est atteint (avec une erreur d'au plus ε_0)et h cette distance. On regarde le situation dans la boule de rayon 20δ autour de p . On consière les points a,b situés à gauche et à droite de p sur L à une distance 10δ, et on pose a',b' leur projection sur L' et on applique le 3.4.2. avec $A=10\delta$: on obtient que $h < 1000\varepsilon_0^{1/4}$.

Le second point résulte du premier en recopiant l'argument de [CDP], prop. 10.6.4. □

4. *Orbi-espaces localement hyperbolique.*

Dans ce paragraphe, aux numéro 4.1, 4.2 et 4.3, on rappelle la terminologie des orbi-espaces et des structures géométriques; pour plus de détails (en particulier pour l'étude du cas non rigide), le lecteur est invité à se reporter à l'ouvrage de M. Bridson et A. Haefliger [**3**].

Nous détaillons la version du théorème de développabilité de Cartan-Hadamard utile pour les orbi-espaces ayant à l'échelle 1000δ une géométrie δ-hyperbolique. Le cas $\delta = 0$ est le cas des graphes de groupes du livre de J.-P. Serre [**26**].

4.1. *Structure géométrique sur un orbi-espace.*

Une action d'un groupe G sur un espace topologique H est dite *rigide* si un élément de G est trivial dès qu'il agit comme l'identité sur un ouvert.

4.1.1. *Définition : structure d'orbi-espace.* Soit P un espace topologique. On dit qu'on a muni P d'une structure d'*orbi-espace*, si on s'est donné une famille $((U_i, \varphi_i)_{i\in I})$ (appelé atlas) formée de couples (U_i, φ_i) (appelés cartes) d'espaces topologiques U_i, et d'applications continues $\varphi_i : U_i \to P$ telles que :

-Les images $\varphi_i(U_i)$ recouvrent P.

-Pour tout x de $\varphi(U_i)$, et toute préimage $\tilde{x} \in U_i$ de x, il existe un groupe fini rigide G_x d'homéomorphisme de U_i conservant $\tilde{x}$ tel que $\varphi_i \circ g = \varphi_i$, et la restriction de φ_i à un voisinage $V_{\tilde{x}}$ de $\tilde{x}$ induit un homéomorphisme $V_{\tilde{x}}/G_x$ vers un voisinage W de x.

-Si $x = \varphi_i(\tilde{x}) \in \varphi(U_i)$ et $x = \varphi_j(\tilde{x}') \in \varphi(U_j)$ il existe un homéomorphisme $\theta_{j,i}$d'un voisinage de $\tilde{x}$ sur un voisinage de $\tilde{x}'$ tel que $\varphi_i = \varphi_j \circ \theta_{j,i}$. Cet homéomorphisme est appelé *changement de carte.*

-Pour tout i, l'application φ_i relève les chemins et les homotopies :

si $c : [a, b] \to P$ (resp $c : [0, 1] \times [a, b]$) est un chemin continu (resp. une homotopie), il existe une subdivision $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$ (resp. des subdivisions $0 = t_0, t_1, \ldots .t_k = 1$ et $a_0 = a, a_1, \ldots a_n = b$ de $[0, 1]$ et $[a, b]$) telle que la restriction de c à $[a_i, a_{i+1}]$ (resp. à $[t_i, t_{i+1}] \times [a_j, a_{j+1}]$) se relève dans une carte U_i.

4.1.2. *Définition : structure géométrique de longueur.* Soit P un orbi-espace défini par un atlas U_i, φ_i. On dit qu'on s'est donné sur P une *structure géométrique de longueur* si les domaines U_i sont munis d'une structure de longueur telle que pour tout x le groupe G_x est un groupe d'isométrie de U_i et les changements de cartes sont des isométries.

Une telle structure induit une *structure de longueur* sur P : pour mesurer la longueur d'un chemin, il suffit de le couper en petits morceaux et de les relever dans les U_i.

4.1.3. *Définition : structure de longueur utile à l'échelle σ.* Si $\sigma > 0$ est un paramètre fixé (l'échelle), cette structure est dite *σ-utile*, c'est-à-dire utile à l'échelle σ, si pour tout x il existe une carte U_i, φ_i, un relevé $\tilde{x}$ de x dans U_i telle que la restriction de φ_i à la boule $B(\tilde{x}, \sigma) \to B(x, \sigma)$ soit surjective, relève les chemins d'origine x et longueur inférieure à $\sigma/2$ et les homotopies de chemins $h : [0, 1] \times [0, 1]$ telles que $h(0, 0) = x$, pour tout t_0 la longueur du chemin $h(t, u)$ soit inférieure à $\sigma/2$ et pour tout u_0 la longueur du chemin $h(t, u_0)$ soit inférieure à $\sigma/2$ en une homotopie contenue dans $B(\tilde{x}, \sigma/2)$. Une telle carte, notée $(U, \varphi, \tilde{x})$ est appelée carte σ-utile pour x.

4.1.4. *Définition.* Soit P un orbi-espace défini par un atlas, ayant une structure de longueur σ-utile. On dit que P est *σ-localement δ-hyperbolique* si pour tout x il existe une carte σ-utile pour x, $(U_i, \varphi_i, \tilde{x})$ et telle que la boule $B(\tilde{x}, \sigma)$, muni de sa métrique de longueur, soit δ-hyperbolique.

4.2. *Groupoïde fondamental, revêtements, développabilité .*

On suppose donné un orbi-espace P muni d'une structure de longueur utile à l'échelle σ. Rappelons les définitions classiques de $\mathcal{G}$-chemin et de groupoïde fondamental de P (voir [**3**]).

Définition 4.2.1. *Un $\mathcal{G}$-chemin paramétré dans P est la donnée :*

(1) *D'un chemin ordinaire, c'est-à-dire d'une application continue : $c : [a, b] \to P$.*
(2) *D'une subdivison $a = a_0, a_1, \dots a_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$*
(3) *Pour tout $i \in \{0, n-1\}$,d'un point x_i de X tel que $|c(t) - x_i| < \sigma/2$ si $t \in [a_i, a_{i+1}]$, d'une carte (U_{k_i}, φ_{k_i}), et d'un relevé $\tilde{x}_i$ de x_i dans U_{k_i}, σ-utiles.*
(4) *Pour tout i d'un relevé continu $c_i : [a_i, a_{i+1}] \to B(\tilde{x}_i, \sigma/2)$ de c tel que la condition de compatibilité $c_{i+1}(a_{i+1}) = \theta_{k_{i+1},k_i} c_i(a_{i+1})$ soit satisfaite, où θ désigne l'homéomorphisme de changement de carte.*

Un tel $\mathcal{G}$-chemin est noté $\gamma = (x_0, c_0; x_1, c_1 \dots; x_{n-1}, c_{n-1})$.

L'ensemble des $\mathcal{G}$-chemins paramétrés est un *groupoïde* pour la composition naturelle.

Si $\gamma = (x_0, c_0; x_1, c_1 \dots; x_{n-1}, c_{n-1})$ est un $\mathcal{G}$-chemin, si $|y_i - x_i| < \sigma/2$ et si $y'_i \in B(\tilde{x}_i, \sigma/2)$ est un relevé de y_i tel que $|c_i(t) - y'_i| < \sigma/2$, et θ_{y_i,x_i} le changement de carte correspondant, on pose $c'_i(t) = \theta_{y_i,x_i}(c_i(t)) \in B(\tilde{x}_i, \sigma/2)$. Alors $\gamma' = (y_0, c'_0; y_1, c'_1 \dots; y_{n-1}, c'_{n-1})$ est aussi un $\mathcal{G}$-chemin paramétré. On dit qu'il est obtenu à partir de γ par un changement de carte.

On peut subdiviser un $\mathcal{G}$-chemin en introduisant un point a'_i entre a_i et a_{i+1}, et en posant $x'_i = x_i$. On peut aussi reparamétrer un $\mathcal{G}$-chemin à la source par une application croissante $[a', b'] \to [a, b]$.

4.2.1. *Equivalence.* Deux $\mathcal{G}$-chemins paramétrés sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite de subdivisions, de changements de cartes ou de reparamétrisations à la source. Une classe d'équivalence de $\mathcal{G}$-chemins paramétrés est un $\mathcal{G}$-chemin.

Définition 4.2.2. Homotopie. *Soient γ_0 et γ_1 deux $\mathcal{G}$-chemins ayant même origine et extrémité. On dit qu'ils sont $\mathcal{G}$-homotopes si il existe :*

(1) *Une application continue $c : [0, 1] \times [a, b] \to P$ telle que pour tout t, $c(t, a) = c(0, a); c(t, b) = c(0, b)$.*
(2) *Des subdivisions $t_0 = 0, t_1, \dots .t_k = 1$ et $a_0 = a, a_1, \dots a_n = b$ de $[0, 1]$ et $[a, b]$.*
(3) *Pour tout $(i, j) \in \{0, \dots k-1\} \times \{0, \dots n-1\}$d'un point $x_{i,j}$ de X tel que : $|c(u) - x_{i,j}|\langle\sigma/2$ si $u \in [t_i, t_{i+1}] \times [a_j, a_{j+1}]$*
(4) *Pour tout $(i, j) \in \{0, \dots k-1\} \times \{0, \dots n-1\}$d'un relevé continu $c_{i,j} : [t_i, t_{i+1}] \times [a_j, a_{j+1}] \to B(\tilde{x}_{i,j}, \sigma/2)$de c telle que les conditions de compatibilité $c_{i,j}(t_{i+1}, a_j) = \theta_{x_{i+1,j},x_{i,j}} c_{i,j}(t_{i+1}, a_j)$ et $c_{i,j}(t_i, a_{j+1}) = \theta_{x_{i,j+1},x_{i,j}} c_{i,j}(t_i, a_{j+1})$ soit satisfaite.*
(5) *Les $\mathcal{G}$-chemins $\gamma_0$et$\gamma_1$sont équivalent à $(x_{0,0}, c_{0,0}; x_{01}, c_{0,1} \dots; x_{0,n-1}, c_{0,n-1})$ et $(x_{1,0}, c_{1,0}; x_{1,1}, c_{1,1} \dots; x_{1,n-1}, c_{1,n-1})$.*

4.2.2. *Groupoïde fondamental.* On note $\pi^{\mathrm{orb}}(P, x_0; y_0)$ l'ensemble des classes d'homotopie de $\mathcal{G}$-chemins d'origine x_0 et d'extrémité y_0. Le groupoïde fondamental de P est le groupoïde $\pi^{\mathrm{orb}}(P)$ formé de la réunion des $\pi^{\mathrm{orb}}(P, x_0; y_0)$ et dont l'espace des unités s'identifie à P. Si x_0 est un point base fixé, on note $\pi_1^{\mathrm{orb}}(P, x_0)$ le sous-groupe $\pi^{\mathrm{orb}}(P, x_0; x_0)$ de $\pi^{\mathrm{orb}}(P)$. Comme P est muni d'une structure de longueur utile à l'échelle σ, il s'agit d'un groupoïde connexe d'isométries locales, étale sur son espace d'unité P, ce qui permet d'appliquer les résultats du chapitre III.$\mathcal{G}$ de [**3**].

A partir de maintenant, nous supposerons que les atlas structurels des orbi-espaces considérés ont des cartes connexes par arc et simplement connexes. Ces cartes sont des espaces métriques de longueur, donc Hausdorff.

Définition 4.2.3. *Soient P et Q deux orbi-espaces, $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ et $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$ leurs atlas structurels. Une application continue $p : Q \to P$ est appelé* revêtement *si pour toute carte locale U_i de P il existe un sous ensemble $J_i$de J et une application $\tilde{p} : \sqcup_{j\in J_i} V_j \to U_i$ telle que pour tout j de I_j, on ait :*

(1) *$p(x) \in U_i$ si et seulement si $x \in \sqcup_{j\in J_i} \psi_j(V_j)$.*
(2) *la restriction de $\tilde{p}$ à $V_j$soit un homéomorphisme.*
(3) *$p \circ \psi_j = \varphi_i \circ \tilde{p}$.*

4.2.3. *Orbi-espace quotient.* Soit X un espace topologique connexe, localement compact et localement connexe par arc (par exemple géodésique propre) et Γ un groupe discret agissant dans X de manière proprement discontinue et rigide sur X. On suppose que tout point x de X admet un système fondamental de voisinages $U_{\alpha,x}$ connexes simplement connexes qui sont invariants par le groupe d'isotropie Γ_x de x et tels que la projection $U_{\alpha,x} \to U_{\alpha,x}/\Gamma_x$relève les chemins et les homotopies (typiquement le quotient d'une variété riemanienne par un groupe discret d'isométries). Soit $P = X/\Gamma$ l'espace topologique quotient et $p : X \to P$ la projection; on peut équiper P d'une structure d'orbi-espace de la façon suivante. On dit qu'un ensemble ouvert $V \subset X$ est *distingué* si il est de la forme $U_{\alpha,x}$pour un certain x. Alors l'ensemble des γ tels que $\gamma V \cap V$ est non vide est fini. Comme l'action de Γ est proprement discontinue, tout point de X admet un système fondamental de voisinages ouverts distingués. L'atlas de structure de P est par définition l'ensemble des couples (V, p) où V est un ouvert distingué de X. Si de plus X est simplement connexe, on vérifie que Γ s'identifie au groupe fondamental $\pi_1^{\mathrm{orb}}(X/\Gamma)$. Dans ce cas, le revêtement $X \to X/\Gamma$ est universel.

4.2.4. *Revêtement universel.* Si P est un orbi-espace dont l'atlas est constitué de cartes connexes par arcs et simplement connexes, il admet un revêtement universel, c'est-à-dire qui revêt tous les autres. Ce revêtement se construit, comme dans le cas usuel, comme ensemble des extrémités des classes de $\mathcal{G}$-homotopies de $\mathcal{G}$-chemins issus d'un point base fixé. Le groupe fondamental de P en ce point y opère (par composition).

4.2.5. *Définition: Developpabilité.* On dit que l'orbi-espace P est developpable si c'est un orbi-espace quotient. Si la condition de locale simple connexité est satisfaite, P s'identifie alors au quotient du revêtement universel (en un point) par l'action du groupe fondamental (en ce point). Si P est developpable, le stabilisateur G_xd'un point x s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(P, x)$. On trouvera dans [**3**] une démonstration de la réciproque.

4.3. *Le Théorème de Cartan-Hadamard.*

Nous rappelons dans ce paragraphe le théorème de développabilité des espaces δ-hyperboliques dit de Cartan Hadamard : si un orbi-espace est localement hyperbolique, il est developpable et son revêtement universel est globalement hyperbolique.

Théorème 4.3.1. *Soit $\delta > 0$. Soit $\sigma > 10^5\delta$. Soit P un orbi-espace compact, σ localement δ-hyperbolique. Supposons que pour x dans P il existe une carte σ-utile $(U, \varphi, \tilde{x})$. Alors :*

(1) *P est developpable.*
(2) *Le revêtement universel de P est δ'-hyperbolique pour $\delta' = 200\delta$.*
(3) *Si $(U, \varphi, \tilde{x})$ est une carte σ-utile d'un voisinage de x, et x' une préimage de x dans le revêtement universel, l'application developpante $(U, \tilde{x}) \to (P, x')$ est un plongement isométrique de $B(\tilde{x}, \sigma/10)$ vers son image.*

La démonstration du théorème 4.4.1 est guidée par celle de [**3**]. Si dans le cas des variétés à courbure $\leqslant 0$, on peut construire un revêtement universel par l'application exponentielle, dans [**3**] le revêtement universel en un point x_0 est construit comme l'ensemble des $\mathcal{G}$-géodésiques locales issues de x_0. Nous allons le construire comme *l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{G}$-géodésiques locales issues de x_0*, ou deux telles géodésiques locales sont équivalentes si elles ont mêmes extrémités et peuvent être paramétrées de sorte qu'à tout instant elles soient $\sigma/100$-proche l'une de l'autre : le fait que cette relation soit une relation d'équivalence est le point important. Ce là qu'intervient la propriété d'hyperbolicité.

Nous découperons notre démonstration en quatre étapes : tout d'abord nous construisons une relation d'équivalence sur l'ensemble des $\mathcal{G}$-géodésique locales (4.4); puis nous montrons la developpabilité 4.5; en 4.6 nous montrons l'hyperbolicité du revêtement universel.

Remarque. On peut tout aussi bien obtenir, et par la même méthode, un théorème de developpabilité pour des espaces σ localement CAT$(-1,\varepsilon)$ si $\sigma \geqslant 10^{10}\varepsilon^{1/6}$. Mais pour l'étude des groupes à petite simplification, c'est l'échelle de la constante d'hyperbolicité qui sera utilisée.

4.4. *Géométrie des $\mathcal{G}$-géodésiques locales.*

On garde les hypothèses du paragraphe précédent sur σ et δ.

On peut toujours paramétrer un $\mathcal{G}$-chemin rectifiable par sa longueur d'arc. Si un chemin est de longueur $< \sigma/2$, on voit, en utilisant la complétude pour la structure de longueur, qu'il peut être décrit dans une unique carte utile d'un voisinage de l'un de ses points. On dit que c'est une géodésique si, dans cette carte, c'est une géodésique : cette définition ne dépend pas du choix de la carte dans laquelle il est défini car les changements de cartes sont des isométries. Soit $\alpha \leqslant \sigma/4$. On dit qu'un $\mathcal{G}$-chemin est une α-géodésique locale si il est rectifiable, et si tout sous-chemin de longueur $< \alpha$ est une géodésique.

Nous allons énoncer deux lemmes qui viennent remplacer le Main Lemma III.$\mathcal{G}$.4.3 de [**3**]. C'est ici que nous utilisons l'hypothèse d'hyperbolicité : ces deux lemmes sont évidemment faux sans cette hypothèse comme le montre l'exemple d'une sphère de rayon grand devant δ.

Soit $\theta < \sigma/4$. Deux $\mathcal{G}$-chemins sont dit β-proches si on peut les paramétrer par une même subdivision pointée telle que leurs relevés dans les cartes correspondantes soient tous β-proches. Si deux $\mathcal{G}$ chemins sont β-proches, avec $\beta < \sigma/4$, alors on peut mesurer la distance d'un point de l'un à un point de l'autre en regardant dans une carte commune. Cela ne dépend pas du paramétrage choisi. Une projection de γ sur γ' est une application qui réalise cette distance; on peut la calculer dans une carte, et elle est donc 1-Lipschitzienne à 2δ-près.

Lemme 4.4.1. *Soient $\frac{\sigma}{4} > \alpha > 10^3\delta$. Deux $\alpha-$géodésiques locales qui restent 200δ-proches et dont les extrémités sont 50δ-proches restent en fait 60δ-proche.*

Démonstration. Cela résulte de 2.1.5. □

Le lemme 4.4.2 est l'analogue du Main Lemma III.$\mathcal{G}$.4.3 de [**3**]; sa démonstration repose, là encore, sur la propriété de stabilité des géodésiques locales.

Lemme 4.4.2. *Soit $\sigma/4 > \alpha > 10^3\delta$. Soit $\gamma : (x_0, c_0; x_1, c_1 \ldots; x_{n-1}, c_{n-1})$ est une α-géodésique locale joignant deux points $x \in B(\tilde{x}_0, \sigma/8)$ et $y \in B(\tilde{x}_{n-1}, \sigma/8)$. Soient $x' \in B(\tilde{x}_0, \sigma/8)$ et $y' \in B(\tilde{x}_{n-1}, \sigma/8)$ deux points situés à une distance $\sigma/8$ de $c_0(a)$ et $c_{n-1}(b)$. Parmi toutes les $\mathcal{G}-$courbes définies sur la même subdivison que γ et dont la distance à γ reste $\leqslant \sigma/4$, une $\mathcal{G}$-courbe de γ' de longueur minimale est une α-géodésique locale. A une distance*

$\geqslant \sigma/8$ de ces extrémités, celle-ci est à une distance $\leqslant 20\delta$ de γ. Deux telles courbes sont donc équivalentes.

Démonstration. On considère un y_* point de cette $\mathcal{G}-$courbe γ'. Soit x_* la projection de ce point sur γ et soit $d = |x_* - y_*|$. Supposons d'abord que x_* est à une distance $> \alpha/4$ des extrémités de γ.

On peut alors considérer le segment $[x_-, x_+]$ de γ centré en x_* de diamètre $\alpha/2$. Dans une uniformisante autour de x_*, γ' est une courbe : $f : [a, b] \to B(x_*, \sigma)$ telle que pour un certain t_0 $f(t_0) = y_*$. Il existe un point c (resp. d) de $[a, b]$,tel que la projection p (resp. q) de $f(c)$ sur $[x_-, x_+]$ est 2δ-proche de x_- (resp. x_+). Par hyperbolicité, la distance de $f(c)$à y_* est supérieure à $|f(c) - p| + |p - x_*| + d_0 - 10\delta$; de même celle de $f(d)$ à y_* est supérieure à $|f(d) - q| + |q - x_*| + d_0 - 10\delta$. En particulier la longueur de tout chemin joignant $f(c)$ à $f(d)$ et passant par y_* dans cette boule est supérieure à $|f(c) - p| + |p - x_*| + d_0 - 10\delta + |f(d) - q| + |q - x_*| + d_0 - 10\delta$. Mais la courbe obtenu en joignant les trois géodésiques $[f(c), p][p, q][qf(d)]$ est de longueur $|f(c) - p| + |p - x_*| + |f(d) - q| + |q - x_*|$. Ainsi la courbe f ne peut pas être minimisante si $d > 20\delta$.

Si la longueur de γ est inférieure à $\sigma/4$, il n'y a rien à montrer car, dans ce cas, on peut tout regarder dans une uniformisante, les courbes γ et γ' étant deux géodésiques. Sinon, il existe un point z' sur γ' dont la projection z sur γ est à une distance $\sigma/4 \pm 2\delta$ de l'origine. D'après ce qui précède ce point est en fait 20δ-proche de γ, et en fait contenu dans la boule $B(\tilde{x}_0, \sigma/4 + 20\delta)$. Tout l'arc $[x', z']$ est donc contenu dans le $\sigma/4$ voisinage d'un segment géodésique d'origine $\tilde{x}_0$ et de longueur $s/4$ de $B(\tilde{x}_0, \sigma/4 + 20\delta)$ il se relève donc dans la boule $B(\tilde{x}_0, \sigma)$ mais comme il est minimisant il doit être égal à la géodésique joignant $\tilde{x}'_0$ à $\tilde{x}'$. □

4.5. *Développabilité et hyperbolicité du revêtement universel.*

On garde les hypothèses du paragraphe précédent sur σ, δ, et on fixe un nombre α dans l'intervalle $10^3\delta < \alpha < \sigma/4$.

Grâce au lemme 4.4.1 on peut munir l'ensembles des α-géodésiques locales d'une *relation d'équivalence* en disant que deux telles géodésiques sont équivalentes si elles ont même origine, même extrémité et restent 200δ-proches. On fixe un point base $x_0 \in P$, et on note $X(x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalence des α–géodésiques locales issues de x_0. On met une topologie sur $X(x_0)$ en disant que deux géodésiques issues de x_0 sont ε-voisines, si on peut les paramétrer de sorte qu'elle restent $\sigma/8$-proches et que leurs extrémités soient ε-proches. Cette notion est bien définie sur les classes de géodésiques pourvu que l'erreur ε soit suffisamment petite (lemme 4.4.2).

Soit $\pi : X(x_0) \to P$ l'application qui à une classe d'équivalence de géodésique locale associe la projection de son extrémité. Soit $x \in X$. Considérons une carte $\sigma-$utile $(U, \varphi, \tilde{x})$ d'un voisinage de x, et $\hat{x}$ une préimage de x dans le revêtement universel de P. Du lemme 3.4.2, on déduit le lemme principal :

Lemme Principal 4.5.1. *Soit $\hat{x}$ un point $\pi^{-1}(x)$, la boule $B(\tilde{x}; \frac{\sigma}{8})$ se plonge isométriquement comme voisinage de $\hat{x}$ dans X .* □

Remarque. Ce lemme est la version géométrique de l'algorithme de Dehn [**21**]: dans un groupe à petite simplification, où la plus petite relation est de longueur R, la boule de rayon $R/2 - 1$ centrée en un point du graphe de Cayley est un arbre isométrique à la même boule dans le groupe libre.

On a alors le :

THÉORÈME 4.5.1. *L'application $\pi : X(x_0) \to P$ est une revêtement. L'orbi-espace P est developpable et ce revêtement est universel.*

Démonstration. Le fait que π soit un revêtement résulte de la définition de la topologie et du lemme 4.5.1 : tous les points $\hat{x}$ de $\pi^{-1}(x)$ ont un voisinage isométrique de taille uniforme. Pour voir que ce revêtement est universel, il suffit de voir qu'il est simplement connexe. Une courbe basée en x_0 de ce revêtement définit – après subdivison en courbes de longueurs inférieures à $\sigma/10$ – une $\mathcal{G}$-courbe de P. Comme les domaines des uniformisantes U_x sont simplement connexes et *comme P est compact*, une telle courbe est homotope -à extrémité fixée- à une $\mathcal{G}$-géodésique locale de P. Or celle ci se relève en une courbe fermée si et seulement si elle est réduite à un point, par définition de X. □

Pour achèver de démontrer le théorème de Cartan-Hadamard on peut alors citer le résultat suivant ([**14**] 6.6.F).

THÉORÈME 4.5.2. *Soit $\delta > 0$. Il existe une constante r_0 et une constante δ_1 vérifiant les propriétés suivantes. Soit X un espace métrique géodésique simplement connexe, tel que pour tout x la boule $B(x, r_0)$ est δ-hyperbolique et tel que tout lacet de longueur inférieure à 100δ soit homotope à zéro dans une boule de diamètre inférieure à 200δ. Alors X est δ_1-hyperbolique. Pour $r_0 = 10^5\delta$, on peut prendre $\delta_1 = 50\delta$.*

Il existe plusieurs démonstrations de ce fait de base dans la littérature, basée sur l'étude des inégalités isopérimétriques ([**14**], [**5**] Thm. 8.1.2).

Voici une autre preuve basée sur la démonstration du théorème de développabilité, valable pour $r_0 = 10^5\delta$, $\delta_1 = 200\delta$. Considérons un triangle géodésique $[x, y] \cup [y, z] \cup [x, z]$. Considérons le premier point y_1 sur le segment $[x, y]$ qui est à une distance $> 100\delta$ de $[y, z]$ et soit z_1 le point le plus proche de y_1 sur $[x, z]$. La réunion des trois segments $[y, y_1] \cup [y_1, z_1] \cup [z_1, z]$ est $\sigma/10$ localemnt 2δ-quasi-convexe. En raisonnant comme en 4.4.2, on voit qu'il existe une géodésique locale γjoignant y à z dans son 30δ voisinage. Les deux géodésiques locales γ et $\gamma' = [y, z]$ sont homotopes à extrémités fixées, et définissent donc le même point du revêtement universel de X calculé en y. Comme X est simplement connexe, on en déduit qu'elles sont équivalentes, et donc 20δ-proche. Ainsi tout point de $[y, z]$ est à une distance $\leqslant 50\delta$ d'un point de $[x, y] \cup [x, z]$. □

5. *Le théorème de la toute petite simplification.*

Dans tout ce paragraphe, on fixe un espace métrique géodésique δ-hyperbolique X, simplement connexe, et un groupe discret G d'isométries de X, supposé co-compact et rigide.

On considère une famille $\mathcal{F} = (\rho_i)_{i \in I}$ d'éléments hyperboliques de G, et on veut étudier le groupe $\bar{G}$, quotient de G par le sous-groupe normal $\mathcal{N}$ engendré par $\mathcal{F}$. Nous supposerons que la famille $\mathcal{F}$ est invariante par conjugaison : si $\rho \in \mathcal{F}$ et $g \in G$ alors $g\rho g^{-1} \in \mathcal{F}$. Nous penserons aux classes de conjugaisons des éléments de $\mathcal{F}$ comme à des relations que l'on souhaite adjoindre à G pour construire $\bar{G}$.

Pour préciser les ordres de grandeur, on fixe $\delta < 10^{-15}$ et on suppose que la longueur de translation des éléments de $\mathcal{F}$ est supérieure à 100.

5.1. *Pièces et constante de simplification.*

Soit $L \subset X$ une droite (une géodésique bi-infinie). Comme X est δ-hyperbolique, une géodésiques ayant même extrémités que L est contenue dans son 2δ-voisinage.

Définition 5.1.1. *Le cylindre de L, noté $C(L)$ est l'ensemble des points situés à une distance inférieure à 2δ d'une droite L' de X ayant mêmes extrémités que L.*

Notons que C est connexe par arcs rectifiables, et munissons C de sa métrique de longueur. Alors l'inclusion de L dans C est une isométrie à 10δ-près pour la distance de Hausdorff: en effet tout point de C est 4δ-proche d'un point de L. Par définition C est le *cylindre* de L; il ne dépend que des extrémités de L dans le bord de ∂X; en particulier, il est invariant par le groupe des isométries de X qui préserve ces extrémités.

Soit $\rho \in G$ un élément hyperbolique. Nous noterons $C(\rho)$ le cylindre d'une (ou de toute) droite joignant les deux points fixes de ρ sur le bord de X.

Définition 5.1.2. *Soient L et L' deux droites de X. On pose $\Delta(L, L') = \Delta(C(L), C(L')) = \mathrm{diam}(C(L)^{+20\delta} \cap C(L')^{+20\delta})$. Soit $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in I}$ une famille de droites. On pose $\Delta(\mathcal{L}) = \max_{i\neq j}(\Delta(C(L_i), C(L_j))$. Si $\mathcal{F} = (\rho_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de G, on pose $\Delta(\mathcal{F}) = \max_{i\neq j} \Delta(C(\rho_i), C(\rho_j))$.*

Le nombre $\Delta(C(\rho), C(\rho'))$ est un analogue géométrique de la plus grande "pièce" de la théorie de la petite simplification : il lui est égal dans le graphe de Cayley du groupe libre.

Constante de simplification 5.1.3. *On pose $\lambda(\mathcal{F}) = \frac{\Delta(\mathcal{F})}{\mathrm{Min}_{\rho\in\mathcal{F}}[\rho]}$.*

Nous souhaitons étudier les familles à *toute petite simplification* (cas où $\lambda \to 0$). En particulier nous allons voir que, si G est un groupe hyperbolique fixé et X son graphe de Cayley, il existe un λ_0 tel que si $\lambda < \lambda_0$ alors le quotient $\bar{G} = G/\mathcal{N}$ est hyperbolique, non élémentaire.

5.2. *Construction de cone-off.*

Soit L une droite de X et $C = C(L)$ le cylindre de L.

Un nombre positif r_0 étant fixé, on considère le cône $\dot{C} = C\times]0, r_0] \cup \{c\}$, muni de la métrique de longueur $(dr^2 + \frac{\sinh^2 r}{\sinh^2 r_0} dx^2)^{1/2}$: celle-ci est définie de la façon suivante : la longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \to \dot{C}$, définie par $\gamma(t) = (x(t), r(t))$, est la limite, quand le pas de la subdivison $\xi : (a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b)$ de l'intervalle a, b tend vers 0, de la fonction l_ξ définie par :

$$l_\xi(\gamma) = (\sum_{i=1}^{i=n}(r(a_i) - r(a_{i-1}))^2 + \frac{\sinh^2 r(a_i)}{\sinh^2 r_0}|x(a_i) - x(a_{i-1})|^2)^{1/2}.$$

Nous noterons $\dot{L} = L\times]0, r_0] \subset \dot{C}$, et nous remarquons *que la distance de Hausdorff de $\dot{L}$ à $\dot{C}$ est inférieure* à 10δ; d'autre part, $\dot{L}$ n'est rien d'autre que le revêtement universel du disque épointé de rayon r_0 du plan hyperbolique, et L est donc $r_0/2$-localement CAT(-1) au voisinage de tout point situé à une distance supérieure à $r_0/2$ du sommet c; par définition de la métrique le cône $\dot{C}$ est donc 10δ-proche d'un espace localement CAT(-1). Grâce à la proposition 3.2.7, on obtient :

PROPOSITION 5.2.1. *Si $\varepsilon(x) = \varepsilon_{-1}(x + 30\delta) + 30\delta$ le cône $\dot{C}$ est $r_0/2$-localement* $\mathrm{CAT}_{\varepsilon'}$ *(-1) au voisinage de tout point situé à une distance supérieure à $r_0/2$ du sommet c.* □

DÉFINITION 5.2.2. *Soit $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in I}$ une famille de droites, et $\dot{C}_i$ les cônes sur les $C_i \supset L_i$. Le cône-off $\dot{X}$ de Xle long de $\mathcal{L}$ est l'espace métrique de longueur obtenu en collant chaque cône $\dot{C}_i$à X le long de leur sous-ensemble commun C_i.*

Pour chaque i nous noterons c_i le sommet du cône $\dot{C}_i$.

DÉFINITION 5.2.3. *La projection radiale $p : \dot{X} \smallsetminus \{c_i, i \in I\} \to X$ est l'application qui induit l'identité sur X et dont la restriction au cône épointé $\dot{C}_i \smallsetminus \{c_i\}$ est définie par $p(x, t) = x$.*

PROPOSITION 5.2.4. *Supposons que $r_0 \geqslant 1$. Alors la projection radiale de toute géodésique de $\dot{X}$ qui ne passe pas par le sommet d'un cône est 50δ-proche de toute géodésique de X joignant ses extrémités.*

Démonstration. Si X est un arbre, c'est juste une question d'injectivité. Sinon, la preuve repose sur le lemme des quasi-géodésiques discrètes 2.1.2. Soit $\gamma : [a, b] \to \dot{X}$ une géodésique. Si γ reste tout le temps dans le 100δ-voisinage de X, alors par définition de la métrique, sa projection est une λ-quasi-géodésique, où $\lambda = \frac{\sinh(r_0-100\delta)}{\sinh r_0} \simeq \exp(-100\delta) \geqslant \frac{99}{100}$, car $\delta\langle 10^{-15}$. Autrement dit, si l désigne la longueur d'arc, on a :

$$\lambda l(p(\gamma[t, u]) \leqslant |p(\gamma(t)) - p(\gamma(u))|.$$

En fait, on a cette inégalité pour tout segment de longueur $\leqslant 100\delta$. En effet, si tout point de ce segment est contenu dans le 100δ-voisinage de X, on vient de le montrer. Sinon, comme il est de longueur inférieur à 100δ, il est tout entier inclus dans l'un des cônes. Alors par construction de la métrique sa projection est 4δ-proche d'une géodésique de X. Montrons que cela entraîne le résultat. Si x_i est une suite de points de la projection radiale de cette courbe telle que les longueurs des arcs (x_i, x_{i+1}) soient 50δ, alors $|x_{i+1} - x_{i-1}| \geqslant 96\delta \geqslant \max(|x_{i+1} - x_i|, |x_i - x_{i-1}|) + 46\delta$. Ce qui permet d'appliquer le lemme des quasi-géodésiques discrètes 2.1.2 et d'en déduire que la distance de x_i à toute géodésique joignant les extrémités de cette projection est inférieure à 50δ. □

THÉORÈME 5.2.1 (Gromov [**15**]). *Soit $\varepsilon \leqslant 10^{-10}$ une constante positive fixée. Il existe deux constantes $\alpha(\varepsilon)\rangle 0$ et $\delta(\varepsilon)\rangle 0$ telles que, si $\Delta(\mathcal{L})\langle\alpha(\varepsilon)$et $\delta\langle\delta(\varepsilon)$,alors au voisinage de tout point situé à une distance $\geqslant r_0/2$ des sommets de cônes, le cone-off $\dot{X}$ de X est $r_0/2$-localement* $\mathrm{CAT}(-1, \varepsilon)$.

REMARQUE. Dans [**15**], on trouvera une estimation quantitative précise : si ε est fixé, on peut prendre $\alpha = (10^{-12}\varepsilon)^{3/2}$, $\delta = 10^{-5}\varepsilon$.

Rappelons les grandes lignes de la démonstration de [**15**]. Celle-ci, de nature asymptotique se déroule en deux temps.

Tout d'abord on traite le cas limite $\delta = \alpha = 0$. L'espace X est un arbre réel, et cet arbre X contient une famille de droites $\mathcal{L}$ telle que l'intersection de deux droites de $\mathcal{L}$ est vide ou réduite à un point. Alors le cone-off $\dot{X}$ de X le long de cette famille est obtenu en recollant le revêtement universel de disques hyperboliques épointés sur l'arbre X le long de géodésiques

se rencontrant en au plus un point : l'espace $\dot{X}$ est localement CAT(-1) au voisinage de tout point sauf aux sommets des cônes car quand on recolle deux espaces CAT(-1) en un point on obtient un espace CAT(-1).

Pour le cas général, on raisonne par l'absurde. Si ce résultat n'était pas vrai, on pourrait considérer une suite d'espaces métriques hyperboliques X_n contenant des familles de droites $\mathcal{L}_n$ tels que α_n et δ_n tendent vers zéro et qui soient tous des contre exemples au théorème. Comme l'énoncé concerne des boules de rayons $r_0/2$, on peut trouver une famille $(x_n, y_n, z_n; u_n, v_n)$ de points de $\dot{X}_n$ contredise l'inégalité CAT$(-1, \varepsilon)$. Soit $\Phi_{-1,\varepsilon}(x, y, z; u, v)$ la fonction qui exprime l'inégalité CAT$(-1, \varepsilon)$. Celle-ci est continue et bornée sur les boules de rayon r_0 et on a $\Phi_{-1}(x_n, y_n, z_n; u_n, v_n) \geqslant \varepsilon$. Soit ω un ultra-filtre non principal, et $\dot{X}$ l'espace limite $\dot{X} = \lim_\omega \dot{X}_n$. Cet espace est obtenu en faisant un cone off d'une famille de droites $\mathcal{L}_\infty$ dans un espace hyperbolique X_∞ car $\lim_\omega X_n$ est un arbre réel par définition de la δ-hyperbolicité et deux droites de la famille $\mathcal{L}_\infty$ ont une intersection réduite à au plus un point car $\lim \alpha_n = 0$. Appliquant 3.2.8, on a la contradiction souhaitée.

5.3. *Choix des constantes*

On choisit tout d'abord une constante $\varepsilon_0 \leqslant 10^{-50}$ pour pouvoir appliquer les résultats du paragraphe 5.2. On choisit alors une constante r_0, conformément au hypothèses du théorème de Cartan-Hadamard, de sorte qu'un orbi-espace modelé sur un espace $r_0/2$ localement CAT$(-1, \varepsilon_0)$ (et donc $(\ln 3 + 2\varepsilon_0)$-hyperbolique) soit developpable et que son revêtement universel soit δ_1-hyperbolique, avec $\delta_1 = 200$. Nous prendrons aussi soin à ce que $r_0 \geqslant 500\delta_1$. Pour fixer les idées, nous pouvons donc prendre $r_0 = 10^5$.

Le choix de ε_0 et r_0 détermine, par le théorème de la toute simplification 5.2.5, deux constantes α_0 et δ_0 , telles que, si une famille de droites $\mathcal{L} = (L_i)_{i\in I}$ d'un espace δ_0 hyperbolique est telle que $\Delta(\mathcal{L}) \leqslant \alpha_0$, alors le cone-off $\dot{X}$ de X le long de $\mathcal{L}$ est $r_0/2$-localement CAT$(-1, \varepsilon_0)$ au voisinage de tout point situé à une distance $\geqslant r_0/2$ des sommets de cônes.

Nous supposerons donc dans toute la suite que la constante d'hyperbolicité δ de X est inférieure à $\min(\delta_0; 10^{-15})$.

5.4. *Construction d'un orbi-espace.*

Nous expliquons dans ce paragraphe comment le théorème du cone-off du paragraphe précédent fournit une version de la théorie de la petite simplification. Les hypothèses concernant G ont été stipulées au début du paragraphe 5. Par convention, quand on recolle deux espaces métriques de longueur, on obtient un espace de longueur et on l'équipe de la métrique associée.

Définition 5.4.1. *Si $E \subset G$ est un sous groupe élémentaire, $\rho \in E$ un élément hyperbolique, et E^+ le sous groupe de E qui fixe les deux points fixes de ρ à l'infini. On dit que ρ est de type central si ρ est central dans E^+, et si pour tout élément ε de type diédral dans E, $\varepsilon\rho\varepsilon^{-1} = \rho^{-1}$.*

Pour tout i de I, nous noterons E_i le sous-groupe élémentaire maximal contenant ρ_i, $\rho_i^\pm$ les deux points fixes de ρ_i sur le bord ∂X, E_i^+ le sous-groupe d'indice au plus deux de E_i qui laisse fixe ces deux points. Nous supposerons que :

(1) La famille $(\rho_i)_{i\in I}$ est stable par conjugaison dans G: $\forall i \forall h \exists j / h\rho_i h^{-1} = \rho_j$.
(2) Si $E_j = E_j$, alors $\rho_i = \rho_j$ ou $\rho_i = \rho_j^{-1}$ et le groupe élémentaire E_i est de type diédral.

Sous ces deux hypothèses, on remarque que ρ_i est de type central : en effet il est central dans E_i^+, et si E_i est de type diédral, $\varepsilon\rho_i\varepsilon^{-1} = \rho_i^{-1}$ pour tout élément diédral de E_i. On considère le groupe fini $F_i = E_i/\rho_i$.

Nous noterons $\mathcal{N}$ le sous-groupe engendré par $\mathcal{F}$, qui est normal dans G. Le but de la théorie de la petite simplification est d'étudier le groupe $\bar{G} = G/\mathcal{N}$.

Il est donc utile de penser aux classes de conjugaisons des ρ_i comme à des *relations* que l'on souhaite ajouter à G.

Pour chaque $i \in I$, notons C_i le cylindre construit en 5.1.1 contenant la réunion des droites joignant les deux points fixes à l'infini de E_i par construction $E_j = gE_ig^{-1}$ si et seulement si $gC_i = C_j$. Ainsi G opère sur l'ensemble des indices I et $\bar{I} = I/G$ est exactement l'ensemble des classes de conjugaisons des relations ρ_i.

Nous noterons $\dot{X}$ le cone-off de X le long des $(C_i)_{i\in I}$; puis pour i fixé D_i le cône $\dot{C}_i/\rho_i$, de groupe fondamental trivial, c_i son centre; enfin, $O_i = D_i/F_i$ est l'orbi-espace obtenu en quotientant D_i par le groupe fini F_i.

On considère alors l'orbi-espace $\bar{P} = X/G \cup_{\bar{i}\in\bar{I}} O_{\bar{i}}$ obtenu en recollant, pour chaque classe de conjugaison de relation ρ_i l'orbi-espaceO_i sur $P = X/G$ le long de C_i/E_i.

L'atlas décrivant $\bar{P}$ est constitué de deux sortes d'uniformisantes. Tout d'abord si $x \in P = X/G$ ou si x est dans l'un des $O_{\bar{i}}$, mais dans le complémentaire de la boule $B(\bar{c}_i, r_0/2) \subset O_{\bar{i}}$, on prend pour carte l'ensemble $\dot{X}$. Et si x est dans l'un des orbi-cônes $O_{\bar{i}}$, son uniformisante est $D_i = \dot{C}_i/\rho_i$, où i est un représentant de $\bar{i}$. Notons que toutes les cartes de cet atlas sont simplement connexes.

Le théorème de van-Kampen montre que le groupe fondamental au sens des orbi-espaces $\pi_1^{\mathrm{orb}}(P)$, est le quotient de G par le sous groupe normal engendré par $\mathcal{F}$, autrement dit le groupe fondamental de $\bar{P}$ est le groupe $\bar{G}$ que nous souhaitons étudier.

5.5. *Géométrie de $\bar{P}$*

Pour pouvoir appliquer le théorème de Cartan-Hadamard du section 4, nous allons munir l'orbi-espace $\bar{P}$ d'une structure d'espace métrique de longueur. Les deux caractéristiques géométriques de la famille $\mathcal{F}$ sont :

La longueur de la plus petite relation : $\Lambda_0 = \min_{i\in I}[\rho_i]$.

La longueur de la plus petite "pièce" $\Delta_0 = \max_{\rho_i\neq\rho_j^{\pm}} \Delta(C_i, C_j)$.

Rappelons que nous avons choisi $r_0 = 10^5$ et $\varepsilon_0 = 10^{-50}$ une fois pour toute. Le théorème 5.2.5 fournit des nombres $\delta(\varepsilon_0)$, $\alpha_0 = \alpha(\varepsilon_0)$ telles que si X est $\delta(\varepsilon_0)$ hyperbolique et si $\Delta_0 = \Delta(\mathcal{L}) < \alpha_0$, le cône-off de X est $r_0/2$ localement $\mathrm{CAT}(-1, \varepsilon_0)$ au voisinage de tout point situé à une distance supérieure à $r_0/2$ des sommets de cônes.

Définition 5.5.1. ***(Hypothèse de petite simplification)*** *On dit que la famille $\mathcal{F}$ satisfait la condition de toute petite simplification* $\mathrm{SC}(-1, \varepsilon_0)$ *si* $\delta \leqslant \delta_0 = \min(\delta(\varepsilon_0), \frac{\varepsilon_0^2}{10^5})$ *si* $\Delta_0 < \alpha(\varepsilon_0)$ *et si* $\Lambda_0 \geqslant 2\pi \sinh r_0$*, c'est-à-dire que la plus petite relation est plus longue que le cercle de rayon r_0 du plan hyperbolique.*

Définition d'une structure de longueur sur $\overline{P}$. Notons que $\bar{P}$ est naturellement muni d'une structure de longueur, $r_0/2$-modelée sur un espace métrique $r_0/2$-localement $\mathrm{CAT}(-1, \varepsilon_0)$. Au $r_0/2$-voisinage de l'image de X, P est $r_0/2$-modelé sur $\dot{X}$ et le théorème 5.2.5 montre cette propriété. D'autre part, chaque cône $D_{[i]}/\langle\rho_i\rangle$ est 10δ-proche au sens de Hausdorff du cône de révolution de courbure -1 et d'angle au sommet $[g_i]/\sinh r_0 \geqslant [\Lambda_0]/\sinh r_0 \geqslant 2\pi$, qui est un espace $\mathrm{CAT}(-1)$. Donc les orbi-espaces $O_i = D_i/F_i$ sont modelés sur un espace $\mathrm{CAT}(-1, \varepsilon_0)$, puisque $100\sqrt{100\delta} \leqslant \varepsilon_0$.

Ainsi, l'espace $\bar{P}$ est $r_0/2$ -modelé sur un espace métrique CAT$(-1, \varepsilon_0)$. Grâce au théorème de Cartan-Hadamard 4.3.1, nous obtenons :

THÉORÈME 5.5.1. *Sous l'hypothèse de petite simplification (5.5.1) l'orbi-espace $\bar{P}$ est developpable, son revêtement universel est globalement δ_1-hyperbolique (pour $\delta_1 = 200$). En particulier le groupe $\bar{G}$ est hyperbolique. De plus, pour tout x de $\bar{P}$, et toute carte σ-utile $(U, \varphi, \tilde{x})$ d'un voisinage de x, l'application développante est un plongement isométrique de $B(\tilde{x}, \sigma/10)$vers son image.*

Pour préciser les propriétés de ce groupe, il convient de décrire son action sur le revêtement universel de $\bar{P}$: c'est l'objet de la suite de ce paragraphe.

5.6. *Le revêtement universel $\bar{X}$ de $\bar{P}$.*

Mettons une relation d'équivalence sur l'ensemble I des relations en disant que $i \sim j$ si il existe un élément g du noyau $\mathcal{N}$ de la projection de g sur $\bar{G}$, tel que $gE_ig^{-1} = E_j$ et notons $[I]$ l'ensemble quotient.

On définit un espace de longueur $\bar{X}$ comme la réunion $\bar{X} = X/\mathcal{N} \cup_{i\in[I]} D_i = \dot{X}/\mathcal{N}$, ou D_i est le cône $\dot{C}_i/\rho_i$. Par construction, l'espace $\bar{X}$ est simplement connexe, muni d'une action de $\bar{G}$, et le quotient $\bar{X}/\bar{G}$ s'identifie, en tant qu'orbièdre, à $\bar{P}$.

Le stabilisateur d'un point de $\bar{X}$ sous l'action de $\bar{G} = G/\mathcal{N}$ est son stabilisateur sous l'action de G, si il est dans l'image $X/\mathcal{N}$de X. C'est son stabilisateur sous l'action de l'image de $F_i = E_i/\rho_i$ si il est dans le cône D_i. En effet, comme l'orbièdre P est developpable, pour tout i le stabilisateur E_i/ρ_idusommetde D_i s'injecte dans $\bar{G} = \pi_1^{\mathrm{orb}}(P)$([GH] chap.11 lemme 14), autrement dit $\mathcal{N} \cap E_i$est réduit au sous-groupe cyclique engendré par ρ_i; en particulier le groupe F_i est l'image $\bar{E}_i$ de $E_i$dans $\bar{G}$.

On a donc :

PROPOSITION 5.6.1. *L'espace de longueur $\bar{X}$ est simplement connexe; c'est le revêtement universel (au sens des orbi-espaces) de $\bar{P}$. De plus pour tout $x \in \dot{X}$ tel que la distance de x à tous les c_i soit supérieure à $r_0/2$, la restriction de la projection $\dot{X} \to \bar{X}$ à la boule $B(x, r_0/20)$ est un homéomorphisme sur son image (donc un plongement). En particulier, tout lacet de cette boule est homotope à zéro dans $\bar{X} \smallsetminus \{\bar{c}_i, i \in \bar{I}\}$.* □

PROPOSITION 5.6.2. *La projection $\pi : G \to \bar{G}$ satisfait $[\pi(g)]_{\bar{X}} \leqslant [g]_X$. De plus, si $x_0 \in X$ et $g \in G \smallsetminus \{1\}$ satisfont $|gx_0 - x_0| \leqslant r_0/20$, alors $\pi(g) \neq 1$. L'action de $\mathcal{N}$ sur X est libre, et $\pi : X \to X/\mathcal{N} \subset \bar{X}$ est un revêtement ordinaire.*

Démonstration. La première assertion résulte de la définition de la métrique : $i : X \to \bar{X}$ raccourci les distances. Montrons la seconde. Considérons un chemin géodésique γ de X joignant x_0 à gx_0. Si $\overline{x_0}$ désigne l'image de x_0 dans$\overline{X}$ et $\pi(g) = 1$, l'image de γ dans $\bar{X}$ est un lacet homotope à zéro contenu dans la boule de centre x_0 et rayon $r_0/20$. Comme la boule de rayon $r_0/20$ centrée en x_0 du cone-off de X se plonge dans le revêtement universel de $\bar{X}$, si le lacet $\bar{\gamma}$ de $\bar{P}$ était homotope à zéro, alors on aurait aussi $x_0 = gx_0$, donc $g \in G_{x_0}$. Or ce groupe G_{x_0} s'injecte dans $\bar{G}$ par developpabilité. La dernière assertion résulte de la seconde et du fait que l'action de G (et donc $\mathcal{N}$) sur X est rigide. □

5.7. *Topologie de $\bar{P}$: asphéricité et caractéristique d'Euler.*

Le théorème suivant est une réminiscence de l'approche topologique de la théorie de la petite simplification.

THÉORÈME 5.7.1. *Supposons que X soit un CW complexe asphérique. Alors $\bar{X}$ l'est aussi. En particulier si G est sans torsion et si les ρ_i ne sont pas des puissances non triviales, en particulier, on peut calculer la caractéristique d'Euler à coefficient entiers $\chi(\bar{G}, \mathbb{Z}) = \chi(G, \mathbb{Z}) + \mathrm{Card}(\bar{I})$. Si G a de la torsion le même résultat vaut à coefficients rationnels.*

Démonstration. Comme l'espace $\bar{X}$ est un CW complexe δ_1-hyperbolique, pour démontrer qu'il est asphérique, il suffit de montrer que pour tout $r \geqslant 2$, toute application continue $s : S_{r\geqslant 2} \to \bar{X}$ d'une sphère de dimension r dont l'image est de diamètre $\leqslant 100\delta_1 < r_0/2$ est homotope à un point dans $\bar{X}$ (c'est l'argument du *peigne de Rips*, voir par exemple [CDP], chapitre 5, prop. 1.1). Regardons l'image de s dans $\bar{X}$; soit elle est contenue dans le $r_0/2$ voisinage de l'image de X, et dans ce cas, sa projection radiale l'homotope dans $X/\mathcal{N}$ qui est asphérique, donc à un point; soit elle est toute entière contenue dans l'un des cônes D_i et on peut alors l'homotoper au sommet de ce cône. □

5.8. *L'orbièdre $\bar{P}$ et sa décomposition mince épaisse.*

Rappelons que l'orbièdre $\bar{P}$ est obtenu en collant des orbi-cônes de rayon r_0 sur P, et que $\bar{X}$ est son revêtement universel. On considère l'ensemble P^+ de P qui est le $50\delta_1$-voisinage de P dans $\bar{P}$ (rappelons que $50\delta_1 = 10^4 \langle r_0 = 10^5$)

L'idée géométrique principale est de voir la décomposition de $\bar{P}$ en réunion de P^+ et d'un nombre fini de cônes de rayon $r_0 - 50\delta_1 \geqslant 100\delta_1$, comme une *décomposition de Margulis* : dans les cônes, le rayon d'injectivité, c'est-à-dire le plus petit déplacement d'un élément hyperbolique, est grand $\geqslant 100\delta_1$ et ces cônes jouent le rôle de partie épaisse. Pour étudier la partie mince, on utilise la projection radiale : ainsi P^+ a même groupe fondamental que P, et la projection radiale induit une quasi-isométrie de leur revêtement universel.

Nous noterons $\iota : X \to \bar{X}$ l'application composée de l'injection naturelle de X dans $\dot{X}$ et de la projection de $\dot{X}$ sur $\bar{X}$. Pour chaque indice $i \in I$, nous noteronsD_i le cône $\dot{C}_i/\rho_i$, $\bar{D}_i$son image dans $\bar{X}$, c_i et $\bar{c}_i$ leurs centres. Nous noterons $D_i^0 = \{x \in D_i / |x - c_i| \leqslant r_0 - 50\delta_1\}$, $\overline{D}_i^0$sonimagedans $\bar{X}$, $X^+ \subset \dot{X}$ le complémentaire de la réunion des D_i^0, $\overline{X}^+$ son image dans $\bar{X}$. Nous noterons E_i le groupe élémentaire maximal contenant ρ_i, $\bar{E}_i$ son image dans $\bar{G}$: par développabilité, $\bar{E}_i = E_i/\rho_i$.

Nous noterons p la projection radiale de X^+sur$X$, ou celle de $i(X^+)$ sur $\iota(X)$. Enfin, si $g \in G$ nous noterons $\bar{g}$son image dans $\bar{G}$. Définissons $\dot{P} = \bar{P} \smallsetminus \{c_{\bar{i}}, \bar{i} \in \bar{I}\}$ en enlevant les centres des $\bar{D}_i$ par construction $\dot{P}$ a même groupe fondamental que P, et son revêtement universel n'est autre que le cone-off $\dot{X}$de l'espace X privé des c_i.

5.9. *Estimation de $\Delta(\bar{G}, \bar{X})$.*

Nous supposerons dans cette partie que tous les groupes E_i sont infinis cycliques.

Rappelons que si $\bar{g} \in \bar{G}$, $C_{\bar{g}}$ est l'ensemble quasi-convexe $\left\{x \in \bar{X} / |x - \bar{g}x| \leqslant \max([\bar{g}], 20\delta_1\right\}$.

LEMME 5.9.1. *Soit $g \in E_i$. Si l'image $\bar{g}$ de g dans $\bar{G}$ n'est pas l'élément neutre, il existe une puissance $\bar{g}^k$ de g telle que $C_{\bar{g}}$ soit contenu dans le $10\delta_1$ voisinage de $\bar{c}_i$.*

Démonstration. Par construction, l'ensemble D_i est 10δ-proche au sens de Hausdorff du cône de révolution de courbure -1 et d'angle au sommet $[g_i]/\sinh r_0 \geqslant 2\pi$. De plus l'action de E_i sur C_i est 100δ-proche d'une action isométrique sur une droite (et $\delta\langle 10^{-15})$. On remarque qu'une puissance de $\bar{g}$ agit presque (à 100δ-près pour la distance de Hausdorff) comme une rotation d'angle compris entre $-\pi/4$ et $\pi/4$ sur ce cône. □

LEMME 5.9.2. *Soit $\alpha < 100\delta_1 \leqslant \frac{r_0}{5}$. La projection radiale $(X^+)^{+\alpha} \to X$ est une quasi-isométrie G-équivariante qui transforme toute géodésique dans une courbe 50δ-proche d'une géodésique. Elle satisfait :*

$$|x-y| \leqslant |p(x)-p(y)| \leqslant \frac{\sinh r_0}{\sinh r_0 - 50\delta_{1-\alpha}}|x-y| \leqslant |x-y|\exp(50\delta_1+\alpha).$$

Démonstration. Cela résulte de la définition de la métrique de X^+ et de la prop. 5.2.4. □

LEMME 5.9.3. *Soit $\bar{g} \in \bar{G}$ tel que $\bar{g} \notin \overline{E}_i$; alors si $x \in \bar{D}_i^0$, $|\bar{g}x - x| \geqslant 100\delta_1$.*
Si $\bar{g} \in \bar{G}$ et $[\bar{g}] \leqslant 100\delta_1$, mais $\bar{g}$ n'est dans aucun des $\bar{E}_i$, alors $C_{\bar{g}} \subset \iota(X)^+$ et rencontre $\iota(X)$.

Démonstration. De fait, si $x \in \overline{D}_i^0$, et si $\bar{g} \notin \bar{E}_i$, alors $\bar{g}x \in \overline{D}_j^0$, avec $j \neq i$. Donc toute géodésique joignant x à $\bar{g}x$ est de longueur $\geqslant 2 \times 50\delta_1$. Pour le second point, noter que si $x \in C_{\bar{g}}$, le segment $[x, \bar{g}x]$ doit rencontrer $\iota(X)$, sauf si ce segment reste dans l'un des cônes D_i auquel cas ce lacet est homotope à zéro dans ce cône et g fixe son sommet. □

Soit $\bar{g}$ un élément de petite longueur de translation $[\bar{g}] \leqslant 100\delta_1$ mais qui n'est pas contenu dans l'un des groupes $\bar{E}_i$. Soit $x_0 \in C_{\bar{g}}^{+100\delta_1} \cap (\iota(X)^+)^{+100\delta_1}$. La géodésique $[x_0, \bar{g}x_0]$ est de longueur $\leqslant 300\delta_1$, et est donc contenue dans le $(300\delta_1)$-voisinage de $i(X)^+$. La projection radiale de cette géodésique définit, si x_0 est générique, un élément g de $G = \pi_1^{\mathrm{orb}}(P, y_0)$,où $p(x_0) = y_0$ et donc une isométrie g de X. On dit que g est *le relevé* de $\bar{g}$ définit par x_0.

Notons, grâce à la projection radiale, que $|gy_0 - y_0| \leqslant \exp(350\delta_1 0)[\bar{g}] \leqslant 100\delta_1 \exp 350\delta_1$. Donc $y_0 \in C_g^{+a}$, où $a = 50\delta_1 \exp 350\delta_1 + 10\delta \leqslant 51\delta_1 \exp 350\delta_1$ d'après 2.3.3 (1).

LEMME 5.9.4. *Soit $a = 51\delta_1 \exp 350\delta_1$. Soit $\bar{g}$ vérifiant $[\bar{g}] \leqslant 100\delta_1$. Soit $C \subset \bar{X}$ un sous-ensemble $10\delta_1$-quasi-convexe inclus dans $C_{\bar{g}}^{+100\delta_1} \cap (\iota(X)^+)^{+100\delta_1}$. Soient $x_0, x_1 \in C$, y_0 la projection radiale de x_0 et $g \in G = \pi_1(P, y_0)$ le relevé de $\bar{g}$ défini par x_0. Soit y_1 l'extrémité dans X du relevé de la projection radiale de $[x_0, x_1]$. Alors y_0 et y_1 sont des éléments de C_g^{+a}. De plus $|y_0 - y_1| \geqslant |x_0 - x_1| - 300\delta_1$.*

Démonstration. Les géodésiques $[x_0, x_1]$ et $[x_0, \bar{g}x_1]$ restent toujours à une distance inférieure à $10\delta_1$ de C donc à une distance inférieure à $110\delta_1$ de $\iota(X)^+$. Elles sont donc toujours à une distance $\geqslant r_0 - 110\delta_1 \geqslant 1000\delta_1$ des centres des cônes $\overline{D}_i$. Notons que $[x_0, \bar{g}x_1]$ est homotope dans $\overline{X} - \{\bar{c}_i, i \in \bar{I}\}$ à $[x_0, x_1] \cup [x_1, \bar{g}x_1]$ et à $[x_0, \bar{g}x_0] \cup [\bar{g}x_0, \bar{g}x_1]$, comme on le voit en découpant, grâce à la δ_1-hyperbolicité, ces deux triangles géodésique en petits triangles de diamètres $\leqslant 4\delta_1$ contenus dans $(\iota(X)^+)^{+110\delta_1}$.

Ceci identifie l'isométrie de X que l'on définit à partir du point base x_0 avec celle qu'on définit avec x_1 et montre que l'on a aussi $y_1 \in C_g^{+a}$, où$a = 51\delta_1 \exp 350\delta_1$. L'inégalité $|y_0 - y_1| \geqslant |x_0 - x_1| - 350\delta_1$ résulte de l'inégalité triangulaire et du fait que $|x_i - y_i| \leqslant 150\delta_1$. □

LEMME 5.9.5. $\Delta(\bar{G}, \bar{X}) \leqslant \Delta(G, X) + 1000\delta_1 \exp 350\delta_1$.

Démonstration. Soit $\overline{g_0}, \bar{g}_1$ deux isométries de $\bar{G}$ telles que $[\bar{g}_i] \leqslant 100\delta_1$. Supposons que ces deux isométries n'engendrent pas un sous-groupe élémentaire. Nous devons évaluer le diamètre de l'ensemble $C = C^{+20\delta_1}_{\bar{g}_0} \cap C^{+20\delta_1}_{\bar{g}_1}$, que nous supposons donc non vide. L'ensemble C est $10\delta_1$-quasi-convexe par 2.2.2 (1). Notons $\bar{D}^{0-}_i$ l'ensemble des points de $\bar{D}^0_i$ situés à une distance $\geqslant 100\delta_1$ du bord. Si $C = C^{+20\delta_1}_{\bar{g}_0} \cap C^{+20\delta_1}_{\bar{g}_1}$contenait un point de l'un des $\overline{D}^{0-}_i$, ces deux éléments fixeraient le centre de ce cône, et le groupe engendré serait contenu dans un groupe fini, donc élémentaire. En effet un point de $C^{+20\delta_1}_{\bar{g}_1}$ est déplacé d'au plus $140\delta_1$ par $\bar{g}_1$ et la distance de $\overline{D}^{0-}_i$ à un autre $\overline{D}^{0-}_j$ est supérieure à $200\delta_1$. L'intersection $C = C^{+100\delta_1}_{\bar{g}_0} \cap C^{+100\delta_1}_{\bar{g}_1}$ est donc contenue dans $(\iota(X^+))^{+100\delta_1}$. En choisissant un point base x_0 dans cet ensemble $10\delta_1$-quasi-convexe, on relève les deux isométries considérées en deux isométries g_0, g_1 de X. Grâce au lemme 5.9.4, on voit que si le diamètre de $C^{+20\delta_1}_{\bar{g}_0} \cap C^{+20\delta_1}_{\bar{g}_1}$ est supérieur à D, le diamètre de $\iota(C_{g_0})^{+a} \cap \iota(C_{g_1})^{+a}$ est supérieur à $D - 300\delta_1$.

En appliquant le lemme 2.2.2, (2) on en déduit une borne sur D. On a $D \leqslant \operatorname{diam}(C^{+20\delta}_{g_0} \cap C^{+20\delta}_{g_1}) + 2(a + 100\delta_1) + 200\delta_1$.

Or nous avons vu que $[g_k] \leqslant 100\delta_1 \exp 350\delta_1$.

En appliquant la proposition 2.4.3 (2), il vient :

$D \leqslant 2(100\delta_1 \exp 350\delta_1 + a + 300\delta_1) + \Delta(G, X) \leqslant 500\delta_1 \exp 350\delta_1 + \Delta(G, X)$. □

5.10. *Relèvement des sous-groupes élémentaires de $\bar{G}$*

Soit $\bar{C} \subset \iota(X)^+$ une partie $10\delta_1$-quasi-convexe; notons $\bar{C}' \subset \bar{C}^{+10\delta_1}$ la réunion des segments géodésiques dont les extrémités sont dans $\bar{C}$. Soit $\bar{x}_0 \in \bar{C}$ un point base, $x_0 \in \pi^{-1}(\bar{x}_0)$, C' la composante connexe de $\pi^{-1}(\bar{C}')$ contenant x_0, et $C = \pi^{-1}(\bar{C}) \cap C'$.

Notons $\bar{H} \subset \bar{G}$ le sous-groupe de $\bar{G}$ des éléments tels que $\bar{g}\overline{C} = \bar{C}$ et H le sous-groupe des isométries de G telles que $gC = C$. On alors le lemme suivant :

Lemme 5.10.1.

(1) *La restriction de π à C est une isométrie.*
(2) *La restriction de π à H est un isomorphisme sur $\bar{H}$.*

Démonstration. On sait que la restriction de π à $\pi^{-1}(\bar{X} \smallsetminus \{\bar{c}_i\}_{i\in\bar{I}}) = \dot{X}$ est un revêtement, trivial sur toute boule de rayon $r_0/20$ centrée en un point de X^+ . Donc en fait C' est la réunion des relevés des chemins géodésiques $[\bar{x}_0, \bar{x}]$,où $\bar{x} \in \bar{C}$. Si 1. était faux, il existerait un point $x_1 \in \pi^{-1}(\bar{x}_0)$ et un chemin γ joignant x_0 à x_1 dans C' tel que pourtout point t sur ce chemin, la géodésique $[\bar{x}_0, \bar{t}]$ soit dans $\bar{C}'$. Montrons que l'image de ce chemin par π est homotope à 0. Il est homotope à un produit de triangles géodésiques $[\overline{x_0}, \bar{t}_i] \cup [\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}] \cup [\bar{t}_{i+1}, \overline{x_0}]$, avec $\bar{t}_i \in \bar{C}'$ et la distance de $\bar{t}_i$ à $\bar{t}_{i+1}$ est inférieure à δ_1. Par quasi-convexité de $\bar{C}$, on peut donc l'homotoper en un produit de chemins de longueur $\leqslant 100\delta_1$ inclus dans $30\delta_1$ voisinage de $\iota(X)^+$ et basé en un point de $\iota(X)^+$. Un tel chemin est contenu dans une boule de rayon $r_0/20$ centrée en un point de $\iota(X)^+$ et donc est homotope à zéro : ainsi γ est homotope à zéro, ce qui montre que $x_0 = x_1$, d'où 1. Pour 2, il suffit de voir que la restriction de π est injective, ce qui résulte du même argument. □

Lemme 5.10.2. Soit $F \subset \bar{G}$ un sous-groupe fini. Alors ou bien F est l'image d'un sous-groupe fini de G, ou bien il existe un unique indice $i \in \bar{I}$ tel que $F \subset \bar{E}_i$.

Plus précisément, on a l'alternative suivante : soit $C_F = \{x \in \bar{X} / \forall \bar{g} \in F, |\bar{g}x - x| \leqslant 10\delta_1\}$ est entièrement contenu dans l'un des $\bar{D}^0_i$, et dans ce cas i est l'unique indice tel que $F \subset \bar{E}_i$; soit il existe un point x_0 dans $C_F \cap \bar{X}^+$, et en identifiant $G = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\dot{P}, x_0)$, F s'identifie au

sous-groupe de G représenté par les lacets basés en x_0 de longueur $\leqslant 10\delta_1$ et dont la classe dans $\bar{G}$ sont les éléments de F.

Démonstration. Si F est fini, on sait (d'après 2.3.4) que $C_F = \{x \in \bar{X}/\forall \bar{g} \in F, |\bar{g}x - x| \leqslant 8\delta_1\}$ est non vide et $8\delta_1$-quasi-convexe. Distinguons les cas suivant que cet ensemble est entièrement contenu l'un des $\bar{D}_i^0$ounon. Dans le premier cas, et d'après le lemme 5.9.3 , $F \subset \bar{E}_i$. Dans le second, on utilise le lemme de relèvement 5.10.1. □

Lemme 5.10.3. *On suppose que Gest discret co-compact dans X, que tout sous-groupe élémentaire de G est cyclique (fini ou non) et que pour tout i l'élément ρ_i est puissance impaire d'un élément primitif. Alors tout sous-groupe élémentaire de $\bar{G}$ est cyclique.*

Démonstration. Notre hypothèse et le lemme précédent assurent que les sous-groupes finis de $\bar{G}$ sont tous cycliques *d'ordre impair*. En particulier $\bar{G}$ ne peut contenir de groupe élémentaire de type diédral. Ainsi un sous-groupe élémentaire infini $\bar{E}$ de $\bar{G}$ est une extension d'un groupe infini cyclique engendré par un élément $\bar{f}$ par un groupe fini F normalisé par $\bar{f}$. Deux cas se présentent suivant que F est contenu dans l'image de l'un des E_i ou non. Dans le premier cas, F est cyclique et a un *unique* point fixe (d'après 5.9.1), le point $\bar{c}_i$. Donc ce point est fixé par $\bar{E}$ et en fait $\bar{E}$ est fini. Étant contenu dans le groupe cyclique $\bar{E}_i$, il est cyclique. Dans le second cas, F ne rencontre aucun des $\bar{E}_i$. Alors C_F est tout entier contenu dans $\iota(X)^+$. Choisissons une puissance $\bar{g} = \bar{f}^k$ d'ordre suffisant, dont la longueur de translation soit supérieure à $100\delta_1$. Alors $C_{\bar{g}}$ est entièrement contenu dans le $10\delta_1$ voisinage d'une géodésique, qui est donc elle-même contenue dans $C_F \subset X^+$. On utilise alors 5.10.1 pour relever le sous groupe de $\bar{E}$ engendré par $\bar{g}$ et F en un groupe élémentaire, donc cyclique, ce qui est impossible si F n'est pas trivial. □

5.11. *Rayon d'injectivité.*

Si g est une isométrie de l'espace métrique X, rappelons qu'on a posé $[g] = \inf_{x \in X}(|x - gx|)$. Si $x_0 \in X$, la suite $|g^n x_0 - x_0|/n$ converge vers un nombre appelé *longueur stable* $[g]_\infty$ qui est indépendant de x_0. Pour tout g et tout k, on a $[g^k]_\infty = k[g]$ et $[g^k] \geqslant k[g]_\infty$.

Rappelons que le rayon d'injectivité de l'action d'un groupe sur un espace hyperbolique est la plus petite longueur stable $[g]_\infty$ d'un élément hyperbolique g. Celle-ci est strictement positive si l'action est discrete co-compacte.

L'idée pour minorer le rayon d'injectivité de l'action de $\bar{G}$ sur $\bar{X}$ est simple : la géodésique la plus courte de $\bar{X}/\bar{G}$, si elle est de longueur d petite devant r_0, doit se trouver dans la partie mince, ou tout au moins ne pas trop s'en éloigner (de plus de $d/2 + 100\delta$).

Pour un espace métrique δ_1-hyperbolique, on sait que $[g] \leqslant [g]_\infty + 16\delta_1$ ([**7**] 10.6.4). Mais cette inégalité n'est pas assez précise pour notre propos. Nous allons utiliser la proposition 3.4.5 appliquée à $\bar{X}$ et qui montre que $[g^n] \geqslant n([g] - \varepsilon_0^{1/6})$ et donc on a une inégalité plus précise : pour tout élément g, $[g] \leqslant [g]_\infty + \varepsilon_0^{1/6}$.

Lemme 5.11.1. *Le rayon d'injectivité de l'action de $\bar{G}$ sur $\bar{X}$ est au moins égal à* $\mathrm{Min}(\frac{\rho'}{10}, 1)$, *où ρ' est la plus petite longueur stable d'un élément hyperbolique de G qui n'est dans aucun des E_i.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout élément hyperbolique $\bar{g}$ de $\bar{G}$, et tout entier m suffisamment grand $[\bar{g}^m] \geqslant m\mathrm{Min}(\frac{\rho'}{10}, \delta_1)$. D'après ce qui précède, et comme $\varepsilon_0^{1/6} \leqslant$

10^{-1},il nous suffit donc de montrer que pour tout élément hyperbolique $\bar{g}$de $\bar{G}$, et tout m suffisamment grand, on a $[\bar{g}^m] \geqslant m\,(\mathrm{Min}(\frac{\rho'}{10}, 1)) + \frac{1}{5}$.

Choisissons m le plus grand entier de sorte que $m\,(\mathrm{Min}(\frac{\rho'}{10}, 1)) \leqslant 1$. Supposons que $[\bar{g}^m] \leqslant m\,(\mathrm{Min}(\frac{\rho'}{10}, 1)) + \frac{1}{5}$. Alors l'ensemble $8\delta_1$-quasi-convexe $\bar{C} = \{x \in \bar{X} \ / \ |x - \bar{g}^m x| \leqslant 1 + \frac{1}{5}\}$ est non vide et $\bar{g}$ invariant. Si $\bar{x}_0$ est dans $\bar{C}$, la géodésique $[\bar{x}_0, g^m \bar{x}_0]$ ne peut rencontrer l'un des $\overline{D}_i^0$: en effet, par quasi-convexité de la fonction distance, tout point d'une telle géodésique est déplacé d'au plus $\frac{6}{5} + 8\delta_1 \leqslant 10\delta_1$ par $\bar{g}^m$. Or le lemme 5.9.3 montre que, $\bar{g}^m$ étant hyperbolique, pour tout i, tout point de $\overline{D}_i^0$ est déplacé d'au moins $100\delta_1$. Donc $\bar{C}$ est contenu dans $\bar{X}^+$, ce qui permet (5.10.1) de relever $\bar{g}$ un une isométrie de $\dot{X}$ qui conserve un ensemble C tel que la restriction de π à C soit une isométrie sur $\bar{C}$.

Notons que le segment $[x_0, \bar{g}^m x_0]$ ne peut être entièrement contenu dans l'un des cônes $\bar{D}_i$, sinon $\bar{g}^m$ fixerait le centre de ce cône et serait elliptique. Soit $\bar{x}_1$ un point de l'image de X qui est dans $[\bar{x}_0, \bar{g}^m \bar{x}_0]$, et x_1 sa pré-image dans C .

Comme la longueur de $[x_1, g^m x_1]$ est inférieure à $\frac{6}{5}$, tout point de cette géodésique est à une distance inférieure à $\frac{6}{5}$ de l'image de X. On voit donc que la projection radiale de cette géodésique représentant $\bar{g}^m$ est de longueur majorée par $\frac{6}{5}e^{6/5} < 5$: ainsi on a relevé $\bar{g}$ en une isométrie g de l'espace métrique X telle que $[g^m] < 5$. Donc $m\frac{\rho'}{10} \leqslant 1/2$, ce qui contredit le fait que m soit le plus grand entier tel que $m(\mathrm{Min}(\frac{\rho'}{10}, 1)) \leqslant 1$. □

6. *Groupes à petite simplification et groupes de Burnside.*

Dans ce paragraphe, on applique le théorème de la petite simplification à l'étude de certains groupes. Les constantes $r_0, \varepsilon_0 \ldots$; ont été fixées, une fois pour toute, en 5.3.

6.1. *Les groupes à petite simplification.*

Soit $\mathcal{P} = \langle a_1, \ldots, a_r; R_1, \ldots, R_l \rangle$ est une présentation, où les R_i sont des mot cycliquement réduits en les a_i et a_i^{-1}. Les deux constantes géométriques de la petite simplification sont :

(1) La longueur de la plus petite relation : $\rho(\mathcal{P})$

(2) La longueur de la plus grande pièce $\Delta(\mathcal{P})$, qui est la longueur du plus grand sous-mot commun à deux des relations, leurs conjugués ou leurs inverses.

(3) $\lambda = \frac{\Delta}{\rho}$.

Le théorème de la toute petite simplification s'applique donc dès que λ est suffisament petit, et équipe le groupe $G_{\mathcal{P}}$ d'une géométrie : soit $k = \frac{n}{2\pi \sinh r_0}$ et considérons le graphe de Cayley du groupe libre divisé par k : c'est un arbre et il est donc $\delta = 0$ hyperbolique. Le rayon d'injectivité de l'action est $2\pi \sinh r_0$ et la constante de simplification est suffisament petite, donc le théorème de la toute petite simplification s'applique et montre que $G_{\mathcal{P}}$ est discret co-compact dans un espace 100-hyperbolique, le rayon d'injectivité de l'action étant de l'ordre de $\frac{1}{k}$. Expliquons en quoi cette géometrie est meilleure que celle du graphe de Cayley.

Le quotient de la constante d'hyperbolicité de cet espace par le rayon d'injectivité est de l'ordre de $\frac{100n}{2\pi \sinh r_0}$. Le graphe de Cayley de ce groupe est hyperbolique, la constante d'hyperbolicité étant de l'ordre de la longueur de la plus grande relation, le rayon d'injectivité étant 1.

Mieux : si λ est petit devant $\lambda_0 = \frac{\alpha(\varepsilon_0)}{2\pi \sinh r_0}$ on peut faire la même construction, mais en choisissant comme constante de renormalisation $k = \frac{\lambda . n}{\alpha(\varepsilon_0)}$. On obtient alors une action de $G_{\mathcal{P}}$ sur un espace 100-hyperbolique ayant un rayon d'injectivité $\frac{\lambda . n}{\alpha(\varepsilon_0)}$ et le rapport entre ces deux constantes étant de $100n\frac{\lambda}{\lambda_0}$, arbitrairement petit devant n.

6.2. *Le groupe de Burnside d'exposant impair .*

On souhaite utiliser le théorème de la toute petite simplification pour montrer une version asymptotique du théorème de Novikov-Adian :

Théorème. *Le groupe de Burnside libre d'exposant n impair suffisamment élevé est infini.*

Rappelons que δ_1 est de l'ordre de 200, $r_0 = 10^5$, $\varepsilon_0 \leqslant 10^{-10}$, mais que α_0, δ_0 sont inconnues; on peut néamoins exiger que $\delta_0 < 10^{-10}$.

L'entier n étant fixé, on pose $k = \sqrt{\frac{n}{20\pi \sinh r_0}}$; le nombre k est la *constante de renormalisation.*

On suppose que k est suffisamment grand de sorte que $\frac{2000\delta_1 \exp 350\delta_1}{k} < \alpha_0$, $\frac{\delta_1}{k} < \delta_0$.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du:

Lemme 6.2.1. *Soit n un entier impair. Soit G un groupe discret co-compact dans un espace métrique δ_1-hyperbolique X. Soit $\mathcal{F} = \{g^n, g$ est primitif et $[g]_\infty \leqslant 1\}$ et soit $\bar{G} = G/\langle \mathcal{F} \rangle$.*

On suppose que:

a) *Le groupe G est non élémentaire et tout sous-groupe élémentaire de G est cyclique, soit fini cyclique d'ordre divisant n, soit infini cyclique.*
b) $\Delta(G, X) \leqslant 2000\delta_1 \exp 350\delta_1$.
c) *Le rayon d'injectivité de l'action de G sur X est au moins $\frac{1}{10k}$.*
d) *La caractéristique d'Euler de $\chi(G, \mathbb{Q})$ est positive, ou tout au moins supérieure à l'opposé du nombre de classes de conjugaisons d'éléments de $\mathcal{F}$.*

Alors il existe un espace métrique δ_1-hyperbolique $\bar{X}$, et une action de $\bar{G}$ sur cet espace, discrète co-compacte qui satisfait aussi a),b),c), et telle que de plus la projection π de G sur $\bar{G}$ satisfasse $[\pi(g)]_{\bar{X}} \leqslant \frac{[g]_X}{k}$ et tel que la caractéristique d'Euler de $\bar{G}$ est positive.

Montrons comment ce résultat implique la généralisation suivante du théorème de Novikov-Adian (déjà observée par Ivanov et Olshanskii [**19**]).

Théorème 6.2.1. *Soit G un groupe hyperbolique non élémentaire sans torsion. Il existe un entier n tel que pour tout entier impair $m > n$, le quotient de G par le sous-groupe engendré par toutes les puissances $m-$ièmes de tous les éléments de G est infini.*

Démonstration. Comme G est hyperbolique, il est discret co-compact dans un espace hyperbolique X. Soit δ la constante d'hyperbolicité de cet espace; quitte à remplacer X par un homothétique, on peut supposer que $\delta = \delta_1$. Soit i le rayon d'injectivité de l'action. Choisissons n de sorte que, si $k = \frac{n}{20\pi \sinh r_0}$, on ait $\frac{2000\delta_1 \exp 100\delta_1}{k} < \alpha_0$, et $k > \frac{1}{i}$. Si $\chi(\bar{G}) \leqslant 0$ on choisit aussi k de sorte que le nombre de classes de conjugaisons des puissances n-ièmes de éléments primitifs de longueur $\leqslant 1$ soit supérieur à $-\chi(\bar{G})$. En appliquant le lemme 6.1.1, on déduit que le groupe $\bar{G}$ obtenu en quotientant G par le sous-groupe engendré famille $\mathcal{F} = \{g^n, g$ est primitif et $[g]_\infty \leqslant 1\}$ est hyperbolique, non élémentaire est discret co-compact dans un espace hyperbolique $\bar{X}$, de sorte que la projection $\pi : G \to \bar{G}$ satisfasse $[\pi(g)]_{\overline{X}} \leqslant \frac{[g]_X}{k}$. En appliquant par récurrence ce résultat p fois, on en déduit que le quotient G_p de G par le sous groupe normal engendré par tous les puissances n-ièmes des éléments de longueur inférieure à k^p est infini, car il se surjecte sur un groupe hyperbolique non élémentaire. Si le quotient du groupe G par les sous-groupe normal engendré par toutes les puissances n-ièmes était fini, il serait de présentation finie, donc égal à G_p pour une certain p, contradiction. □

Démonstration de 6.2.1. Les hypothèses du lemme 6.2.1 sont exactement celles qui disent que si on fait agir le groupe G dans l'espace renormalisé $\frac{1}{k}X$ la famille $\mathcal{F}$ satisfait les hypothèses du théorème de la toute petite simplification. Celui-ci permet de construire un orbi-espace $\bar{P}$ de groupe fondamental $\bar{G}$ et revêtement universel $\bar{X}$, et il faut vérifier que celui-ci satisfait les propriétés promises. Les propriétés déjà vérifiées sont la δ_1 hyperbolicité de $\bar{X}$, la propriété sur la caractéristique d'Euler résulte immédiatement de 5.7.1. Clairement l'application π possède la propriété de contraction de la longueur puisque celle-ci est déjà vérifiée quand on passe de X à $\frac{1}{k}X$, et que la construction de cone-off ne fait que réduire les longueurs des géodésiques. Il s'agit donc de vérifier les propriétés a) b) et c). Or b) résulte du lemme 5.9.5, a) de 5.10.3 et c) de 5.11.1 respectivement. □

References

1. S.I. Adian, The Burnside problem and identities in groups. Ergebnisse der Math., 95. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

2. S.I. Adian and I.G. Lysionok, The method of classification of periodic words and the Burnside problem. Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 13–28, Contemp. Math., 131, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

3. M.R. Bridson and A. Haefliger, 'Metric spaces of non-positive curvature', Grund. Math. Wiss., 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

4. R. Benedetti and C. Petronio, 'Lectures on hyperbolic geometry', Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

5. B.H. Bowditch, Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces, in 'Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)', (E.Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky editors), 64–167, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

6. C. Champetier, Petite simplification dans les groupes hyperboliques, Ann. fac. sci. Toulouse 3 (1994) 161-221.

7. M. Coornaert, T. Delzant and A. Papadopoulos, 'Les groupes hyperboliques de Gromov', Lecture Notes in Math., 1441. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

8. T. Delzant, Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques, Duke Math. Journal, Vol 83 (1996), no.3, pp. 661-682.

9. C. Drutu, Quasi-isometry invariants and asymptotic cones. Internat. J. Algebra Comput. 12 (2002), no. 1-2, 99–135.

10. Euclide, Les oeuvres d'Euclide, Albert Blanchard, Paris 1966.

11. E. Ghys and P. de la Harpe, 'Sur les groupes hyperboliques, d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)', Progr. Math., 83, Birkhäuser, Boston, MA, 1990.

12. M. Greendlinger, Dehn's algorithm for the word problem. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 67–83.

13. R.I. Grigorchuk and I.G. Lysenok, The Burnside problems, in 'The concise Handbook of Algebra', V. Mikhalev F. Pilz ed., Kluwer 2002

14. M. Gromov, Hyperbolic groups, in 'Essays in group theory', S. Gersten ed., MSRI pub. no. 8, Springer-Verlag, New York 1987.

15. M. Gromov, Mesoscopic curvature and hyperbolicity, Global differential geometry: the mathematical legacy of Alfred Gray, 58–69, Contemp. Math., 288, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

16. M. Gromov,'Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces', Progress in Mathematics, 152. Birkhäuser, Boston, MA, 1999.

17. A. Haefliger, Complex of groups and orbihedra, in 'Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)', E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky editors, pp. 504-540.

18. S.V. Ivanov, The free Burnside groups of sufficiently large exponent, Internat. J. Alg. Comp. 4 (1994), 1–307.

19. S.V. Ivanov and A. Yu. Olshanskii, Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents. Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 6, 2091–2138.

20. R.C. Lyndon, On Dehn's algorithm. Math. Ann. 166 1966 208–228.

21. R.C. Lyndon and P.E. Schupp, 'Combinatorial group theory'., Ergeb. der Math., Band 89. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

22. I.G. Lysenok, Infinite Burnside groups of even exponent, Izv. Math. vol 60, no. 3, 1996, pp 453-654.

23. A. Yu. Olshanskii, The Novikov-Adian theorem. Mat. Sb. (N.S.) 118(160) (1982), no. 2, 203–235, 287.

24. A. Yu. Olshanskii, 'Geometry of defining relations in groups', Mathematics and its Applications (Soviet Series), vol. 70, Kluwer, Dordrecht, 1991.

25. E. Rips, Generalized small cancellation theory and its application I: The word problem. Israel J. of Math. (41) 1982, no. 2, 1–146.

26. J.-P. Serre, 'Arbres, amalgames, SL_2', Astérisque, Soc. Math. France 46 (1977).

27. V.A. Tartakovskii, Solution of the word problem for groups with a k-reduced basis for $k > 6$, Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., Ser. Mat. 13, (1949) . 483 - 494 (Russian).

Thomas Delzant
IRMA, Université de Strasbourg
France

delzant@math.u-strasbourg

Misha Gromov
IHES
Bures-sur-Yvette
France

gromov@ihes.fr