HAL
open science

La Transformée Ridgelet Analytique Discrète 3D

David Helbert, Philippe Carré, Éric Andrès

To cite this version:

David Helbert, Philippe Carré, Éric Andrès. La Transformée Ridgelet Analytique Discrète 3D. 19° Colloque sur le traitement du signal et des images GRETSI 2003, Sep 2003, Paris, France. http://hdl.handle.net/2042/13604. hal-00331418

HAL Id: hal-00331418

https://hal.science/hal-00331418v1

Submitted on 4 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La Transformée Ridgelet Analytique Discrète 3D

David HELBERT, Philippe CARRÉ, Eric ANDRES,

Laboratoire IRCOM-SIC UMR CNRS 6625
Université de Poitiers, bât SP2MI
Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope-Chasseneuil Cedex, France
helbert@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr, carre@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr
andres@sic.sp2mi.univ-poitiers.fr

Résumé – La transformée Ridgelet continue a été introduite et développée par E. Candès de l'université de Stanford. Elle permet théoriquement de représenter efficacement les ruptures rectilignes dans une image, informations primordiales pour l'analyse de l'image. Le challenge de ces dernières années est la définition d'une transformée discrète. Dans ce cadre, nous proposons une Transformée Ridgelet Analytique Discrète (DART), basée sur la construction d'objets analytiques discrets dans le domaine de Fourier pour calculer la transformée de Radon discrète. La DART 3D est obtenue par une transformée en ondelette 1D de toutes les projections de l'image contenues dans la transformée de Radon discrète. Une étude applicative a été menée pour le débruitage d'images 3D et de vidéos. Le débruitage par la DART 3D est perceptuellement correct et le rapport signal sur bruit est meilleur que des méthodes classiques.

Abstract – The continuous Ridgelet Transform was introduced and developed by E. Candès of Stanford's university. She allows to represent effectively the rectilinear breaks in an image, essential informations for image analysis. The challenge of these last years is the definition of a discrete transform. We propose Discrete Analytical Ridgelet Transform (DART), based on the construction of discrete analytical objects in the Fourier domain to calculate the discrete Radon transform. The 3D DART is obtained by a 1D wavelet transform of all the image projections contained in the discrete Radon transform. Our transform is used for 3D images and videos denoising. The denoising by the 3D DART is perceptualy correct and the signal on noise rate is better than classic methods.

Introduction

Alliant les outils du traitement de l'image à ceux de la géométrie discrète, [5] et [6] proposent une méthode performante de débruitage d'images : la Transformée Ridgelet Analytique Discrète 2D (DART 2D). En théorie, la transformée Ridgelet permet de représenter efficacement les ruptures rectilignes dans une image. A notre connaissance, trois méthodes de calcul basées sur la transformée Ridgelet sont présentées dans la littérature pour le traitement 2D : celle de l'Université de Stanford et des équipes associées [2] [4] [9], celle de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne [7] et celle de l'Université de Poitiers [5] [6]. Des études récentes sur le débruitage d'images 2D par la DART ont montré des résultats corrects perceptuellement et en terme de Rapport Signal sur Bruit. Par conséquent, nous avons étudié une extension de la DART dédiée à des applications sur des objets vidéos ou 3D.

1 La transformée Ridgelet

1.1 Définition de la transformée Ridgelet

La théorie continue de la transformée Ridgelet a été introduite et développée dans la thèse d'Emmanuel Candès [3]. Nous étendons ici la définition au 3D, la transformée Ridgelet r d'un signal $s \in L^3\left(\mathbb{R}^3\right)$ est définie par :

$$r\left(a,b,\theta,\gamma\right) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_{a,b,\theta,\gamma}\left(\underline{x}\right) s\left(\underline{x}\right) d\underline{x} \quad (1)$$

$$\psi_{a,b,\theta,\gamma}\left(\underline{x}\right) = a^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{w_{\underline{x},\theta,\gamma} - b}{a}\right) \quad (2)$$

$$w_{\underline{x},\theta,\gamma} = x_1 \cos\theta \cos\gamma + x_2 \cos\theta \sin\gamma + x_3 \sin\theta \quad (3)$$

avec $\underline{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$.

La fonction $\psi_{a,b,\theta,\gamma}$, une fonction ondelette 1D, est orientée selon les angles θ et γ. Une stratégie pour calculer les coefficients Ridgelet est d'interpréter l'analyse Ridgelet comme une analyse ondelette dans le domaine de Radon 3D :

$$r\left(a,b,\theta,\gamma\right) = \int_{\mathbb{R}} \psi_{a,b}\left(t\right) R_s\left(t,\theta,\gamma\right) dt \quad (4)$$

avec $R_s\left(t,\theta,\gamma\right)$ transformée de Radon 3D.

Les coefficients en Ridgelet $r(.)$ de $s\left(.\right)$ sont obtenus par une transformée en ondelette 1D de toutes les projections de l'image contenues dans la transformée de Radon dont les directions θ et γ sont constantes.

1.2 Définition de la transformée de Radon 3D

Dans un espace euclidien 3D, la transformée de Radon de s est définie par :

$$R_s\left(t,\theta,\gamma\right) = \iiint_{\mathbb{R}^3} s\left(\underline{x}\right) \delta\left(w_{\underline{x},\theta,\gamma} - t\right) d\underline{x} \quad (5)$$

$$w_{\underline{x},\theta,\gamma} = x_1 \cos\theta \cos\gamma + x_2 \cos\theta \sin\gamma + x_3 \sin\theta \quad (6)$$

avec δ la distribution en Dirac. Suivant le théorème de projection de Radon, la transformée de Radon 3D peut être obtenue

en appliquant une transformée de Fourier 1D inverse sur le domaine de Fourier 3D restreint sur les lignes radiales passant par l'origine :

$$R_s(t,\theta,\gamma) = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}(\xi\cos\theta\cos\gamma, \xi\cos\theta\sin\gamma, \xi\sin\theta)\, e^{j\xi t} d\xi \tag{7}$$

Pour le calcul de la transformée de Radon discrète, nous proposons d'extraire les coefficients de Fourier le long des droites 3D discrètes. Cette solution va nous permettre d'obtenir une réversibilité simple de la décomposition. Le calcul de la transformée de Radon discrète est défini par :

- Extraction des coefficients de Fourier 3D le long des droites discrètes,
- Application de la transformée de Fourier inverse 1D des coefficients extraits.

Notons que l'université de Stanford a proposé dans [2] une extension 3D de leur transformée Ridgelet. Toutefois, à notre connaissance, cette technique n'a pas été étudiée dans un cadre applicatif (de débruitage).

1.3 Définition des droites analytiques discrètes 3D

Pour calculer la transformée de Radon discrète, les droites discrètes doivent être symétriques par rapport au centre du domaine de Fourier 3D et doivent couvrir l'ensemble des voxels.

Une droite discrète 3D est définie par l'intersection de l'extrusion de ses trois projections orthogonales (figure 1 (4)). Dans le domaine cartésien, la droite discrète analytique 3D $L^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}_{(p,q,r)}$ reliant les points cartésiens $O(0,0,0)$ et $Q(p,q,r)$ est définie par :

$$L^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}_{(p,q,r)} = \pi_{oxy}(p,q,r) \cap \pi_{oyz}(p,q,r) \cap \pi_{ozx}(p,q,r) \tag{8}$$

avec :

$$\pi_{oxy}(p,q,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid |qx - py| \leq \frac{\omega_1}{2}\right\} \tag{9}$$

$$\pi_{oyz}(p,q,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid |ry - qz| \leq \frac{\omega_2}{2}\right\} \tag{10}$$

$$\pi_{ozx}(p,q,r) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid |pz - rx| \leq \frac{\omega_3}{2}\right\} \tag{11}$$

$qx - py = 0$ est l'équation de la droite euclidienne 2D reliant $(0,0)$ à (p,q), résultant de la projection orthogonale de OQ sur le plan Oxy (idem pour π_{oyz} et π_{ozx}). ω_1 est fonction de p et q, ω_2 est fonction de q et r et ω_3 est fonction de q et r. Ces valeurs représentent les épaisseurs arithmétiques de la droite 3D dans les directions Ox, Oy et Oz.

Si $\omega_1 = \max(|p|,|q|)$, $\omega_2 = \max(|q|,|r|)$ et $\omega_2 = \max(|r|,|p|)$, alors $L^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}_{(p,q,r)}$ est une droite pseudo-naïve fermée (figure 1 (1)).

Si $\omega_1 = \sqrt{p^2+q^2}$, $\omega_2 = \sqrt{q^2+r^2}$ et $\omega_3 = \sqrt{r^2+p^2}$, alors $L^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}_{(p,q,r)}$ est une droite pseudo-pythagoricienne fermée (figure 1 (2)).

Si $\omega_1 = |p|+|q|$, $\omega_2 = |q|+|r|$ et $\omega_3 = |r|+|p|$, alors $L^{\omega_1,\omega_2,\omega_3}_{(p,q,r)}$ est la supercouverture de la droite Euclidienne OQ (figure 1 (3)), longuement étudiée en géométrie algorithmique discrète ([1]).

Notons que les voxels des droites 3D pseudo-naïves fermées et les droites 3D pseudo-pythagoriciennes fermées ne sont pas nécessairement connexes contrairement aux droites 3D supercouvertures, plus épaisses que les deux autres types de droites.

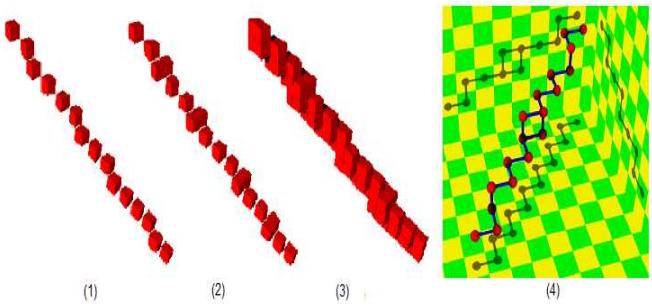

FIG. 1: Droites discrètes 3D : (1) pseudo-naïve fermée, (2) pseudo-pythagoricienne fermée, (3) supercouverture, (4) une droite supercouverture et ses trois projections [1]

1.4 Couverture du domaine de Fourier 3D par des droites analytiques discrètes

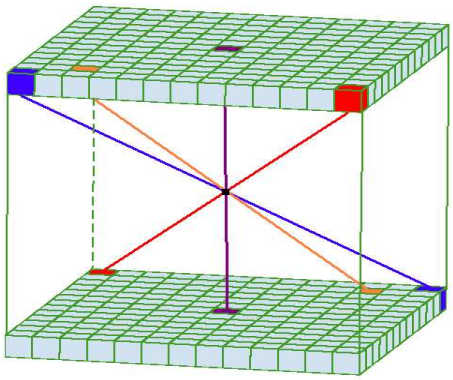

FIG. 2: Couverture du spectre par des droites 3D

Soit une image 3D de taille $(N \times N \times N)$ avec $N = 2k+1$ et $k \in \mathbb{N}$. Le voxel au centre de l'image définit l'origine du repère cartésien.

Afin de couvrir la totalité du domaine de Fourier 3D (figure 2), nous définissons des droites 3D passant par l'origine et reliant les voxels qui bordent le domaine. Les éléments proches de l'origine sont plus couverts par des droites discrètes que ceux du bord du spectre de Fourier. Notons que si le domaine est de grande taille, certains coefficients de Fourier ne sont pas couverts avec les droites pseudo-naïves fermées et pseudo-pythagoriciennes fermées contrairement aux droites supercouvertures. Dans ce cas, la transformée n'est pas strictement inversible (mais ces coefficients sont proches du bord et correspondent donc à des hautes fréquences). La redondance globale de la transformée de Radon discrète selon une droite pseudo-naïve fermée est ≈ 2.6, selon une droite pseudo-pythagoricienne fermée ≈ 3.3. La couverture du domaine de Fourier avec des droites supercouvertures est plus redondante (≈ 6.2) et tous les coefficients de Fourier sont couverts assurant ainsi la reconstruction parfaite.

Pour calculer la transformée de Radon discrète inverse, nous calculons la transformée de Fourier 1D de chaque projection, puis nous faisons la moyenne des coefficients de Fourier couverts par un voxel élément des différentes droites discrètes 3D et enfin, nous appliquons une transformée de Fourier inverse 3D.

2 Débruitage d'objets 3D avec la DART 3D

2.1 Procédure de débruitage

La procédure de débruitage 3D par transformée Ridgelet consiste à seuiller les coefficients Ridgelet et à appliquer la transformée Ridgelet inverse.

Pour définir la Transformée Analytique Ridgelet Discrète 3D, nous calculons une transformée en ondelette 1D sur chaque projection de l'image contenue dans la transformée de Radon discrète. Nous choisissons une transformée non décimée en ondelette Daubechies D20 sur trois échelles.
Nous avons choisi d'utiliser le seuillage introduit dans le cadre des décompositions en ondelettes par Donoho [8] (le seuil est égal à $\sigma\sqrt{2\log(N)}$). Nous estimons la variance σ des coefficients Ridgelet bruités en utilisant la valeur médiane absolue de la première échelle de la décomposition en ondelette pour chaque projection (comme pour une décomposition en ondelette).

2.2 Débruitage d'une image artificielle

L'image 3D est de taille $(63 \times 63 \times 63)$ avec 256 niveaux de gris. Un bruit Gaussien est ajouté sur l'image tel que le Rapport Signal sur Bruit (SNR) soit égal à 9.62 dB. Les résultats

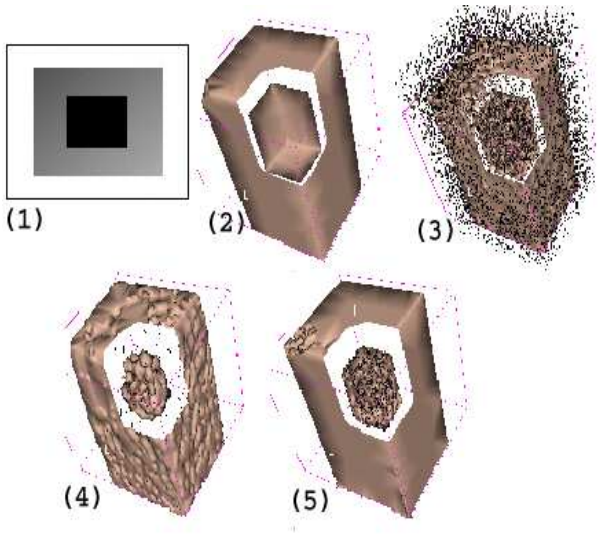

FIG. 3: (1) coupe de l'image originale, vues 3D de : (2) l'image originale, (3) l'image bruitée, (4) l'image débruitée par une décomposition en ondelettes, (5) l'image débruitée par la DART 3D

de débruitage de l'image avec la DART définie avec des droites pseudo-naïves ou avec des droites pseudo-pythagoriciennes ne sont pas concluants. Ces droites 3D ne couvrent pas entièrement le spectre de Fourier 3D, la reconstruction de l'image 3D n'est donc pas parfaite. Par conséquent, nous définissons la DART avec des droites 3D supercouvertures. Le SNR de l'image débruitée par la stratégie Ridgelet (18.25 dB) est supérieur de celui de d'image débruitée par une stratégie ondelette (13.45 dB). Perceptuellement (figure 3), les contours rectilignes de l'image artificielle sont mieux conservés avec la décomposition Ridgelet qu'avec une décomposition en ondelettes.

2.3 Débruitage d'une vidéo

La vidéo composée de 115 images de taille (115×115) avec 256 niveaux de gris représente l'ouverture des pétales d'une fleur. Un bruit Gaussien très important est ajouté sur l'image tel que le SNR soit égal à 0,051 dB.

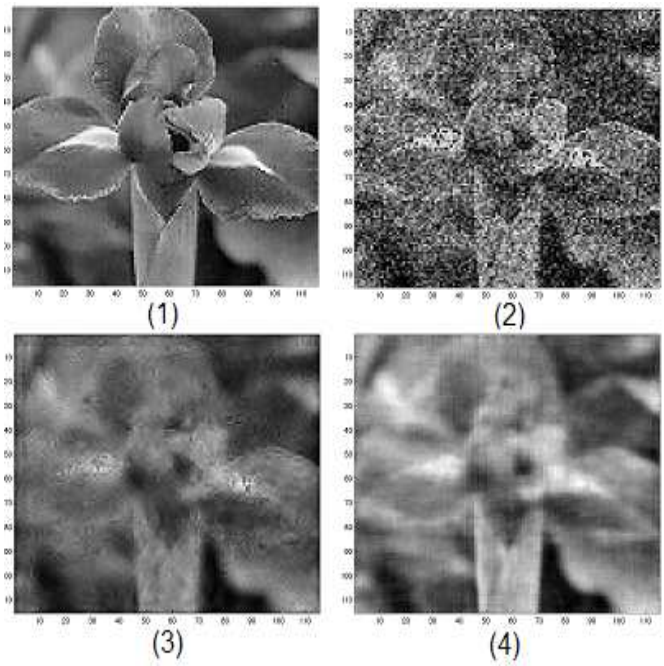

FIG. 4: Images issues des vidéos : (1) originale, (2) bruitée, (3) débruitée par une décomposition en ondelette, (4) débruitée par la DART 3D

Le SNR de la stratégie ondelette 3D est égal à 6.17dB et celui de la stratégie DART supercouverture est égal à 7.47 dB. En comparant une image issue de la séquence (figure 4), nous constatons que les bords et les détails de la tige ou de l'arrière plan sont plus nets avec une stratégie Ridgelet qu'avec une stratégie ondelette. Lors du débruitage par une décomposition en ondelettes, nous obtenons des artefacts fort bien connus en 2D appelés phénomène pseudo-Gibbs.

2.4 Débruitage d'une Image à Résonance Magnétique

L'image 3D est de taille $(123 \times 123 \times 123)$ avec 256 niveaux de gris. Un bruit Gaussien est ajouté sur l'image tel que le SNR soit égal à 8.85 dB.

Le SNR de la stratégie ondelette 3D est égal à 10,67 dB et celui de la stratégie DART supercouverture est égal à 11.49 dB. Ce résultat semble mettre en évidence un meilleur débruitage par la décomposition Ridgelet.

Les coupes horizontales des IRM dans la figure 5 mettent en évidence une tumeur cérébrale. Les contours des objets composant le cerveau, tumeur et lobe cérébral par exemple, sont plus nets avec le débruitage Ridgelet. L'image débruitée par la DART 3D est perceptuellement meilleure que celle débruitée par une décomposition en ondelettes.

3 Conclusion

Nous avons proposé un algorithme simple de débruitage d'objets 3D. Le débruitage avec la DART 3D obtient des résultats très encourageants : les images 3D et les vidéos reconstruites sont perceptuellement correctes et contrairement à une décomposition en ondelette, nous conservons les ruptures des objets 3D sans faire apparaître de points parasites. Les résultats peuvent être encore améliorés avec une décomposition locale consistant à découper l'image 3D en plusieurs cubes et à appliquer l'algorithme de débruitage par la DART sur chacun d'eux.

Références

[1] Eric Andres. *Modélisation analytique discrète d'objets géométriques*. Habilitation à Diriger les Recherches, université de Poitiers, 2000.

[2] A. Averbuch, R.R. Coifman, D.L. Donoho, M. Israeli, J. Waldén. *Fast Slant Stack : a Notion of Radon Transform for Data in a Cartesian Grid Which is Rapidly Computible, Algebrically Exact, Geometrically Faithful and Inversible*. Technical Report, University of Stanford, 2000.

[3] Emmanuel Candès. *Ridgelets : Theory and Applications*. PhD Thesis, University of Stanford, august 1998.

[4] E. Candès and F. Guo. *New Multiscale Transforms, Minimum Total Variation Synthesis : Applications to Edge-Preserving Image*. Signal Processing, volume 82, pages 1519–1543, 2002.

[5] Philippe Carré et Eric Andres. *Ridgelet Transform based on Réveillès Discrete Lines*. In DGCI'02 (published in Lecture notes in Computer), Springer-Verlag, avril 2002.

[6] Philippe Carré et Eric Andres. *Discrete Analytical Ridgelet Transform*. Submitted to Signal Processing, 2002.

[7] Minh N. Do et Martin Vetterli. *The Finite Ridgelet Transforms for Image Representation*. IEEE Transaction on Image Processing, April 2002.

[8] David Donoho. *Wavelet Shrinkage and W.V.D. : a 10-Minute Tour*. Technical Report, University of Stanford, 1992.

[9] Jean-Luc Stark, Emmanuel Candès, David Donoho. *the Curvelet Transform for Image Denoising*. Technical Report, Stanford University, Department of Statistics, November 2000.

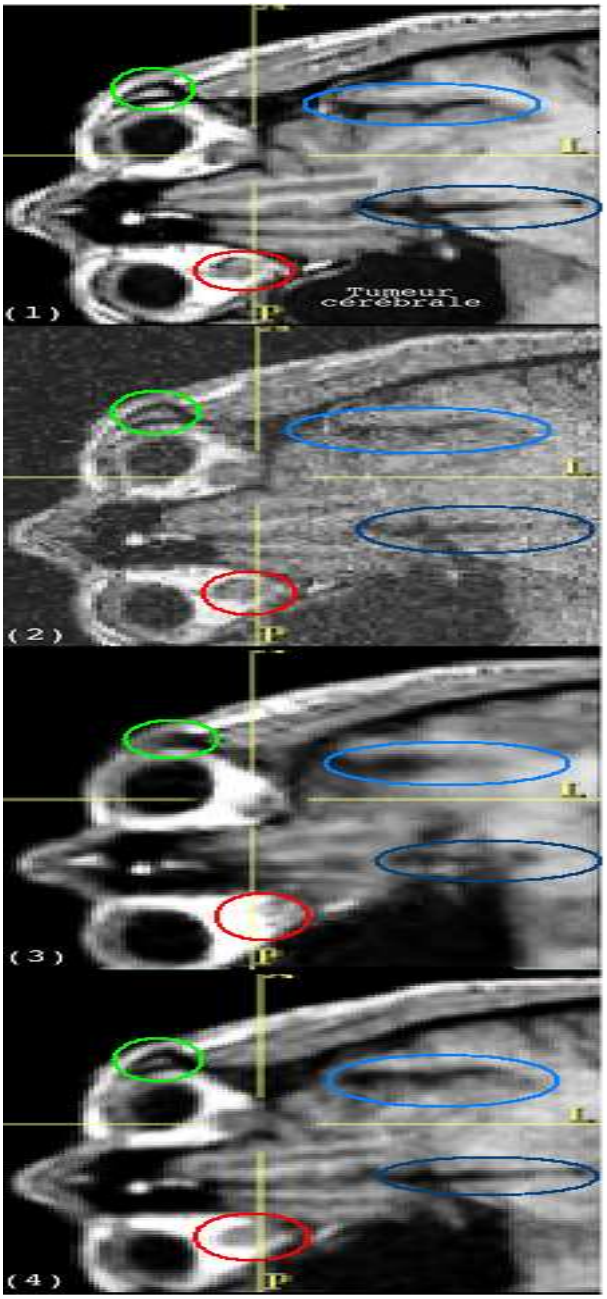

FIG. 5: Coupes horizontales des IRM : (1) image originale, (2) image bruitée, (3) image débruitée par une décomposition en ondelette, image débruitée par la DART 3D