Une classe d'espaces préhomogènes de type parabolique faiblement sphériques

Iris Muller

▶ **To cite this version:**

Iris Muller. Une classe d'espaces préhomogènes de type parabolique faiblement sphériques. 2008. hal-00331387

HAL Id: hal-00331387
https://hal.science/hal-00331387

Preprint submitted on 17 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une classe d'espaces préhomogènes de type parabolique faiblement sphériques

Iris MULLER

Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA)
Université Louis Pasteur et CNRS (UMR 7501)

Résumé

Pour les algèbres de Lie absolument simples, de dimension finies, de rang au moins 2, définies sur un corps local de caractéristique 0 et admettant une graduation : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, donnée par un élément H_0 tel que $2H_0$ soit simple, on définit (à 2 exceptions près) des sous-groupes paraboliques P, inclus dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ et centralisant H_0, dont l'action sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ est géométriquement préhomogène. On étudie la structure de ces espaces préhomogènes. On montre que les fonctions Zétas associées aux invariants relatifs fondamentaux de P définis sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ admettent des prolongements méromorphes qui vérifient des équations fonctionnelles abstraites et on donne le calcul explicite des coefficients des équations fonctionnelles, des polynômes de Bernstein associés aux invariants relatifs fondamentaux de P dans le cas archimédien, par une méthode de descente à des centralisateurs de paires d'algèbres de Lie de type sl_2 qui commutent.

Ceci généralise des résultats bien connus lorsque $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$.

Introduction

Comme il est dit dans [Sa 6], un problème intéressant en analyse et en théorie des nombres est le suivant : étant donnés 2 polynomes homogènes P et P^* en n variables de degré d à coefficients réels, trouver des conditions afin que la transformée de Fourier de $|P(x)|^s$, s étant un nombre complexe, vérifie l'égalité $\widehat{|P(x)|^s} =$ facteur gamma.$|P^*(x)|^{-s-\frac{n}{d}}$ au sens des distributions.

Il est bien connu qu'une réponse à cette question est donnée par la théorie des espaces vectoriels préhomogènes dûe à Mikio Sato et introduite dans les années 1960 ([Sa], première version publiée en 1970 en Japonais) et dont une classification a été obtenue par M.Sato et T.Kimura ([Sa-Ki]).

Par la suite cette théorie a connu de grands développements et dans de nombreuses directions.

Dans ce travail, on s'intéresse aux fonctions zétas locales associées à l'action préhomogène de certains sous-groupes paraboliques ceci dans le cadre des préhomogènes de type parabolique.

1. Les préhomogènes considérés sont de "type parabolique" ([Ru 2],[Ru 3]), plus précisément soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie absolument simple de dimension finie, définie sur un corps local de caractéristique zéro que l'on note $\mathbb{F}$, on suppose que $\mathfrak{g}$ est munie d'une graduation :

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i$$

où les $\mathfrak{g}_i$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ vérifiant la condition :

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \forall i, j \ \in \ \mathbb{Z}.$$

Les dérivations de $\mathfrak{g}$ étant intérieures, il existe un unique élément appartenant à $\mathfrak{g}_0$ qui définit la graduation, on le note H_0 et on a :

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad \mathfrak{g}_i = \{x \in \mathfrak{g} \mid [H_0, x] = ix\}.$$

Soit G le centralisateur de H_0 dans le sous-groupe $Aut_0(\mathfrak{g})$ ([Bou 2]) des automorphismes de $\mathfrak{g}$. Ce groupe opère sur chaque espace vectoriel $\mathfrak{g}_i, i \in \mathbb{Z}$, mais on considère l'action de G sur $\mathfrak{g}_1$ et la représentation correspondante est notée de manière infinitésimale : $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ ou $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$.

Les sous-espaces vectoriels $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ sont mis en dualité à l'aide de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ d'où $(G, \mathfrak{g}_{-1})$ est la représentation contragrédiente de $(G, \mathfrak{g}_1)$.

D'après un résultat de E.B.Vinberg ([Vi]), ces représentations sont géométriquement préhomogènes ce qui signifie que G possède une orbite ouverte dans $\mathfrak{g}_1$ muni de la topologie de Zariski, ceci lorsqu'on se place sur une clôture algébrique de $\mathbb{F}$, et le nombre d'orbites de G dans $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ est fini.

Ainsi $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est une $\mathbb{F}$-forme d'un espace préhomogène, appelé de type *parabolique*, en effet la sous-algèbre $\oplus_{i\geq 0}\mathfrak{g}_i$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ dont le radical nilpotent est la sous-algèbre : $\oplus_{i\geq 1}\mathfrak{g}_i$ et la sous-algèbre réductive $\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie du groupe G ([Ru 2]). Lorsque la graduation est courte, c'est à dire telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, le préhomogène est dit de"type commutatif" (car $\mathfrak{g}_1$ est une algèbre commutative).

L'intérêt des préhomogènes de type paraboliques réside dans la présence de l'algèbre simple $\mathfrak{g}$ qui contient à la fois l'algèbre de Lie du groupe G et l'espace $\mathfrak{g}_1$ de la représentation, permettant ainsi l'étude et l'expression des résultats en termes de la structure de $\mathfrak{g}$ (cf. par exemple les travaux de N. Bopp et H. Rubenthaler dans [Bo-Ru 2]).

Ainsi une description possible des orbites de G dans $\mathfrak{g}_1$ est réalisée à l'aide d'une version ≪graduée≫ des sl_2-triplets. On rappelle qu'un sl_2-triplet est un triplet non nul (x, h, y) vérifiant les relations de commutation suivantes :

$$[x, y] = -h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y \quad \text{([Bou 2])}.$$

Par une généralisation du théorème de Jacobson-Morozov, il est bien connu que pour tout x non nul de $\mathfrak{g}_1$, il existe h et y appartenant respectivement à $\mathfrak{g}_0$ et à $\mathfrak{g}_{-1}$ tels que (x, h, y) soit un sl_2-triplet.

Définition *Un élément h de $\mathfrak{g}$ est dit 1-simple si il existe un sl_2-triplet (x, h, y) tel que x (resp. y) soit dans $\mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_{-1}$) . Un tel sl_2-triplet est appelé 1-adapté.*

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}$ contenant H_0, on note Δ le système de racines correspondant. Ce dernier est également gradué par H_0 :

$$\Delta_i = \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(H_0) = i\}.$$

On choisit un ordre sur Δ pour lequel les racines appartenant à $\cup_{i>0}\Delta_i$ soient positives, soit Σ une base de Δ et $\Sigma_i = \Sigma \cap \Delta_i$, $i \in \mathbb{Z}$, on adopte la notation classique $(\Delta, \Sigma - \Sigma_0)$ (ou bien (Δ, λ_0) lorsque $\Sigma - \Sigma_0 = \{\lambda_0\}$) pour désigner le préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ ([Ru 2]), le préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ sera dit *déployé* lorsque $\mathfrak{g}$ est déployée.

Les préhomogènes de type parabolique absolument irréductibles, c'est à dire pour lesquels $\mathfrak{g}_1$ *est un* $\mathfrak{g}_0-$*module absolument irréductible*, sont réguliers ([Sa-Ki]) si et seulement si $2H_0$ est 1-simple ([Ru 2]). Dans ces conditions, on peut supposer que $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ engendrent $\mathfrak{g}$, ce que l'on fera systématiquement ainsi le préhomogène sera de type (Δ, λ_0), il existe ([Ru 2]) un polynome défini sur $\mathfrak{g}_1$, relativement invariant par G et de degré minimal, que l'on note F, tel que :

$$\{x \in \mathfrak{g}_1 \text{ admettant } \ 2H_0 \text{ pour élément 1-simple}\} = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F(x) \neq 0\}.$$

Il existe un caractère χ de G tel que :

$$\forall g \in G,\ \forall x \in \mathfrak{g}_1 :\ F(gx) = \chi(g)F(x) \quad (1)$$

et toute fraction rationnelle définie sur $\mathfrak{g}_1$ vérifiant une relation analogue à (1) est (à une constante multiplicative près) une puissance entière de F. L'invariant relatif F, qui lui aussi est défini à une constante près, est dit *fondamental* et l'ensemble de ses zéros est le lieu *singulier* noté S.

On a exactement la même situation sur le préhomogène "dual", $(G, \mathfrak{g}_{-1})$, l'invariant relatif fondamental sera noté F^* et son lieu singulier S^*.

Soient :
$O_1, ..., O_\ell$ les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1 - S$ et $O_1^*, ..., O_\ell^*$ les orbites de G dans $\mathfrak{g}_{-1} - S^*$,

ω un caractère unitaire de $\mathbb{F}^*$, $\pi = \omega|\ |^s$, avec $s \in \mathbb{C}$, un caractère de $\mathbb{F}^*$,

Pour f appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$, l'espace de Schwartz de $\mathfrak{g}_1$ et g appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$, on appelle *fonctions zétas locales* les expressions :

$$Z_{O_i}(f;\pi) = \int_{O_i} f(x)\pi(F(x))dx\ ,\ Z_{O_i^*}(g;\pi) = \int_{O_i^*} g(x)\pi(F^*(x))dx$$

qui convergent pour partie réelle de s assez grand, elles admettent un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ et il existe des fonctions méromorphes (en s), notées $a_{O_i^*,O_j}(\pi)$, telles que pour $i = 1, ..., \ell$ et f appartenant à $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ on ait :

$$Z_{O_i^*}(\widehat{f};\pi) = \sum_{j=1,...,\ell} a_{O_i^*,O_j}(\pi) Z_{O_i}(f;\pi^{-1}|\ |^{-N}) \text{ avec } N = \frac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{\text{degré de } F} \quad \text{([Sa-Sh], [Sh 1], [Ig 5]).}$$

Dans le cas réel, les fonctions $a_{O_i^*,O_j}$ ont une forme particulière ([Sh 1]). Elles ont été calculées dans un grand nombre de cas (dans le cas commutatif et dans le cadre des algèbres de Jordan [Sa-Fa], cf. les travaux de M.Muro, par exemple [Muro 2] , [Muro 3] , [K-M], par des techniques de micro-analyse). Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, l'étude fondamentale est dûe à I.J.Igusa (cf. les travaux cités et en particulier [Ig 11] et [Ig 12] pour un panorama) et à ses élèves (par ex. [Ro]).

Rappelons très brièvement que l'étude des fonctions zétas globales qui sont définies :

- soit à partir de la situation décrite ci-dessus mais en prenant comme corps $\mathbb{F}$ un corps de nombres, la fonction zéta est alors celle obtenue par extension sur les adèles de $\mathbb{F}$, son prolongement méromorphe vérifie également une équation fonctionnelle (cf. par exemple : appendice de [Mars], [Ra-Sc], [Wr], [Ig 6], [K-K], [Mu 5], [Sai 2], [Sai 3]),

- soit à partir de la situation réelle et de séries de Dirichlet associées à des réseaux $G_{\mathbb{Z}}$-stable dans $\mathfrak{g}_1$ (cf. par exemple [Sa-Sh] , [Sh 1], [Sh 2], [Sa 1], [Sa 2]),

est nettement plus difficile et qu'il est regrettable que toute la bibliographie que nous donnons à titre indicatif soit non exhaustive.

Dans le cas particulier des préhomogènes commutatifs pour lesquels l'algèbre $\mathfrak{g}$ n'est pas de rang 1, il existe (au moins) un sous-groupe parabolique P de G dont l'action sur $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ est encore géométriquement préhomogène ([M-R-S]). Lorsque le sous-groupe parabolique est minimal parmi ceux-ci, les invariants relatifs fondamentaux correspondants, notés $F_1, ..., F_p$ sur $\mathfrak{g}_1$ et $F_1^*, ..., F_p^*$ sur $\mathfrak{g}_{-1}$ donnent à nouveau des fonctions zétas à multi-indice qui vérifient également des équations fonctionnelles analogue aux précédentes, ces résultats, qui se trouvent déjà dans [Sh 2], sont dûs dans le cas réel à N.Bopp et H.Rubenthaler ([Bo-Ru 2]) ainsi qu'à J.Faraut et A.Koranyi lorsque le sous-groupe parabolique est minimal ([Fa-Ko]), et ce dans le cadre des algèbres de Jordan, et à Y.Hironaka dans certains cas $\mathfrak{p}$-adiques ([H 1]).
Dans cette situation commutative *uniquement*, chaque orbite ouverte, $O_i, i = 1, ..., \ell$, est la réalisation d'un espace symétrique G/H_i. Dans [Bo-Ru 2], N.Bopp et H.Rubenthaler ont généralisés les travaux de R.Godement et H.Jacquet ([Go-Ja]) en associant des fonctions zétas locales à des vecteurs distributions H_i-invariants associés à la même représentation sphérique minimale de G et ont établis les équations fonctionnelles correspondantes.

Lorsque le parabolique est minimal, les fonctions sphériques et les problèmes associés ont été largement étudiés par J.Faraut et A.Koranyi ([Fa-Ko]) dans le cadre des algèbres de Jordan et Y.Hironaka dans certains cas $\mathfrak{p}$-adiques.

Dans le cas réel, J.L. Clerc a réussi à généraliser certains résultats précédents à une classe plus large de préhomogènes non commutatifs à l'aide des représentations d'algèbres de Jordan ([Cl]).

2. Dans ce travail, on se propose de donner une situation analogue au cas commutatif c'est à dire définir pour chaque préhomogène de type parabolique absolument irréductible régulier (cf.1.) de graduation au plus 5 c'est à dire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$$

de rang au moins 2 dont l'invariant relatif fondamental n'est pas une forme quadratique (i.e.

degré$(F) > 2$) et qui n'est pas de type $\mathbf{G_2}$, (au moins) un sous-groupe parabolique standard, P, dont l'action est préhomogène au sens précédent.

Désignant par $F_1, ..., F_p = F, F_1^*, ..., F_p^* = F^*$ les invariants relatifs fondamentaux de $(P, \mathfrak{g}_1)$ et $(P, \mathfrak{g}_{-1})$ rangés dans un "ordre croissant" (essentiellement chaque F_i apparait comme la restriction de F_{i+1}), on montre classiquement que la fonction zéta locale à multi-indice associée vérifie une équation fonctionnelle. On définit des normalisations cohérentes avec cette situation et on montre que les coefficients locaux (ainsi que les polynômes de Bernstein associés dans le cas archimédien) s'obtiennent par descente sur des préhomogènes construits à partir de centralisateurs de paires de sl_2-triplets 1-adaptés qui commutent.

La méthode utilisée convient sur $\mathbb{F}$ sans distinction (archimédien ou $\mathfrak{p}$-adique), elle est élémentaire (décomposition des invariants relatifs fondamentaux et des mesures) et généralise celle du cas commutatif ([Mu 1])[1].

Il se peut qu'il y ait un lien avec certaines décompositions des invariants relatifs fondamentaux considérées par A.L.Mortajine ([Mo]) ainsi que par F.Sato ([Sa 6]).

(Δ, λ_0) étant le diagramme de Dynkin gradué associé au préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$, on note $(\overline{\Delta}, \overline{\lambda_0})$ le diagramme de Dynkin gradué associé au préhomogène déployé sur une extension convenable de $\mathbb{F}$ et admettant $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ comme $\mathbb{F}-$forme.
Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, les résultats obtenus montrent le lien entre les pôles des coefficients $a_{O^*,O}(|\ |^{s_1}, ..., |\ |^{s_p})$ et certaines racines du polynome de Bernstein associé à F dans le préhomogène déployé réel de même type $(\overline{\Delta}, \overline{\lambda_0})$.

Ainsi dans le cas complexe, on obtient le résultat attendu, c'est à dire que si on note :

$$F(\partial)(\prod_{i=1}^{p} F_i^{*s_i}) = b_{\mathfrak{g},P}(s_1, ..., s_p)(\prod_{i=1}^{p-1} F_i^{*s_i}) F_p^{*s_p - 1} \quad (s_1, ..., s_p) \in \mathbb{C}^p,$$

alors (à 2 exceptions près) on a

$$b_{\mathfrak{g},P_\ell}(s_1, ..., s_p) = \prod_{\ell=1}^{p} \Big(\prod_{j=1}^{d_{p-\ell+1} - d_{p-\ell}} (s_\ell + ... + s_p + \lambda_{\ell,j}) \Big)$$

et si on définit sur $\mathbb{F}$, archimédien ou $\mathfrak{p}$-adique, pour toute application polynomiale B de la forme :

$$B(s_1, ..., s_p) = \prod_{1 \le j \le r} (a_{1,j} s_1 + ... + a_{p,j} s_p + q_j) \text{ avec } a_{i,j} \in \mathbb{Z},$$

et pour tout caractère π de $(\mathbb{F}^*)^p$, $\pi = (\pi_1, ..., \pi_p)$:

$$\rho'_B(\pi) = \rho'_B(\pi_1, ..., \pi_p) = \prod_{j=1}^{r} \rho'(\pi_1^{a_{1,j}} .... \pi_p^{a_{p,j}} |\ |^{q_j + 1})$$

avec $\rho'(\pi_1) = \pi_1(-1)\rho(\pi_1)$, ρ étant le coefficient obtenu par J.Tate ([Ta]) dans l'équation fonctionnelle associée à la fonction zéta sur $\mathbb{F}$ (dans ce cas $F(x) = x$ et les valeurs explicites de ρ sont rappelées dans le §3.6.1) alors pour f dans $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ on a :

$$(A)\ Z^*(\hat{f}; \pi) = \rho'_{b_{\mathfrak{g},P_\ell}}(\pi) Z(f; \pi^* |\ |^{-N 1_p}) \quad \text{avec } \pi^* = (\pi_{p-1}, ..., \pi_1, (\prod_{1 \le i \le p} \pi_i)^{-1}) \text{ et } 1_p = (0, ..., 0, 1).$$

[1] Ces résultats ont été partiellement exposés aux Journées Préhomogènes Franco-Japonaises organisées par F.Sato-P.Kaplan-A.L.Mortajine à Tokyo en 1999

On applique la méthode de descente pour le sous-groupe parabolique P_0, minimal parmi les sous-groupes paraboliques considérés (à l'exception d'un cas qui ne semble pas significatif) ceci nous conduit à considérer successivement le cas commutatif (cf.tableaux 1 et 2), les cas classiques symplectiques ($n°13$ de la classification de [Sa-Ki] avec par exemple $Trig(2k) \times Sp(n-2k)$, avec $6k \leq 2n$, opérant sur les matrices à $2k$ lignes et $2n-4k$ colonnes ainsi que les différentes $\mathbb{F}$ formes) et orthogonaux ($n°15$ de la classification de [Sa-Ki], avec par exemple $Trig(k) \times SO(m)$, opérant sur les matrices à k lignes et m colonnes ainsi que les différentes $\mathbb{F}$ formes avec quelques hypothèses techniques supplémentaires) (cf.tableau 2) puis les cas "exceptionnels" ayant $\mathfrak{g}_2$ de dimension 1
$((\overline{\Delta}, \alpha_0)$ de type (F_4, α_1) ou (E_6, α_2) ou (E_7, α_1) ou (E_8, α_8) avec les formes EIII, EVI et EIX lorsqu'elles existent, cf.les $n°14, 5, 23, 29$ de la classification de [Sa-Ki]),
puis les $\mathbb{F}-$formes de (E_7, α_6) ($n°20$ de la classification de [Sa-Ki]), le type déployé (E_7, α_2) ($n°6$ de la classification de [Sa-Ki]) et pour finir les $\mathbb{F}-$formes de (E_8, α_1) ($n°24$ de la classification de [Sa-Ki]) (cf.tableau 3).

Pour éviter d'avoir à déterminer les orbites de P_0 dans le lieu non singulier de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$, on a préféré introduire pour $u = (u_1, ..., u_p) \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p$ les ouverts (éventuellement vides) :

$$O_u = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F_1(x)...F_i(x)\mathbb{F}^{*2} = u_1...u_i \ , i = 1, ..., p\}$$

$$O_u^* = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid F_1^*(x)...F_i^*(x)\mathbb{F}^{*2} = u_p...u_{p-i+1} \ , i = 1, ..., p\}$$

ainsi que les fonctions zétas correspondantes, notées simplement Z_u et Z_u^*, alors il existe des fonctions méromorphes (au sens précédent), $a_{v,u}(\pi)$ telles que

$$(B) \quad Z_u^*(\hat{f}; \pi) = \sum_{v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p} a_{v,u}(\pi) Z_v(f; \pi^* | \ |^{-N1_p}),$$

elles sont déterminées explicitement puisque la méthode de descente ramène les calculs à des cas bien connus (rang 1 et on applique [Ta] , [Go-Ja], ou bien au cas d'une forme quadratique [Ra-Sc]).
Cependant la structure particulière de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ dans le cas $\mathfrak{p}-$adique nous a conduit à introduire certaines sommes qui ont été calculées uniquement lorsque la caractéristique résiduelle est différente de 2 ce qui explique cette restriction chaque fois que l'on utilise les résultats de [Ra-Sc] (cf.§3.6.2).

Ce résultat subsiste dans les cas exceptionnels pour le préhomogène $(G, \mathfrak{g}_{\pm 1})$ (ce sont les définitions ci-dessus avec $p = 1$), et dans le cas (E_7, α_2) réel ou $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2, on obtient l'équation :

$$Z^*(\mathcal{F}(f); \tilde{\omega}_b | \ |^s) = C(s)B(\tilde{\omega}_b, s)Z(f; \tilde{\omega}_b | \ |^{-s-5}) \qquad \text{avec :}$$

$$C(s) = |2|_{\mathbb{F}}^{-4s-10}\rho(| \ |^{2s+4})\rho(| \ |^{2s+7}) \ , B(\tilde{\omega}_b, s) = \rho'(\tilde{\omega}_b | \ |^{s+1})\rho'(\tilde{\omega}_b | \ |^{s+3})\rho'(\tilde{\omega}_b | \ |^{s+5})$$

$\tilde{\omega}_x$ désignant, pour $x \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, le caractère de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ défini par le symbole de Hilbert $(\tilde{\omega}_x(y) = (x, y))$.

De plus, lorsque les racines de $b_{\mathfrak{g},P_0}(0,..,s)$ sont entières, on a également l'unique équation fonctionnelle :

$$\pi=(\pi_1,...,\pi_p)\ ,\ Z^*(\hat{f};\pi)=C\rho'_{b_{\mathfrak{g},P_{\mathfrak{t}}}}(\pi'_0\pi)Z(f;\pi^*\pi_0|\ |^{-N1_p})$$

avec $\pi_0=\pi'_0=Id$ à l'exception de l'unique cas commutatif $(\overline{\Delta},\overline{\lambda_0})=(A_{2p-1},\alpha_p)$ et $(\Delta,\lambda_0)=(C_p,\alpha_p)$ dans les notations des planches de [Bou 1] (cas des matrices hermitiennes) pour lequel $\begin{cases}\pi_0=(1,...,1,\tilde{\omega}_{\delta^{p-1}}),\\ \pi'_0=(\tilde{\omega}_\delta,...,\tilde{\omega}_\delta,1),\end{cases}$, $\mathbb{F}[\sqrt{\delta}]$ étant l'extension sur laquelle $\mathfrak{g}$ se déploie, et $C=1$ lorsque $\mathfrak{g}$ est déployée ou de type exceptionnel, sinon

$$C=\begin{cases}(\alpha(1)\alpha(-\delta))^{\frac{p(p-1)}{2}}\ \text{ lorsque } \pi'_0\neq 1,\\ (1)^{np}\ \text{ dans le cas CII } ((\overline{\Delta},\overline{\lambda_0})=(C_n,\alpha_{2p}) \text{ et } (\Delta,\lambda_0)=(C_\ell,\alpha_p))\\ (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}\ \text{ dans le cas DIII } ((\overline{\Delta},\overline{\lambda_0})=(D_{2p},\alpha_{2p}),(\Delta,\lambda_0)=(C_p,\alpha_p))\\ (-1)^{p(k-1)}\ \text{ dans le cas AII } ((\overline{\Delta},\overline{\lambda_0})=(A_{2kp-1},\alpha_{pk}) \text{ et } (\Delta,\lambda_0)=(A_{2p-1},\alpha_p)).\end{cases}$$

(résultat connu partiellement).

3. Indiquons brièvement le contenu de chaque partie.

• Dans la section 1 on motive le choix du parabolique particulier que l'on considère et que l'on introduit de manière inhabituelle, à partir de certains éléments 1-simples "compatibles " avec la graduation de départ.

Dans la situation générale graduée, cf. §1. avec $\mathfrak{g}$ semi-simple, où l'on suppose $2H_0$ 1-*simple*, à tout élément 1-simple, h, on associe la sous-algèbre parabolique : $p(h)=\oplus_{i\geq 0}E_i(h)$ de partie nilpotente $n(h)=\oplus_{i>0}E_i(h)$, avec $E_i(h)=\{x\in\mathfrak{g}_1|[h,x]=ix\}$ pour i entier. Alors lorsque $h\neq 2H_0$ et $n(2H_0)\subset n(h)$, $2H_0-h$ est également 1-simple et $exp(ad(n(2H_0-h)\cap\mathfrak{g}_0)(E'_2(h)\cap\mathfrak{g}_1\oplus E_2(2H_0-h)\cap\mathfrak{g}_1)$ est un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}_1$, avec $E'_2(h)=\{x\in\mathfrak{g}|(x,h,\ )$ se complète en un sl_2-triplet $\}$ (lemme 1.1.1).

Un tel élément h est dit 1-simple spécial. Lorsque h et $2H_0-h$ sont 1-simples spéciaux, on dit que h est 1-simple très spécial. Ces éléments très spéciaux sont associés à des graduations courtes et aux situations irréductibles, en effet si le préhomogène de départ est absolument irréductible, alors $\mathfrak{g}_i=\{0\}$ pour $|i|\geq 3$ (lemme 1.2.2) et le préhomogène associé $(E_0(h)\cap\mathfrak{g}_0),E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1,\frac{h}{2})$ est encore absolument irréductible régulier (lemme 1.2.1) ainsi que le préhomogène obtenu en prenant le centralisateur d'un sl_2-triplet 1-adapté construit avec h et muni de la graduation induite par $ad(H_0)$ à quelques exceptions près (prop.1.2.4).

On vérifie ensuite que sous les hypothèses énoncées dans 2., un tel élément 1-simple très spécial existe toujours (§1.3).

Dans le §1.4 on introduit la classe des préhomogènes étudiés, $H_1,...H_p$ sont p éléments 1-simples très spéciaux de $\mathfrak{a}$ de somme $2H_0$, $\mathfrak{t}=\oplus_{i=1}^p\mathbb{F}H_i$, $\Delta_R(\mathfrak{t})$ les restrictions non nulles des racines de Δ à $\mathfrak{t}$ muni de l'ordre :

$$\lambda\succ 0\ \Leftrightarrow\ \lambda(H_k)>0\quad\text{avec}\quad k=sup\{j\ ,\ \lambda(H_j)\neq 0\}\ ,$$

alors $p(H_1,...,H_p) = E_0(\mathfrak{t}) \oplus n_\mathfrak{t}$, avec $n_\mathfrak{t} = \oplus_{\lambda \succ 0, \lambda \in \Delta_0} \mathfrak{g}^\lambda$, est une sous-algèbre parabolique de sous-groupe parabolique associé : $P_\mathfrak{t} = G_\mathfrak{t}.N_\mathfrak{t}$, avec $N_\mathfrak{t} = exp(ad(n_\mathfrak{t}))$, $G_\mathfrak{t}$ étant le centralisateur de $\mathfrak{t}$ dans G; un tel sous-groupe parabolique (que l'on prendra standard) est appelé "trés spécial".

La situation est analogue au cas commutatif puisqu'on a les propriétés suivantes.

Pour $k = 1,...,p-1$, soient $h_k = \sum_{1 \leq j \leq k} H_j$ et F_k l'invariant relatif fondamental du préhomogène absolument irréductible régulier $(E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_0, E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1, \frac{1}{2}h_k)$ que l'on étend naturellement à $\mathfrak{g}_1$; on note F_p l'invariant relatif fondamental du préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$.
On a la situation duale avec pour $k = 1,...,p-1$, F^*_{p-k} l'invariant relatif fondamental du préhomogène absolument irréductible régulier $(E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_0, E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}), H_0 - \frac{1}{2}h_k)$ que l'on étend naturellement à $\mathfrak{g}_{-1}$; on note F^*_p l'invariant relatif fondamental du préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{-1})$.

Alors $F_1,...,F_p$ (resp. $F^*_1,...,F^*_p$) sont relativement invariants par $P(H_1,...,H_p)$ de caractères associés $\chi_k, k = 1,...,p$ (resp. $\chi_{p-k}\chi_p^{-1}, k = 1,...,p$ en posant $\chi_0 = 1$) et sont les invariants relatifs fondamentaux de l'action de $P(H_1,...,H_p)$ sur $\mathfrak{g}_1$ (resp.$\mathfrak{g}_{-1}$) (prop.1.4.5, lemme 1.4.7).
Les orbites de $P(H_1,...,H_p)$ dans $\mathfrak{g}"_1 = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid \prod_{i=1}^p F_i(x) \neq 0\}$ sont les orbites de $G_\mathfrak{t}$ dans $W_\mathfrak{t} = \{\sum_{i=1}^p x_i \mid [x_i, x_j] = 0 \text{ pour } i,j = 1,...,p \text{ et } x_i \in E'_2(H_i) \cap \mathfrak{g}_1\}$, la situation est similaire dans $\mathfrak{g}_{-1}$ (lemme 1.4.4).

Le sous-groupe parabolique trés spécial $P(H_p,...,H_1)(= \theta P(H_1,...,H_p)\theta^{-1}$ avec $\theta = \prod_{i=1}^p \theta_{H_i}(-1)$ défini dans l'introduction du §1) est associé à l'ordre inverse et donne lieu à la même situation, pour $k = 1,...,p-1$:

• P_{p-k} est l'invariant relatif fondamental du préhomogène absolument irréductible régulier $(E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_0, E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1, H_0 - \frac{1}{2}h_k))$, que l'on étend naturellement à $\mathfrak{g}_1$,

• P^*_k celui du préhomogène $(E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_0, E_{-2}(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}, \frac{1}{2}h_k)$, que l'on étend naturellement à $\mathfrak{g}_{-1}$.

Alors pour $1 \leq k \leq p-1$, $x \in E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ et $y \in E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ qui *commutent* on a $F_p(x+y) = F_k(x)P_{p-k}(y)$ (à 2 exceptions près pour lesquelles il faut rajouter une puissance) (lemme 1.4.7).

• Dans la section 2, étant donné un préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ absolument irréductible et régulier et $P_\mathfrak{t}$ un sous-groupe parabolique standard très spécial, situation du §1.4 dont on reprend les notations, on établit essentiellement le :

Théorème 2.1.1

1. *$P_\mathfrak{t}$ a un nombre fini d'orbites dans $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$.*
2. *Soient $S_{P_\mathfrak{t}} = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid \prod_{1 \leq i \leq p} F_i(x) = 0\}$ et $S^*_{P_\mathfrak{t}} = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \prod_{1 \leq i \leq p} F^*_i(x) = 0\}$.
Pour tout élément x de $S_{P_\mathfrak{t}}$ (resp. $S^*_{P_\mathfrak{t}}$), il existe $i \in \{1,...,p\}$ tel que $\chi_i/((P_\mathfrak{t})_x)^0 \neq 1$ (resp. $(\chi^*_i(/(P_\mathfrak{t})_x)^0 \neq 1)$.*

Ce théorème établit les conditions suffisantes d'existence des équations fonctionnelles lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique (théorème $k_{\mathfrak{p}}$ de [Sa 3]).

La démonstration de ce théorème est faite par descente, en se ramenant à des centralisateurs d'algèbres de type sl_2 et est commencée dans le §2.1.
Elle nécessite une forme relativement simple des représentants des orbites de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $S_{P_{\mathfrak{t}}}$ obtenue par des considérations cas par cas. Ainsi on termine la démonstration du théorème 2.1.1 cas par cas mais ceci nous amène également à obtenir une classification des sous-groupes paraboliques standards très spéciaux et l'on retrouve ainsi certains exemples bien connus.

Le §2.2 contient quelques lemmes techniques généraux utiles pour les simplifications finales des représentants des orbites de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $S_{P_{\mathfrak{t}}}$.

Le cas commutatif ($\mathfrak{g}_2 = \{0\}$) est traité dans le §2.3, on y établit également que :

Proposition 2.3.1 *Soit* $N = exp(ad(\oplus_{\alpha\in\Delta_0^+}\ \mathfrak{g}^\alpha))$.
Pour tout élément x *de* $\mathfrak{g}_1$ *(resp.* $\mathfrak{g}_{-1}$*), il existe un ensemble* S *de racines fortement orthogonales de* Δ_1 *(resp.* Δ_{-1}*) telles que* $N.x \cap\ (\oplus_{\mu\in S}\mathfrak{g}^\mu)\ \neq \emptyset$.

Lemme 2.3.2

1. *Il existe un unique ensemble maximal ordonné de racines fortement orthogonales (longues) de* Δ_1, $\lambda_1, ..., \lambda_n$, *telles que le sous-groupe parabolique* $P_0 = P(h_{\lambda_1}, ..., h_{\lambda_n})$ *soit standard.*
2. *Soit* $P_{\mathfrak{t}}$ *un sous-groupe parabolique standard alors* $P_{\mathfrak{t}} \supset P_0$ *et il existe* p, $2 \leq p \leq n$, *et des entiers :* $l_0 = 0 < 1 \leq l_1 < ... < l_p = n$ *tels que* $P_{\mathfrak{t}} = P(H_1, ..., H_p)$ *avec* $H_i = \sum_{l_{i-1}+1\leq j\leq l_i} h_{\lambda_j}$ *pour* $i = 1, ..., p$.

Les cas classiques sont traités dans le §2.4.
Introduisons les notations des planches de II,III et IV de [Bou 1], Δ est de type B_n, BC_n, C_n ou D_n et $\lambda_0 = \alpha_k = \epsilon_k - \epsilon_{k+1}$ alors $\Delta_1 = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i \leq k < j \leq n\ ,\ \epsilon_i, 1 \leq i \leq k\} \cap \Delta$.

Soient : $p_0 = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{lorsque } \mathfrak{g} \text{ est déployée de type } C_n, \\ k & \text{sinon} \end{cases}$ et pour $i = 1, ..., p_0$:

$$H_i = \begin{cases} 2(h_{2\epsilon_{k-2i+1}} + h_{2\epsilon_{k-2i+2}}) \text{ lorsque } \mathfrak{g} \text{ est déployée de type } C_n, \\ h_{\epsilon_{k-i+1}} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Lorsque $2k \leq n$, on introduit également $H_1' = \sum_{i=1}^k h_{\epsilon_i - \epsilon_{2k-i+1}}$ et $H_2' = \sum_{i=1}^k h_{\epsilon_i + \epsilon_{2k-i+1}}$.

Les sous-groupes paraboliques $P_0 = P(H_1, ..., H_{p_0})$ et $P_0' = P(H_1', H_2')$ sont des sous-groupes paraboliques standards très spéciaux et si $P = P(H_1, ..., H_p)$ est un sous-groupe parabolique standard très spécial alors

- soit $P = P_0'$ et $2k \leq n$,
- soit $P \supset P_0$, $k \geq 2$ et il existe des entiers : $l_{p+1} = 0 < l_p < ... < l_2 < l_1 = k$ tels que $H_i = \sum_{l_{i+1}+1\leq j\leq l_i} h_{\epsilon_j}$ pour $i = 1, ..., p$ (prop.2.4.3).

Les cas exceptionnels non commutatifs sont traités dans le §2.5 et dans tous ces cas il y a un unique sous-groupe parabolique standard très spécial, $P(H_1, H_2)$ (cf.tableau 3).
Lorsque $\mathfrak{g}_2$ n'est pas de dimension 1, $H_2 = 2h_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha}$ étant la plus grande racine de Δ.
$P(H_1, H_2)$ est un sous-groupe parabolique maximal de G à l'exception du cas (E_6, α_2) pour lequel $\Sigma_0 - \Sigma_{\mathfrak{t}} = \{\alpha_1, \alpha_6\}$ et dans les autres cas, on a :

$$\Sigma - \Sigma_{\mathfrak{t}} = \begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_4\} \text{ lorsque } \Delta = F_4, \\ \{\alpha_1, \alpha_6\} \text{ lorsque } \Delta = E_7 \text{ et } \Sigma_1 \subset \{\alpha_1, \alpha_6\}, \\ \{\alpha_1, \alpha_8\} \text{ lorsque } \Delta = E_8, \\ \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ dans le cas } (E_7, \alpha_2). \end{cases}$$

De plus, lorsque (Δ, λ_0) est de type $(E_6, \alpha_2), (E_7, \alpha_1), (E_8, \alpha_8)$, pour tout élément x de $\mathfrak{g}_1$ il existe y dans $P(H_1, H_2).x$ et 4 racines fortement orthogonales $\beta_1, ..., \beta_4$, tels que le support de y comprenne au plus 4 racines appartenant à $\{\tilde{\alpha} - \beta_1, \beta_i, 1 = 1, ..., 4\}$ et dans le cas (F_4, α_1) il faut y adjoindre l'ensemble $\{\tilde{\alpha} - \lambda_1, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3), \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)\}$. Ces 4 cas correspondent à $\mathfrak{g}_2$ de dimension 1.

• La section 3 est consacrée aux résultats classiques sur les fonctions Zéta associées aux préhomogènes absolument irréductibles et réguliers $(P_{\mathfrak{t}} = P(H_1, ..., H_p), \mathfrak{g}_{\pm 1})$ ce qui impose des normalisations :

- de la forme de Killing B (§3.1, $\widetilde{B} = -\dfrac{\text{degré de} F_p}{2B(H_0, H_0)}.B$),
- des mesures de Haar de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$(§3.2),
- des invariants relatifs fondamentaux F_1,...,F_p, F_1^*, ...,F_p^* (§3.3).

Dans le cas archimédien , on introduit les opérateurs différentiels $F_k(\partial), F_k^*(\partial), k = 1, ..., p$ ainsi que les polynômes de Bernstein associés b_k et $b_k^*, k = 1, ..., p$:
pour $s = (s_1, ..., s_p) \in \mathbb{C}^p$ et $F^s = \prod_{1 \leq i \leq p} F_i^{s_i}$, $F^{*s} = \prod_{1 \leq i \leq p} F_i^{*s_i}$, on a :

$$F_k(\partial)(F^{*s}) = b_k(s) F^{*s - \mathbf{1_p} + \mathbf{1_{p-k}}} \ , \ F_k^*(\partial)(F^s) = b_k^*(s) F^{s - \mathbf{1_p} + \mathbf{1_{p-k}}},$$

avec $\mathbf{1_0} = (\mathbf{0}, ..., \mathbf{0})$ et $\mathbf{1_j}$ étant le vecteur de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la jème qui vaut 1, avec un aménagement pour 2 exceptions (lemme 3.4.2). On pose $b_{\mathfrak{g}, P_{\mathfrak{t}}} := b_p$.
Lorsque k est différent de p, comme dans le cas commutatif ([R-S]), on établit que $b_k(s_1, ..., s_p)$ est proportionnel au polynôme de Bernstein, $b_{\mathfrak{U}, P(H_1, ..., H_k)}(s_{p-k+1}, ..., s_p)$, $\mathfrak{U}$ étant le centralisateur d'une algèbre de type sl_2 telle que $\mathfrak{U}_1 \subset E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ et $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$ admet $F_k/\mathfrak{U}_1$ comme invariant relatif fondamental (ainsi que la propriété analogue pour b_k^*) (prop.3.4.4).

Le théorème 2.1.1 ainsi que les propriétés de $F_k(\partial)$ et $F_k^*(\partial)$, pour $k = 1, ..., p$, dans le cas archimédien, permettent d'obtenir le prolongement analytique et l'existence des équations fonctionnelles des fonctions zétas associées à $(P(H_1, ..., H_p), \mathfrak{g}_{\pm 1})$ (th.3.5.2 qui s'appuie sur [Sa 3],[Bo-Ru 1],[Bo-Ru 2], cf. également le lemme 3.5.3 pour l'indépendance des coefficients).
En application immédiate, pour k strictement inférieur à p, on obtient $b_{\mathfrak{g}, P_{\mathfrak{t}}}$ comme produit des 2 polynômes de bernstein,
$b_{\mathfrak{U}, P(H_1, ..., H_k)}(s_{p-k+1}, ..., s_p)$ et $b_{\mathfrak{U}', P(H_{k+1}, ..., H_p)}(s_1, ..., s_{p-k-1}, \sum_{p-k \leq i \leq p} s_i + r_k)$,
$\mathfrak{U}'$ étant à nouveau le centralisateur d'une algèbre de type sl_2 telle que $\mathfrak{U}_1' \subset E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ et r_k étant un nombre rationnel explicitement défini à partir de dimensions (prop.3.7.3).

On rappelle dans le §3.6 les 2 exemples fondamentaux utilisés ultérieurement :

• lorsque $\mathfrak{g}_1$ est de dimension 1, résultat dû à J.Tate([Ta]) faisant intervenir les facteurs $\rho'(\pi)$ et $\rho'(\pi;x)$, $\pi \in \widehat{\mathbb{F}^*}$ et $x \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$,

• lorsque l'invariant relatif fondamental de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est une forme quadratique F, les résultats de [Ra-Sc]) ont été reexprimés (th.3.6.5, notamment le 5)) et font intervenir les facteurs $A^a_{\pi_1,\pi_2}(v,u,\delta)$, π_1 et $\pi_2 \in \widehat{\mathbb{F}^*}$, $(v,u) \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$, $\delta = (-1)^{[N]}\mathrm{disc}(F)$ (B du lemme 3.6.4,cf.également lemmes 3.6.7 et 3.6.8).

• Dans la section 4 on établit une décomposition des mesures sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ "adaptée" à l'action du sous-groupe parabolique $P(h_k, 2H_0 - h_k)$ et par conséquent aux invariants relatifs F_k et F^*_{p-k}, k étant un entier fixé tel que $1 \leq k \leq p-1$, (th.4.3.3) et qui s'exprime à l'aide des mesures G_{h_k}-invariante à gauche sur
$W_k = \{x+y \mid x \in E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1\ ,\ y \in E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1\ ,\ [x,y]=0, F(x+y) \neq 0\}$ et
$W^*_k = \{x'+y' \mid x' \in E_{-2}(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}\ ,\ y' \in E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}\ ,\ [x',y']=0, F^*(x'+y') \neq 0\}$
(corollaires 4.4.2 et 4.4.3).
Avec cette décomposition, la transformation de Fourier se décompose en 2 transformations de Fourier partielles (th.4.3.5 dans lequel intervient le résultat de A.Weil, [We], sur la transformation de Fourier d'un caractère quadratique, cf.lemme 4.2.3).
Ces résultats imposent des normalisations précises des mesures sur les sous-espaces vectoriels $E_i(h_k) \cap E_j(2H_0 - h_k)$ (§4.2).

• Dans la section 5 on applique les résultats de la section 4 au calcul des coefficients de l'équation fonctionnelle vérifiée par les fonctions Zétas. On obtient ainsi une relation explicite les exprimant à partir de ceux associés à des préhomogènes construits avec des centralisateurs d'algèbres de Lie de type sl_2 (prop.5.1.1).
Ceci donne l'équation (A) du cas complexe (th.5.2.2 et remarque 5.2.3).
On établit également, sous certaines conditions vérifiées dans la plupart des cas, une relation permettant le calcul explicite des coefficients $a_{v,u}$ (cf.relation (B) de l'introduction) (prop.5.3.2).
Cette section se termine par l'étude de 2 exemples réels particulièrement simples puisque la descente fait apparaitre 2 formes quadratiques anisotropes dont les résultats sont connus ((E_6, α_2), E_6 étant de type III et (E_7, α_1) avec E_7 de type VII, prop.5.3.3).

Les sections suivantes sont les applications des résultats de la section 5. Dans chaque cas on détermine les polynômes de Bernstein, les coefficients de l'équation fonctionnelle à multi-indice (c'est à dire associée aux invariants relatifs fondamentaux $F_1, ..., F_p, F^*_1, ...F^*_p$) et de l'équation fonctionnelle simple (c'est à dire associée aux aux 2 invariants relatifs fondamentaux F, F^*), la méthode employée fait apparaitre ces coefficients sous forme de somme de produits de coefficients d' équations fonctionnelles associées à des préhomogènes de rang plus petit ce qui impose :

- la connaissance assez précise de la structure et des résultats pour ces derniers,
- la simplification de ces sommes lorsqu'on passe à l'équation fonctionnelle simple et qui est obtenue en utilisant les résultats du §3.6.2.

Ceci est illustré dans les :

• section 6 qui traite du cas commutatif (cf.tableaux 1 et 2) avec le sous-groupe parabolique P_0, ainsi qu'un approfondissement du cas "symplectique" commutatif (i.e. $\overline{\Delta} = C_n$) dans le cas $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2,

• section 7 qui traite des cas classiques (cf.tableau 2) avec l'action du sous-groupe parabolique P_0. Une attention particulière a été donnée au cas orthogonal BDI, malheureusement les résultats sont incomplets dans le cas DIII $\mathfrak{p}$-adique,

• section 8 qui traite des cas exceptionnels (cf.tableau 3) dont l'étude est emboitée.

• L'appendice 1 contient un résultat élémentaire sur le rang du centralisateur d'un sl_2-triplet. Ce résultat est utilisé dans l'étude de (E_7, α_6).

• Appendice 2 : Dans le cas commutatif ou bien, *lorsque g_2 est de dimension* 1 *et* $\mathfrak{g}$ *de rang au moins* 4, on exprime les mesures sur S et S^*, invariantes par le noyau de χ à l'aide de la fonction Zéta provenant d'un préhomogène inclus dans celui de départ (prop.1). Elles sont relativement invariantes par un sous-groupe d'indice fini de G et tempérées.
Cette description permet dans le cas commutatif, lorsque $\overline{d}$ est pair, le calcul explicite de la transformée de Fourier de ces mesures pour les fonctions de $\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1 - S)$ en appliquant les §4.3 et 6.2.

PLAN

1 Une classe d'espaces préhomogènes de type parabolique faiblement sphériques

1.1 Élément 1-simple (très) spécial

1.2 Quelques propriétés

1.3 Existence

1.4 Une classe de préhomogènes faiblement sphériques

2 Un résultat sur les orbites des sous-groupes paraboliques très spéciaux

2.1 Le résultat

2.2 Lemmes techniques ($\mathbb{F}$ est de caractéristique 0)

2.3 Le cas commutatif ($\mathfrak{g}_2 = \{0\}$)

2.4 Les cas classiques

2.5 Les cas exceptionnels non commutatifs
2.5.1 Généralités
2.5.2 Les cas exceptionnels pour lesquels $\mathfrak{g}_2$ est de dimension 1
2.5.3 Les cas exceptionnels restants

3 Fonctions Zétas associées

3.1 Normalisation de la forme de Killing

3.2 Normalisation des mesures de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$

3.3 Normalisation des invariants relatifs fondamentaux

3.4 Le cas archimédien

3.5 Fonctions Zétas : définition et équations fonctionnelles abstraites

3.6 Deux exemples fondamentaux
3.6.1 $\mathfrak{g}_1$ est de dimension 1
3.6.2 L'invariant relatif fondamental est une forme quadratique

3.7 Application au cas archimédien

4 Décomposition des mesures sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ et application

4.1 Notations

4.2 Mesures sur les sous espaces $E_{i,j}$ et $E_{-i,-j}$ pour $(i,j) \neq (0,0)$

4.3 Décomposition des mesures sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$

4.4 Expression des mesures $\mathbf{G_{h_k}}$ invariantes sur W_k et W_k^*

5 Application aux fonctions Zétas

5.1 Les coefficients de l'équation fonctionnelle

5.2 Le cas complexe

5.3 Un cas particulier

6 Le cas commutatif

6.1 Structure
6.1.1 Rappels
6.1.2 Le type III
6.1.3 Le cas (C_{2n}, α_{2n}) de type III
6.1.4 Calcul de γ_k

6.2 Équations fonctionnelles
6.2.1 Le cas transitif
6.2.2 Le cas non transitif

7 Les cas classiques

7.1 Généralités
7.1.1 Description des cas classiques considérés
7.1.2 Sous-groupe parabolique standard très spécial et préhomogène associé

7.2 Le cas symplectique

7.3 Les cas orthogonaux de type I
7.3.1 Normalisation des invariants relatifs
7.3.2 Le résultat $(\mathbf{3k \leq 2(n-1)} + \delta)$

7.3.3 Le cas réel
7.3.4 Le cas $\mathfrak{p}$-adique

7.4 Le cas DIII
7.4.1 Le cas $p = 1$
7.4.2 Le cas $p \geq 2$

8 Les cas exceptionnels

8.1 Le cas (E_7, α_6)
8.1.1 Généralités
8.1.2 Préliminaires
8.1.3 Le résultat

8.2 $\mathfrak{g}_2$ de dimension 1
8.2.1 Structure
8.2.2 Une première équation fonctionnelle
8.2.3 Orbites
8.2.4 Le cas réel de rang 4 ($\Delta = F_4$ et f est anisotrope)

8.3 (E_7, α_2)

8.4 (E_8, α_1)
8.4.1 Le cas déployé
8.4.2 Le cas réel non déployé

Appendice 1

Appendice 2 : Remarques sur les mesures relativement invariantes sur les orbites singulières

Tableau 1 (§6)

Tableau 2 (§7)

Tableau 3 (§8)

1 Une classe d'espaces préhomogènes de type parabolique faiblement sphérique

On introduit les préhomogènes de type paraboliques considérés dans ce travail de manière inhabituelle, à partir de l'action de sous-groupes paraboliques associés à des éléments 1-simples ayant de bonnes propriétés relativement à la graduation de $\mathfrak{g}$ et qui nous semblent être une généralisation du cas commutatif.

Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, on suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie définie sur $\mathbb{F}$, semi-simple, de dimension finie et graduée :

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_i \quad ([\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}),$$

on note H_0, l'élément appartenant à $\mathfrak{g}_0$, qui définit la graduation et on suppose que $2H_0$ est 1-*simple*, par conséquent $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ engendrent $\mathfrak{g}$.
Certains résultats sont vrais sur un corps de caractéristique 0.

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}$ contenant H_0, on note Δ le système de racines correspondant qui est également gradué par H_0 :

$$\Delta_i = \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(H_0) = i\}.$$

On choisit un ordre sur Δ compatible avec la graduation, c'est à dire que $\cup_{i>0}\Delta_i \subset \Delta^+$, Σ étant un ensemble de racines simples, le préhomogène est de type $(\Delta, \Sigma_1 = \Sigma \cap \Delta_1)$.

Introduisons quelques notations supplémentaires :

1. On note B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

2. $\overline{\mathbb{F}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et les éléments correspondants sont notés avec une barre, par exemple $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}$.
   $\overline{\mathfrak{h}}$ désigne une sous-algèbre de Cartan de $\overline{\mathfrak{g}}$ contenant $\mathfrak{a}$, $\overline{\Delta}$ le système de racines de $(\overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{h}})$ muni de l'ordre habituel et, lorsque $\overline{\Delta}$ est irréductible, on note $\tilde{\omega}$ la plus grande racine . $(\overline{\Delta}, \overline{\Sigma}_1)$ sera le diagramme de Dynkin gradué du préhomogène $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ et par abus également du préhomogène $((\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{E}} \mathbb{F})_0, (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{E}} \mathbb{F})_1)$, $\mathbb{E}$ étant une extension galoisienne de $\mathbb{F}$ pour laquelle l'algèbre $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{E}} \mathbb{F}$ est déployable.

   G est le centralisateur de H_0 dans le groupe $Aut_0(\mathfrak{g})$ des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont élémentaires sur $\overline{\mathbb{F}}$.

3. Lorsque Δ est irréductible, la plus grande racine du système de racines réduit associé à Δ est notée $\tilde{\alpha}$.

4. Si $\mathfrak{c}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on définit $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}_i$.

5. Soit $\mathfrak{c}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, réductive dans $\mathfrak{g}$ alors le centralisateur de $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}$, noté $E_0(\mathfrak{c})$, est une algèbre réductive dans $\mathfrak{g}$ ([Bou 2]) dont on note $[E_0(\mathfrak{c}), E_0(\mathfrak{c})]$ sa partie semi-simple.
   Lorsque H_0 est un élément de la sous-algèbre $\mathfrak{c} + E_0(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{c}$ est graduée : $\mathfrak{c} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{c}_i$, $E_0(\mathfrak{c})$ l'est également par $ad(H_0)$ et son centre est inclus dans $\mathfrak{g}_0$ d'où l'algèbre dérivée $[E_0(\mathfrak{c}), E_0(\mathfrak{c})]$ est également graduée : $[E_0(\mathfrak{c}), E_0(\mathfrak{c})] = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}[E_0(\mathfrak{c}), E_0(\mathfrak{c})]_i$ et de plus pour i non nul on a $[E_0(\mathfrak{c}), E_0(\mathfrak{c})]_i \subset E_0(\mathfrak{c})_i$; soit $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ l'algèbre engendrée par $E_0(\mathfrak{c})_{\pm i}$ pour $i \geq 1$, on a $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})_{\pm i} = E_0(\mathfrak{c})_{\pm i}$ pour $i \geq 1$. $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ étant un $[E_0(\mathfrak{c}), E_0(\mathfrak{c})]-$module, $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ est un idéal de $[E_0(\mathfrak{c}), E_0(\mathfrak{c})]$ donc $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ est une algèbre de Lie semi-simple graduée : $\mathfrak{U}(\mathfrak{c}) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathfrak{U}(\mathfrak{c})_i$ de préhomogène associé : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{c})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{c})_1)$ avec la convention habituelle lorsque $(\mathfrak{U}(\mathfrak{c})_{\pm 1})$ engendre une algèbre semi-simple que $\mathfrak{U}(\mathfrak{c})$ soit cette algèbre engendrée. Lorsque $\mathfrak{c} = \mathbb{F}H$, on le note également $(E_0(H)_0, E_0(H)_1)$.

6. $P(\check{\mathfrak{g}})$ désigne l'ensemble $\{u \in \mathfrak{g}_0 \mid ad(u)$ est diagonalisable à valeurs propres entières$\}$, pour $i \in \mathbb{Z}$ on note $E_i(u) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [u, x] = ix\}$ et pour $t \in \mathbb{F}^*$, $h_u(t)$ est l'élément de G correspondant (c'est à dire défini pour $i \in \mathbb{Z}$ par $h_u(t)/_{E_i(u)} = t^i id_{E_i(u)}$).

7. Lorsque (x, h, y) est un sl_2-triplet on rappelle que $H_0 - \frac{h}{2} \in E_0(\mathbb{F}x + \mathbb{F}h + \mathbb{F}y)$, que $E_0(\mathbb{F}x + \mathbb{F}h + \mathbb{F}y) = E_0(\mathbb{F}x + \mathbb{F}h)$ et que l'élément y est determiné de manière unique par x et h, y est noté parfois x^{-1}.

   $\theta_{x,h}(t)$ (ou bien simplement $\theta_x(t)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité ou $\theta_h(t)$) désigne l'automorphisme élémentaire :

   $$t \in \mathbb{F}^* \; exp(ad(tx))exp(ad(t^{-1}y)exp(ad(tx)) \text{ (alors } h_h(t) = \theta_{x,h}(t)\theta_{x,h}(-1)).$$

   Notons que $B(2H_0-h, 2H_0) = B(2H_0-h, 2H_0-h)$ car $B(2H_0-h, h) = B(\theta_{x,h}(t)(2H_0-h), \theta_{x,h}(t)(h)) = -B(2H_0 - h, h)$.

8. Lorsque $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est le sous-espace radiciel correspondant et h_α la co-racine ; on note simplement $h_\alpha(t)$ (resp.θ_α) l'élément $h_{h_\alpha}(t)$ (resp.$\theta_{h_\alpha}(-1)$) et on rappelle que $\theta_\alpha(\mathfrak{g}^\beta) = \mathfrak{g}^{s_\alpha(\beta)}$ pour toute racine β de Δ.

1.1 Élément 1-simple (très) spécial

On commence par motiver les définitions sur les éléments 1-simples par un lemme.

A un élément h 1-simple, on peut associer les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0$:

$$p(h) = \oplus_{i\geq 0}E_i(h) = E_0(h) \oplus n(h) \; , \; p_0(h) = p(h) \cap \mathfrak{g}_0$$

$P(h) = G_h exp(ad(\oplus_{i\geq 1}E_i(h) \cap \mathfrak{g}_0)$ le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $p_0(h)$, ainsi que le préhomogène $(E_0(h)\cap\mathfrak{g}_0, E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1, \frac{h}{2})$ construit avec l'algèbre réductive $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}E_{2i}(h)$ dont le centre est inclus dans $E_0(h) \cap \mathfrak{g}_0$.

On note π_h la projection de $\mathfrak{g}_1$ sur $E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1$ parallèlement à $\oplus_{i\neq 2}E_i(h) \cap \mathfrak{g}_1$.

Lemme 1.1.1 *1. Soit h un élément 1-simple distinct de $2H_0$ tel que $n(2H_0) \subset p(h)$ alors la sous-variété*

$$\tilde{W}_h = \{x + y \in E_2'(h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1 \mid [x, y] = 0\}$$

rencontre $\mathfrak{g}_1'$ c'est à dire que $2H_0 - h$ est aussi 1-simple et $\tilde{W}_h \cap \mathfrak{g}_1' = \tilde{W}_h \cap \tilde{W}_{2H_0-h}$.

2. Si $n(2H_0) \subset p(h) \cap p(2H_0 - h)$ alors $P(h)$ et $P(2H_0 - h)$ ont une orbite dense dans $\mathfrak{g}_1'$ et $\mathfrak{g}_{-1}'$.

3. L'application Ψ définie sur $n_0(2H_0 - h) \times \tilde{W}_h$ par $\Psi(A, w) = exp(ad(A)w)$ est un homéomorphisme (difféomorphisme dans le cas réel) sur un ouvert de Zariski de $\mathfrak{g}_1$ et $\Psi(n_0(2H_0 - h) \times W_h) = \Psi(n_0(2H_0 - h) \times \tilde{W}_h) \cap \mathfrak{g}_1'$ avec $W_h = \tilde{W}_h \cap \tilde{W}_{2H_0-h}$.

4. Soit $x \in E_2'(h) \cap \mathfrak{g}_1$ alors $\pi_h^{-1}(x)$ rencontre $\Psi(n_0(2H_0 - h) \times (\pi_h^{-1}(x) \cap \tilde{W}_h))$.

Démonstration:

1. Soit $x + y$ un élément de $\tilde{W}_h$, $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre engendrée par x, h, x^{-1}, z un élément non singulier du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$. Il suffit de vérifier que $ad(x + z)$ est une surjection de $\mathfrak{g}_0$ sur $\mathfrak{g}_1$.

   Soit p_0 le plus grand entier tel que le sous-espace $E_{p_0}(h) \cap \mathfrak{g}_1$ ne soit pas réduit à $\{0\}$, on vérifie alors aisément que pour tout y dans $\mathfrak{g}_1$, l'équation $[X, x + z] = y$ a au moins une solution dans $E = \oplus_{i=-2}^{i=p_0-2} E_{-i}(h) \cap \mathfrak{g}_0$, en utilisant les propriétés usuelles des sl_2-triplets ainsi que la décomposition : $E_0(h) = [x, E_{-2}(h)] \oplus E_0(\mathfrak{s})$.

   Complétons z en un sl_2-triplet $1-$adapté, (z, u, v), au sens du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$, en raison des relations de commutation le triplet $(z + x, h + u, v + x^{-1})$ est encore un sl_2-triplet $1-$adapté d'où $h + u = 2H_0$.

2. Remarquons que les conditions imposées donnent l'égalité :

   $$\mathfrak{g}_1 = \oplus_{i \geq 0, 2-i \geq 0} E_i(h) \cap E_{2-i}(2H_0 - h) \quad \text{d'où} \quad E \subset n_0(2H_0 - h).$$

   Il suffit d'appliquer le résultat démontré en 1) pour montrer que $P(2H_0 - h)$ a une orbite dense dans $\mathfrak{g}_1'$. Comme h et $2H_0 - h$ ont le même rôle, $P(h)$ a également une orbite dense dans $\mathfrak{g}_1'$.

3. Pour le dernier point, résolvons l'équation :

   $$\Psi(A_1 + A_2, x + y) = x_2 + x_0 + x_1 \quad \text{avec} \quad x + y \in \tilde{W}_h \ , \ A_i \in E_{-i}(h) \cap \mathfrak{g}_0 \ , \ i = 1, 2$$

   et $x_2 + x_0 + x_1 \in E_2'(h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_1(h) \cap \mathfrak{g}_1$, par l'hypothèse :

   $$\Psi(A, x + y) = x + [A_1, x] + (y + \frac{1}{2} ad(A_1)^2(x) + [A_2, x])$$

Ainsi il suffit de résoudre les équations :

$$x = x_2 \ , \ [A_1, x] = x_1 \ , \ y = x_0 - \frac{1}{2} ad(A_1)^2(x) - [A_2, x] \quad \text{et} \quad [y, x] = 0.$$

Notons que :

$$[x_2, ad(A_1)^2(x_2)] = [x_2, [A_1, x_1]] = -[x_2, [x_1, A_1]] = -[x_1, [x_2, A_1]] = [x_1, x_1] = 0,$$

car $ad(x_1)$ et $ad(x_2)$ commutent ($E_{-3}(h) \cap \mathfrak{g}_{-1} = \{0\}$ et est en bijection par $ad(x_2)^3$ avec $E_3(h) \cap \mathfrak{g}_2$).

On obtient :

$$A_1 = [x_2^{-1}, x_1] \ , \ A_2 = \frac{1}{2}[x_2^{-1}, x_0] \ , x = x_2 \ , y = x_0 - \frac{1}{2}(ad(x_1))^2(x_2^{-1}) + \frac{1}{2} ad(x_2^{-1}) ad(x_2)(x_0).$$

□

Définition 1.1.2 *1. Un élément h, 1-simple, tel que $n(2H_0) \subset p(h)$ est appelé 1-simple spécial.*

2. Un élément h tel que h et $2H_0 - h$ sont 1-simples spéciaux est appelé très spécial.

Remarque 1.1.3 *1. h est 1-simple spécial $\Leftrightarrow$ le spectre de $ad(h)/\mathfrak{g}_1$ est inclus dans $\mathbb{N}$.*

2. h est 1-simple très spécial $\Leftrightarrow \{0, 2\} \subset$ le spectre de $ad(h)/\mathfrak{g}_1 \subset \{0, 1, 2\}$.

3. Lorsque $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $i \geq 3$, h est 1-simple spécial $\Leftrightarrow$ le spectre de $ad(h)/\mathfrak{g}_2$ est inclus dans $2\mathbb{Z}$. En particulier, dans les préhomogènes commutatifs (très réguliers) tous les éléments 1-simples (distincts de $2H_0$) sont (très) spéciaux.

On montre que les éléments 1-simples très spéciaux n'apparaissent que dans des graduations courtes et induisent une "conservation" des propriétés initiales.

1.2 Quelques propriétés

Lemme 1.2.1 *Lorsque :*

1. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ est un espace préhomogène absolument irréductible et régulier,

2. $H \in \mathfrak{a}$ est un élément 1-simple spécial distinct de $2H_0$,

Le préhomogène $(E_0(H)_0, \ E_0(H)_1, H_0 - \frac{H}{2})$ est également absolument irréductible et régulier et si χ_H désigne le caractère associé à l'invariant relatif fondamental (de degré d_H) on a pour $u \in P(\check{\mathfrak{g}})$ et commutant à H :

$$\chi_H(h_u(t)) = t^a \quad avec \quad a = d_H . \frac{2B(u, 2H_0 - H)}{B(2H_0 - H, 2H_0 - H)}.$$

Démonstration: Comme l'ensemble : $\{\alpha \in \Delta_0 \mid \alpha(H) \geq 0\}$ est une partie parabolique de Δ_0, il existe un ordre pour lequel $\Delta_0^+ \subset \{\alpha \in \Delta_0 \mid \alpha(H) \geq 0\}$ et $\Delta^+ = \Delta_0^+ \cup_{i\geq 1} \Delta_i$. Soit $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ les racines simples correspondantes alors $\Sigma_1 = \{\beta_0\}$ et $\beta_0(H) = 0$ (en effet dans le cas contraire on a $E_0(H) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$ ce qui est absurde d'après le le lemme précédent) d'où l'égalité $\{\alpha \in \Delta_{\pm 1} \mid \alpha(H) = 0\} = \Delta_{\pm 1} \cap (\oplus_{\{\alpha\in\Sigma \mid \alpha(H)=0\}} \mathbb{F}\alpha)$ ainsi le système de racines associé à $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H), \mathfrak{U}(\mathbb{F}H) \cap \mathfrak{a})$ est donné par la composante connexe (notée Δ_H) contenant β_0 du système de racines $\Delta \cap (\oplus_{\{\alpha\in\Sigma \mid \alpha(H)=0\}} \mathbb{F}\alpha)$ ce qui montre l'irréductibilité ainsi que l'absolue irréductibilité puisque cette démonstration convient également sur $\overline{\mathbb{F}}$.

Pour le 2ème point, il suffit de le vérifier dans le cas déployé c'est à dire lorsque $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan et pour $u \in \mathfrak{a}$. Notons $\Sigma_0(H)$ les racines simples de Δ_H appartenant à Δ_0. On a :

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{Z} \oplus \mathbb{F}(2H_0 - H) \oplus_{\{\alpha\in\Sigma_0(H)\}} \mathbb{F}h_\alpha,$$

$\mathfrak{Z}$ étant le centre de $E_0(H)$, d'où la décomposition de u :

$$u = z + b(H_0 - \frac{H}{2}) + \sum_{\alpha\in\Sigma_0(H)} x_\alpha h_\alpha \ , \ z \in \mathfrak{Z} \ , \quad b \in \mathbb{F} \ , \forall \alpha \in \Sigma_0(H) : x_\alpha \in \mathbb{F}.$$

Or $\forall \alpha \in (\Delta_H)_0$ on a

$$\sum_{\mu\in(\Delta_H)_1} n(\mu,\alpha) = \sum_{\mu\in(\Delta_H)_1} n(s_\alpha(\mu),\alpha) = -\sum_{\mu\in(\Delta_H)_1} n(\mu,\alpha) \text{ donc } \sum_{\mu\in(\Delta_H)_1} n(\mu,\alpha) = 0$$

d'où :

$$\sum_{\mu\in(\Delta_H)_1} \mu(u) = b.\dim(E_0(H)\cap\mathfrak{g}_1) \text{ avec } b = 2\frac{B(u,2H_0-H)}{B(2H_0-H,2H_0-H)} \ ,$$

car $B(z, H_0 - \frac{H}{2}) = 0$ ($2H_0 - H \in [E_0(H), E_0(H)]$ par le lemme 1.1.1) ; or $\chi_H(g)^\kappa = det(g/_{E_0(H)\cap\mathfrak{g}_1})^2$ avec $\kappa = 2\frac{\dim(E_0(H)\cap\mathfrak{g}_1)}{d_H} \in \mathbb{N}^*$ d'où le résultat. On peut noter que $d_H.b$ est entier. □

Lemme 1.2.2 *On suppose que le PV $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ est 1-irréducible (i.e. il admet un unique invariant relatif fondamental) et admet un élément 1-simple très spécial alors $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ pour $|p| \geq 3$.*

Démonstration: Soit (x, H, y) un sl_2-triplet 1-adapté tel que H soit 1-simple très spécial.

1) Soient $1 \leq j < i$, rappelons que les différents sous-espaces $E_{\pm i}(H) \cap E_{\pm j}(2H_0 - H)$ sont en bijection, or H est 1-simple spécial donc $E_{-i}(H) \cap E_j(2H_0 - H) = \{0\}$ d'où $E_i(H) \cap E_j(2H_0 - H) = \{0\}$; comme $2H_0 - H$ est également 1-simple spécial on a $E_i(H) \cap E_j(2H_0 - H) = \{0\}$ pour $i \neq j \geq 1$.
Soit $p \geq 3$ alors $E_p(H) \cap E_p(2H_0 - H) = [x, E_{p-2}(H) \cap E_p(2H_0 - H)] = \{0\}$ d'où $\mathfrak{g}_p = E_{2p}(H) \cap \mathfrak{g}_p \oplus E_0(H) \cap \mathfrak{g}_p$ lorsque H et $2H_0 - H$ sont 1-simples spéciaux, donc $E_0(H) \cap \mathfrak{g}_p$ et $E_{2p}(H) \cap \mathfrak{g}_p$ sont des $\mathfrak{g}_0$-modules.
Notons que si $E_{2p}(H) \cap \mathfrak{g}_p \neq \{0\}$ (resp.$E_0(H) \cap \mathfrak{g}_p \neq \{0\}$) le polynome obtenu en prenant le déterminant de l'application $(ad(\pi_H(x))^{2p} : E_{-2p}(H) \cap \mathfrak{g}_{-p} \mapsto E_{2p}(H) \cap \mathfrak{g}_p$ identifié avec

le dual de $E_{-2p}(H) \cap \mathfrak{g}_{-p}$ par B (idem avec $ad(\pi_{2H_0-H}(x))^{2p} : E_{-2p}(2H_0 - H) \cap \mathfrak{g}_{-p} \mapsto E_{2p}(2H_0 - H) \cap \mathfrak{g}_p$) est un polynome défini sur $\mathfrak{g}_1$, relativement invariant par G et qui ne s'annule pas sur $E_2'(H) \cap \mathfrak{g}_1$ (resp.$E_0'(H) \cap \mathfrak{g}_1$).
2) Rappelons que l'unique invariant relatif fondamental s'annule exactement sur le complémentaire de $\mathfrak{g}_1'$ car $2H_0$ est 1-simple d'où $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ pour $p \geq 3$ par 1) ci-dessus. □

Remarque 1.2.3 *1. Sous les hypothèses du lemme précédent, $\mathfrak{g}$ se décompose très simplement :*

$$\mathfrak{g}_0 = \oplus_{-2\leq i\leq 2} E_i(H) \cap \mathfrak{g}_0 \quad , \quad \mathfrak{g}_1 = \oplus_{0\leq i\leq 2} E_i(H) \cap \mathfrak{g}_1 \quad , \quad \mathfrak{g}_2 = \oplus_{0\leq i\leq 2} E_{2i}(H) \cap \mathfrak{g}_2.$$

Lorsque $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$-module irréductible, le sous-espace $E_1(H) \cap \mathfrak{g}_0 \oplus E_2(H) \cap \mathfrak{g}_0$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

2. Lorsque $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $|i| \geq 3$, pour tout élément 1-simple, h, on aura $E_{-i}(h) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$ pour $i \geq 2$.

Proposition 1.2.4 *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre absolument simple telle que $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est 1-irréductible, $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre engendrée par un sl_2-triplet 1-adapté dont l'élément 1-simple est très spécial alors le préhomogène $(\overline{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}_0, \overline{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}_1)$ est également 1-irréductible à l'exception d'un unique élément 1-simple très spécial (à l'action de G près) lorsque $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type orthogonal (B_{3n}, α_{2n}) ou $(D_{3n+2}, \alpha_{2n+1})$ $(n \geq 1)$.*

Démonstration: 0) Lorsque $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$, le résultat découle du lemme 1.2.1 puisque $\mathfrak{U}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{U}(\mathbb{F}H)$, H désignant l'élément 1-simple du sl_2-triplet.

1) Lorsque $\mathfrak{g}_2 \neq \{0\}$, n'ayant pas de démonstration à priori, on se propose de déterminer, à l'action de G près, tous les éléments 1-simples très spéciaux pour chaque système de racines irréductible gradué apparaissant dans cette démonstration, c'est à dire déterminer les diagrammes à poids associés à un élément $H \in \mathfrak{a}$ vérifiant l'ensemble des propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} i) & \forall \alpha \in \Sigma,\ \alpha(H) \geq 0; \\ ii) & \forall \alpha \in \Delta_1,\ \alpha(H) \leq 2; \\ iii) & \forall \alpha \in \Delta_2,\ \alpha(H) \in \{0, 2, 4\}; \\ iv) & \{\alpha \in \Delta_1,\ \alpha(H) = 2\} \neq \emptyset; \\ v) & (E_0(H)_0, E_0(H)_1) \text{ est un préhomogène très régulier} \end{array}$$

(c'est à dire que $2H_0 - H$ est 1- simple), et d'indiquer dans chaque cas l'élément $x_0 \in \mathfrak{g}_1$ d'un sl_2-triplet $1-$adapté correspondant : (x_0, H, x_0^{-1}).

Le diagramme de Dynkin de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)$ est alors donné par la réunion des composantes connexes de $\{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H) = 0\}$ contenant au moins une racine de Σ_1; on note (Δ_H, Σ_H) le diagramme de Dynkin gradué du PV $(E_0(H)_0, E_0(H)_1)$.
Comme il suffit de faire la démonstration sur une clôture algébrique de $\mathbb{F}$ et que $\mathfrak{g}_3 = \{0\}$ par le lemme précédent, la classification des PV 1-irréductibles établie dans [Ru 2] nous indique qu'ils sont tous très réguliers et qu'ils sont tous irréductibles à l'exception du cas non commutatif de

système de racines gradué de type : $(A_{2p+q-1}, \{\alpha_p, \alpha_{p+q}\})$ avec $q > p \geq 1$; lorsque Σ_1 contient une seule racine, la liste des diagrammes gradués associés est donnée par la table 1 de [Ru 2], celle-ci permet également de donner les degrés des invariants relatifs fondamentaux (utilisés ultérieurement).
$\mathfrak{s}$ étant l'algèbre engendrée par $\{x_0, H, x_0^{-1}\}$, on vérifie dans chaque cas que le préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est 1-irréductible soit :

• en déterminant le diagramme gradué associé en calculant directement le sous-espace $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$,

• soit en vérifiant que le centre de $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0)_\theta$, avec $\theta = \theta_H(-1)$, est de dimension 1 ce qui implique que le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0$ est également de dimension 1 donc le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est absolument irréductible régulier.

En effet on considère l'algèbre réductive $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta = \{u \in \mathfrak{U}(\mathbb{F}H) \mid \theta(u) = u\}$, en utilisant la décomposition de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{s}$-modules irréductibles (sachant que $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $|i| \geq 3$), on vérifie que

$$\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta = \mathfrak{U}(\mathfrak{s}) \oplus \mathfrak{I} \text{ avec } \mathfrak{I} = ad(y_0)^2(E_4(H) \cap \mathfrak{g}_2) \cap \mathfrak{U}(\mathbb{F}H) \subset \mathfrak{g}_0 \ ,$$

ainsi $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{\pm i} = (\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta)_{\pm i}$ sont des $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta)_0-$modules pour $i \geq 1$ or ils engendrent $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ d'où $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ est un idéal de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta$. Comme la restriction de B à $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta \times \mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta$ et à $\mathfrak{U}(\mathfrak{s}) \times \mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ est non dégénérée et que $\mathfrak{I}$ est l'orthogonal de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ pour B, $\mathfrak{I}$ est également un idéal de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta$ d'où $[\mathfrak{U}(\mathfrak{s}), \mathfrak{I}] = 0$ donc le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0$ est inclus dans le centre de $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta)_0 = (\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0)_\theta$.
Lorsque la décomposition de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0$ en idéaux simples est de la forme :

$$\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0 = Z \oplus_{i \in I} (\mathfrak{L}^{(i)} \oplus \theta(\mathfrak{L}^{(i)})), \ Z \text{ étant le centre de } \ \mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0,$$

$\mathfrak{L}^{(i)}, \theta(\mathfrak{L}^{(i)}), i \in I$, étant les idéaux simples non commutatifs, on vérifie aisément à l'aide de la commutativité que le centre de $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_\theta)_0$ est donné par les points fixes de θ dans Z.

2) Le cas A_n avec comme diagramme gradué : $(A_{2p+q-1}, \{\alpha_p, \alpha_{p+q}\})$ avec $q > p \geq 1$.
Δ_H est soit connexe, soit se compose de deux composantes connexes.

α) Lorsque Δ_H est connexe on a $\Sigma_1 \subset \Sigma_H$ donc par v) il existe r avec $1 \leq r \leq p-1$, tel que $\Sigma_H = \{\alpha_j, p-r+1 \leq j \leq p+q+r-1\}$ et $\alpha_{p-r}(H) = \alpha_{p+q+r}(H) = 2$ en raison de iv) et de iii), de plus $\alpha_j(H) = 0$ pour $j \neq p-r, p+q+r$ par ii) d'où :

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p-r}(X_{\beta_i} + X_{\gamma_i}) \ , \ H = 2\sum_{i=1}^{p-r} H_{\beta_i+\gamma_i} \ , \ \beta_i = \sum_{j=i}^{p+i-1} \alpha_j \ \text{ et } \ \gamma_i = \sum_{j=p+i}^{2p+q-i} \alpha_j.$$

Le calcul de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$ donne :

$$E_0(\mathfrak{s})_1 = \oplus_{\alpha \in (\Delta')_1} \mathfrak{g}^\alpha \text{ avec } \Delta' = \{\epsilon_i - \epsilon_j, \ i,j \in \{p-r+1, ..., p, 2p-r+1, ..., p+q+r, \ i \neq j\} \ \},$$

donc un système de racines simples du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est donné par :

$$\Sigma_{\mathfrak{s}} = \{\beta \ , \ \alpha_m \text{ avec } \ p-r+1 \leq m \leq p-1 \ \text{ ou bien } \ 2p-r+1 \leq m \leq p+q+r-1\}$$

avec $\beta = \sum_{p \leq j \leq 2p-r} \alpha_j$ et $\Sigma_{\mathfrak{s}} \cap \Delta_1 = \{\beta, \alpha_{p+q}\}$.

Ainsi le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est de type $(A_{2r+(q-p+r)-1}, \{\alpha_r, \alpha_{q-p+2r}\})$.

β) Dans le second cas, le diagramme de Dynkin de $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_1)$ a deux composantes connexes.
Par v), on a nécessairement $\Sigma_H = \{\alpha_j \text{ avec } 1 \leq j \leq 2p-1 \text{ ou bien } q+1 \leq j \leq 2p+q-1\}$ donc $2p \leq q$ et :

$$\alpha_j(H) = \begin{cases} 0 \text{ pour } j \neq 2p \ , \ j \neq q \\ 2 \quad \text{pour } j = 2p = q \\ 1 \quad \text{pour } j = 2p \neq q \text{ ou bien } j = q \neq 2p, \end{cases}$$

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} (X_{\mu_i} + X_{\nu_i}), \ H = \sum_{i=1}^{p} (h_{\mu_i} + h_{\nu_i}), \ \mu_i = \sum_{j=i}^{p+q-i} \alpha_j \ \text{ et } \ \nu_i = \sum_{j=p+i}^{p+q+i-1} \alpha_j$$

($2p$ racines orthogonales : $\theta = \prod_{1 \leq i \leq p} (\theta_{\mu_i} \theta_{\nu_i})$).

Soit $\mathfrak{l}^{(1)}$ (resp.$\mathfrak{l}^{(2)}$) l'algèbre (simple) engendrée par $X_{\pm\alpha_i}, i = 1, ..., p-1$ (resp.$p+1, ..., 2p-1$), la décomposition de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0$ en idéaux simples est donnée par :

$$\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0 = \mathfrak{l}^{(1)} \oplus \mathfrak{l}^{(2)} \oplus \theta\mathfrak{l}^{(1)} \oplus \theta\mathfrak{l}^{(2)} \oplus Z \ , \ Z = \mathbb{F}H_1 \oplus \mathbb{F}\theta H_1, \ H_1 = \sum_{i=1}^{p} h_{\epsilon_i - \epsilon_{2p-i+1}},$$

Z étant de dimension 2, Z_θ est de dimension 1 donc engendré par $2H_0 - H$.

3) Les cas classiques restants : B_n, C_n, D_n.

Rappelons la description du système de racines gradué des cas classiques B_n, BC_n, C_n, D_n avec $\Sigma_1 = \{\alpha_k\}$ tel que $1 \leq k \leq n-1$ pour C_n (resp. $n-2$ pour D_n) :

$\Delta_0^+ = \{\epsilon_i - \epsilon_j \ , \ 1 \leq i < j \leq k \ , \ k+1 \leq i < j \leq n \ , \ \epsilon_l \ , \ \epsilon_l + \epsilon_m \ , \ k+1 \leq l \leq m \leq n\} \cap \Delta$
$\Delta_1 = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \ , \ 1 \leq i \leq k < j \leq n \ , \ \epsilon_i \ , \ 1 \leq i \leq k\} \cap \Delta$
$\Delta_2 = \{\epsilon_i + \epsilon_j \ , \ 1 \leq i \leq j \leq k\} \cap \Delta$

(notations des planches II,III,IV de [Bou 1]).

Dans le cas déployé et régulier, k est pair pour C_n, $3k \leq 2n$ dans les cas C_n et D_n et $3k \leq 2n+1$ dans le cas B_n.
L'invariant relatif fondamental, F, est de degré $2k$ dans le cas orthogonal (i.e. B_n ou D_n) et de degré k dans le cas C_n, de plus :

$$N = \frac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{\text{degré de } F} = \begin{cases} n - k + \frac{1}{2} \text{ dans le cas } B_n, \\ n - k \text{ dans le cas } D_n, \\ 2(n-k) \text{ dan le cas } C_n. \end{cases}$$

Soient $p = \begin{cases} n & \text{dans le cas } B_n, \\ n-1 & \text{dans le cas } C_n, \\ n-2 & \text{dans le cas } D_n \end{cases}$ et $\delta = \begin{cases} \sum_{j>p} \alpha_j \text{ lorsque } p < n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Pour $j = 1, ..., p-1$, $\gamma_j = \sum_{1\leq l\leq j} \alpha_l + 2\sum_{j+1\leq l\leq p} \alpha_l + \delta = \epsilon_1 + \epsilon_{j+1}$ est une racine de Δ_1 (resp.Δ_2) lorsque $j \geq k$ (resp.$j < k$) ainsi les seuls diagrammes à poids possibles sont de deux types.

α) Il existe une valeur j comprise entre 1 et $k-1$ telle que $\alpha_j(H) \neq 0$. On peut toujours supposer que $\alpha_l(H) = 0$ pour $1 \leq l \leq j-1$, en prenant une valeur minimale de j.
En considérant les valeurs $\gamma_l(H)$, on vérifie que $\alpha_l(H) = 0$ pour $l \geq j+1$ et que $\alpha_j(H) = 2$.
Dans ce cas le PV irréductible et régulier : $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_1)$ a un diagramme gradué (R_{n-j}, α_{k-j}) analogue à celui d'origine (i.e. $R = B$ ou D dans le cas orthogonal et $R = C$ dans le cas C_n) d'où j est pair dans le cas C_n ([Ru 2]).

Soit $j_0 = [\frac{j}{2}]$, on a pour $j \geq 2$:

$$H = 2(\sum_{1\leq i\leq j_0} h_{\beta_i+\delta_i}) + H_1 \ , \ x_0 = \sum_{1\leq i\leq j_0} (X_{\beta_i} + X_{\delta_i}) + X_1$$

avec $\beta_i = \epsilon_{2i-1} + \epsilon_{n-i+1}$ et $\delta_i = \epsilon_{2i} - \epsilon_{n-i+1}$ pour $1 \leq i \leq j_0$.

$H_1 = X_1 = 0$ si j est pair et sinon

$$H_1 = \begin{cases} h_{\epsilon_j} \text{ dans le cas } B_n, \\ h_{\epsilon_j-\epsilon_{n-j_0}} + h_{\epsilon_j+\epsilon_{n-j_0}} \text{ dans le cas } D_n, \end{cases} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{cases} X_{\epsilon_j} \text{ dans le cas } B_n, \\ X_{\epsilon_j-\epsilon_{n-j_0}} + X_{\epsilon_j+\epsilon_{n-j_0}} \text{ dans le cas } D_n, \end{cases}$$

Le cas $j = 1$ se réduit à : $x_0 = X_1$ et $H = H_1$.

Le calcul de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$ donne :

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1 = \oplus_{\alpha\in\Delta_1'} \mathfrak{g}^\alpha \ \oplus \ \mathfrak{B}$$

avec

$$\Delta_1' = \begin{cases} \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_q, \ j+1 \leq i \neq q \leq n-j_0 \ , \ \pm\epsilon_i \ , \ \pm 2\epsilon_i, \ j+1 \leq i \leq n-j_0\} \cap \Delta_1 \text{ lorsque } j \text{ est pair}, \\ \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_q, \ j+1 \leq i \neq q \leq n-j_0\} \cap \Delta_1 \text{ lorsque } j \text{ est impair et } \Delta = B_n, \\ \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_q, \ j+1 \leq i \neq q \leq n-j_0-1\} \cap \Delta_1 \ \text{ lorsque } j \text{ est impair et } \Delta = D_n \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{B} = \begin{cases} \{0\} \text{ lorsque } \Delta = B_n \text{ ou } C_n \text{ et lorsque } \ \Delta = D_n \text{ avec } j = 2j_0, \\ \oplus_{j+1\leq l\leq k} \mathbb{F}X_l \ \text{ avec } \ X_l = [X_{\epsilon_j+\epsilon_{n-j_0}} - X_{\epsilon_j-\epsilon_{n-j_0}}, X_{\epsilon_l-\epsilon_j}] \text{ lorsque } \Delta = D_n \text{ et } j = 2j_0+1. \end{cases}$$

Les résultats sont analogues pour $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{-1}$ d'où le système de racines du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est du type suivant :

$$\begin{cases} (D_{n-j_0-j}, \alpha_{k-j}) \text{ lorsque } \ \Delta = B_n \text{ et } \ j = 2j_0+1 \text{ ou bien } \ \Delta = D_n \text{ et } j = 2j_0 \ , \\ (B_{n-j_0-j}, \alpha_{k-j}) \quad \text{lorsque } \Delta = B_n \text{ et } j = 2j_0 \\ (B_{n-j_0-j-1}, \alpha_{k-j}) \text{ lorsque } \Delta = D_n \text{ et } j = 2j_0+1 \\ (C_{n-j_0-j}, \alpha_{k-j}) \text{ lorsque } \Delta = C_n, \end{cases}$$

A l'exception des 2 cas :

- $(D_{3n+2}, \alpha_{2n+1})$ et $j = 2n$ donc $(E_0(H)_0, E_0(H)_1)$ est de type (D_{n+2}, α_1),

- (B_{3n}, α_{2n}) et $j = 2n-1$ donc $(E_0(H)_0, E_0(H)_1)$ est de type (B_{n+1}, α_1),

pour lesquels on a $A_1 \oplus A_1$.

Dans tous les cas, on a $N = N(H) = \dfrac{\dim(E_0(H)_1)}{\text{degré de l'invariant relatif fondamental}}$.

β) Pour $l = 1, ..., k-1$ on a $\alpha_l(H) = 0$, on note $j+1$ le premier indice pour lequel $\alpha_{j+1}(H) \neq 0$, dans ce cas $\Sigma_H = \{\alpha_m, 1 \leq m \leq j\}$ d'où (Δ_H, Σ_H) est de type (A_j, α_k), et en raison de la régularité (v)) on a $j = 2k-1$ d'où $2H_0 - H = \sum_{1 \leq i \leq k} h_{\mu_i}$ avec $\mu_i = \epsilon_i - \epsilon_{k+i}$ or $2H_0 = \sum_{1 \leq i \leq k}(h_{\mu_i} + h_{\nu_i})$ avec $\nu_i = \epsilon_i + \epsilon_{k+i}$ donc

$$H = \sum_{1 \leq i \leq k} h_{\nu_i} \ , \ x_0 = \sum_{1 \leq i \leq k} X_{\nu_i} \quad (k \text{ tds de type } \ A_1 \ : \ \theta = \prod_{1 \leq i \leq k} \theta_{\nu_i}).$$

On procède exactement comme dans 2) β). Soit $\mathfrak{l}$ l'algèbre (simple) engendrée par $X_{\pm\alpha_i}, i = 1, ..., k-1$; la décomposition de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0$ en idéaux simples est donnée par :

$$\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0 = \mathfrak{l} \oplus \theta\mathfrak{l} \oplus Z \ , \ Z = \mathbb{F}(2H_0 - H)$$

d'où le résultat.

On peut noter que le degré de l'invariant relatif fondamental du préhomogène commutatif : $(E_0(H)_0, E_0(H)_1)$ est de degré k, il en est de même pour le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, (\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ dans le cas orthogonal par orthogonalité des racines $\mu_i, i = 1, ..., k$. Dans le cas C_n, le calcul de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$ permet de vérifier que le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, (\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est de type (D_k, α_k) donc l'invariant relatif fondamental est de degré $\dfrac{k}{2}$. Notons que H et $2H_0 - H$ sont dans la même orbite de G.

c) Les cas exceptionnels : cf.la démonstration du lemme suivant. □

1.3 Existence

Lemme 1.3.1 *Un préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ absolument irréductible et régulier de type exceptionnel (i.e. Δ est de type exceptionnel) tel que $\mathfrak{g}_3 = \{0\}$ admet toujours un élément 1-simple très spécial sauf dans les cas suivants :*

1. $\Delta = G_2$
2. $(\Delta, \Sigma_1) = (F_4, \{\alpha_4\})$ *et $\mathfrak{g}$ est déployé.*

Démonstration: On la fait cas par cas et lorsque Δ_2 est non vide donc le coefficient de l'unique racine de Σ_1 dans la décomposition de $\tilde{\alpha}$ suivant Σ prend la valeur 2, ce qui donne la liste suivante des préhomogènes concernés par le lemme :

(G_2, α_2); (F_4, α_i), $i = 1$ ou 4; (E_6, α_i), $i \neq 1, 4, 6$; (E_7, α_i), $i \in \{1, 2, 6\}$; (E_8, α_i), $i = 1$ ou 8. (notations : planches de [Bou 1]).

Lorsque Δ est de type $E_i, i \in \{6, 7, 8\}$, l'algèbre $\mathfrak{g}$ est déployée (cf.tables de [Ve] et [Wa]) donc pour $\Delta = E_6$ on a $\Sigma_1 = \{\alpha_2\}$ par régularité (cf.table 1 de [Ru 2]).

Les éléments très spéciaux sont les éléments $H \neq 2H_0$, $1-$simples, dont le spectre de $ad(H)/\mathfrak{g}_2$ ne comprend que des valeurs paires c'est à dire tels que $\alpha(H) \in 2\mathbb{N}$ pour tout $\alpha \in \Delta_2$.

1) Le cas (E_7, α_6).

Posons : $\beta_1 = \alpha_6$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2(\alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_6$, $\beta_3 = \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7$.
Les représentants des orbites 1-simples sont donnés par :

$$\text{Pour } i = 1, 2, 3 : \sum_{j=1}^{i} h_{\beta_j},\ 2h_{\tilde{\alpha}},\ 2h_{\tilde{\alpha}} + h_{\beta_1},\ h_{\beta_1} + h_{\beta_3},\ 2h_{\tilde{\alpha}} + h_{\beta_1} + h_{\beta_3},\ 2H_0,$$

(par exemple prop.2.6 de [Mu 2])

mais seul $H = 2h_{\tilde{\alpha}}$ convient d'où le diagramme de Dynkin gradué du PV : $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_1)$ est de type (D_6, α_2) et on vérifie facilement que $2H_0 - H$ et H sont dans la même orbite de G.
On peut noter que l'invariant relatif fondamental de ce préhomogène est de degré 4 comme celui de départ.

On termine la démonstration de la proposition précédente.
Un sl_2-triplet 1-adapté, (x_0, H, y_0), est alors donné par :

$$x_0 = X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2} \text{ avec } \gamma_1 = \sum_{1 \leq i \leq 7} \alpha_i + \alpha_4 + \alpha_5,\ \gamma_2 = \sum_{1 \leq i \leq 6} \alpha_i + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Le calcul donne :

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1 = \oplus_{\alpha \in (\Delta')_1} \mathfrak{g}^{\alpha} \text{ avec } \Delta' = (\oplus_{1 \leq i \leq 3} \mathbb{Z}\delta_i \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \oplus \mathbb{Z}\alpha_4) \cap \Delta, \text{ et}$$

$$\delta_1 = \alpha_5 + \alpha_6,\ \delta_2 = \alpha_6 + \alpha_7,\ \delta_3 = \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5.$$

On vérifie aisément que le diagramme de Dynkin gradué associé au préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$, est donné par $(\Delta', \Sigma_1 = \{\delta_1, \delta_2\})$ et que $\Sigma = \{\delta_1, \alpha_4, \alpha_2, \delta_3, \delta_2\}$ est un système de racines simples de Δ'. Le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est de type $(A_5, \{\alpha_1, \alpha_5\})$, il n'est pas irréductible mais est 1-irréductible et son invariant relatif fondamental est de degré 2.

2) Dans tous les autres cas, il existe p racines orthogonales de Δ_1 : $\lambda_1, ..., \lambda_p$, telles que $\sum_{1 \leq i \leq p} h_{\lambda_i} = 2H_0$, et pour tout élément 1-simple, h, il existe un sous-ensemble I de $\{1, ..., p\}$ tel que h et $\sum_{i \in I} h_{\lambda_i}$ soient dans la même orbite de G ([Mu 2],proposition 6.6 et corollaire 4.6). Les racines $\lambda_1, ..., \lambda_p$, sont toujours fortement orthogonales et l'invariant relatif fondamental est de degré p à l'exception de l'unique cas où $\Delta = F_4$ et $\Sigma_1 = \{\alpha_4\}$.

Les valeurs possibles de p sont les suivantes :

a) $p=2$ alors $\Delta=G_2$ et on a 3 orbites 1-simples de représentants : $2H_0, h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}$ avec $\lambda_1=\alpha_1$ et $\lambda_2=2\alpha_1+\alpha_1$ mais $\tilde{\alpha}(h_{\lambda_1})=1$ donc il n'existe aucun élément 1-simple très spécial.

b) $p=4$ mais alors $\omega=\frac{1}{2}(\sum_{1\leq i\leq 4}\lambda_i)$ est une racine de Δ_2.
Les représentants des orbites 1-simples sont à prendre parmi : $H_i=\sum_{1\leq j\leq i}h_{\lambda_j}, i=1,...,4$; comme $\omega(H_i)=i$, H_2 est le seul élément 1-simple très spécial (à l'action de G près) lorsque $(\Delta,\Sigma_1)\neq(F_4,\alpha_4)$.

Dans le cas (F_4,α_4), il convient de distinguer le cas où $\mathfrak{g}$ est déployée (seuls H_1 et H_4 sont 1-simples) du cas où $\mathfrak{g}$ ne l'est pas.
Dans ce dernier cas la consultation des $\mathbb{F}$-formes des algèbres absolument simples ([Ve],[Wa]) donne comme diagramme de Dynkin gradué possibles pour $(\overline{\mathfrak{g}}_0,\overline{\mathfrak{g}}_1)$ la liste suivante :

• (E_8,α_1) $(\mathbb{F}=\mathbb{R})$ donc $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ est un PV presque commutatif au sens de [Mu 2] d'où H_2 est 1-simple (dernière remarque de [Mu 2]) et c'est l'unique élément 1-simple très spécial (à l'action de G près).

• (E_7,α_6) avec la $\mathbb{F}$-forme EVI (notation des tables de [Wa]).

Il est facile de vérifier que la plus grande racine $\tilde{\omega}$ de $\overline{\Delta}$ est une $\mathbb{F}$-racine d'où $2h_{\tilde{\omega}}\in\mathfrak{g}$ donc est 1-simple très spécial pour le préhomogène : $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ et on a $H_2=2h_{\tilde{\omega}}$.

Dorénavant $\{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ est la chaine canonique de racines ([Mu 2], la liste explicite de $\{\lambda_1,...,\lambda_p\}$ et une description complète de Δ_2 à l'aide des $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$ sont données dans les tables de [Mu 4]).
En regardant les diverses valeurs $\beta(H), \beta\in\Delta_2$ et H décrivant les représentants des orbites 1-simples, on obtient :

c) $p=7$ alors $(\Delta,\Sigma_1)=(E_7,\alpha_2)$, seuls 2 représentants conviennent : $H=h_{\lambda_1}+h_{\lambda_2}+h_{\lambda_3}$ et $2H_0-H=h_{\lambda_4}+h_{\lambda_5}+h_{\lambda_6}+h_{\lambda_7}=2h_{\tilde{\alpha}}$.

d) $p=8$ alors $(\Delta,\Sigma_1)=(E_8,\alpha_1)$, seul $H=\sum_{1\leq j\leq 4}h_{\lambda_j}=2h_\omega$ est 1-simple très spécial.

On termine la démonstration de la proposition précédente.
Dans tous ces cas, H est de la forme : $H=\sum_{i\in I}h_{\lambda_i}$, un sl_2-triplet 1-adapté, noté (x_0,H,y_0), est alors donné par :

$$x_0=\sum_{i\in I}X_{\lambda_i},\ y_0=\sum_{i\in I}X_{-\lambda_i}.$$

$(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0,\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_1)$ (resp.$(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0,\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$) est un PV quasi commutatif qui admet $\{\lambda_i, i\notin I\}$ comme système orthogonal maximal (démonstration du lemme 3.2 de [Mu 4]).
Comme $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_0,\mathfrak{U}(\mathbb{F}H)_1)$ est irréductible (lemme 1.2.1) on a en appliquant la démonstration de la partie 2) de la prop.5.1.1 de [Mu 2] (vérification immédiate) :

$$\forall i\neq j\notin I\ ,\ \exists k\neq l \text{ tels que } :\ (k \text{ et } l\in I) \text{ ou } (k \text{ et } l\notin I)\ \text{ et }\ \omega=\frac{1}{2}(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k+\lambda_l)\in\Delta_2,$$

donc le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est également irréductible (2) de la prop.5.1.1 de [Mu 2] : lorsque $k, l \in I$ on notera que $u_\omega = [X_{-\lambda_k}, X_\omega] - [X_{-\lambda_l}, X_\omega] \in E_1(h_i) \cap E_1(h_j) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$.

Notons que l' invariant relatif fondamental du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F})_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F})_1)$ est de degré p-cardinal(I) comme celui du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$. □

Le lemme précédent se complète par :

Proposition 1.3.2 *Soit $\mathfrak{g}$ soit une algèbre absolument simple engendrée par $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_{\pm 1}$, qui n'est pas de rang 1, ni de type G_2 et telle que*

1. $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ *pour* $|p| \geq 3$
2. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ *a un unique invariant relatif fondamental de degré plus grand que deux*

alors il existe des éléments 1-simples très spéciaux appartenant à $\mathfrak{a}$ de somme $2H_0$ et $2H_0$ est 1-simple.

Démonstration: 1) $2H_0$ est 1-simple par consultation des tables de [Ru 2].

2) Il suffit d'exhiber un élément 1-simple très spécial lorsque Δ_2 est non vide.

a) Lorsque Δ est de type exceptionnel, cela résulte du lemme précédent puisque l'invariant relatif fondamental est une forme quadratique lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre déployée de type F_4 munie de la graduation induite par α_4, ce qui est exclu dans l'énoncé.

b) Dans les différents cas classiques B_n, BC_n, C_n (resp. D_n avec $n \geq 4$) et $\Sigma_1 = \{\alpha_k\}$ (resp. $2 \leq k \leq n-2$), le résultat est évident pour les cas déployés par la démonstration de la proposition 1.2.4 et sinon on applique le lemme 2.4.2.

c) Δ est de type A_n donc $\Sigma_1 = \{\alpha_p, \alpha_q\}$.
Comme Δ est simplement lacé, $\tilde{\alpha}$ est la somme de deux racines, α et β de Δ_1 dont la différence n'est pas une racine donc $2h_{\tilde{\alpha}}$ est 1-simple ce qui termine la démonstration lorsque H_0 et $h_{\tilde{\alpha}}$ ne sont pas proportionnels. Sinon Σ_1 est composé des racines simples reliées à $\tilde{\alpha}$ dans le graphe de Dynkin complété donc $p = 1$ et $q = n$.
Par consultation des tables de [Ve], [Wa], on vérifie que $\overline{\Delta}$ est également de type A_m puis par la classification de Rubenthaler (prop.3.3.7 de [Ru 2]) on obtient que $n \geq 3$; l'élément $H = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_n}$ est 1-simple puisque les racines α_1 et α_n de Δ_1 sont fortement orthogonales et $\forall \alpha \in \Delta_1$ on a $\alpha(H) \in \{0, 1, 2\}$ et $H \neq 2H_0$. □

1.4 Une classe de préhomogènes faiblement sphériques

Les résultats des paragraphes précédents nous amènent à considérer les préhomogènes de type paraboliques ayant les propriétés suivantes :

1. $\mathfrak{g}$ est une algèbre absolument simple engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 1}$,
2. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ est un PV absolument irréductible et régulier,

3. il existe des éléments 1-simples très spéciaux appartenant à $\mathfrak{a}$ de somme $2H_0$.

Ce sont les préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ absolument irréductibles, réguliers qui ne sont pas de rang 1, ni de type G_2 ou (F_4, α_4) déployé et pour lesquels $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ pour $|p| \geq 3$.

Notons $H_1, ..., H_p$ les éléments 1-simples très spéciaux appartenant à $\mathfrak{a}$ de somme $2H_0$, $\mathfrak{t}$ la sous-algèbre qu'is engendrent, $\Delta_R(\mathfrak{t})$ les restrictions, qui sont non nulles, des racines de Δ à $\mathfrak{t}$ que l'on munit de l'ordre suivant :

$$\lambda \succ 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda(H_k) > 0 \quad \text{avec} \quad k = sup\{j \ , \ \lambda(H_j) \neq 0\} \ ,$$

$P_\mathfrak{t}$ le sous-groupe parabolique de G associé à $\mathfrak{t}$ avec cet ordre : $P_\mathfrak{t} = G_\mathfrak{t}.N_\mathfrak{t}$ avec $N_\mathfrak{t} = exp(ad(n_\mathfrak{t}))$, $n_\mathfrak{t} = \oplus_{\lambda \succ 0, \lambda \in \Delta_0} \mathfrak{g}^\lambda$ et $G_\mathfrak{t}$ est le centralisateur de $\mathfrak{t}$ dans G.

Soit $\mathfrak{p}_\mathfrak{t} = E_0(\mathfrak{t}) \oplus n_\mathfrak{t}$, on rappelle que $E_0(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}^0 \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{t}^0 = \cap_{\lambda \in \Delta_0 | \lambda/\mathfrak{t}=0} \mathrm{Ker}\lambda$ est le centre de $E_0(\mathfrak{t})$ et $\mathfrak{m}(= E_0'(\mathfrak{t}))$ est l'orthogonal de $\mathfrak{t}^0$ dans $E_0(\mathfrak{t})$ pour la forme de Killing, et que $\mathfrak{p}_\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^0 \oplus \mathfrak{m} \oplus n_\mathfrak{t}$ est la décomposition de Langlands de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$.

Dans cette situation, on a une décomposition particulièrement simple :

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{t} = E_0(\mathfrak{t}) \oplus_{1 \leq i < j \leq p} (E^{i,j}_{-1,1} \oplus E^{i,j}_{-2,2})$$

avec $E^{i,j}_{a,b} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [H_q, x] = 0 \text{ pour } q \neq i, j \text{ et } [H_i, x] = ax, [H_j, x] = bx\}$ et on notera $P_\mathfrak{t} = P(H_1, ..., H_p)$ lorsqu'on désire mettre en évidence l'ordre associé.

Remarque 1.4.1 *1. $\mathfrak{t}$ est unique (à l'action de G près) et est de dimension 2 dans les cas exceptionnels non commutatifs (démonstration du lemme 1.3.1).*

2. *Lorsque $\mathfrak{t}$ est inclus dans l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 2}$, $G_\mathfrak{t}$ contient le sous-groupe distingué H, centralisateur de $\mathfrak{g}_2$ dans G ainsi $P_\mathfrak{t}$ est un sous-groupe parabolique provenant du groupe quotient $\Gamma = G/H$.*
3. *Puisque tout sous-groupe parabolique est conjugué à un sous groupe parabolique standard, étant donné l'ordre fixé à priori dans Δ tel que $\Delta_1 \subset \Delta^+$, il existe des éléments 1-simples très spéciaux, $H'_1, ..., H'_p$, tels que $\lambda \succ 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda > 0$ et $\lambda/\mathfrak{t}' \neq 0$, $\mathfrak{t}'$ étant la sous-algèbre engendrée par $H'_1, ..., H'_p$.*
   Soit $\Sigma_{\mathfrak{t}'} = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha/\mathfrak{t}' = 0\}$ et $< \Sigma_{\mathfrak{t}'} >$ le système de racines engendré par $\Sigma_{\mathfrak{t}'}$, alors $\Sigma_{\mathfrak{t}'} \subset \Sigma_0$ et

$$\{\lambda \in \Delta_0 \mid \lambda/\mathfrak{t}' = 0\} = < \Sigma_{\mathfrak{t}'} > \quad , \quad \{\lambda \in \Delta_0 \mid \lambda \succ 0\} = \Delta_0^+ - < \Sigma_{\mathfrak{t}'} >,$$

$$\mathfrak{t}'^0 = \cap_{\lambda \in \Sigma_{\mathfrak{t}'}} Ker\lambda$$

et a pour dimension le nombre d'éléments de $\Sigma_1 - \Sigma_{\mathfrak{t}'}$.

Définition 1.4.2 *Les sous-groupes paraboliques construits à partir d'éléments 1-simples très spéciaux qui commutent et de somme $2H_0$ sont appelés paraboliques très spéciaux.*

Pour $k = 1, ..., p-1$, soient $h_k = H_1 + ... + H_k$, $\mathfrak{U}^+(k) = \mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - h_k))$ et F_k un invariant relatif fondamental du préhomogène

$$(\mathfrak{U}^+(k)_0, \mathfrak{U}^+(k)_1) = (E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_0, E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1)$$

gradué par $ad(\frac{h_k}{2})$, soient $\mathfrak{U}^-(p-k) = \mathfrak{U}(\mathbb{F}(h_k))$ et F^*_{p-k} un invariant relatif fondamental du préhomogène

$$(\mathfrak{U}^-(p-k))_0, \mathfrak{U}^-(p-k))_{-1}) = (E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_0, E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1})$$

gradué par $ad(H_0 - \frac{h_k}{2})$, ces 2 préhomogènes sont absolument irréductibles par le lemme 1.2.1.

On prolonge F_k sur $\mathfrak{g}_1$ et F^*_{p-k} sur $\mathfrak{g}_{-1}$ en conservant la même notation, grâce au choix naturel des supplémentaires : $\oplus_{i \neq 2} E_i(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_1$ et $\oplus_{i \neq 0} E_i(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}$ dans $\mathfrak{g}_{-1}$.
On note χ_k (resp.χ^*_k) le caractère associé à F_k (resp.F^*_k) que l'on étend sur $P_\mathfrak{t}$ par $\chi_k(gn) = \chi_k(\tilde{g})$, $\tilde{g}$ désignant la restriction de g à $\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - h_k))$.
On notera également $F = F_p$ et $\chi = \chi_p$ (resp. $F^* = F^*_p$ et $\chi^* = \chi^*_p$), on pose : $\chi_0 = \chi^*_0 = 1$, $h_0 = 0$ et $h_p = 2H_0$.

On a alors les inclusions suivantes :

$$\mathfrak{U}^+(1)_1 \subset \mathfrak{U}^+(2)_1 \subset ... \subset \mathfrak{U}^+(p)_1 = \mathfrak{g}_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}^-(1)_{-1} \subset \mathfrak{U}^-(2)_{-1} \subset ... \subset \mathfrak{U}^-(p)_{-1} = \mathfrak{g}_{-1}.$$

Ces polynomes généralisent la notion de mineurs principaux pour une matrice carrée et ont été largement étudiés notamment lorsque le préhomogène est commutatif (cf. l'introduction ainsi que les travaux de H.Rubenthaler et G.Schiffmann, et Y.Angely etc).

Lemme 1.4.3 *Les polynomes $F_k, k = 1, ..., p$ (resp.F^*_k) sont relativements invariants par $P_\mathfrak{t}$ de caractère χ_k (resp.χ^*_k).*

Démonstration: Pour $k = 1, ..., p$, F_k (resp. F^*_k) est relativement invariant par $G_\mathfrak{t}$ de caractère χ_k (resp.χ^*_k) car $G_\mathfrak{t}$ centralise h_k.
Il suffit de montrer l'invariance par $N_\mathfrak{t}$ pour $k = 1, ..., p-1$, ce qui se fait simplement par récurrence sur p. Vérifions-le sur $\mathfrak{g}_1$.
Soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_p)$; tout élément x de $\mathfrak{g}_1$ se décompose suivant $ad(H_p)$:

$$x = x_2 + x_1 + x_0, \ x_i \in E_i(H_p) \cap \mathfrak{g}_1, \quad \text{donc} \quad F_k(x) = F^\mathfrak{B}_k(x_0), \ k = 1, ..., p-1,$$

$F^\mathfrak{B}_k$ désignant l'extension de l'invariant fondamental du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - H_k))_0$, $\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - H_k))_1)$ à $\mathfrak{B}_1$.
Or $N_\mathfrak{t} = N_1.N_2$ avec $N_i = exp(ad(\mathfrak{n}_i)), i = 1, 2$, $\mathfrak{n}_1 = \oplus_{\{\lambda \in \Delta_0 \ | \lambda \succ 0, \lambda(H_p) = 0\}} \mathfrak{g}^\lambda \subset \mathfrak{B}_0$ et $\mathfrak{n}_2 = \oplus_{\{\lambda \in \Delta_0 \ | \lambda(H_p) > 0\}} \mathfrak{g}^\lambda$ ([Sel]) d'où :

$$F_k(nx) = F^\mathfrak{B}_k(n_1 x_0) = F^\mathfrak{B}_k(x_0) = F_k(x), \ n = n_1 n_2,$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

Les préhomogène duaux, obtenus à l'aide de la forme de Killing, correspondent aux sous-espaces vectoriels :

$$\mathfrak{U}^+(k)_1{}^* = E_{-2}(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1} = E_0(H_p + ... + H_{k+1}) \cap \mathfrak{g}_{-1} \ ,$$

$$\mathfrak{U}^-(p-k)_{-1}{}^* = E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1 = E_2(H_p + ... + H_{k+1}) \cap \mathfrak{g}_1 \ ,$$

ils sont donc associés à l'indexation $H_p, ..., H_1$ d'où les invariants relatifs correspondants prolongés sur $\mathfrak{g}_{-1}$ et $\mathfrak{g}_1$, que l'on note P_k^* pour $\mathfrak{U}^+(k)_1^*$ et P_{p-k} pour $\mathfrak{U}^-(k)_{-1}^*$, sont relativement invariants sous l'action du parabolique opposé à $P_{\mathfrak{t}}$: $P_{\mathfrak{t}}^- = G_{\mathfrak{t}} N_{\mathfrak{t}}^-$ avec $N_{\mathfrak{t}}^- = exp(ad(\oplus_{-\lambda \succ 0, \lambda \in \Delta_0} \mathfrak{g}^\lambda))$.

Le lemme suivant est une généralisation du lemme de Gauss qui énonce qu'une matrice symétrique dont tous les mineurs principaux sont non nuls peut être diagonalisée à l'aide d'une matrice triangulaire, ces dernières étant remplacées par $P_{\mathfrak{t}}$.

Lemme 1.4.4 *Soit* $W_{\mathfrak{t}} = \{x_1 + ... + x_p \ , \ x_i \in E_2'(H_i) \cap \mathfrak{g}_1 \ , \ [x_i, x_j] = 0 \ , i, j = 1, ..., p\}$ *et* $\mathfrak{g}"_1 = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid$ *tel que* $\prod_{1 \leq k \leq p} F_k(x) \neq 0\}$ *alors* $G_{\mathfrak{t}}$ *opère dans* $W_{\mathfrak{t}}$ *avec un nombre fini d'orbites et les représentants des orbites de* $G_{\mathfrak{t}}$ *dans* $W_{\mathfrak{t}}$ *sont également des représentants des orbites de* $P_{\mathfrak{t}}$ *dans* $\mathfrak{g}"_1$.
On a le même résultat avec $\mathfrak{g}"_{-1}$ *et* $W_{\mathfrak{t}}^* = \{y_1 + ... + y_p \ , \ y_i \in E_{-2}'(H_i) \cap \mathfrak{g}_{-1} \ , \ [y_i, y_j] = 0 \ , i, j = 1, ..., p\}$

Démonstration: La première assertion est évidente puisque $G_{\mathfrak{t}}$ a un nombre fini d'orbites dans $\oplus_{1 \leq i \leq p} E_2(h_i) \cap \mathfrak{g}_1$ ([Vi]) et opère sur $W_{\mathfrak{t}}$.
Pour la seconde assertion, on vérifie que $N_{\mathfrak{t}}.W_{\mathfrak{t}} = \mathfrak{g}"_1$ par récurrence sur p, le cas $p = 2$ résultant du lemme 1.1.1. On suppose que $p \geq 3$ et on reprend les notations de la démonstration du lemme précédent.
Par récurrence on a :

$$\mathfrak{B}"_1 = \{x \in \mathfrak{B}_1 \mid \text{ tel que } \prod_{1 \leq k \leq p-1} F_k^{\mathfrak{B}}(x) \neq 0\} = N_1.W^{\mathfrak{B}} \quad (1)$$

avec $W^{\mathfrak{B}} = \{x_1 + ... + x_{p-1} \ , \ x_i \in E_2'(H_i) \cap \mathfrak{g}_1 \ , \ [x_i, x_j] = 0 \ , i, j = 1, ..., p-1\}$.
Par le lemme 1.1.1 appliqué à $h = H_1 + ... + H_{p-1}$, pour $x \in \mathfrak{g}"_1$, il existe $n \in N_2, y \in \mathfrak{B}_1'$ et $x_p \in E_2'(H_p) \cap \mathfrak{g}_1$ tels que $[y, x_p] = 0$ et $x = n(y + x_p)$.
Or pour $k = 1, ..., p-1$ on a $F_k(x) = F_k^{\mathfrak{B}}(y)$ donc $y \in \mathfrak{B}"_1$ et par (1) $\exists n_1 \in N_1$ et $z \in W^{\mathfrak{B}}$ tels que $y = n_1 z$ d'où $x = n(n_1 z + x_p) = n n_1 (z + n_1^{-1} x_p) = n n_1 (z + x_p)$ et $z + x_p \in W_{\mathfrak{t}}$.
Pour finir, soit $z \in W_{\mathfrak{t}}$, il suffit de noter que l'équation $nz \in W_{\mathfrak{t}}$, avec $n \in N_{\mathfrak{t}}$ admet comme seules solutions le centralisateur de z dans $N_{\mathfrak{t}}$. □

Proposition 1.4.5
1. *L'action de* $\mathbf{P_t}$ *dans* $\mathfrak{g}_1$ *(resp.*$\mathfrak{g}_{-1}$*) est géométriquement préhomogène et* $F_1, ..., F_p$ *(resp.*$F_1^*, ..., F_p^*$*) en sont les invariants relatifs fondamentaux.*
2. *On suppose que* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
   Soit $M = \cap_{1 \leq k \leq p} Ker \chi_k$, *l'anneau* $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_1]^M$ *des polynômes définis sur* $\mathfrak{g}_1$ *qui sont* $M-$*invariants est égal à l'anneau* $\mathbb{C}[F_1, ..., F_p]$.

Démonstration: On procède comme dans la proposition 7.4 de [Mu 4] . □

Remarque 1.4.6 *1. Pour $x \in \mathfrak{g}"_1$, l'orbite $G.x$ est faiblement sphérique au sens de [Sa 4] et $(G, G_x, P_\mathfrak{t})$ est un triplet sphérique (i.e. $\overline{P_\mathfrak{t}}$ a une orbite Zariski-ouverte dans $\overline{G}.x$).*

2. Dans le cas réel (i.e. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$), soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ telle que $\theta/\mathfrak{a} = -Id$. Lorsqu'il existe $x \in W_\mathfrak{t}$ tel que $(x, 2H_0, \theta(x))$ soit un sl_2-triplet, soit $\theta_x = \theta_{x,2H_0}(-1)$ l'involution associée alors θ_x et θ commutent et la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_\mathfrak{t}$ est $\theta_x\theta$-stable minimale au sens de Van den Ban puisqu'on peut prendre un ordre sur Δ_0 pour lequel :

$$\{\lambda \in \Delta_0 \mid \lambda \succ 0\} \subset \Delta_0^+.$$

Rappelons que :

• Une condition suffisante pour que $W_{\mathfrak{t},\theta} = \{x \in W_\mathfrak{t} \mid (x, 2H_0, \theta(x)$ soit 1 sl_2-triplet $\} \neq \emptyset$ est l'existence de racines fortement orthogonales : $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ de Δ_1 et d'une partition $I_1, ..., I_p$ de $\{1, ..., n\}$ telles que $H_i = \sum_{j \in I_i} h_{\lambda_j}$ pour $i = 1, ..., p$ (cf.lemme 1.17,1 p.18 de [Bo-Ru 2]), cette condition est toujours vérifiée dans le cas commutatif (cf. lemme 2.3.2).

• Lorsque le préhomogène est commutatif on a $G^{\theta_x} = G_x$ (prop.4.4.5 p.146 de [Ru 3]) .

Ce résultat est en général faux lorsque le préhomogène n'est pas commutatif.

Par exemple, lorsque le sous-espace vectoriel $U = Ker(adx : \mathfrak{g}_2 \mapsto \mathfrak{g}_3)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (ce qui est toujours notre cas lorsque $\mathfrak{g}_2 \neq \{0\}$ puisque $U = \mathfrak{g}_2$) le sous-espace vectoriel $V = ad(x^{-1})^2(U)$ est inclus dans $(\mathfrak{g}_0)_{\theta_x} = \{z \in \mathfrak{g}_0 \mid \theta_x(z) = z\}$ car les éléments non nuls de U sont primitifs de poids 4 mais l'application $ad(x^{-1})^4 : \mathfrak{g}_2 \mapsto \mathfrak{g}_{-2}$ est injective.

3. Lorsque $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 2}$, ce qui est toujours possible dans les cas "classiques" (i.e. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ de type $(B_n$ ou C_n ou $D_n, \alpha_k)$ avec $2 \leq k < n)$, le sous-groupe parabolique $P'_\mathfrak{t}$, projection de $P_\mathfrak{t}$ sur $\Gamma = G/H$ (cf.2. de la remarque 1.4.1), est un sous-groupe parabolique de Γ. Les invariants relatifs fondamentaux $F_1, ..., F_p$, peuvent être obtenus à partir des invariants relatifs fondamentaux associés à un préhomogène de type commutatif (cf.les travaux de A.Mortajine dans [Mo] notamment le iii) du théorème 4.1.1), également à partir des représentations d'algèbres de Jordan (cf.[Cl] et dans ce cas H est compact).

Dans le cas complexe par exemple, Γ opère sur $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_1]^M$ avec multiplicité 1 lorsque $\mathfrak{t}$ a pour dimension le rang de Γ (ce qui est toujours possible cf.prop.2.4.3), on retrouve le théorème 4.2.2 de [Mo] en appliquant la même démonstration que dans le théorème 5.3.1 de [Ru 3].

Les différents invariants relatifs fondamentaux et les caractères correspondants vérifient encore les relations bien connues dans le cas des préhomogène commutatifs :

Lemme 1.4.7 *Pour $k = 1, ..., p$ on a : $\chi^*_{p-k} = \chi_k \cdot \chi_p^{-1}$ en tant que caractères de G_{h_k}, et pour $x \in E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ et $y \in E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ qui commutent, $F_p(x+y)$ est proportionnel à $F_k(x)P_{p-k}(y)$, à l'exception*

1. du cas $(\Delta, \Sigma_1) = (C_n, \alpha_k)$ avec $\mathfrak{t} = \mathbb{F}(\sum_{1 \leq i \leq k} h_{\epsilon_i - \epsilon_{k+i}}) + \mathbb{F}(\sum_{1 \leq i \leq k} h_{\epsilon_i + \epsilon_{k+i}})$,

2. des $\mathbb{F}-$formes du cas exceptionnel (E_7, α_6)

où les relations deviennent : $\chi_1^* = \chi_2^{-2}.\chi_1$ et $F_2^2(x+y)$ est proportionnel à $F_1(x)P_1(y)$ pour $x \in E_2(h_1) \cap \mathfrak{g}_1$ et $y \in E_0(h_1) \cap \mathfrak{g}_1$ qui commutent.

Démonstration: 1) Pour $k = 1, ..., p-1$, soient d_k le degré de F_k, d'_k celui de P_{p-k} et $p_{i,j}(h_k)$ la dimension du sous-espace : $E_{i,j}(h_k) = E_i(h_k) \cap E_j(2H_0 - h_k)$.
Introduisons également les rationnels suivants :

$$N = \frac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{d_p}, \quad m_k = \frac{1}{Nd_k}(p_{2,0}(h_k) + \frac{p_{1,1}(h_k)}{2}) \ , \quad m'_k = \frac{1}{Nd'_k}(p_{0,2}(h_k) + \frac{p_{1,1}(h_k)}{2}) \ ,$$

donc $m_k d_k + m'_k d'_k = d_p$.

Par unicité des invariants relatifs fondamentaux , on a pour $(i,j) \neq (0,0)$ et $g \in G_{h_k}$:

$$(det(g/_{E_{i,j}(h_k)})^2 = \chi_k(g)^{\frac{ip_{i,j}(h_k)}{d_k}} \psi(g)^{\frac{jp_{i,j}(h_k)}{d'_k}} \quad , \quad \psi \text{ étant le caractère associé à } P_{p-k}$$

donc on obtient :

$$(det(g/_{\mathfrak{g}_1})^2 = \chi_k(g)^{2Nm_k}.\psi(g)^{2Nm'_k} = \chi(g)^{2N} \quad (1)$$

d'où pour $x \in E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ et $y \in E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ tels que $[x,y] = 0$, $F(x+y)^{2N}$ et $F_k(x)^{2Nm_k} P_{p-k}(y)^{2Nm'_k}$ sont proportionnels puisque dans le cas algébriquement clos l'ensemble $\{x+y \mid x \in E'_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1 \ , \ y \in E'_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1 \mid [x,y] = 0\}$ est inclus dans une seule orbite de G_{h_k}.

2) Par dualité (cf. théorème 1.4.1 p.17 de [Ru 3]) on a : $\chi_p^* = \chi_p^{-1}$ et $\psi = (\chi_{p-k}^*)^{-1}$.

3) a) Lorsque $m_k = m'_k = 1$ la démonstration est terminée. Cela convient dans les cas classiques non cités dans le lemme (cf. démonstration de la prop.1.2.4 puisque dans ces cas $p_{1,1}(h_k) = 0$).

b) Dans les cas restants, lorsque $d_k + d'_k = d_p$ (2) et que d_k (resp.d'_k) est le degré de l'invariant relatif fondamental du préhomogène absolument irréductible : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$, $\mathfrak{s}$ étant la tds engendrée par le sl_2-triplet $(y, 2H_0 - h_k, y^{-1})$ (resp.(x, h_k, x^{-1})) ainsi F_k (resp. P_{p-k}) est également l'invariant relatif fondamental du préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ par conséquent, pour $(x,y) \in \{x+y \in E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E'_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1 \mid [x,y] = 0\}$, il existe un entier n et une fonction, notée c, tels que $F(x+y) = c(y)F_k^n(x)$ d'où $n = m_k$ donc $m_k \in \mathbb{N}^*$, de même $m'_k \in \mathbb{N}^*$, d'où par la relation (2) on a $m_k = m'_k = 1$ et on applique a) (3).

c) Il reste les cas énumérés dans le lemme et pour lesquels on a $d_2 = d_1 = d'_1$, le calcul donne $m_1 = m'_1 = \frac{1}{2}$ (cf.démonstration de la prop. 1.2.4 et du lemme 1.3.1). □

Remarque 1.4.8 *Les préhomogènes introduits dans ce paragraphe vérifient une propriété de descente que l'on peut énoncer ainsi.*

• $\forall k = 1, ..., p-1$, *l'algèbre $\mathfrak{U}^+(k)$ a les mêmes propriétés que $\mathfrak{g}$:*

1. *elle est absolument simple engendrée par* $\mathfrak{U}^+(k)_{\pm 1}$,
2. $(\mathfrak{U}^+(k)_0, \mathfrak{U}^+(k)_1, \frac{h_k}{2})$ *est un PV absolument irréductible et régulier,*
3. *lorsque* $k \geq 2$, $(H_1, ..., H_k)$ *sont des éléments* 1*-simples très spéciaux de la sous-algèbre déployée maximale,* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{U}^+(k)$, *et de somme* h_k.

$F_1, ..., F_k$ *sont les invariants relatifs fondamentaux du PV :* $(P^{\mathfrak{U}^+(k)}(H_1, ..., H_k), \mathfrak{U}^+(k)_1)$, $P^{\mathfrak{U}^+(k)}(H_1, ..., H_k)$ *étant le sous-groupe parabolique de* G_{h_k} *associé à* $H_1, ..., H_k$ *(avec cet ordre), il est donné par :*

$$P^{\mathfrak{U}^+(k)}(H_1, ..., H_k) = \{ \begin{array}{ll} G_{\mathfrak{t}} & \text{pour } k = 1 \\ G_{\mathfrak{t}} exp(ad(\oplus_{1 \leq i < j \leq k}(E_{i,j}(-1,1) \oplus E_{i,j}(-2,2)))) & \text{pour } k \geq 2 \end{array}$$

et on a : $P^{\mathfrak{U}^+(k)}(H_1, ..., H_k) \subset P(H_1, ..., H_p)_{h_k}$.

• *Soit* (x, H_1, x^{-1}) *un* sl_2*-triplet et* $\mathfrak{s}$ *l'algèbre qu'il engendre alors :*

1. $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1, H_0 - \frac{H_1}{2})$ *est* 1*-irréductible et absolument irréductible régulier pour* $p \geq 3$, *lorsqu'on supposera de plus dans le cas orthogonal :* $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ *de type*

$$\begin{cases} (D_n, \alpha_k) \text{ que } 3k \leq 2n-2, \\ (B_n, \alpha_k) \text{ que } 3k \leq 2n-1. \end{cases}$$

   Notons que dans ce cas, lorsque $(\overline{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}_0, \overline{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}_1)$ *est encore de type orthogonal, alors il vérifie les mêmes conditions (cf.démonstration de la prop.1.2.4).*

2. *Pour* $p \geq 3$, $H_2, ..., H_p$ *sont des éléments* 1*-simples très spéciaux de somme* $2H_0 - H_1$ *appartenant à une sous-algèbre abélienne déployée de* $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$.

Le sous-groupe parabolique de $G_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}$ *associé à* $H_2, ..., H_p$, *noté* $P^{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}(H_2, ..., H_p)$, *vérifie :*

$$P^{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}(H_2, ..., H_p) = \begin{cases} (G_{\mathfrak{t}})_x \text{ pour } p = 2, \\ (G_{\mathfrak{t}})_x exp(ad(\oplus_{2 \leq i < j \leq p}(E_{i,j}(-1,1) \oplus E_{i,j}(-2,2)))) \text{ pour } p \geq 3 \end{cases}$$

et on a : $P^{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}(H_2, ..., H_p) \subset P(H_1, ..., H_p)_{\mathfrak{s}}$.

$F_2, ..., F_k$ *sont des invariants relatifs du PV :* $(P^{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}(H_2, ..., H_p), \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$, *fondamentaux lorsque* $p \geq 3$.

Dans le but de montrer l'existence d'équations fonctionnelles pour les fonctions Zétas associées à un sous-groupe parabolique très spécial, P, dans le cas $\mathfrak{p}-$adique ceci à l'aide du théorème $k_{\mathfrak{p}}$ de F.Sato (p.477 de [Sa 3]), on commence par établir les propriétés nécessaires portant sur les orbites singulières de P.

2 Un résultat sur les orbites des paraboliques très spéciaux

2.1 Le résultat

Les notations sont celles du paragraphe 1.4.

Soient $S_{P_\mathfrak{t}} = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid \prod_{1\leq i\leq p} F_i(x) = 0\}$ (resp. $S^*_{P_\mathfrak{t}} = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \prod_{1\leq i\leq p} F^*_i(x) = 0\}$), et $N = exp(ad(\oplus_{\alpha\in\Delta_0^+}\ \mathfrak{g}^\alpha))$.

Théorème 2.1.1 *1. $P_\mathfrak{t}$ a un nombre fini d'orbites dans $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$.*

2. Pour tout $x \in S_{P_\mathfrak{t}}$ (resp. $S^*_{P_\mathfrak{t}}$) il existe $i \in \{1, ..., p\}$ tel que $\chi_i/((P_\mathfrak{t})_x)^0 \neq 1$ (resp. $(\chi^*_i(/(P_\mathfrak{t})_x)^0 \neq 1$).

Il a déjà été établi pour quelques exemples de préhomogène commutatifs (cf.[Sa 3] et [H 2]).

Démonstration: Par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{t}$ mais on remplace le point 2) par :

2.1.2 *Pour tout $x \in S_{P_\mathfrak{t}}$ (resp. $S^*_{P_\mathfrak{t}}$) il existe $z \in P_e.x$ et $u \in P(\check{\mathfrak{g}})$, commutant à z et à $\mathfrak{t}$, tel que $B(u, .)/_\mathfrak{t} \neq 0$, P_e étant le groupe engendré par N et $h_v(t)$ pour $v \in P(\check{\mathfrak{g}})$ et $t \in \mathbb{F}^*$.*

qui implique 2), en effet soit $i_0 =$inf$\{i \in \{1, ..., p\} \mid B(u, H_i) \neq 0\}$, l'élément $h_u(t) \in (P_z)^0$ et vérifie $\chi_{i_0}(h_u(t)) = t^a$ avec $a \neq 0$ (cf. lemme 1.2.1).

On note $P_\mathfrak{t} = P(H_1, ..., H_p)$.
Lorsque $p = 1$, on a $P_\mathfrak{t} = G$ et le résultat est évident (pour 2.1.2 cf.6. des notations).

Soit x non nul appartenant à $\mathfrak{g}_1$ que l'on décompose suivant $ad(H_1)$: $x = x_2 + x_1 + x_0$ avec $x_i \in E_i(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ pour $i = 0, 1, 2$.

1) Lorsque x_2 admet H_1 comme élément 1-simple (i.e. $F_1(x) \neq 0$), il existe $g \in N$ tel que $x' = g(x) = x_2 + y_0$ avec $y_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$, $\mathfrak{s}$ étant l'algèbre (réductive dans $\mathfrak{g}$) engendrée par le sl_2-triplet construit avec x_2 et H_1 (lemme 1.1.1).
Le point 1) découle de l'hypothèse de récurrence appliquée au préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ avec le parabolique associé à $(H_2, ..., H_p)$ (cf.remarque 1.4.8).
Lorsque $F_i(x) = 0$, on a $F_1(x_2)F^{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}_{i-1}(y_0) = 0$ (lemme 1.4.7 appliqué au préhomogène : $(\mathfrak{U}^+(i)_0, \mathfrak{U}^+(i)_1)$ et le résultat découle à nouveau de l'hypothèse de récurrence appliquée au préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ avec le parabolique associé à $(H_2, ..., H_p)$.
Notons que $f.P(\check{\mathfrak{U}}(\mathfrak{s})) \subset P(\check{\mathfrak{g}})$, f étant l'indice de connexion du système de racines de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$.

2) Lorsque $F_1(x) = 0$, on montre le théorème cas par cas suivant le type de système de racines dans les paragraphes qui suivent en omettant le cas $x_1 = x_2 = 0$ puisque le point 1) découle de l'hypothèse de récurrence appliquée au préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_1)_0, (\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_1)_1)$ avec le parabolique associé à $H_2, ..., H_p$ et $u = H_1$ convient pour le point 2).

Notons qu'il suffit de prouver 1) pour tous les paraboliques très spéciaux et minimaux pour l'inclusion, à l'action de G près, ceci dans le cas algébriquement clos car $\mathbb{F}$ est un F-corps (théorème 5, chapitre III,paragraphe 4.4 de [Serre]).

Les résultats pour $\mathfrak{g}_{-1}$ s'obtiennent de manière analogue et la démonstration est omise. $\square$

La démonstration restante consiste à construire des représentants plus simples des éléments de $S_{P_\mathfrak{t}}$ (cf.2.1.2) et pour ceci on regroupe quelques résultats techniques dans le paragraphe suivant avant d'effectuer la vérification cas par cas.

2.2 Lemmes techniques ($\mathbb{F}$ est de caractéristique 0)

Soit $x \in \mathfrak{g}_1$, on note $s(x) = \{\mu \mid X_\mu \neq 0\}$, $x = \sum_{\mu\in\Delta_1} X_\mu$ désignant la décomposition de x suivant les sous-espaces radiciels.

Lemme 2.2.1 *Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène pour lequel $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $|i| \geq 3$.*

Soit x non nul dans $\mathfrak{g}_1$, tel que $s(x)$ contienne une racine μ_0 de Δ_1, longue dans Δ_1 et de hauteur minimale parmi les racines de $s(x)$ alors il existe au plus une racine $\mu_1 \in \Delta_1$ telle que

- $n(\mu_0, \mu_1) = -1$
- $N.x \cap \ (\mathfrak{g}^{\mu_0} \oplus \mathfrak{g}^{\mu_1} \oplus \ E_0(h_{\mu_0}) \cap \mathfrak{g}_1 \ ) \neq \emptyset$.

Démonstration: Soit β une racine longue dans Δ_1, on rappelle que $E_2(h_\beta) \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^\beta$ et que pour $\alpha \in \Delta_0$ on a $\alpha + \beta \in \Delta \ \Leftrightarrow \ n(\alpha, \beta) < 0$.

1) Prenons $g = exp(ad(A))$, avec $A = \sum_{\mu\in s(x) \mid n(\mu,\mu_0)=1} X_{\mu-\mu_0}, X_{\mu-\mu_0}$ choisi tel que $[X_{\mu-\mu_0}, X_{\mu_0}] = -X_\mu$, on vérifie facilement que $s(y) \subset \{\mu \in \Delta_1 \mid \ n(\mu, \mu_0) \leq 0\} \cup \{\mu_0\}$ avec $y = g(x)$.

2) Soit $s_{-1} = \{\mu \in s(y) \mid n(\mu, \mu_0) = -1\}$ et $\mu \in s_{-1}$. Comme $\Delta_3 = \emptyset$, la considération de la μ-chaine définie par μ_0 permet de montrer que toutes les racines de s_{-1} sont également longues dans Δ_1; de plus soit $\mu' \in s_{-1}$, comme $\mu_0 + \mu + \mu' \notin \Delta$ on a $0 \leq n(\mu_0 + \mu, \mu') = n(\mu_0, \mu') + n(\mu, \mu')$ d'où $n(\mu, \mu') \geq 1$.

Lorsque s_{-1} a au moins 2 éléments, soit μ_1 la racine de hauteur minimale de s_{-1} et soit $g' = exp(ad(B))$ avec $B = \sum_{\mu\in s_{-1}-\mu_1} X_{\mu-\mu_1}, X_{\mu-\mu_1}$ choisi tel que $[X_{\mu-\mu_1}, X_{\mu_1}] = -X_\mu$, alors $g'(y) \in \mathfrak{g}^{\mu_0} \oplus \mathfrak{g}^{\mu_1} \oplus \ E_0(h_{\mu_0}) \cap \mathfrak{g}_1$. $\square$

Indiquons deux résultats élémentaires lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène pour lequel $\mathfrak{g}_i = \{0\}$ pour $|i| \geq 3$.
Dans les 2 lemmes qui suivent, $H_1, ..., H_p$ sont simplements des éléments de $\mathfrak{a}$ et on note toujours $\mathfrak{t} = \oplus_{1\leq i\leq p} \mathbb{F} H_j$.
$N(H_1, ..., H_p)$ est le sous-groupe engendré par $\oplus_{\{\alpha\in\Delta_0 | \alpha\succ 0\}} \mathfrak{g}^\alpha$, avec $\{\alpha \succ 0 \Leftrightarrow \ \alpha(H_{j_0}) < 0\}$ et $j_0 = \inf\{j | \alpha(H_j) \neq 0\}$ et $P_e(H_1, ..., H_p)$ désigne le groupe engendré par $exp(ad(A))$, A élément nilpotent de $\mathfrak{g}_0$ commutant à $\mathfrak{t}$ ou bien $A \in \oplus_{\{\alpha\in\Delta_0 | \alpha\succ 0\}} \mathfrak{g}^\alpha$.

Lemme 2.2.2 *Soit (x, h, x^{-1}) un sl_2-triplet tel que :*

1. *h et $\mathfrak{t}$ commutent,*
2. *$x \in E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$*

pour $i \in \mathbb{Z}$ soient $y_i \in E_i(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ alors $x + y_{-1} + y_0 \in N(H_1, ..., H_p)(x + \sum_{i\in\mathbb{Z}} y_i)$ et $N(H_1, ..., H_p)(x + \sum_{i\in\mathbb{Z}} y_i) \cap (x + y_{-1} + \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1) \neq \emptyset$, $\mathfrak{s}$ étant l'algèbre engendrée par x, h, x^{-1} et H_1.

Démonstration: Comme : $E_{-i}(h) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$ pour $i \geq 2$, on a $y = \sum_{i\in\mathbb{Z}} y_i = y_{-1} + y_0 + \sum_{i\geq 1} y_i$, or pour $i \geq 1$ il existe $A_i \in E_{i-2}(h) \cap E_{-2}(H_1) \cap \mathfrak{g}_0$ tel que $[A_i, x_2] = -y_i$ d'où $exp(ad(\sum_{i\geq 1} A_i))(x_2 + y) = x_2 + \sum_{i\geq 1}[A_i, x_2] + y = x_2 + y_{-1} + y_0$.
Comme $[x, y_0] \in E_2(h) \cap E_0(H_1 - h) \cap \mathfrak{g}_2$, il existe $A \in E_{-2}(h) \cap E_0(H_1 - h) \cap \mathfrak{g}_0 \subset E_{-2}(H_1) \cap \mathfrak{g}_0 (\subset \oplus_{\alpha\in\Delta_0^+} \mathfrak{g}^\alpha)$ tel que $ad(x)^2(A) = [x, y_0]$ et on a $exp(ad(A))(x + y_{-1} + y_0) = x + y_{-1} + y_0'$ avec $y_0' = [A, x] + y_0$ d'où $[x, y_0'] = 0$. □

On continue à simplifier les représentants des orbites :

Lemme 2.2.3 *Soient (x, h, x^{-1}) et (y, h', y^{-1}) 2 sl_2-triplets tels que*

1. *h, h' et $\mathfrak{t}$ commutent,*
2. *$x \in E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ et $y \in E_0(H_1) \cap E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_1$,*
3. *$\oplus_{i\geq 2} E_{-i}(H_1 - h) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$.*

et soit $z \in E_0(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ tel que $[[z, y^{-1}], \mathfrak{t}] = 0$ alors $P_e(H_1, ..., H_p)(x + y + z + E_2(H_1) \cap E_3(h) \cap \mathfrak{g}_1)$ rencontre $x + y + E_0(H_1) \cap E_0(h) \cap E_0(h') \cap \mathfrak{g}_1 + E_2(H_1) \cap E_3(h) \cap \mathfrak{g}_1$.

Démonstration: Comme $[y, E_{-1}(h') \cap E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1] \subset E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$ et que pour $i \geq 2$ on a $ad(y^{-1})^i(E_i(h') \cap E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1) \subset E_{-i}(h') \cap E_i(h) \cap \mathfrak{g}_{1-i} = \{0\}$, z admet la décomposition suivante relativement à $ad(h')$: $z = z_0 + z_1$ avec $z_i \in E_i(h') \cap E_0(H_1) \cap E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1$ pour $i = 0, 1$.
Soit $v \in E_2(H_1) \cap E_3(h) \cap \mathfrak{g}_1$ et soit $A = [z_1, y^{-1}]$, alors $[A, \mathfrak{t}] = 0$ d'où $exp(ad(A)) \in P_e(H_1, ..., H_p)$ et $[A, y] = -z_1$ donc $exp(ad(A))(x + y + z + v) = x + y + z_0 + [A, z_0] + \frac{1}{2}[A, z_1] + ([A, x] + v)$ par 3).
On termine en appliquant la démonstration du lemme précédent puisque

$$[A, x] + v \in E_2(H_1) \cap E_3(h) \cap \mathfrak{g}_1 \ , \ [A, z_0] + \frac{1}{2}[A, z_1] \in E_0(H_1) \cap E_1(h) \cap \mathfrak{g}_1$$

et que $[E_{-2}(H_1) \cap E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_0, E_0(H_1) \cap E_1(h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_2(H_1) \cap E_3(h) \cap \mathfrak{g}_1] = \{0\}$ par 3).□

Remarque : L'hypothèse 3) du lemme est vérifiée lorsque $H_1 - h$ est 1-simple et $[[z, y^{-1}], \mathfrak{t}] = 0$ pour $p = 2$.

Ce dernier lemme utilise des descriptions faites ultérieurement.

Lemme 2.2.4 *Soient $P(H_1, ..., H_p)$ un sous-groupe parabolique standard très spécial , $S = \{\lambda_1, ..., \lambda_q\}$ $q(\geq 1)$ racines fortement orthogonales de Δ_1, longues dans Δ_1, telles que $\lambda_i(H_1) =$*

2 *pour* $i = 1, ..., q$ *et soit* $\Delta_{-1}(h) = \{\mu \in \Delta_1 \mid \mu(H_1) = 0 \text{ et } \mu(h) = -1\} \neq \emptyset$ *avec* $h = \sum_{1 \leq i \leq q} h_{\lambda_i} \neq H_1$.

Pour x_2 *de support* S *et* $y \in E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$, *il existe* $r(\leq q)$ *racines fortement orthogonales,* $\mu_1, ..., \mu_r$, *de* $\Delta_{-1}(h)$ *telles que pour* $i = 1, ..., r$ *on a* $n(\mu_i, \lambda_i) = -1$ *(à la numérotation des* λ_i *près) et* $P_e(H_1, ..., H_p)(x_2 + y) \cap (\oplus_{1 \leq j \leq q} \mathfrak{g}^{\lambda_j} \oplus_{1 \leq i \leq r} \mathfrak{g}^{\mu_i} \oplus E_0(H_1) \cap E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1) \neq \emptyset$
(pour $p \geq 3$: $P_e(H_1, ..., H_p)(x_2 + y) \cap (x_2 \oplus_{1 \leq i \leq r} \mathfrak{g}^{\mu_i} \oplus E_0(H_1) \cap E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1) \neq \emptyset$).

Démonstration: D'après le lemme 2.2.1, on peut supposer que $y = y_{-1} + y_0$ avec $y_i \in E_i(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ pour $i = -1, 0$ et $y_{-1} \neq 0$.

Comme $E_1(h_{\lambda_1}) \cap E_{-1}(h) \cap \mathfrak{g}_1 \subset E_{-2}(h_{\lambda_2} + ... + h_{\lambda_q}) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$(cf.2) de la remarque 1.2.3) on a :

$$\Delta_{-1}(h) = \cup_{1 \leq i \leq q} \Delta_{-1}(h_{\lambda_i}) \text{ avec}$$

$$\Delta_{-1}(h_{\lambda_i}) = \{\mu \in \Delta_1 \mid \mu(H_1) = 0 \ , \ n(\mu, \lambda_i) = -1 \ , \ n(\mu, \lambda_j) = 0 \text{ pour } 1 \leq j \neq i \leq q\},$$

par conséquent, en procédant comme dans la démonstration du lemme 2.2.1 et en changeant éventuellement l'indexation des $\lambda_i, i \geq 2$, on peut supposer qu'il existe $\gamma_1 \in \Delta_{-1}(h_{\lambda_1})$ tel que :

$$y_{-1} = X_{\gamma_1} + z_0 \text{ avec } z_0 \in E_0(h_{\lambda_1}) \cap E_{-1}(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1.$$

Lorsque $q = 1$, la démonstration est terminée.

Pour $q \geq 2$ et $z_0 \neq 0$, on continue la réduction en décomposant z_0 relativement à $ad(h_{\lambda_2})$:

$$z_0 = t_{-1} + t_0 \ , \ t_i \in E_0(h_{\lambda_1}) \cap E_i(h_{\lambda_2}) \cap E_{-1}(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1 \ , \ i = -1, 0,$$

et on peut supposer que $t_{-1} \neq 0$ en changeant éventuellement l'indexation des $\lambda_i, i \geq 2$.

Pour $\gamma \in s(t_{-1})$ on a $n(\gamma, \gamma_1) \in \{0, 1\}$ et soit $a = \text{Min}\{n(\gamma, \gamma_1), \gamma \in s(t_{-1})\}$, prenons γ_2 de hauteur minimale dans $A = \{\gamma \in s(t_{-1}) \mid n(\gamma, \gamma_1) = a\}$.
Pour $\gamma \in s(t_{-1}) - \{\gamma_2\}$ et $\alpha \in \{\lambda_i, i = 1, ..., q, \gamma_1, \gamma' \in s(t_{-1}) - \{\gamma_2\}\}$, $\gamma - \gamma_2 + \alpha \notin \Delta$ puisque $n(\gamma - \gamma_2, \alpha) \geq 0$ et que α est longue dans Δ_1; notons que $\mathfrak{g}^{\gamma - \gamma_2}$ normalise les sous-espaces $V = E_0(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ et $W = E_0(h_{\lambda_1}) \cap E_0(h_{\lambda_2}) \cap E_{-1}(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$.
Ainsi :

• Lorsque $p = 2$, on fait opérer $exp(ad(\oplus_{\gamma \in s(t_{-1}) - \gamma_2} \mathfrak{g}^{\gamma - \gamma_2}))(\subset G_{\mathfrak{t}})$ pour se ramener à $t_{-1} = X_{\gamma_2}$.

• • Lorsque $p \geq 3$, Δ est de type classique B_n, C_n, BC_n, D_n avec $\Sigma_1 = \{\alpha_k\}$. On a $k \leq n-1$ dans les cas B, C ou BC et $k \leq n-2$ dans le cas D car $\Delta_{-1}(h) \neq \emptyset$.
On reprend les notations du cas classique (§2.4).
Par la proposition 2.4.3, il existe : $l_1, ..., l_p$ tels que $l_{p+1} = 0 < l_p < ... < l_2 < l_1 = k$ tels que $H_i = \sum_{l_{i+1}+1 \leq j \leq l_i} h_{\epsilon_j}$ pour $i = 1, ..., p$. Ainsi, pour $j = 1, ..., q$, il existe $p_j \in \{l_2 + 1, ..., k\}$ et $q_j \in \{k+1, ..., n\}$ tels que $\lambda_j = \epsilon_{p_j} - (\pm)\epsilon_{q_j}$, et

$$\{\lambda \in \Delta_1 \mid \lambda(H_1) = 0, \lambda(h_{\lambda_i}) = -1\} = \{\epsilon_m + (\pm)\epsilon_{q_i}, 1 \leq m \leq l_2\}.$$

Si $\Delta_{-1}(h_{\lambda_i}) \neq \emptyset$, on a $q_j \neq q_i$ pour $1 \leq j \neq i \leq q$ donc par orthogonalité des racines λ_j on a $p_j \neq p_i$ (d'où $\frac{\lambda_j - \lambda_i}{2} \notin \Delta$) pour $1 \leq j \neq i \leq q$.

On fait opérer $exp(ad(\oplus_{\gamma \in A - \gamma_2} \mathfrak{g}^{\gamma - \gamma_2}))(\subset N)$ pour se ramener à $t_{-1} = X_{\gamma_2} + u$.
Lorsque $u \neq 0, u \in \oplus_{\gamma \in B} \mathfrak{g}^{\gamma}$, avec $B = \{\gamma \in s(t_{-1}) \mid n(\gamma, \gamma_1) = 1\} \neq \emptyset$ et $n(\gamma_2, \gamma_1) = 0$; il existe $m_1 \leq l_2$ tel que $\gamma_1 = \epsilon_{m_1} + (\pm)\epsilon_{q_1}$ donc $B = \{\delta = \epsilon_{m_1} + (\pm)\epsilon_{q_2}\}$ d'où $\delta - \gamma_1$ s'annule sur $\mathfrak{t}$.
Prenons $B \in \mathfrak{g}^{\delta - \gamma_1}$ tel que $[B, X_{\gamma_1}] = -u$ et $C \in \mathfrak{g}^{\mu}$ avec $\mu = \delta - \gamma_1 + \lambda_2 - \lambda_1$ tel que $[C, x_2] = -[B, x_2]$ et soit $g = exp(ad(C))exp(ad(B))(\in G_{\mathfrak{t}})$ alors

$$g(x_2 + y) = x_2 + X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2} + t_0 + y_0' \ , \ t_0 \in W, y_0' \in V$$

car $\mathfrak{g}^{\delta - \gamma_1}$ commute à $\oplus_{1 \leq i \neq 2 \leq q} \mathfrak{g}^{\lambda_i} \oplus \mathfrak{g}^{\gamma_2} \oplus \mathfrak{g}^{\delta} \oplus W$ et normalise V, que $\mathfrak{g}^{\mu}$ commute à $\oplus_{2 \leq i \leq q} \mathfrak{g}^{\lambda_i} \oplus \mathfrak{g}^{\mu + \lambda_1} \oplus \mathfrak{g}^{\gamma_1} \oplus \mathfrak{g}^{\gamma_2} \oplus W$ et normalise V.
On peut donc toujours supposer que $t_{-1} = X_{\gamma_2}$. □ de • •

On revient au cas général. Lorsque $q = 2$ la démonstration est finie.

Remarquons que, lorsque $n(\gamma_2, \gamma_1) = 1$, on peut supposer que $\gamma_2 - \gamma_1 \in \Delta_0^+$ (en changeant l'indexation des λ_i) et en procédant comme ci-dessus, il existe $g \in exp(ad(\mathfrak{g}^{\nu}))exp(ad(\mathfrak{g}^{\gamma_2 - \gamma_1}))(\subset P_e(H_1, ..., H_p)$ avec $\nu = \gamma_2 - \gamma_1 + \lambda_2 - \lambda_1$, tel que $g(x_2 + y) = x_2' + X_{\gamma_1} + t_0 + y_0'$, avec $t_0 \in W$, $y_0' \in V$ et $\{\lambda_i, i = 1, 3, ..., q\} \subset s(x_2') \subset \{\lambda_i, i = 1, ..., q\}$ car $E_2(h_{\lambda_2}) \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^{\lambda_2}$.
Lorsque $\gamma_2 - \gamma_1 \neq \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$ on a $s(x_2') = s(x_2)$.

Lorsque $q \geq 3$:

• Dans les cas classiques, on continue la démonstration par récurrence sur q, exactement comme cela a déjà été fait, dans le cas $P(H_1, ..., H_p)$ cité ci-dessus et dans l'unique cas restant P_0' (cf.prop.2.4.3).

• • Dans les cas exceptionnels, dont la description est rappelée dans le §2.5, on a toujours $q \leq 3$. De plus, lorsque $q = 3$, Δ est simplement lacé, $\mathfrak{g}$ est déployée et $H_1 - \sum_{1 \leq i \leq 3} h_{\lambda_i} = h_{\lambda_4}$, λ_4 étant une racine de Δ_1 orthogonale aux racines de S.
Dans les notations précédentes, soit $\gamma \in s(t_{-1})$, comme $n(\gamma, \lambda_4) = 1$ on a $\gamma + \lambda_2 - \lambda_4 \in \Delta_1$ or $\gamma_1 + \lambda_1 \in \Delta_2$ donc $n(\gamma_1 + \lambda_1, \gamma + \lambda_2 - \lambda_4) = n(\gamma_1, \gamma) - n(\gamma_1, \lambda_4) = n(\gamma_1, \gamma) - 1 \geq 0$ d'où $n(\gamma_1, \gamma) = 1$. Ainsi dans ce cas on se ramène toujours à $t_{-1} = 0$ c'est à dire que $r = 1$. □

2.3 Le cas commutatif ($\mathfrak{g}_2 = \{0\}$)

Dans tout ce paragraphe on suppose que $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$.

Proposition 2.3.1 ($\mathbb{F}$ *de caractéristique* 0) *Pour tout $x \in \mathfrak{g}_1$ (resp. $\mathfrak{g}_{-1}$), il existe un ensemble S de racines fortement orthogonales de Δ_1 (resp. Δ_{-1}) telles que $N.x \cap (\oplus_{\mu \in S} \mathfrak{g}^{\mu}) \neq \emptyset$.*

Démonstration: Par récurrence sur le rang de Δ, le cas de rang 1 étant évident.

Soit μ_0 une racine de hauteur minimale de $s(x)$. Lorsque μ_0 est longue dans Δ_1, on applique le lemme 2.2.1 puis l'hypothèse de récurrence au préhomogène $((\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\mu_0})_0, (\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\mu_0})_1)$, lorsqu'on prend pour sous-algèbre déployée maximale : $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\mu_0})$ et pour ordre sur $\Delta^{\perp\mu_0} = \{\alpha \in \Delta | (\alpha, \mu_0) = 0\}$ qui est le système de racines associé, l'ordre de Δ c'est à dire que $(\Delta^{\perp\mu_0})^+ = \{\alpha \in \Delta^+ | (\alpha, \mu_0) = 0\}$, ce qui termine la démonstration du cas simplement lacé.
Lorsqu'il existe une racine $\mu \in \Delta_1$ telle que $s(x) \subset \mu^\perp$, il suffit également d'appliquer l'hypothèse de récurrence au préhomogène $((\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_\mu)_0, (\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_\mu)_1)$.
Dans les cas restants, μ_0 est courte et par classification le préhomogène a pour système de racines gradué soit

1. (C_n, α_n) alors $\Delta_1 = \{\epsilon_i + \epsilon_j, i, j = 1, ..., n\}$ d'où $2\epsilon_n \notin s(x)$ et $s(x) \cap \{\epsilon_i + \epsilon_n, i = 1, ..., n-1\} \neq \emptyset$. Soit $i_0 = sup\{i \mid \epsilon_i + \epsilon_n \in s(x)\}$, à l'aide d'un élément convenable, g, de $exp(ad(\oplus_{1 \leq i \leq i_0 - 1} \mathfrak{g}^{\epsilon_i - \epsilon_{i_0}}))$, on peut se ramener à $s(g(x)) \subset \{\epsilon_{i_0} + \epsilon_n, \epsilon_i + \epsilon_j, 1 \leq i \leq j < n\}$; comme $ad(X_{\epsilon_{i_0} + \epsilon_n})$ est une surjection de $\oplus_{1 \leq i \leq n-1} \mathfrak{g}^{\epsilon_i - \epsilon_n} (\subset \oplus_{i=-1,0} E_i(h_{\epsilon_{i_0} + \epsilon_n}))$ sur $\oplus_{1 \leq i \leq n-1} \mathfrak{g}^{\epsilon_i + \epsilon_{i_0}}$, on peut se ramener au cas où $s(g(x)) \subset \{\epsilon_{i_0} + \epsilon_n, \epsilon_i + \epsilon_j, i, j \neq i_0, n\}$ et on applique l'hypothèse de récurrence à l'élément $y = g(x) - X_{\epsilon_{i_0} + \epsilon_n}$ dans le PV : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ avec $\mathfrak{s} = \mathbb{F}h_{2\epsilon_{i_0}} \oplus \mathbb{F}h_{2\epsilon_n}$.

2. (B_n, α_1) alors $\Delta_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_1 \pm \epsilon_j, j = 2, ..., n\}$ d'où $\mu_0 = \epsilon_1$ et $s(x) = \{\epsilon_1, \epsilon_1 + \epsilon_j, j = 2, ..., n\}$.
   Comme $ad(X_{\epsilon_1})$ est une surjection de $E_0(h_{\epsilon_1}) \cap \mathfrak{g}_0$ sur $E_2(h_{\epsilon_1}) \cap \mathfrak{g}_1$, à l'aide d'un élément convenable de $exp(ad(\oplus_{2 \leq j \leq n} \mathfrak{g}^{\epsilon_j}))$, noté g, on a $s(g(x)) = \{\epsilon_1\}$. □

Précisons la forme des sous-groupes paraboliques dans le cas commutatif :

Lemme 2.3.2 *1. Il existe un unique ensemble maximal ordonné de racines fortement orthogonales (longues) de Δ_1, $\lambda_1, ..., \lambda_n$, telles que le sous-groupe parabolique $P_0 = P(h_{\lambda_1}, ..., h_{\lambda_n})$ soit standard.*

2. Soit $P_\mathfrak{t}$ un sous-groupe parabolique standard alors $P_\mathfrak{t} \supset P_0$ et il existe p, $2 \leq p \leq n$, et des entiers : $l_0 = 0 < 1 \leq l_1 < ... < l_p = n$ tels que $P_\mathfrak{t} = P(H_1, ..., H_p)$ avec $H_i = \sum_{l_{i-1}+1 \leq j \leq l_i} h_{\lambda_j}$ pour $i = 1, ..., p$.

Démonstration: On rappelle qu'un sous-groupe parabolique $P(H_1, ..., H_p)$, avec $\mathfrak{t} = \oplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{F}H_i \subset \mathfrak{a}$, est standard si $\{\lambda \in \Delta_0 \ | \lambda \succ 0\} = \{\lambda \in \Delta_0^+ | \lambda/_\mathfrak{t} \neq 0\}$ (cf.3) de la remarque 1.4.1).

1) Il est bien connu (par exemple lemme 6.3 de [Mu 2]) qu'un ensemble maximal de racines fortement orthogonales de Δ_1 peut être construit de manière canonique par orthogonalisations successives en prenant λ_1 l'unique racine simple de Σ_1 puis λ_2 l'unique racine simple de $\Delta^{(1)} = \{\lambda \in \Delta | \ n(\lambda, \lambda_1) = 0\}$ muni de l'ordre $\Delta^{(1)+} = \Delta^{(1)} \cap \Delta^+$ et qui appartient à Δ_1, puis λ_3 l'unique racine simple de $\Delta^{(2)} = \{\lambda \in \Delta^{(1)} | \ n(\lambda, \lambda_2) = 0\}$ muni de l'ordre $\Delta^{(2)+} = \Delta^{(2)} \cap \Delta^+$ et qui appartient à Δ_1, etc. jusqu'à épuisement des racines. L'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ ainsi construit est un ensemble maximal de racines fortement orthogonales de Δ_1 donc $\sum_{1 \leq i \leq n} h_{\lambda_i} = 2H_0$.

Soit $\alpha \in \Delta_0^+$ ne s'annulant pas sur $\mathfrak{t}_0 = \oplus_{1\leq i\leq n}\mathbb{F}h_{\lambda_i}$ alors par la construction précédente il existe (i,j) tels que $1 \leq i < j \leq n$ et $n(\alpha,\lambda_j) = -1 = -n(\alpha,\lambda_i)$ donc $P_0 = P(h_{\lambda_n},...,h_{\lambda_1})$ est un sous-groupe parabolique standard.

Soit $\{\mu_1,...,\mu_n\}$ un ensemble maximal de racines fortement orthogonales de Δ_1 tel que le sous-groupe parabolique $P_1 = P(h_{\mu_1},...,h_{\mu_n})$ soit standard, P_0 et P_1 sont conjugués par $Aut_0(\mathfrak{g},\mathfrak{a})_{H_0}$ puisqu'il existe $w \in W_0$, qui est le groupe de Weyl de Δ_0, tel que pour $i = 1,...,n$ on ait $w(\mu_i) = \lambda_{n-i+1}$ (par exemple, prop.4.4,2) de [Mu 2] avec l'irréductibilité de $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$). Comme P_0 et P_1 sont conjugués et standards, ils sont égaux d'où l'élément g, antécédent de w dans $Aut_0(\mathfrak{g},\mathfrak{a})_{H_0}$, appartient à $P_1 \cap Aut_0(\mathfrak{g},\mathfrak{a})_{H_0}$ donc pour $i = 1,...,n$ il existe $u_i \in \oplus_{\{\alpha\in\Delta_0^+|\alpha\succ 0\}}\mathfrak{g}^\alpha$ tels que $g(h_{\mu_i}) = h_{\mu_i} + u_i = h_{\lambda_{n-i+1}}$ d'où $g(h_{\mu_i}) = h_{\mu_i} = h_{\lambda_{n-i+1}}$.

2) Pour $i = 1,...,p$, le préhomogène $(E_0(H_i)\cap\mathfrak{g}_0, E_2(H_i)\cap\mathfrak{g}_1, \frac{H_i}{2})$ est commutatif et H_i est 1-simple ; il admet $\Delta'^{(i)} = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(H_j) = 0 \text{ pour } 1 \leq j \neq i \leq p\}$ comme système de racines lorsqu'on prend pour sous-algèbre déployée maximale $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{s}$, avec $\mathfrak{s} = \oplus_{1\leq j\neq i\leq p}\mathbb{F}H_j$, on munit $\Delta'^{(i)}$ de l'ordre induit par Δ, alors il existe un ensemble maximal de racines fortement orthogonales de $\Delta_1'^{(i)}$: $\{\mu_1^{(i)},...,\mu_{n_i}^{(i)}\}$, tel que le sous-groupe parabolique correspondant $P(h_{\mu_1^{(i)}},...,h_{\mu_{n_i}^{(i)}})$ soit standard et on a $H_i = \sum_{1\leq j\leq n_i} h_{\mu_j^{(i)}}$.

$\{\mu_j^{(i)}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n_i\}$ est alors un ensemble maximal de racines fortement orthogonales de Δ_1 (prop.4.4,1) de [Mu 2]).

Soit $l_0 = 0$ et pour $i = 1,...,p$, $l_i = n_1 + ... + n_i$ (donc $l_p = n$ par maximalité), pour $l_{i-1}+1 \leq j \leq l_i$ on pose $\mu_j = \mu_{j-l_{i-1}}^{(i)}$ alors $\{\mu_1,...,\mu_n\}$ est un ensemble maximal ordonné de racines fortement orthogonales de Δ_1 et il est facile de vérifier que le sous-groupe parabolique $P(h_{\mu_1},...,h_{\mu_n})$ est standard pour Δ_0^+ car chaque $P(h_{\mu_1^{(i)}},...,h_{\mu_{n_i}^{(i)}})$ est standard pour $\Delta_0'^{(i)+}$ et $P(H_1,...,H_p)$ est standard pour Δ_0^+. □

Remarque 2.3.3 *Soient* $\mathfrak{t}_0 = \oplus_{1\leq i\leq n}\mathbb{F}h_{\lambda_j}$ *et* $(\mathfrak{t}_0)^0 = \cap_{\lambda\in\Delta_0^\perp} Ker\lambda$ *avec* $\Delta_0^\perp = \cap_{1\leq i\leq n}\{\lambda \in \Delta_0 \mid n(\lambda,\lambda_i) = 0\}$ *alors* $\mathfrak{t}_0 \subset (\mathfrak{t}_0)^0 \subset \mathfrak{a}$ *et il est facile de vérifier par des considérations cas par cas que que* $\mathfrak{t}_0 = (\mathfrak{t}_0)^0$ *dans tous les cas sauf* (A_{2n-1},α_n) *pour lequel* $(\mathfrak{t}_0)^0 = \mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{t}_0$ *est de dimension* n.
Le sous-groupe parabolique P_0 *est un sous-groupe parabolique minimal uniquement dans les* 3 *cas :* (A_{2n-1},α_n), (B_2,α_1) *et* (C_n,α_n).

Démonstration de **2.1.2** dans le cas commutatif :

Le point 1) découle de la proposition précédente puisque les racines de S sont linéairement indépendantes.

On suppose que le sous-groupe parabolique $P_\mathfrak{t}$ est standard et on reprend les notations du lemme précédent.

Terminons la démonstration du point 2) lorsque la décomposition de $x \in \mathfrak{g}_1$ relativement à $ad(H_1)$ est : $x = x_2 + x_1 + x_0$ avec $F_1(x) = 0$.

Comme le PV : $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - H_1))_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - H_1))_1)$ est commutatif, on peut supposer que $s(x_2) \subset S_1 = \{\lambda_j, 1 \leq j \leq l_1\}$ (prop. 5.2.2, [Mu 2], les éléments de $\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - H_1))_0$ utilisés commutent à $\mathfrak{t}$) et lorsque $x_2 \neq 0$, soit $h = \sum_{\lambda \in s(x_2)} h_\lambda$.
Lorsque $x_2 \neq 0$, la décomposition de x_1 relativement à $ad(h)$ est de la forme : $x_1 = y_0 + y_1$ avec $y_i \in E_i(h) \cap E_{1-i}(H_1 - h) \cap \mathfrak{g}_1, i = 0, 1$, à l'aide de $exp(ad(E_{-1}(h) \cap E_0(H_1 - h) \cap \mathfrak{g}_0))$ on peut toujours supposer que $y_1 = 0$ ainsi $y_0 + x_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$ avec $\mathfrak{s} = \oplus_{\lambda \in s(x_2)} \mathbb{F} h_\lambda$.
La proposition 2.3.1 appliquée au préhomogène commutatif : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ permet de supposer que $s(x) = \{\mu_1, ..., \mu_k\}$, les racines $\mu_1, ..., \mu_k$ étant fortement orthogonales et telles que $\{\mu \in s(x) \mid \mu(H_1) = 2\} \subset S_1$, rappelons que $\{\mu \in s(x) \mid \mu(H_1) = 2\} \neq S_1$.
Ce résultat est encore vrai lorsque $x_2 = 0$.

Pour toute racine α de Δ_1, la quantité $\sum_{1 \leq i \leq k} n(\alpha, \mu_i) \in \{0, 1, 2\}$, puisqu'elle représente une valeur propre de $adh/\mathfrak{g}_1$, h étant l'élément 1-simple $h = \sum_{1 \leq i \leq k} h_{\mu_i}$. On rappelle également que

$$B(h_\alpha, H_1) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq l_1} n(\lambda_j, \alpha) B(h_{\lambda_j}, h_{\lambda_j}) = \frac{1}{2} B(h_{\lambda_1}, h_{\lambda_1})(\sum_{1 \leq i \leq l_1} n(\lambda_j, \alpha)).$$

Soient $\lambda \in S_1 - s(x)$ et $a = \sum_{1 \leq i \leq k} n(\lambda, \mu_i)$, examinons les différents cas :

1. Lorsque $a = 0$, l'élément $u = h_\lambda \in \cap_{1 \leq i \leq k} Ker \mu_i$ et vérifie $B(u, H_1) \neq 0$.
2. Lorsque $a = 1$, $n(\lambda, \mu_1) = 1$ et $n(\lambda, \mu_i) = 0$ pour $i \geq 2$ (à l'indexation près), donc $\mu_1(H_1) = 1$ et comme la racine λ est longue on a $n(\mu_1, \lambda) = 1$ d'où $u = 2h_\lambda - h_{\mu_1} \in \cap_{1 \leq i \leq k} Ker \mu_i$ et vérifie $B(u, H_1) \neq 0$.
3. Lorsque $a = 2$, on a soit
   • $n(\lambda, \mu_1) = n(\lambda, \mu_2) = 1$ et $n(\lambda, \mu_i) = 0$ pour $i \geq 3$ (à l'indexation près) donc, comme précédemment, $u = 2h_\lambda - h_{\mu_1} - h_{\mu_2} \in \cap_{1 \leq i \leq k} Ker \mu_i$ et vérifie $B(u, H_1) \neq 0$,
   soit
   • $n(\lambda, \mu_1) = 2$ et $n(\lambda, \mu_i) = 0$ pour $i \geq 2$ (à l'indexation près) d'où $\mu_1(H_1) = 1$. Or $\mu_1(2H_0) = \sum_{1 \leq j \leq n} n(\mu_1, \lambda_j) = 2$ donc il existe un unique $j > l_1$ tel que $n(\mu_1, \lambda_j) = 1$ d'où $n(\lambda_j, \mu_1) = 2$ car les racines λ_j et λ ont la même longueur par conséquent $n(\lambda_j, \mu_i) = 0$ pour $i \geq 2$ d'où $u = h_\lambda - h_{\lambda_j} \in \cap_{1 \leq i \leq k} Ker \mu_i$ et $B(u, H_1) = B(h_\lambda, H_1) \neq 0$.

□

2.4 Les cas classiques

Ce sont les cas (R_n, α_k) avec $R = B, BC, C$ ou D.

Les descriptions de Δ_0, Δ_1 et Δ_2 sont données dans la démonstration de la proposition 1.2.4, 3) b) (dont on reprend les notations) ceci lorsque $k \leq n - 1$ dans le cas C_n et $k \leq n - 2$ dans le cas D_n), en particulier :

$$\Delta_1 = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i \leq k < j \leq n \ , \ \epsilon_i, 1 \leq i \leq k\} \cap \Delta \ , \ \Delta_2 = \{\epsilon_i + \epsilon_j \mid 1 \leq i \leq j \leq k\} \cap \Delta.$$

Notons que dans le cas $\Delta = D_n$, la description ci-dessus pour $k = n - 1$ correspond à la graduation donnée par $\Sigma_1 = \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$.
Les préhomogènes commutatifs correspondent aux cas $(B_n, \alpha_1), (C_n, \alpha_n)$ et (D_n, α_k) avec $k \in \{1, n - 1, n\}$.

Proposition 2.4.1 *Dans le cas algébriquement clos, soit* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *un préhomogène de type* (R_n, Σ_1) *avec :*

1. $\Sigma_1 = \{\alpha_k\}$ *lorsque* $R = B_n$,
2. $\Sigma_1 = \{\alpha_k\}$ *avec* $k \leq n-1$ *lorsque* $R = C_n$,
3. $\Sigma_1 = \{\alpha_k\}$ *avec* $k \leq n-2$ *ou bien* $\Sigma_1 = \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ *lorsque* $R = D_n$.

Pour tout $x \in \mathfrak{g}_1$ *(resp.* $\mathfrak{g}_{-1}$*), il existe un ensemble* S *de racines linéairement indépendantes de* Δ_1 *(resp.* Δ_{-1}*) telles que* $P_e(h_{\epsilon_k}, ..., h_{\epsilon_1}).x \cap (\oplus_{\mu \in S} \mathfrak{g}^\mu) \neq \emptyset$ *et* S *contient au plus une racine courte qui est orthogonale aux autres racines de* S.

Démonstration: Il suffit de la faire lorsque $\Sigma_1 = \{\alpha_k\}$ avec $k \leq n-1$ car le cas $(D_n, \{\alpha_{n-1}, \alpha_n\})$ provient du lemme 2.2.1 (S a au plus 3 racines) et le cas (B_n, α_n) étant évident, il est omis (S a au plus une seule racine).
On procède par récurrence sur le rang de Δ, les cas (B_n, α_1) et (D_n, α_1) découlent de la prop.2.3.1, les cas (C_2, α_1) et (D_4, α_2) de ce qui suit.
On suppose donc la proposition vérifiée pour les systèmes de racines classiques de rang $\leq n-1$, et on notera $\Delta^{(i)} = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(h_{\epsilon_i}) = 0\}$ et plus généralement $\Delta^{(i,j,...)} = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(h_{\epsilon_i}) = \alpha(h_{\epsilon_j}) = ... = 0\}$, ce sont des systèmes de racines gradués, $\Delta^{(i,..)} = \cup_{-2 \leq j \leq 2} \Delta^{(i,..)} \cap \Delta_j$, et de même type.

Soit $u \in \mathfrak{g}_1$. Lorsque $s(u) \subset \Delta_1^{(k)}$ (donc $k \geq 2$), u est dans un PV donné par un système de racines gradué de type $(R_{n-1}, \Sigma_1 = \{\alpha_{k-1}\})$, sauf dans le cas (D_4, α_2) où $\Sigma_1 = \{\alpha_2, \alpha_3\}$, le résultat découle de l'hypothèse de récurrence et pour (D_4, α_2) du lemme 2.2.1.
Lorsque $s(u)$ n'est pas inclus dans $\Delta_1^{(k)}$, soit $A = \{\epsilon_k \pm \epsilon_j, j \geq k+1\} \cap s(u)$.
1) Si A est vide alors $\epsilon_k \in s(u)$ et $\Delta = B_n$ avec $k < n$, il existe $v \in exp(ad(\oplus_{1 \leq i \leq k-1} \mathfrak{g}^{\epsilon_i - \epsilon_k}))u$ tel que $v = v_1 + v_2$ avec $s(v_1) = \{\epsilon_k\}$ et $s(v_2) \subset \Delta_1^{(k)} \cap D_n$ et on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à v_2 dans $\Delta_1^{(k)} \cap D_n$.
2) Lorsque A est non vide et en utilisant le groupe de Weyl associé à $\Delta \cap (\oplus_{k+1}^n \mathbb{Z}\epsilon_j)$, on peut supposer que $\alpha_k \in A$ puis que $s(u) \subset \{\epsilon_k \pm \epsilon_{k+1}, \epsilon_l + \epsilon_{k+1}\} \cup \Delta_1^{(k,k+1)}$ en appliquant le lemme 2.2.1, ainsi $u = u_1 + u_2$ avec $s(u_1) \subset \{\epsilon_k \pm \epsilon_{k+1}, \epsilon_l + \epsilon_{k+1}\}$ et $s(u_2) \subset \Delta_1^{(k,k+1)}$, $\Delta^{(k,k+1)}$ est un système de racines gradué de type (R_{n-2}, α_{k-1}) à l'exception de l'unique cas (D_n, α_{n-2}) pour lequel il est de type $(D_{n-2}, \{\alpha_{n-2}, \alpha_{n-3}\})$.
La démonstration est terminée lorsque $k = 1$ ou $k = n-1$ car $\Delta^{(k,k+1)} = \emptyset$.

Examinons les différentes situations lorsque $2 \leq k \leq n-2$:

a) $s(u_1) \subset \{\epsilon_k \pm \epsilon_{k+1}\}$, on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à u_2.

b) $s(u_1) = \{\epsilon_k - \epsilon_{k+1}, \epsilon_l + \epsilon_{k+1}\}$, alors $u_1 = x + y$ avec $s(x) = \epsilon_k - \epsilon_{k+1}$, $s(y) = \epsilon_l + \epsilon_{k+1}$, on applique le lemme 2.2.3 avec $(x,\ h = h_{\epsilon_k - \epsilon_{k+1}}, x^{-1})$, $(y,\ h' = h_{\epsilon_l + \epsilon_{k+1}}, y^{-1})$ et $z = u_2$ ainsi toutes les hypothèses du lemme 2.2.3 sont vérifiées et on peut se ramener au cas où $s(z) \subset \Delta_1^{(l,k,k+1)}$, puis appliquer l'hypothèse de récurrence à z lorsque $\Delta_1^{(l,k,k+1)} \neq \emptyset$

($\Delta_1^{(l,k,k+1)} = \emptyset$ dans le cas (D_4, α_2)).

c) $s(u_1) = \{\epsilon_k \pm \epsilon_{k+1}, \epsilon_l + \epsilon_{k+1}\}$,

i) $R = C$
Il existe $v \in exp(ad(\mathfrak{g}^{2\epsilon_{k+1}}))u$ tel que $s(v) \subset \{\epsilon_k - \epsilon_{k+1}, \epsilon_l + \epsilon_{k+1}\} \cup \Delta_1^{(k,k+1)}$ et on est ramené à b).

ii) $R = B$
Il existe $v \in exp(ad(\mathfrak{g}^{\epsilon_{k+1}}))u$ tel que $\epsilon_k \in s(v) \subset \Delta_1^{(k,k+1)} \cup \{\epsilon_k - \epsilon_{k+1}, \epsilon_k, \epsilon_i + \epsilon_{k+1},\ i = 1, ..., k-1\}$, puis $w \in exp(ad(\mathfrak{g}^{-\epsilon_{k+1}}))v$ tel que $\epsilon_k \in s(w) \subset \{\epsilon_k, \epsilon_i \pm \epsilon_{k+1},\ i = 1, ..., k-1\} \cap \Delta_1^{(k,k+1)}$ et finalement $z \in \prod_{1 \leq i \leq k-1} exp(ad(\mathfrak{g}^{\epsilon_i - \epsilon_k}))w$ tel que $s(z) \subset \{\epsilon_k\} \cup \Delta_1^{(k)} \cap D_n$ et on applique l'hypothèse de récurrence à $\Delta^{(k)} \cap D_n$.

ii) $R = D$
Notons $u = X + y$, avec $s(X) = \{\epsilon_k - \epsilon_{k+1}, \epsilon_k + \epsilon_{k+1}\}$ et $y \in E_0(h_{\epsilon_k}) \cap \mathfrak{g}_1$.
Comme (X, h_{ϵ_k}) se complète en un sl_2-triplet 1-adapté : $(X, h_{\epsilon_k}, X^{-1} = X_{-\epsilon_k+\epsilon_{k+1}} + X_{-\epsilon_k-\epsilon_{k+1}})$, on peut supposer que $y \in \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$, $\mathfrak{s}$ étant l'algèbre engendrée par $\{X, h_{\epsilon_k}, X^{-1}\}$ (lemme 2.2.2).
Or

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1 = \oplus_{\mu \in \Delta_1^{(k,k+1)}} \mathfrak{g}^\mu \oplus_{1 \leq i \leq k-1} \mathbb{F} X_{\Lambda_i} \text{ avec}$$

$$X_{\Lambda_i} = [X_{-\epsilon_k+\epsilon_{k+1}} - X_{-\epsilon_k-\epsilon_{k+1}}, X_{\epsilon_i+\epsilon_k}] \in \mathfrak{g}^{\epsilon_i - \epsilon_{k+1}} \oplus \mathfrak{g}^{\epsilon_i + \epsilon_{k+1}},$$

il est facile de vérifier que $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{s}) = \oplus_{1 \leq i \leq n, i \neq k, k+1} \mathbb{F} h_{\epsilon_i}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ et que $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est de type (B_{n-2}, α_{k-1}), les racines longues appartiennent à $\Delta^{(k,k+1)}$ et on peut prendre comme racines simples : $\alpha_1, ..., \alpha_{k-2}, \beta = \alpha_{k-1} + \alpha_k + \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, ..., \alpha_{n-1}$ et Λ_n, qui est la restriction de ϵ_n à $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{s})$.
Appliquons l'hypothèse de récurrence à z : il existe g tel que $gz = \sum_{\mu \in S} X_\mu$, S ensemble de racines linéairement indépendantes. Si toutes les racines de S sont longues, la démonstration est terminée, sinon il existe une seule racine courte Λ_i, les autres étant longues, linéairement indépendantes et orthogonales à Λ_i d'où

$$g(X + z) = X_1 + \sum_{\mu \in S - \Lambda_i} X_\mu \text{ avec} \quad X_1 = X_{\epsilon_k - \epsilon_{k+1}} + X_{\epsilon_k + \epsilon_{k+1}} + X_{\Lambda_i}.$$

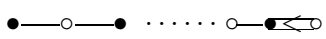
Il reste à réduire l'élément X_1 à l'aide de $exp(ad(\mathfrak{g}^{\epsilon_i - \epsilon_k}))$.
Ceci termine la démonstration du cas (D_4, α_2) et de la proposition. □

Avant de déterminer les sous-groupes paraboliques standards très spéciaux, notons :

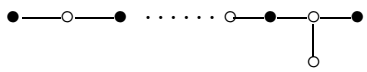
Lemme 2.4.2 *Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène absolument irréductible régulier de type classique (R_n, α_k) ($1 \leq k \leq n-1$ lorsque R=C et $1 \leq k \leq n-2$ lorsque R=D) alors h_{ϵ_1} est 1-simple à l'exception du cas classique déployé R=C.*

Démonstration: Comme $h_{\epsilon_1} = h_{\epsilon_1-\epsilon_n} + h_{\epsilon_1+\epsilon_n}$, h_{ϵ_1} est 1-simple dans tous les cas sauf peut-être $R = C$. Dans ce dernier cas on a $h_{\epsilon_1} = 2h_{\tilde{\alpha}}$ et il est aisé de vérifier que $2h_{\tilde{\alpha}}$ n'est pas 1-simple dans le cas déployé (par exemple le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\epsilon_1})_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\epsilon_1})_1)$ est de type (C_{n-1}, α_{k-1}) qui n'est pas régulier car $k-1$ est impair).
Lorsque $\mathfrak{g}$ n'est pas déployée, on note $\overline{h}_\alpha$ la co-racine associée à la racine $\alpha \in \overline{\Delta}$.
Par classification des diagrammes ([Ve],[Wa]), les types possibles sont :

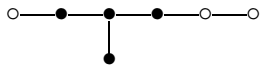
i) $(\overline{\Delta}, \alpha_0) = (C_{2n}, \alpha_{2k})$ de diagramme de Satake :



ii) $(\overline{\Delta}, \alpha_0) = (D_{2n}, \alpha_{2k})$:



iii) $\overline{\Delta} = E_7$ et $\overline{\Sigma}_1 = \{\alpha_1\}$ ou $\overline{\Sigma}_1 = \{\alpha_6\}$, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et le diagramme de Satake est :



Dans tous les cas, il existe une racine $\gamma \in \overline{\Delta}_2$ telle que $2h_{\tilde{\alpha}} = 2\overline{h}_\gamma$, γ est la somme de deux racines, α et β, de $\overline{\Delta}_1$ dont la différence n'est pas une racine, ainsi $(X_\alpha + X_\beta, 2h_{\tilde{\alpha}}, 2(X_{-\alpha} + X_{-\beta}))$ est un sl_2-triplet 1 adapté (tds principale de type A_2) au sens du préhomogène : $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ d'où $2h_{\tilde{\alpha}}$ est également 1-simple au sens du PV : $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$.
γ est la plus grande racine de $\overline{\Delta}$ pour ii) et iii) et $\gamma = \alpha_1 + 2(\sum_{i=2}^{2n-1} \alpha_i) + \alpha_{2n}$ dans le cas i). □

Dorénavant, dans tout ce §, le préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ vérifie les hypothèses du lemme 2.4.2, ce qui permet de définir :

$$p_0 = \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{dans le cas } R = C \text{ avec } \mathfrak{g} \text{ déployée ,} \\ k & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour $i = 1, ..., p_0$:

$$H_i = \begin{cases} 2(h_{2\epsilon_{k-2i+1}} + h_{2\epsilon_{k-2i+2}}) & \text{dans le cas } R = C \text{ avec } \mathfrak{g} \text{ déployée ,} \\ h_{\epsilon_{k-i+1}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le sous-groupe parabolique $P_0 = P(H_1, ..., H_{p_0})$ est alors un sous-groupe parabolique standard très spécial.

Lorsque $2k \leq n$, soient $H'_1 = \sum_{i=1}^k h_{\epsilon_i - \epsilon_{2k-i+1}}$ et $H'_2 = \sum_{i=1}^k h_{\epsilon_i + \epsilon_{2k-i+1}}$, alors $P'_0 = P(H'_1, H'_2)$ est également un sous-groupe parabolique standard très spécial.

Soit $\mathfrak{t}_0 = \oplus_{i=1}^{p_0} \mathbb{F}H_i$ (resp $\mathfrak{t}'_0 = \mathbb{F}H'_1 \oplus \mathbb{F}H'_2$) alors $\Sigma_{\mathfrak{t}_0} = \{\alpha_i, i \geq k+1\}$ dans tous les cas sauf le cas C_n déployé pour lequel $\Sigma_{\mathfrak{t}_0} = \{\alpha_i, i \geq k+1, \alpha_{2j-1}, 1 \leq j \leq \frac{k}{2}\}$ $(\Sigma - \Sigma_{\mathfrak{t}'_0} = \{\alpha_k, \alpha_{2k}\})$ et $(\mathfrak{t}_0)^0 = \mathfrak{t}_0$ (resp $(\mathfrak{t}'_0)^0 = \mathfrak{t}'_0$).
P_0 est un sous-groupe parabolique minimal dans les cas (R_n, α_n) avec $R = B$ ou BC.

Proposition 2.4.3 *Soit* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *un préhomogène absolument irréductible régulier de type classique* (R_n, α_k), $R = B, C, BC$ *ou* D ($1 \leq k \leq n-1$ *lorsque* $R=C$ *et* $1 \leq k \leq n-2$ *lorsque* $R=D$)*et soit* $P = P(H_1, ..., H_p)$ *un sous-groupe parabolique standard très spécial alors*

- *soit* $P = P_0'$ *et* $2k \leq n$,
- *soit* $P \supset P_0$, $k \geq 2$ *et il existe des entiers :* $l_{p+1} = 0 < l_p < ... < l_2 < l_1 = k$ *tels que* $H_i = \sum_{l_{i+1}+1 \leq j \leq l_i} h_{\epsilon_j}$ *pour* $i = 1, ..., p$.

Démonstration: Bien que $\mathfrak{g}$ ne soit pas déployée en général et de la même manière que dans le 3) de la proposition 1.2.4, la considération du diagramme à poids associé à H_p donne 2 cas possibles :

Premier cas : il existe $j > k$ tel que $\alpha_j(H_p) \neq 0$ et $\alpha_l(H_p) = 0$ pour $1 \leq l \leq j-1$.
Comme $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_p)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_p)_1)$ est un préhomogène de type (A_{j-1}, α_k), il est commutatif et gradué par $2H_0 - H_p$ qui est 1-simple dans ce préhomogène donc $j = 2k$ d'où $H_p = H_2'$. Lorsque $p \geq 3$, dans ce préhomogène le parabolique associé à $H_1, ..., H_{p-1}$ est standard donc par le lemme 2.3.2, il existe $i \in \{1, ..., k-1\}$ tel que $H_1 = \sum_{1 \leq j \leq i} h_{\epsilon_{k-j+1} - \epsilon_{k+j}}$ ce qui est absurde $(\epsilon_1 + \epsilon_{k+1}(H_1) = -1)$ d'où $p = 2$ et $H_1 = H_1'$.

Deuxième cas : il existe une unique valeur j , $1 \leq j < k$ telle que $\alpha_j(H_p) = 2$ donc $k \geq 2$ et $H_p = \sum_{1 \leq i \leq j} h_{\epsilon_i}$ ce qui termine la démonstration dans le cas $p = 2$. Lorsque $p \geq 3$, $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_p)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_p)_1)$ est un préhomogène de même type : (R_{n-j}, α_{k-j}) et dans ce préhomogène le parabolique associé à $H_1, ..., H_{p-1}$ est standard mais il n'est pas de type P_0' qui est associé à $H_1' = h_{\epsilon_{j+1} - \epsilon_{2k-j}} + ... + h_{\epsilon_k - \epsilon_{k+1}}$ (resp.$H_2' = h_{\epsilon_{j+1} + \epsilon_{2k-j}} + ... + h_{\epsilon_k + \epsilon_{k+1}}$) car H_1' et H_2' ne sont pas 1-simples spéciaux donc on est à nouveau dans le 2ème cas et on obtient le résultat par récurrence sur n. □

Fin de la démonstration du **théorème 2.1.1.**

1) Le point 1 découle du §2.5. lorsque $\overline{\Delta}$ est de type exceptionnel et lorsque $\overline{\Delta}$ est de type classique cela résulte de la proposition 2.4.1 pour P_0 et des résultats de [Hi-Ro] pour P_0' puisque le parabolique associé aux racines $\{\alpha_i, i \neq k, 2k \ , \ 1 \leq i \leq n\}$ est de longueur ≤ 4 donc opère avec un nombre fini d'orbites dans son radical unipotent.

2) On omet la vérification pour P_0' et on termine la démonstration de 2.1.2 dans les cas classiques pour les sous-groupes paraboliques $P_{\mathfrak{t}} \supset P_0$, dont la description figure dans la proposition 2.4.3.
Soit $x \in \mathfrak{g}_1$, sa décomposition relativement à $ad(H_1)$ est de la forme $x = x_2 + x_0$, on suppose donc que x_2 est non nul et que $F_1(x) = 0$.
A l'action de $P_{\mathfrak{t}}$ près, et à l'aide de la description de Δ_1 et de Δ_2, on peut supposer que (x_2, H, x_2^{-1}) est un sl_2-triplet avec comme formes possibles de H (prop.2.5 de [Mu 2]) :

(1) : $H = \sum_{l_2+1 \leq i \leq l} h_{\epsilon_i} + \sum_{1 \leq j \leq q} h_{\gamma_j}$ avec $\gamma_j = \epsilon_{l+j} + \epsilon_{k+j}$ ou bien $\gamma_j = \epsilon_{l+j} - \epsilon_{k+j}$ ce que l'on note $\gamma_j = \epsilon_{l+j} + (\pm\epsilon_{k+j})$, ou bien

(2) : $H = \sum_{1 \leq j \leq q} h_{\gamma_j}$ avec $l = l_2$ et on a : $l + q \leq k$, ou bien

(3) : $H = \sum_{l_2+1 \leq i \leq l} h_{\epsilon_i}$ avec $l < k$.

On peut toujours supposer que $x_0 = y_{-1} + y_0$ avec $y_i \in E_i(H) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ (lemme 2.2.2).

i) Lorsque $y_{-1} = 0$, $u = H_1 - H$ commute à x et vérifie $B(u, H_1) \neq 0$.

ii) Lorsque $y_{-1} \neq 0$, donc H est de la forme (1) ou (2), posons $h = \sum_{1 \leq j \leq q} h_{\gamma_j}$, h est 1-simple car les q racines γ_j sont fortement orhogonales.
Or : $E_2(H) \cap \mathfrak{g}_1 = E_2(H-h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1$ avec :

$$E_2(H-h) \cap \mathfrak{g}_1 = (\oplus_{l_2+1 \leq i \leq l, j \geq k+q+1} \mathfrak{g}^{\epsilon_i \pm \epsilon_j} \oplus \mathfrak{g}^{\epsilon_i}) \cap \mathfrak{g}_1 \ , \ E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1 = \oplus_{1 \leq i,j \leq q} \mathfrak{g}^{\epsilon_{l+i} + (\pm \epsilon_{k+j})}$$

et de même pour $E_{-2}(H-h) \cap \mathfrak{g}_{-1}$, ainsi $E_2(H-h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_{-2}(H-h) \cap \mathfrak{g}_{-1}$ commute avec $E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_{-2}(h) \cap \mathfrak{g}_{-1}$.
Or le préhomogène : $(\mathfrak{U}((2H_0 - h)\mathbb{F})_0, \mathfrak{U}((2H_0 - h)\mathbb{F})_1 = E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1)$, est commutatif, gradué par $\frac{h}{2}$ et régulier d'où, à l'action de $Aut_e(\mathfrak{U}((2H_0 - h)\mathbb{F})_0)$ près, qui centralise $\mathfrak{t} + \mathbb{F}h + \mathbb{F}H$ (prop.5.2.2,[Mu 2]), on peut supposer que $x_2 = X_1 + X_2$ avec $X_1 \in E_2(H-h) \cap \mathfrak{g}_1$ et $X_2 = \sum_{1 \leq j \leq q} X_{\gamma_j}$.
Soit $\mathfrak{s} = \oplus_{l_2+1 \leq i \leq l} \mathbb{F} h_{\epsilon_i}$ dans le cas (1) (resp.$\mathfrak{s} = \{0\}$ dans le cas (2)) on vérifie que :

$$E_{-1}(H) \cap \mathfrak{g}_1 \cup E_0(H) \cap \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$$

donc $X_2 + y_{-1} + y_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$.
Dans le cas (1), le préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est de type classique avec pour système de racines gradué : $\Delta_i' = \Delta_i^{(l_2+1,\ldots,l)}$ et le sous-groupe parabolique $P(H_1', ..., H_p)$ avec $H_1' = \sum_{l+1 \leq i \leq k} h_{\epsilon_i}$ est un sous-groupe parabolique standard.

On se place dans le préhomogène : $(P(H_1', ..., H_p), \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ (avec $H_1' = H_1$ dans le cas (2)) et soit $\mathfrak{t}' = \mathbb{F}H_1' \oplus_{i=2}^{p} \mathbb{F}H_i$.
En appliquant le lemme 2.2.4 à $X_2 + y_{-1} + y_0$ on peut supposer que $s(y_{-1}) = \{\mu_1, ..., \mu_r\}$ avec $1 \leq r \leq q$ et $\mu_i = \epsilon_{p_i} - (\pm \epsilon_{k+i})$, les p_i étant tous distincts et inférieurs ou égaux à l_2, mais alors

$$[[E_0(H_1') \cap E_0(h) \cap \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1, \oplus_{1 \leq i \leq r} \mathfrak{g}^{-\mu_i}], \mathfrak{t}']] = 0$$

donc par le lemme 2.2.3 on peut supposer que $s(y_0) \subset \{\epsilon_i \pm \epsilon_j,\ \epsilon_i,\ 1 \leq i \leq l_2\ ,\ i \neq p_1, ...p_r,\ l+q+1 \leq j \leq n\} \cap \Delta_1$.

L'élément $u = h_{\epsilon_{p_1}} + (\pm h_{\epsilon_{k+1}}) - h_{\epsilon_{l+1}}$ commute à $x = X_1 + \sum_{j=1}^{q} X_{\gamma_j} + \sum_{j=1}^{r} X_{\mu_j} + y_0$ et vérifie $B(u, H_1) \neq 0$. □

2.5 Les cas exceptionnels non commutatifs

2.5.1 Généralités

La liste des diagrammes de Dynkin gradués correspondants a été établie dans la démonstration du lemme 1.3.1 et est donnée par :

1. $(F_4, \alpha_1), (E_6, \alpha_2), (E_7, \alpha_1), (E_8, \alpha_8)$ pour lesquels $\mathfrak{g}_2$ est de dimension 1,
2. (F_4, α_4) et $\mathfrak{g}$ est non déployée (ce qui correspond à des $\mathbb{F}$-formes de 3), 4) et 5)),
3. (E_7, α_6),
4. (E_7, α_2),
5. (E_8, α_1).

Rappelons que $\mathfrak{g}$ est déployée dans les cas $E_i, i = 6, 7, 8$ et notons que H_0 est proportionnel à $\sum_{\omega\in\Delta_2} h_\omega$ (puisque celui-ci est non nul et est dans le centre de $\mathfrak{g}_0$).

Lemme 2.5.1 *Il y a un unique sous-groupe parabolique standard très spécial, $P(H_1, H_2)$. Lorsque dim($\mathfrak{g}_2$) ≥ 2, $H_2 = 2h_{\tilde{\alpha}}$ et $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 2}$.*
$P(H_1, H_2)$ est un sous-groupe parabolique maximal de G à l'exception du cas (E_6, α_2) pour lequel $\Sigma_0 - \Sigma_{\mathfrak{t}} = \{\alpha_1, \alpha_6\}$.

Remarque 2.5.2 *Précisément :*

$$\Sigma - \Sigma_{\mathfrak{t}} = \begin{cases} \{\alpha_1, \alpha_4\} \text{ lorsque } \Delta = F_4, \\ \{\alpha_1, \alpha_6\} \text{ lorsque } \Delta = E_7 \text{ et } \Sigma_1 \subset \{\alpha_1, \alpha_6\}, \\ \{\alpha_1, \alpha_8\} \text{ lorsque } \Delta = E_8, \\ \{\alpha_1, \alpha_2\} \text{ dans le cas } (E_7, \alpha_2). \end{cases}$$

Démonstration: L'unicité résulte de la démonstration du lemme 1.3.1 puisqu'il y a toujours un unique sous-groupe parabolique très spécial (à conjugaison près) sauf pour (E_7, α_2) mais alors l'un des 2 éléments très spéciaux est donné par $2h_{\tilde{\alpha}}$.
Comme $2h_{\tilde{\alpha}}$ est toujours 1-simple spécial pour E_7 et E_8 lorsque dim($\mathfrak{g}_2$) ≥ 2, il en est de même pour leur formes réelles car $\tilde{\alpha}$ est une racine réelle donc $H_2 = 2h_{\tilde{\alpha}}$ lorsque dim($\mathfrak{g}_2$) ≥ 2.
Comme $P(H_1, H_2)$ est un sous-groupe parabolique standard, $\Sigma_{\mathfrak{t}} = \{\alpha \in \Sigma_0 | \alpha(H_2) = 0\}$ et lorsque $H_2 = 2h_{\tilde{\alpha}}$, on détermine immédiatement $\Sigma_{\mathfrak{t}}$ à partir du diagramme de Dynkin complété (cf.planches V à VIII de [BO 1]).
Lorsque dim($\mathfrak{g}_2$) $= 1$, soit $\Sigma_1 = \{\lambda_1\}$, par orthogonalisations successives avec conservation de l'ordre de Δ, on construit $\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, ainsi on a 4 racines orthogonales, longues dans Δ_1 et de somme $2H_0$ (cf.le cas commutatif ainsi que 6.4 à 6.6 de [[Mu 4]) ; pour $\alpha \in \Sigma_0$ on a soit $n(\alpha, \lambda_i) = 0$ pour $i = 1, ..., 4$ soit $n(\alpha, \lambda_{i_0}) < 0$, avec $i_0 = \inf\{i | n(\alpha, \lambda_i) \neq 0\}$ donc le sous-groupe parabolique $P(h_{\lambda_1} + h_{\lambda_2}, h_{\lambda_3} + h_{\lambda_4})$ est standard ; par unicité $H_2 = h_{\lambda_3} + h_{\lambda_4}$ d'où $\Sigma_{\mathfrak{t}} = \{\alpha \in \Sigma_0 \mid n(\alpha, \lambda_1) < 0 \text{ et } n(\alpha, \lambda_2 > 0\} \cup \{\alpha \in \Sigma_0 \mid n(\alpha, \lambda_1) = n(\alpha, \lambda_2 = 0\}$ et on le détermine dans chaque cas à l'aide du tableau II de [Mu 4]. Les résultats sont reportés dans la remarque ci-dessus. □

Rappelons qu'il existe ℓ, valeur rappelée dans chaque cas, racines orthogonales de Δ_1 et longues dans Δ_1 (longues dans Δ à l'exception du cas (F_4, α_4)), notées $\lambda_1, ..., \lambda_\ell$, telles que $H_1 = \sum_{1\leq i\leq \ell} h_{\lambda_i}$. Ainsi le préhomogène : $(E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_0, E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1)$ est dans tous les cas"presque-commutatif" ([Mu 2] prop.6.6 et dernière remarque) d'où tout élément non nul $x \in E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ est dans la G_{H_1}-orbite d'un élément de la forme :

$$x = \sum_{1\leq i\leq q} X_{\lambda_i}\ ,\ 1 \leq q \leq \ell \ \text{ avec } \ X_{\lambda_i} \in \mathfrak{g}^{\lambda_i} - 0 \quad \text{et} \quad [X_{\lambda_i}, X_{\lambda_j}] = 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq q,$$

$$\text{avec } \ \ell = \begin{cases} 2 \text{ dans les cas } (F_4, \alpha_1), (E_6, \alpha_2), (E_7, \alpha_1), (E_8, \alpha_8), \\ \text{ ainsi que } (F_4, \alpha_4) \text{ lorsque } \mathfrak{g} \text{ est non déployée}, \\ 3 \text{ dans le cas } (E_7, \alpha_2), \\ 4 \text{ dans les cas } (E_7, \alpha_6) \text{ et } (E_8, \alpha_1). \end{cases}$$

2.5.2 Les cas exceptionnels pour lesquels $\mathfrak{g}_2$ est de dimension 1

On reprend les notations du lemme 1.3.1 et on rappelle que : $\mathfrak{g}_1 = E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_1(H_1) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ et $\Delta_2 = \{\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}(\sum_{1 \leq i \leq 4} \lambda_i)\}$ avec $\Sigma_1 = \{\lambda_1\}$ et que :

Rappel 2.5.3 *Soient $\beta_i, 1 \leq i \leq 4$, 4 racines orthogonales de Δ_1, donc longues et de somme $2\tilde{\alpha}$.*

1) Soient $x = X_{\beta_1} + X_{\tilde{\alpha}-\beta_1}$, alors $F(x) \neq 0$ et pour $(s,t) \in \mathbb{F}^2$.
Il existe $A \in \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\beta_2-\beta_4}$ tel que $[A, X_{\tilde{\alpha}-\beta_1}] = tX_{\beta_3}$, $B \in \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\beta_2-\beta_3}$ tel que $[B, X_{\tilde{\alpha}-\beta_1}] = sX_{\beta_4}$ et $C \in \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\beta_1-\beta_2}$ tel que $[C, X_{\beta_1}] = -[B, tX_{\beta_3}]$, posons $g = exp(ad(C))exp(ad(B))exp(ad(A))$, on a $g(x) = X_{\beta_1} + X_{\tilde{\alpha}-\beta_1} + tX_{\beta_3} + sX_{\beta_4}$.
$g \in P_e(H_1, H_2)$ lorsque $\beta_2(H_1) = 2$.

2) Soit $x \in \mathfrak{g}_1$ tel que : $s(x) = \{\tilde{\alpha} - \beta_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ (resp.$s(x) = \{\tilde{\alpha} - \beta_1, \beta_i, 1 \leq i \leq 4\}$), il existe $g \in exp(ad(\mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\beta_2-\beta_3}))exp(ad(\mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\beta_1-\beta_3}))exp(ad(\mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\beta_1-\beta_2}))$ tel que :

$$s(g(x)) = \{\beta_i, i = 1, ..., 4\} \quad (resp.\ s(g(x)) \subset \{\beta_i, i = 1, 2, 3, 4\}).$$

([Mu 3], démonstration du lemme 2.3.1).
$g \in P_e(H_1, H_2)$ lorsque $\beta_1(H_1) = 2$ et $\beta_4(H_1) = 0$ ou bien lorsque $\beta_i(H_1) = 1$ pour $i = 1, ..., 4$.

Rappel 2.5.4 *$\forall \sigma \in S_4$ il existe $w \in W_0$ tel que $w(\lambda_i) = \lambda_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, ..., 4$.*

(cf.remarque du §2.2 [Mu 3] car pour tout $\sigma \in S_4$ on a $\cap_{i=1,2} E_1(h_{\sigma(\lambda_i)}) \cap_{j=3,4} E_0(h_{\sigma(\lambda_j)}) \neq \{0\}$)

Fin de la démonstration du théorème 2.1.1.

Soit $x \in \mathfrak{g}_1$.

Premier cas : x a une composante non nulle suivant $E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$.

A l'action de G_{H_1}-près on peut supposer que $\lambda_1 \in s(x)$ et que $x \in \mathfrak{g}^{\lambda_1} \oplus \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\lambda_1} \oplus E_0(h_{\lambda_1}) \cap \mathfrak{g}_1$ (lemme 2.2.1) ; comme le préhomogène $(E_0(h_{\lambda_1}) \cap \mathfrak{g}_0, E_0(h_{\lambda_1}) \cap \mathfrak{g}_1)$ est *commutatif*, lorsque $s(x)/\{\tilde{\alpha} - \lambda_1, \lambda_1\}$ est non vide, on peut supposer que $s(x)/\{\tilde{\alpha} - \lambda_1, \lambda_1\} \subset S$, S étant un ensemble de racines orthogonales entre elles et à λ_1 telles que $\sum_{\mu \in S} \mu + \lambda_1 = 2\tilde{\alpha}$ (proposition 2.3.1) donc $\sum_{\mu \in S} \mu = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$. Comme :

$$E_1(H_1) \cap \mathfrak{g}_1 = \oplus_{\sigma \in I} E_0(h_{\sigma(\lambda_1)}) \cap E_1(h_{\sigma(\lambda_2)}) \cap E_1(h_{\sigma(\lambda_3)}) \cap E_0(h_{\sigma(\lambda_4)})$$

avec $I = \{1, (1,2), (3,4), (1,2)(3,4)\}$, l'ensemble $S_1 = \{\mu \in S \mid n(\mu, \lambda_2) = 0\}$ est non vide, en effet si $S_1 = \emptyset$ alors pour $\mu \in S$ on a $n(\mu, \lambda_2) = 1$ donc $S = \{\mu_1, \mu_2\}$ d'où l'une des 2 valeurs : $n(\mu_1, \lambda_i) + n(\mu_2, \lambda_i), i = 3, 4$, est différente de 2 ce qui est absurde.
A l'aide de $G_{h_{\lambda_1}} \cap G_{h_{\lambda_2}}$ on peut se ramener à $S_1 = \{\lambda_4\}$ ou bien $S_1 = \{\lambda_3, \lambda_4\}$.

• Lorsque $\lambda_2 \in s(x)$, donc $F_1(x) \neq 0$, on a $S = \{\lambda_i, i = 2, 3, 4\}$ et $s(x) \subset \{\tilde{\alpha} - \lambda_1, \lambda_i, i = 1, ..., 4\}$. A l'aide du rappel 2.5.3, on peut supposer que $s(x) \subset \{\lambda_1, \tilde{\alpha} - \lambda_1, \lambda_2\}$ ou que $s(x) = \{\lambda_i, i = 1, ..., 4\}$ ou que $s(x) \subset \{\lambda_i, i = 1, 2, 3\}$.

Lorsque $s(x) \subset \{\lambda_i, i = 1, 2, 3\}$, l'élément $u = h_{\lambda_4}$ centralise x et vérifie $B(u, H_2) \neq 0$, dans les autres cas $F(x) \neq 0$ (cf.rappel 2.5.3,1)).

• Lorsque $\lambda_2 \notin s(x)$, donc $F_1(x) = 0$, il existe μ_2 et $\mu_3 \in S$ tels que $n(\mu_2, \lambda_2) = n(\mu_3, \lambda_2) = 1$ donc $S_1 = \{\lambda_4\}$ et $n(\mu_i, \lambda_j) = 1$ pour $i, j = 2, 3$.
L'élément $u = h_{\lambda_2} - h_{\lambda_3}$ centralise x et vérifie $B(u, H_1) \neq 0$.
De plus, si on note $\beta_1 = \lambda_1$, $\beta_2 = \mu_2$, $\beta_3 = \mu_3$, $\beta_4 = \lambda_4$, alors on peut supposer que $s(x) \subset \{\beta_1, \tilde{\alpha} - \beta_1, \beta_j, \beta_k\}$ ou bien que $s(x) \subset \{\beta_j, i = 1, ..., 4\}$ en appliquant le rappel 2.5.3

Deuxième cas : x n'a pas de composante suivant $E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$.
Lorsque $x \in E_1(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$, $H_1 - H_2$ centralise x et vérifie $B(H_1 - H_2, H_1) \neq 0$.

a) Le cas simplement lacé
En appliquant le lemme 2.2.1 on peut supposer que $x \in \mathfrak{g}^{\mu_1} \oplus \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}-\mu_1} \oplus E_0(h_{\mu_1}) \cap \mathfrak{g}_1$, or le préhomogène $(E_0(h_{\mu_1}) \cap \mathfrak{g}_0, E_0(h_{\mu_1}) \cap \mathfrak{g}_1)$ est commutatif , on peut donc supposer comme précédemment que $\mu_1 \in s(x) \subset \{\mu_1, \tilde{\alpha} - \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, les racines $\mu_i, i = 1, ..., 4$, étant orthogonales de somme $2\tilde{\alpha}$, et que $\forall \beta \in s(x)$ on a $\beta(H_1) \leq 1$.

i) $s(x)$ a cinq racines
Comme $2\tilde{\alpha}(H_1) = 4 = \sum_{i=1}^{4} \mu_i(H_1)$, on a $\mu_i(H_1) = 1$ pour $i = 1, ..., 4$ d'où $x \in E_1(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$, et on applique le 2) du rappel 2.5.3 aux racines $\beta_i = \mu_i, i = 1, ..., 4$.

ii) $s(x)$ a au plus 4 racines donc elles sont linéairement indépendantes.
Seul le cas où $\exists i$ tel que $\mu_i(H_1) = 2$ est à considérer mais alors $\mu_i \notin s(x)$ et lorsque $\{\mu_1, \tilde{\alpha} - \mu_1\} \subset s(x)$, par le 1) du rappel 2.5.3 appliqué aux racines $\beta_i = \mu_i, 1 \leq i \leq 4$, il existe $y \in Px$ tel que $s(y) = \{\tilde{\alpha} - \mu_1, \mu_1\}$ d'où $y \in E_1(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$.

b) Le cas restant : (F_4, α_1).

Rappelons que $\Delta_1 = \{\tilde{\alpha} - \lambda_i \ , 1 \leq i \leq 4, \ \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j) \ , \ 1 \leq i, j \leq 4\}$.

A l'aide de G_{H_1} on peut supposer que $\{\lambda \in s(x) \mid \lambda(H_1) = 0\} \subset \{\lambda_3, \lambda_4\}$ d'où $s(x) \subset \{\lambda_3, \lambda_4, \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j), i \in \{1, 2\} \ , j \in \{3, 4\} \ \}$.
Lorsque $s(x)$ contient des racines courtes, on peut supposer que $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3) \in s(x)$ (cf.rappel 2.5.4) et que $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3) \notin s(x)$ (on utilise $exp(ad(\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)}$); de même on peut supposer que $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)$ ou $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4)$ n'est pas dans $s(x)$ (sinon on fait agir $exp(ad(\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)})$). On a ainsi 2 cas :

iii)) $s(x) \subset \{\lambda_3, \lambda_4, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3), \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_4)\}$ et h_{λ_2} convient.
Comme $x \in E_0(h_{\lambda_2}) \cap \mathfrak{g}_1$ et que le préhomogène $(E_0(h_{\lambda_2} \cap \mathfrak{g}_0, E_0(h_{\lambda_2} \cap \mathfrak{g}_1)$ est commutatif, on termine en appliquant la proposition 2.3.1.

iv) $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3), \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)\} \subset s(x) \subset \{\lambda_3, \lambda_4, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3), \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)\}$
L'action de $exp(ad(\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_1)}))$ permet de se ramener à $\tilde{\alpha} - \lambda_1 \in s(x) \subset \{\tilde{\alpha} - \lambda_1, \lambda_4, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3), \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)\}$ puis avec un élément approprié de $exp(ad(\mathfrak{g}^{\tilde{\alpha} - \lambda_2 - \lambda_3}))$ on arrive à $s(x) \subset \{\tilde{\alpha} - \lambda_1, \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3), \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_4)\}$ (3 racines linéairement indépendantes) et $h_{\frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_4)}$ convient.
□

On a également établi :

Proposition 2.5.5 *Dans les cas* $(E_6,\alpha_2),(E_7,\alpha_1),(E_8,\alpha_8)$, *soit* $x\in\mathfrak{g}_1$ *il existe* $y\in P_e(H_1,H_2).x$ *et un ensemble de 4 racines fortement orthogonales* $\beta_1,...,\beta_4$, *tels que* $s(y)$ *comprenne au plus 4 racines appartenant à* $\{\tilde{\alpha}-\beta_1,\beta_i,1=1,...,4\}$ *et dans le cas* (F_4,α_1) *il faut y adjoindre l'ensemble* $\{\tilde{\alpha}-\lambda_1,\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3),\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_4)\}$.

2.5.3 Démonstration du théorème 2.1.1 dans les cas exceptionnels restants

On rappelle que $\mathfrak{g}_1=E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1\oplus E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_1$.

Il reste à considérer les éléments du type $x=x_2+x_0$, avec x_0 non nul appartenant à $E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_1$ et

$$x_2=\sum_{1\leq j\leq q}X_{\lambda_j}\text{ avec }[X_{\lambda_i},X_{\lambda_j}]=0\text{ pour }1\leq i<j\leq q\ \text{ et }1\leq q\leq\ell-1$$

Ainsi $(x_2,h=\sum_{1\leq j\leq q}h_{\lambda_j})$ se complète en un sl_2-triplet noté (x_2,h,x_2^{-1}) et on peut supposer que la décomposition de x_0 relativement à adh est de la forme : $x_0=y+z$ avec $y\in E_{-1}(h)\cap E_0(H_1)\cap E_2(H_2)$ et $z\in E_0(h)\cap E_0(H_1)\cap E_2(H_2)$ (lemme 2.2.2).

1) Lorsque $y=0$

On peut supposer que $z\in\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$, $\mathfrak{s}$ étant l'algèbre (réductive dans $\mathfrak{g}$) engendrée par x_2,h,x_2^{-1} et H_1 (lemme 2.2.2) et le préhomogène : $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0,\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ a un nombre fini d'orbites ; l'élément $u=H_1-h$ commute à x et vérifie $B(u,H_1)\neq0$ ce qui termine la démonstration dans ce cas.

2) Lorsque $y\neq0$

a) Le cas (F_4,α_4) non déployé

Les racines de Δ_1 sont toutes courtes et il existe 4 racines orthogonales, $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq4}$, telles que :

$$\sum_{1\leq i\leq4}h_{\lambda_i}=2H_0\ ,\quad H_1=h_{\lambda_1}+h_{\lambda_2}\ ,\quad \mu=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\in\Delta_2$$

$$\Delta_1=\{\lambda_i\ ,\mu-\lambda_i\ \ 1\leq i\leq4\ \}\ ,\ \Delta_2=\{\lambda_i+\lambda_j\ ,\ 1\leq i<j\leq4\ ,\mu\ \}.$$

Nous avons donc : $x_2=X_{\lambda_1},y=X_{\mu-\lambda_1}$ et on peut supposer $z=0$ en appliquant le lemme 2.2.3 puisque

$$E_3(h)\cap\mathfrak{g}_1=\{0\}\ \text{ et }\ E_0(h)\cap E_0(H_1)\cap E_0(h_{\mu-\lambda_1})=\{0\}.$$

L'élément $u=h_{\lambda_2}-h_{\lambda_3}$ centralise x et vérifie $B(u,H_1)\neq0$.

b) Dans tous les autres cas, $\mathfrak{g}$ est déployée, Δ est simplement lacé, les racines $\lambda_i,1\leq i\leq\ell$ sont fortement orthogonales et $1\leq q\leq3$ donc $E_3(h)\cap E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1=\{0\}$ sauf pour $q=3$

mais alors $\ell = 4$ et $E_3(h) \cap E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^\beta$ avec $\beta = \frac{1}{2}(\sum_{1\leq i\leq 3} \lambda_i - \lambda_4)$.

Par la démonstration du lemme 2.2.4 on peut supposer que soit :

i) $y = X_{\gamma_1}$ avec $\gamma_1 \in \Delta_1$ tel que $\gamma_1(H_1) = 0$, $\gamma_1(h) = n(\gamma_1, \lambda_1) = -1$,

soit :

ii) $q = 2$ et $y = X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2}$ avec γ_1 et $\gamma_2 \in \Delta_1$ tels que $\gamma_1(H_1) = \gamma_2(H_1) = n(\gamma_1, \gamma_2) = n(\gamma_2, \lambda_1) = n(\gamma_1, \lambda_2) = 0$ et $n(\gamma_1, \lambda_1) = n(\gamma_2, \lambda_2) = -1$.

On complète y en 1 sl_2-triplet : (y, h', y^{-1}) ($h' = h_{\gamma_1}$ dans le cas i) et $h' = h_{\gamma_1} + h_{\gamma_2}$ dans le cas ii)) donc :

iii) On peut supposer que $z = z_0 + v$ avec $z_0 \in E_0(h) \cap E_0(h') \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ et $v \in E_3(h) \cap E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ puisque $H_1 - h$ est 1-simple et $p = 2$ (lemme 2.2.3 et sa remarque).

• Lorsque $q = 1$ ou bien $y = X_{\gamma_1} + X_{\gamma_2}$ (donc $x_2 = X_{\lambda_1} + X_{\lambda_2}$) on a $x_2 \in E_{-1}(h') \cap \mathfrak{g}_1$ donc on peut supposer que $z_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$, (vrai pour z_0 lorsque $q = 1$ et pour $q = 2$ cf. démonstration du lemme 2.2.2) $\mathfrak{s}$ étant l'algèbre (réductive dans $\mathfrak{g}$) engendrée par H_1 et les deux sl_2-triplets (x_2, h, x_2^{-1}) et $(y_{-1}, h', y_{-1}^{-1})$, ce qui donne le nombre fini d'orbites.
Dans les deux cas l'élément $u = -3H_1 + 4h + 2h'$ commute à x et vérifie $B(u, H_1) \neq 0$.

Il reste donc les cas suivants :
• Lorsque $q \geq 2$ et $y_{-1} = X_{\gamma_1}$, on réduit encore $z_0 + v$ relativement à $ad(h_{\lambda_1})$.

Soit $\delta \in s(z_0)$, comme $n(\delta, \lambda_1 + \gamma_1) = n(\delta, \lambda_1) \geq 0$ car $\Delta_3 = \emptyset$, on a $z_0 = w_0 + w_1$ avec $w_i \in E_i(h_{\lambda_1}) \cap E_0(h) \cap E_0(h') \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ pour $i = 0, 1$ donc il existe $A \in \oplus_{\delta\in s(w_1)} \mathfrak{g}^{\delta-\lambda_1}$ ($\subset E_{-1}(h_{\lambda_1}) \cap E_{-2}(h) \cap E_1(h') \cap E_{-2}(H_1) \cap \mathfrak{g}_0$) tel que $[A, X_{\lambda_1}] = -w_1$ d'où

$$x' = exp(ad(A))(x) = x_2 + X_{\gamma_1} + w_0 + [A, v] + [A, \sum_{2\leq i\leq q} X_{\lambda_i}] + v.$$

On supprime l'élément $[A, v] \in E_1(h) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ à l'aide d'un élément convenable de $exp(ad(E_{-1}(h) \cap E_{-2}(H_1) \cap \mathfrak{g}_0))$. Comme $[A, \sum_{2\leq i\leq q} X_{\lambda_i}] \in E_1(h') \cap E_0(H_1) \cap E_0(h) \cap \mathfrak{g}_1$, à l'aide du lemme 2.2.2 on peut supposer que $x' = x_2 + X_{\gamma_1} + w_0 + v'$ avec $v' \in E_2(H_1) \cap E_3(h) \cap \mathfrak{g}_1$. Lorsque $v' \neq 0$, donc $q = 3$, on supprime v' à l'aide de $exp(ad(\mathfrak{g}^{\beta-\lambda_1})$ dont la restriction à $E_0(h_{\lambda_1}) \cap E_0(h_{\lambda_4})) \cap E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ est l'identité, ce qui donne finalement : $x" = x_2 + X_{\gamma_1} + w_0$.

Or $w_0 \in \mathfrak{U}(\mathfrak{s}')_1$, $\mathfrak{s}'$ étant l'algèbre (réductive dans $\mathfrak{g}$) engendrée par $H_1 - h, h_{\gamma_1}, h_{\lambda_1}$ et $h - h_{\lambda_1}$, donc on en déduit le nombre fini d'orbites de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}_1$.

L'élément $u = 3(H_1 - h) - 2h_{\gamma_1} - h_{\lambda_1}$ commute avec $x"$ et vérifie $B(u, H_1) = (3(l - q) - 1)B(h_{\lambda_1}, h_{\lambda_1}) \neq 0$. □

3 Fonctions Zétas associées

A l'aide des travaux de [Bo-Ru 2], de [Sa 3] et du théorème 2.1.1, il est facile d'établir l'existence d'une équation fonctionnelle abstraite vérifiée par la fonction Zéta locale associée au préhomogène $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_1)$ définit dans le §1.4 et c'est l'objet de ce paragraphe.
La plupart des démonstrations sont analogues à celles faites dans le cas commutatif réel ([Bo-Ru 2]).
On reprend toutes les hypothèses du §1.4, c'est à dire :

1. $\mathfrak{g}$ est une algèbre absolument simple engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 1}$,
2. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, H_0)$ est un préhomogène absolument irréductible et régulier,
3. $P_{\mathfrak{t}} = P(H_1, ..., H_p)$ est un sous-groupe parabolique très spécial lorsque $p \geq 2$ et pour $p = 1$ on pose $P(2H_0) = G$.

On commence par préciser quelques normalisations usuelles avant d'établir l'existence de l'équation fonctionnelle abstraite vérifiée par les fonctions Zétas.

3.1 Normalisation de la forme de Killing

On convient de poser $\widetilde{B} = cB$ (avec c réel dans le cas complexe) et on choisira dans les applications $c = -\dfrac{(\text{degré de } F_p)}{2B(H_0, H_0)}$, ce qui correspond à une normalisation de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ indépendante du choix de $P_{\mathfrak{t}}$.

Soit τ un caractère de $\mathbb{F}$ qui définit la transformation de Fourier des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{F})$, espace de Schwartz de $\mathbb{F}$:

1. τ est un caractère d'ordre ν lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique ;
2. $\tau(x) = e^{2i\pi x}$ dans le cas réel
3. $\tau(z) = e^{2i\pi(z+\overline{z})}$ dans le cas complexe.

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ est alors la fonction $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$ définie par :

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathfrak{g}_1} f(x)\tau(\widetilde{B}(x,y))dx \quad y \in \mathfrak{g}_{-1}.$$

La transformation de Fourier inverse d'une fonction $g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$ est donnée par :

$$\overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \int_{\mathfrak{g}_{-1}} \overline{\tau(\widetilde{B}(x,y))}g(y)dy \quad x \in \mathfrak{g}_1.$$

Si $\mathfrak{U}$ est une algèbre de Lie semi-simple graduée , on note $B_{\mathfrak{U}}$ la forme de Killing associée ; la transformation de Fourier est alors définie par le caractère :

$$\tau_{\mathfrak{U}} = \tau \circ (\widetilde{B_{\mathfrak{U}}})$$

3.2 Normalisation des mesures de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$

Pour $x \in \mathbb{F}, |x|_{\mathbb{F}}$ (noté également $|x|$) désigne la valeur absolue de x c'est à dire :

$$\text{lorsque } \mathbb{F} = \mathbb{C} \ : \ |x|_{\mathbb{C}} = x\overline{x} \ \ , \ \ \text{lorsque } \mathbb{F} = \mathbb{R} \ : \ |x|_{\mathbb{R}} = \max(x, -x).$$

Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique, on note q sa caractéristique résiduelle, $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{F}$, $\mathfrak{P}$ l'unique idéal maximal de $\mathfrak{O}$ et π un générateur de $\mathfrak{P}$ alors x se décompose : $x = \pi^n u$, $u \in \mathfrak{O}$ (n =ordre de x) et $|x|_{\mathbb{F}} = q^{-n}$.

On munit une fois pour toute $\mathbb{F}$ d'une mesure autoduale pour τ.

On rappelle que lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on considère les structures d'espaces vectoriels réels de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$.

On note Φ l'application définie sur $\mathfrak{g}_1'$ qui à x associe x^{-1} l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-1}'$ tel que $(x, 2H_0, x^{-1})$ soit un sl_2-triplet ($[x^{-1}, x] = 2H_0$), Φ commute à l'action de G et on normalise les polynomes irréductibles fondamentaux des préhomogènes : $(G, \mathfrak{g}_1)$ et $(G, \mathfrak{g}_{-1})$ par :

$$F^*(\Phi(x)) = \frac{1}{F(x)} \quad (N1).$$

Pour $x \in \mathfrak{g}_1'$, notons $\theta_x = \theta_x(-1)$ (cf.définition 7, introduction du §1) et rappelons que θ_x est une involution de $\mathfrak{g}$ qui vérifie $\theta_x(x) = \Phi(x) = x^{-1}$.
Comme $\theta_{gx} = g \circ \theta_x \circ g^{-1}$, $det(\theta_x/\mathfrak{g}_1)$ est une application rationnelle relativement invariante par G (de caractère associé $(det(g/\mathfrak{g}_{-1})^2)$ il existe une constante c telle que $det(\theta_x/\mathfrak{g}_1) = cF(x)^{-2N}$ avec $N = \dfrac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{\text{degré de } F}$.
Notons que pour $x_0 \in \mathfrak{g}_1'$, on a $G_{x_0} = G_{x_0^{-1}}$ et θ_{x_0} échange l'orbite $G.x_0$ dans $\mathfrak{g}_1$ avec l'orbite $G.x_0^{-1}$ dans $\mathfrak{g}_{-1}$ car l'application Θ_{x_0} définie pour $g \in G$ par : $\Theta_{x_0}(g) = \theta_{x_0}.g.\theta_{x_0}^{-1}$, est un automorphisme de G.
Pour $x \in \mathfrak{g}_1$, l'application polynomiale $F^*(\theta_{x_0}(x))$ est non identiquement nulle, relativement invariante par G donc par la normalisation (N1) on a $F^*(\theta_{x_0}(x)) = \dfrac{F(x)}{F(x_0)^2}$ (3).

Lemme 3.2.1 *Il existe une unique mesure de Haar, dx, sur $\mathfrak{g}_1$ et une unique mesure de Haar, dy, sur $\mathfrak{g}_{-1}$ telles que :*
(1) $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)}$.
(2) $\forall f \in L^1(\mathfrak{g}_{-1})$ et $\forall x_0 \in \mathfrak{g}_1'$ on a $\int_{\mathfrak{g}_1} f(\theta_{x_0}(x))dx = |F(x_0)|^{2N}.\int_{\mathfrak{g}_{-1}} f(y)dy$.
Pour $g \in L^1(\mathfrak{g}_{-1}')$ et $\forall x_0 \in \mathfrak{g}_1'$ on a $\int_{\mathfrak{g}_1} g(\theta_{x_0}(x))|F(x)|^{-N}dx = \int_{\mathfrak{g}_{-1}} g(y)|F^*(y)|^{-N}dy$.

Démonstration: Munissons $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ de deux bases : $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}^*$, duales pour $\tilde{B}$, et soient $d_{\mathfrak{B}}x$ et $d_{\mathfrak{B}^*}y$ les mesures de Haar correspondantes alors il existe une constante positive λ telle que $dx = \lambda d_{\mathfrak{B}}x$ donc par la propriété de dualité demandée dans (1) on a $dy = \frac{1}{\lambda}d_{\mathfrak{B}^*}y$ puisque $\mathbb{F}$ est muni d'une mesure de Haar autoduale pour τ, et par changement de variable on a :

$$\int_{\mathfrak{g}_1} f(\theta_{x_0}(x))dx = \frac{\lambda^2}{|c|}.|F(x_0)|^{2N}.\int_{\mathfrak{g}_{-1}} f(y)dy \ \text{ d'où } \ \lambda = \sqrt{|c|}(= |det(\theta_{x_0}/\mathfrak{g}_1)|^{\frac{1}{2}}|F(x_0)|^N)$$

par (2) et (3). □

On munit $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ des mesures uniques définies dans le lemme 3.2.1.

Pour $x_0 \in \mathfrak{g}_1'$, G/G_{x_0} est muni de la mesure $G-$invariante qui vérifie pour $f \in \mathcal{C}_C(G.x_0)$:

$$\int_{\mathfrak{g}_1} f(x)|F(x)|^{-N}dx = \int_{G/G_{x_0}} f(gx_0)d\dot{g} \quad (N2)$$

puisque $|F(x)|^{-N}dx$ est une mesure G-invariante.

Notons que les mesures $G-$invariantes $|F^*(y)|^{-N}dy$ et $|F(x)|^{-N}dx$ sont indépendantes du choix de $\mathfrak{B}$ et de la normalisation de F mais la mesure dx dépend de l'invariant relatif choisi dans l'égalité (2) du lemme précédent, on dira que la mesure est normalisée à l'aide de F et ceci sera précisé à chaque fois.

Avec la normalisation des mesures imposées par les 4 conditions : (N1), (N2) et (1) et (2) du lemme 3.2.1, on a les propriétés suivantes :

Lemme 3.2.2 *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1}')$ on a les relations suivantes :*

1. *Si σ est une involution de $\mathfrak{g}$ telle que :*
   $\sigma(H_0) = -H_0$ et $\{x \in \mathfrak{g}_1 | (x, 2H_0, \sigma(x))$ est un sl_2-triplet $\} \neq \emptyset$ alors :
   $\int_{\mathfrak{g}_1} f \circ \sigma(x)|F(x)|^{-N}dx = \int_{\mathfrak{g}_{-1}} f(y)|F^*(y)|^{-N}dy.$
2. $\int_{G/G_{x_0^{-1}}} f(gx_0{}^{-1})d\dot{g} = \int_{G.x_0{}^{-1}} f(y)|F^*(y)|^{-N}dy.$
3. $\int_{\mathfrak{g}_1} f \circ \Phi(x)|F(x)|^{-N}dx = \int_{\mathfrak{g}_{-1}} f(y)|F^*(y)|^{-N}dy.$

Démonstration: 1) Soit x_0 tel que $(x_0, 2H_0, \sigma(x_0))$ soit un sl_2-triplet alors :

$$\int_{\mathfrak{g}_1} f \circ \sigma(x)|F(x)|^{-N}dx = \int_{\mathfrak{g}_1} f \circ (\sigma\theta_{x_0})(\theta_{x_0}(x))|F(x)|^{-N}dx = \int_{\mathfrak{g}_{-1}} f(\sigma\theta_{x_0}(y))|F^*(y)|^{-N}dy,$$

par le lemme précédent, d'où le résultat par changement de variable car $\sigma\theta_{x_0}$ est une involution de $\mathfrak{g}_{-1}$ puisque σ et θ_{x_0} commutent.

2) Soit :

$$A = \int_{G/G_{x_0^{-1}}} f(gx_0^{-1})d\dot{g} = \int_{G/G_{x_0}} f(g\theta_{x_0}(x_0))d\dot{g} = \int_{G/G_{x_0}} f \circ \theta_{x_0}(\Theta_{x_0}(g)x_0)d\dot{g} \ ,$$

Comme $\Theta_{x_0}^2$ est un automorphisme intérieur de G et que G est unimodulaire, on a :

$$A = \int_{G/G_{x_0}} f \circ \theta_{x_0}(gx_0)d\dot{g} = \int_{\mathfrak{g}_1} \mathbf{1}_{G.x_0^{-1}}(\theta_{x_0}(x)) f \circ \theta_{x_0}(x)|F(x)|^{-N}dx \text{ par } (N2)$$

$$A = \int_{G.x_0^{-1}} f(y)|F^*(y)|^{-N}dy \quad \text{par le lemme précédent.}$$

3) Soit $\{x_1, ..., x_m\}$ un ensemble de représentants des orbites de G dans $\mathfrak{g}_1'$ et soit :

$$B = \int_{\mathfrak{g}_1} f \circ \Phi(x)|F(x)|^{-N} dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{G.x_i} f \circ \Phi(x)|F(x)|^{-N} dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{G/G_{x_i}} f(g^{-1}x_i^{-1}) d\dot{g},$$

donc par le changement de variable : $g \to g^{-1}$ et en appliquant le résultat précédent, on obtient :

$$B = \sum_{i=1}^{m} \int_{G/G_{x_i^{-1}}} f(gx_i^{-1}) d\dot{g} = \sum_{i=1}^{m} \int_{G.x_i^{-1}} f(y)|F^*(y)|^{-N} dy = \int_{\mathfrak{g}_{-1}} f(y)|F^*(y)|^{-N} dy. \square$$

3.3 Normalisation des invariants relatifs fondamentaux

On rappelle les différents préhomogènes qui interviennent :

1. $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_1)$ avec les invariants relatifs fondamentaux $F_1, ..., F_p$ et le préhomogène dual : $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_{-1})$ pour lequel les invariants relatifs fondamentaux sont donnés par $F_1^*, ..., F_p^*$ $(P_{\mathfrak{t}} = P(H_1, ..., H_p))$,
2. $(P_{\mathfrak{t}}^-, \mathfrak{g}_1)$ avec les invariants relatifs fondamentaux $P_1, ..., P_p$ et le préhomogène dual : $(P_{\mathfrak{t}}^-, \mathfrak{g}_{-1})$ pour lequel les invariants relatifs fondamentaux sont donnés par $P_1^*, ..., P_p^*$ $(P_{\mathfrak{t}}^- = P(H_p, ..., H_1))$.

On normalise tous les invariants associés à l'action du parabolique opposé à partir des invariants associés à $P_{\mathfrak{t}}$.

De manière précise, étant donné $F_1, ..., F_p$, on choisira $P_1, ..., P_k$, normalisés de façon que pour $k = 1, ..., p$, $x \in E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$, $y \in E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ qui commutent on ait :

$$(\ F_p(x+y)\ )^{\frac{1}{m_k}} = F_k(x)P_{p-k}(y) \quad \text{(R1)}$$

avec $m_k = 1$ à l'exception des $\mathbb{F}$-formes de (E_7, α_6) et du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P_0' pour lesquels $m_k = \frac{1}{2}$ (cf.lemme 1.4.7).

Ceci détermine la normalisation des invariants relatifs fondamentaux attachés au préhomogène "dual" en posant pour $z \in \mathfrak{g}_{-1}$, pour $k = 1, ..., p-1$ et pour $x \in E_0'(h_{p-k}) \cap \mathfrak{g}_{-1}$ (resp.$y \in E_{-2}'(h_{p-k}) \cap \mathfrak{g}_{-1}$) :

$$F^*(z) = \frac{1}{F(z^{-1})} \quad , \quad F_k^*(x) = \frac{1}{P_k(x^{-1})} \quad (\text{resp.} \quad P_{p-k}^*(y) = \frac{1}{F_{p-k}(y^{-1})}\ ) \quad \text{(R2)}\ ,$$

qui correspond simplement à la normalisation (N1) pour chaque préhomogène $(\mathfrak{U}^+(k)_0, \mathfrak{U}^+(k)_1)$ avec son "dual" et pour chaque préhomogène $(\mathfrak{U}^-(k)_0, \mathfrak{U}^-(k)_1)$ avec son "dual".

On aura donc également les relations :

$$(\ F_p^*(x+y)\ )^{\frac{1}{m_k}} = F_k^*(x)P_{p-k}^*(y) \quad \text{(R3)}$$

lorsque x et y commutent.

Réciproquement, la donnée de $F_1^*, ..., F_p^*$, définit également tous les autres invariants relatifs fondamentaux à partir des relations imposées (R3) et R(2) qui impliqueront la relation (R1).

Une façon d'obtenir cette normalisation consiste à choisir un élément $X_0 = \sum_{1 \leq i \leq p} X_i \in W_{\mathfrak{t}}$, puis de normaliser tous les polynomes en posant :

$$k = 1, ..., p : \ F_k(X_0) = F_k^*(\Phi(X_0)) = 1 \ , \ k = 1, ..., p-1 : \ P_k(X_0) = P_k^*(\Phi(X_0)) = 1.$$

Dans le cas complexe on fixe un système de Chevalley $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} h_\alpha \oplus_{\alpha \in \Delta} (\mathbb{R} X_\alpha \oplus \mathbb{R} X_{-\alpha})$ étant l'algèbre simple réelle construite avec le système de Chevalley précédent.
On choisira toujours les invariants relatifs fondamentaux, $F_1, ..., F_p$, réels sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, ce qui est toujours possible puisque ceux-ci sont les extensions à $\mathfrak{g}_1$ des invariants relatifs fondamentaux des préhomogènes irréductibles $(\mathfrak{U}^+(k)_0, \mathfrak{U}^+(k)_1)$ et que ces préhomogènes sont définis sur $\mathbb{R}$ puisque $h_k \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ pour $k = 1, ..., p$ (lemme 1.1 p.135 de [Sa-Sh]).
Ainsi $W_{\mathfrak{t},\mathbb{R}} = \{x \in W_{\mathfrak{t}} \mid F_k(x) \in \mathbb{R}^* \text{ pour } k = 1, ..., p\} \neq \emptyset$.
Soit $\overline{x}$ la conjugaison sur $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, on a alors pour $x \in \mathfrak{g}_1$ et $y \in \mathfrak{g}_{-1}$, $F_k(\overline{x}) = \overline{F_k(x)}$ et $F_k^*(\overline{y}) = \overline{F_k^*(y)}$ pour $k = 1, ..., p$.

3.4 Le cas archimédien

Dans les cas réels et complexes et pour $k = 1, ..., p$, on définit les opérateurs différentiels usuels (cf.par exemple [Sa-Sh], [Fa-Ko]) :

1. $F_k(\partial)$ est l'opérateur différentiel à coefficients constants défini sur $\mathfrak{g}_{-1}$ par $F_k(\partial) e^{\widetilde{B}(x,y)} = F_k(x) e^{\widetilde{B}(x,y)}$ et $F_k^*(\partial)$ celui défini sur $\mathfrak{g}_1$ par $F_k^*(\partial) e^{\widetilde{B}(x,y)} = F_k^*(y) e^{\widetilde{B}(x,y)}$, avec $x \in \mathfrak{g}_1$ et $y \in \mathfrak{g}_{-1}$.

2. **Lorsque** $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $F_k(\overline{\partial})$ est l'opérateur différentiel à coefficients constants défini sur $\mathfrak{g}_{-1}$ par $F_k(\overline{\partial}) e^{\overline{\widetilde{B}(x,y)}} = \overline{F_k(x) e^{\widetilde{B}(x,y)}}$ et $F_k^*(\overline{\partial})$ celui défini sur $\mathfrak{g}_1$ par $F_k^*(\overline{\partial}) e^{\overline{\widetilde{B}(x,y)}} = \overline{F_k^*(y) e^{\widetilde{B}(x,y)}}$, avec $x \in \mathfrak{g}_1$ et $y \in \mathfrak{g}_{-1}$.
   Notons $\alpha_1, ... \alpha_{Nd_p}$ les racines de Δ_1 et $F(\sum_{1 \leq i \leq Nd_p} x_i X_{\alpha_i}) = \sum_{n=(n_1,...,n_{Nd_p})} a_n \prod_{1 \leq i \leq Nd_p} x_i^{n_i}$ l'expression de F_k dans un système de Chevalley de $\mathfrak{g}$ alors :
   $F_k(\partial) = \sum_{n=(n_1,...,n_{Nd_p})} a_n \prod_{1 \leq i \leq Nd_p} c_i^{n_i} \prod_{1 \leq i \leq Nd_p} (\dfrac{\partial}{\partial x_i})^{n_i}$ et
   $F_k(\overline{\partial}) = \sum_{n=(n_1,...,n_{Nd_p})} a_n \prod_{1 \leq i \leq Nd_p} c_i^{n_i} \prod_{1 \leq i \leq Nd_p} (\dfrac{\partial}{\partial \overline{x_i}})^{n_i}$,
   c_i étant le nombre réel $c_i = \widetilde{B}(X_{\alpha_i}, X_{-\alpha_i})$, en prenant la base duale dans $\mathfrak{g}_{-1}$ relativement à $\widetilde{B}$.

ℓ désignant la représentation régulière gauche de $P_{\mathfrak{t}}$ sur $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}_{\pm 1})$: $\forall p \in P_{\mathfrak{t}} \quad l(p)f)(x) = f(p^{-1}x)$, on a pour $k = 1, ..., p$:

$$\forall p \in P_{\mathfrak{t}} : \quad \ell(p) \circ F_k(\partial) = \chi_k(p)^{-1} F_k(\partial) \circ \ell(p) \quad \text{et} \quad \ell(p) \circ F_k^*(\partial) = \chi_k^*(p)^{-1} F_k^*(\partial) \circ \ell(p) \quad (*).$$

On rappelle également leur action sur la transformation de Fourier :

Lemme 3.4.1 *1.- Soit $f \in S(\mathfrak{g}_1)$, pour $m > 0$ et $k = 1, ..., p$, on a :*

$$\mathcal{F}((F_k)^m.f) = (2i\pi)^{-md_k} F_k(\partial)^m(\mathcal{F}f) \ , \ \mathcal{F}(\ F_k^*(\partial)^m f\ ) = (-2i\pi)^{md'_{p-k}} (F_k^*)^m.\mathcal{F}f,$$

2.- Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ on a également :

$$\mathcal{F}((\overline{F_k})^m.f) = (2i\pi)^{-md_k} F_k(\overline{\partial})^m(\mathcal{F}f) \ , \ \mathcal{F}(\ F_k^*(\overline{\partial})^m f\ ) = (-2i\pi)^{md'_{p-k}} (\overline{F_k^*})^m.\mathcal{F}f.$$

d_k étant le degré de F_k et d'_{p-k} celui de F_k^*.

Soit $s = (s_1, ..., s_p) \in \mathbb{C}^p$, on pose $F^s = \prod_{1\leq i\leq p} F_i^{s_i}$, $F^{*s} = \prod_{1\leq i\leq p} F_i^{*s_i}$, $|F|^s = \prod_{1\leq i\leq p} |F_i|_{\mathbb{F}}^{s_i}$ et $|F^*|^s = \prod_{1\leq i\leq p} |F_i^*|_{\mathbb{F}}^{s_i}$.

ω_{-1} est le caractère signe défini sur $\mathbb{R}^*$ par $\omega_{-1}(x) = \frac{x}{|x|}, x \in \mathbb{R}^*$.

Lemme 3.4.2 *1.- Pour $k = 1, ..., p$ il existe des polynomes b_k et $b_k^* \in \mathbb{R}[s]$ tels que*

$$F_k(\partial)F^{*s} = b_k(s)F^{*s-1_p+1_{p-k}} \quad et \quad F_k^*(\partial)F^s = b_k^*(s)F^{s-1_p+1_{p-k}},$$

à l'exception des formes réelles de (E_7, α_6) et du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P'_0 pour lesquels $p = 2$ et les relations pour $k = 1$ deviennent :

$$F_1(\partial)F^{*s} = b_1(s)F_1^{*s_1+1}F_2^{*s_2-2} \quad et \quad F_1^*(\partial)F^s = b_1^*(s)F_1^{s_1+1}F_2^{s_2-2}.$$

2.- Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ on a également pour $k = 1, ..., p$:

$$F_k(\overline{\partial})\overline{F^*}^s = b_k(s)\overline{F^*}^{s-1_p+1_{p-k}} \quad et \quad F_k^*(\overline{\partial})\overline{F}^s = b_k^*(s)\overline{F}^{s-1_p+1_{p-k}},$$

$$F_k(\partial)F_k(\overline{\partial})|F^*|^s = b_k(s)^2|F^*|^{s-1_p+1_{p-k}} \quad et \quad F_k^*(\partial)F_k^*(\overline{\partial})|F|^s = b_k^*(s)^2|F|^{s-1_p+1_{p-k}},$$

à l'exception des formes réelles de (E_7, α_6) et du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P'_0 pour lesquels $p = 2$ et les relations pour $k = 1$ deviennent :

$$F_1(\overline{\partial})\overline{F^*}^s = b_1(s)\overline{F_1}^{*s_1+1}\overline{F_2}^{*s_2-2} \quad et \quad F_1^*(\overline{\partial})\overline{F}^s = b_1^*(s)\overline{F_1}^{s_1+1}\overline{F_2}^{s_2-2},$$

$$F_1(\partial)F_1(\overline{\partial})|F^*|^s = b_1(s)^2|F_1|_{\mathbb{C}}{}^{*s_1+1}|F_2|_{\mathbb{C}}{}^{*s_2-2} \quad et \quad F_1^*(\partial)F_1^*(\overline{\partial})|F|^s = b_1^*(s)^2|F_1|_{\mathbb{C}}{}^{s_1+1}|F_2|_{\mathbb{C}}{}^{s_2-2}.$$

3.- Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ on a également pour $k = 1, ..., p$:

$$F_k(\partial)|F^*|^s = b_k(s)\omega_{-1}(F_p^*.F_{p-k}^*)|F^*|^{s-1_p+1_{p-k}} \ et \ F_k^*(\partial)|F|^s = b_k^*(s)\omega_{-1}(F_p.F_{p-k})|F|^{s-1_p+1_{p-k}},$$

à l'exception des formes réelles de (E_7, α_6) et du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P'_0 pour lesquels $p = 2$ et les relations pour $k = 1$ deviennent :

$$F_1(\partial)|F^*|^s = b_1(s)\omega_{-1}(F_1^*)|F_1|_{\mathbb{R}}{}^{*s_1+1}|F_2|_{\mathbb{R}}{}^{*s_2-2} \quad et \quad F_1^*(\partial)|F|^s = b_1^*(s)\omega_{-1}(F_1)|F_1|_{\mathbb{R}}{}^{s_1+1}|F_2|_{\mathbb{R}}{}^{s_2-2}.$$

(1_l désignant l'élément de $\mathbb{N}^p$ dont toutes les composantes sont nulles à l'exception de la l-ième qui vaut 1 et 1_0 ayant toutes les composantes nulles).

Démonstration: 1. Donnons-la dans le cas général pour la première égalité. Par la relation (*) et le lemme 1.4.7, $F_k(\partial)F^{*s}$ et $F^{*s-1_p+1_{p-k}}$ sont relativement invariants par ℓ de même caractère donc pour $s \in \mathbb{Z}^p$ ils sont proportionnels d'après la proposition 1.4.5, ainsi il existe $f_k : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{C}$ telle que $\forall s \in \mathbb{Z}^p$ on ait : $F_k(\partial)F^{*s} = f_k(s)F^{*s-1_p+1_{p-k}}$. Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de F^{*s}; pour $x \in \mathcal{D}$ et $s \in \mathbb{C}^p$ posons $b_{k,x}(s) = \dfrac{(F_k(\partial)F^{*s})(x)}{F^{*s-1_p+1_{p-k}}(x)}$, alors $b_{k,x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})[s]$ et vérifie $\forall n \in \mathbb{Z}^p : b_{k,x}(n) = f_k(n)$ donc $b_{k,x}$ est indépendant de x, et à coefficients réels puisque F_k et F_k^* sont à coefficients réels pour $k = 1, ..., p$.
2 et 3. découlent de 1. □

Remarque 3.4.3 *Les polynomes b_k et b_k^*, $k = 1, ..., p$, ne dépendent pas de la normalisation de $F_1, ..., F_p$ mais dépendent de $\tilde{B}$ (qui les définit à un facteur multiplicatif près).*
On a $b_k(s_1, ..., s_{p-1}, 0) = 0$ puisque $F_k(\partial)F^{*s}$ est un polynome pour $s \in \mathbb{N}^p$.

Pour $s \in \mathbb{C}$ on note $b_{\mathfrak{g}}(s) = b_p(0, ..., s)$ le polynome de Bernstein obtenu à partir de de l'action de $F_p(\partial)$ sur ${F_p}^{*s}$ c'est à dire celui associé au préhomogène : $(G, \mathfrak{g}_1)$ (et appelé usuel) et pour $s \in \mathbb{C}^p$ soit $b_{\mathfrak{g},P_\mathfrak{t}}(s) = b_p(s_1, ..., s_p)$ le polynome de Bernstein obtenu à partir de l'action de $F_p(\partial)$ sur $\prod_{1 \le i \le p} {F_i}^{*s_i}$ dans le préhomogène $(P_\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_1)$.

Dans le but de montrer que les polynomes $b_{\mathfrak{g},P_\mathfrak{t}}$ sont des produits de polynomes de Bernstein usuels associés à certains préhomogènes (provenant de centralisateurs d'algèbres de type sl_2), on relie les polynomes b_k à certains polynomes de type "$b_{\mathfrak{g},P_\mathfrak{t}}$" dans la proposition qui suit. Pour ceci on introduit les notations suivantes :

Soient :

1. $X_0 = \sum_{1 \le i \le p} X_i \in W_\mathfrak{t}$, $X' = \sum_{1 \le i \le k} X_i$ la projection de X_0 sur $\mathfrak{U}^+(k)_1 = E_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ et $X = \sum_{k+1 \le i \le p} X_i$ la projection de X_0 sur $\mathfrak{U}^-(p-k)_1 = E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$, avec $1 \le k \le p-1$,
2. Y' la projection de X_0^{-1} sur $\mathfrak{U}^+(k)_{-1} = E_{-2}(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}$ et Y la projection de X_0^{-1} sur $\mathfrak{U}^-(p-k)_{-1} = E_0(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}$,
3. $\mathfrak{s}'_k$ l'algèbre engendrée par X' et Y' et $\mathfrak{s}_{p-k}$ l'algèbre engendrée par X et Y,
4. $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{s}_{p-k}) \subset \mathfrak{U}^+(k)$ et $\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}(\mathfrak{s}'_k) \subset \mathfrak{U}^-(p-k)$.
5. $A_k = \dfrac{\widetilde{B}(h_k, h_k)}{\widetilde{B_\mathfrak{U}}(h_k, h_k)}$ et $B_k = \dfrac{\widetilde{B}(2H_0 - h_k, 2H_0 - h_k)}{\widetilde{B_\mathfrak{U}}(2H_0 - h_k, 2H_0 - h_k)}$ alors $\widetilde{B}/\mathfrak{U} = A_k \widetilde{B_\mathfrak{U}}$ et $\widetilde{B}/\mathfrak{U}' = B_k \widetilde{B_{\mathfrak{U}'}}$ lorsque $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ sont absolument irréductibles ce qui est toujours vérifié lorsqu'on suppose que dans le cas orthogonal $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ on a la condition $3k \le 2n-2$ pour le type $(\overline{\Delta}, \overline{\lambda}_0) = (D_n, \alpha_k)$ et $3k \le 2n-1$ pour le type $(\overline{\Delta}, \overline{\lambda}_0) = (B_n, \alpha_k)$.

On note le lieu "non singulier" des préhomogènes associés à l'action de sous-groupes paraboliques par " par exemple $\mathfrak{g}_1" = \mathfrak{g}_1 - S_{P_\mathfrak{t}}$ et $\mathfrak{g}_{-1}" = \mathfrak{g}_{-1} - {S^*}_{P_\mathfrak{t}}$.

Alors on a :

Proposition 3.4.4

$$b_k(s_1, ..., s_p) = A_k^{-d_k} . b_{\mathfrak{U}, P(H_1, ..., H_k)}(s_{p-k+1}, ..., s_p)$$

$$b^*_{p-k}(s_1,...,s_p) = B_k^{-d'_k}.b^*_{\mathfrak{U}',P(H_{k+1},...,H_p)}(s_{k+1},...,s_p)$$

à l'exception des $\mathbb{R}-$formes du cas exceptionnel (E_7,α_6) et du cas classique (C_n,α_k) avec le parabolique P'_0 pour lesquels les relations deviennent :

$$b_1(s_1,s_2) = A_1^{-d_1} b_{\mathfrak{U}}(s_2) b_{\mathfrak{U}}(s_2-1) \quad , \quad b^*_1(s_1,s_2) = B_1^{-d'_1} b^*_{\mathfrak{U}'}(s_2) b^*_{\mathfrak{U}'}(s_2-1),$$

en ajoutant dans le cas orthogonal la condition : $3k \leq 2n-2$ pour le type $(\overline{\Delta},\overline{\lambda}_0) = (D_n,\alpha_k)$ et $3k \leq 2n-1$ pour le type $(\overline{\Delta},\overline{\lambda}_0) = (B_n,\alpha_k)$.

Démonstration: On adapte une démonstration faite dans le cas commutatif (cf.lemme 5.6 dans [R-S]) : soit V l'espace affine suivant :

$$V = Y + \mathfrak{U}^+(k)_{-1} = Y + E_{-2}(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1} \quad (Y = \sum_{k+1 \leq i \leq p} X_i^{-1}),$$

pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{g}_{-1}")$, on définit $R_f \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{U}^+(k)_{-1}")$ par $R_f = f(Y+.)$, il est facile de vérifier que :

$$(F_k(\partial)f)/_V = (F_k/_{E_2(h_k)\cap\mathfrak{g}_1})(\partial)(R_f)$$

La dérivation étant définie relativement à la restriction de $\widetilde{B}$ à $\mathfrak{U}^+(k)$; ainsi il suffit de calculer $F^{*s}/_V$.
Or

$$V = Y + \mathfrak{U}_{-1} + [Y, E_{-2}(h_k)\cap\mathfrak{g}_0] = exp(ad(E_{-2}(h_k)\cap\mathfrak{g}_0)(Y+\mathfrak{U}_{-1}) \subset N_{\mathfrak{t}}(V')$$

avec $V' = Y + \mathfrak{U}_{-1}$ donc $F^{*s}/_V = F^{*s}/_{V'}$ d'où, par orthogonalité des différents sous-espaces relativement à $\widetilde{B}$, on a

$$(F_k/_{E_2(h_k)\cap\mathfrak{g}_1})(\partial)(F^{*s}/_V) = (F_k/_{\mathfrak{U}_1})(\partial)(F^{*s}/_{V'}),$$

La dérivation étant définie relativement à la restriction de $\widetilde{B}$ à $\mathfrak{U}$.
En dehors des formes réelles du cas exceptionnel (E_7,α_6) et du cas classique (C_n,α_k) avec le parabolique P'_0, les invariants relatifs fondamentaux du préhomogène $(P(H_1,...,H_k),\mathfrak{U}_1)$ sont donnés pour $i=1,...,k$ par la restriction de F_i à $\mathfrak{U}_1$, que l'on note G_i.
Comme on a pour $u \in E_2(h_j)\cap\mathfrak{U}_1$ et $v \in E_0(h_j)\cap\mathfrak{U}_1$ qui commutent (lemme 1.4.7) :

$$F_p(X+u+v) = F_k(u+v)P_{p-k}(X) = F_j(u)P_{p-j}(X+v) \quad (X = \sum_{k+1\leq i\leq p} X_i),$$

on en déduit tous les invariants relatifs normalisés ce qui donne pour $j=1,...,k-1$:

$$P^{\mathfrak{U}}_{k-j}(v) = \frac{P_{p-j}(X+v)}{P_{p-k}(X)} \text{ d'où } G^*_j = \frac{F^*_{p-k+j}(Y+.)}{F^*_{p-k}(Y)} \text{ pour } j=1,...,k \text{ donc}$$

$$\text{pour } y \in \mathfrak{U}_{-1} \text{ on a } F^*_j(Y+y) = \begin{cases} F^*_j(Y) \text{ pour } j = 1...,p-k, \\ G^*_{j-(p-k)}(y).F^*_{p-k}(Y) \text{ pour } j = p-k+1,...,p. \end{cases}$$

Ainsi il existe une constante C (explicite) telle que : $\prod_{1\leq i\leq p} F^{*s_i}(Y+y) = C\prod_{1\leq i\leq k} G_i^{*s_{p-k+i}}(y)$ d'où le résultat en tenant compte du fait que $F_k(\partial)f)/\mathfrak{U} = A_k^{-d_k} G_k(\partial)f$.

Pour les 2 cas restants on a $p = 2$ et on prend commes invariants relatifs fondamentaux $G = F_2(X + .\ )$ donc $G^* = F_2^*(Y + .\ )$ d'où

$$(F_1^{*s_1} F_2^{*s_2})(Y + .\ ) = F_1^{*s_1}(Y) G^{*s_2}\ ,\ F_1 = \frac{G^2}{P_1(X)} = F_1^*(Y) G^2 \ \text{ donc}$$

$$(F_1/\mathfrak{U}_1)(\partial) = A_1^{-d_1} F_1^*(Y) G(\partial)^2.$$

La démonstration est analogue pour b^*_{p-k}. □

3.5 Fonctions Zétas : définition et équations fonctionnelles abstraites

Suivant F.Sato ([Sa 3]) et J.I.Igusa ([Ig 5],[Ig 12]), au préhomogène $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_1)$ et à son "dual" sont associés des fonctions Zétas locales dont on rappelle la définition.

On note $\Omega(\mathbb{F}^{*p})$ le groupe des caractères continus de $\mathbb{F}^{*p}$ c'est à dire que $\pi = (\omega, s) \in \Omega(\mathbb{F}^{*p})$ si $\pi = (\pi_1, ..., \pi_p)$, $\pi_1, ..., \pi_p$ étant des caractères continus de $\mathbb{F}^*$, ils sont définis pour $i = 1, ..., p$ par $\pi_i(x) = \omega_i(x)|x|_{\mathbb{F}}{}^{s_i}$, $s_i \in \mathbb{C}$, ω_i étant un caractère unitaire de $\{x \in \mathbb{F} \mid |x|_{\mathbb{F}} = 1\}$ dans le cas archimédien et ω_i étant un caractère unitaire de $\mathbb{F}^*$ dans le cas $\mathfrak{p}-$adique, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_p) \in \widehat{\mathbb{F}^{*p}}$ et $s = (s_1, ..., s_p) \in \mathbb{C}^p$.
Pour $x = (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{F}^{*p}$ on a $\pi(x) = \prod_{1 \le i \le p} \pi_i(x_i)$, $\omega(x) = \prod_{1 \le i \le p} \omega_i(x_i)$ et $|x|^s = \prod_{1 \le i \le p} |x_i|_{\mathbb{F}}^{s_i}$.
On note $\Re(\pi) = \Re(s) = inf_{1 \le i \le p} \Re(s_i)$.

Dans le cas réel (ou dans le cas $\mathfrak{p}-$adique), pour $a \in \mathbb{F}^*$ on note $\tilde{\omega}_a$ le caractère (d'ordre 2) de $\mathbb{F}^*$ (trivial sur $\mathbb{F}^{*2}$) défini par $\tilde{\omega}_a(x) = (x, a)$ ($(.,.)$ symbole de Hilbert).

Définition 3.5.1 *Soit $\pi = (\omega, s) \in \Omega(\mathbb{F}^{*p})$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$, les fonctions Zétas locales des préhomogènes $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_1)$ et $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_{-1})$ sont définies pour toute orbite O de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}"_1$ et toute orbite O^* de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}"_{-1}$ par :*

$$Z_O(f; \pi) = Z_O(f; \omega, s) = \int_O f(x) \pi(F(x))\, dx\ \ ,\ \ Z^*_{O^*}(g; \pi) = Z^*_{O^*}(g; \omega, s) = \int_{O^*} g(y) \pi(F^*(y))\, dy.$$

On pose

$$Z(f; \pi) = Z(f; \omega, s) = \int_{\mathfrak{g}_1} f(x) \pi(F(x)) dx\ \ ,\ \ Z^*(g; \pi) = Z^*(g; \omega, s) = \int_{\mathfrak{g}_{-1}} g(y) \pi(F^*(y)) dy\ .$$

Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on définit de même les fonctions Zétas associées aux orbites de $(P_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{g}"_1$ et $\mathfrak{g}"_{-1}$, avec $(P_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}} = (G_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}}.N_{\mathfrak{t}}$, $(G_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}}$ étant la composante connexe réelle de $G_{\mathfrak{t}}$.

Notons par * l'involution de $\Omega(\mathbb{F}^{*p})$ et de $\mathbb{C}^p$ définie par :

$$\pi^* = (\pi_1, ..., \pi_p)^* = (\pi_{p-1}, ..., \pi_1, (\pi_1 ... \pi_p)^{-1}),$$
$$s^* = (s_1, ..., s_p)^* = (s_{p-1}, ..., s_1, -(s_1 + ... + s_p).$$

à l'exception des $\mathbb{F}$-formes du cas exceptionnel (E_7, α_6) et du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P_0' pour lesquels les relations deviennent :

$$(\pi_1, \pi_2)^* = (\pi_1, (\pi_1^2 \pi_2)^{-1}) \quad , \quad s^* = (s_1, s_2)^* = (s_1, -(2s_1 + s_2)).$$

Théorème 3.5.2 *Equation fonctionnelle abstraite*
Pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ et $\omega \in \widehat{\mathbb{F}^{*p}}$ les intégrales $Z_O(f;\omega,s)$ et $Z^*_{O^*}(\mathcal{F}(f);\omega,s)$ convergent pour $Re(s) \geq 0$, se prolongent en des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^p$.
De plus il existe des fonctions méromorphes $a_{O^*,O}(\omega,\ )$ et $a^*_{O,O^*}(\omega,\ )$ telles que l'on ait pour toute orbite O^* de $P_{\mathfrak{t}}$ (resp.$(P_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}}$) dans $\mathfrak{g}"_{-1}$:

$$Z^*_{O^*}(\mathcal{F}(f);\omega,s) = \sum_{\text{orbites } O \text{ de } P_{\mathfrak{t}} \text{ dans } \mathfrak{g}"_1} a_{O^*,O}(\omega,s) Z_O(f;\omega^*, s^* - N1_p)$$

et pour toute orbite O de $P_{\mathfrak{t}}$ (resp.$(P_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}}$) dans $\mathfrak{g}"_1$:

$$Z_O(f;\omega,s) = \sum_{\text{orbites } O^* \text{ de } P_{\mathfrak{t}} \text{ dans } \mathfrak{g}"_{-1}} a^*_{O,O^*}(\omega,s) Z^*_{O^*}(\mathcal{F}(f);\omega^*, s^* - N1_p) \quad) \ .$$

$(N = \frac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{\text{degré de } F})$

Démonstration: Lorsque $p = 1$, on a simplement la fonction Zéta du préhomogène : $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ et les résultats sont dus à [Sa-Sh] dans le cas archimédien et à J.I.Igusa [Ig 5] dans le cas $\mathfrak{p}-$adique.

Lorsque $p \geq 2$:

1. Dans le cas $\mathfrak{p}-$adique,on applique le théorème $k_{\mathfrak{p}}$ de [Sa 3] et on utilise notamment le théorème 2.1.1.
2. Dans le cas complexe, on procède comme dans §3 de [Bo-Ru 1] ; on utilise notamment les lemmes 3.4.1 et 3.4.2 qui impliquent pour $k = 1, ..., p$:

   $$f \in S(\mathfrak{g}_1) \quad Z^*_{O^*}(\mathfrak{F}(F_k f);\omega,s) = (-2i\pi)^{d_k} b_k(s) Z^*_{O^*}(\mathcal{F}(f);\omega, s - 1_p + 1_{p-k})$$

   avec l'aménagement convenable lorsque $k = 1$ pour les deux exceptions.
3. Dans le cas réel, on procède comme dans le §5.2 de [Bo-Ru 2] soit avec le groupe $P_{\mathfrak{t}}$ soit avec sa composante connexe, $(P_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}}$, et comme dans le cas complexe on utilise notamment les lemmes 3.4.1 et 3.4.2.

   On peut noter qu'il est inutile d'introduire le caractère $\tilde{\omega}_{-1}$ lorsqu'on considère les fonctions zétas associées à $(P_{\mathfrak{t}})_{\mathbb{R}}$.

□

Les coefficients des équations fonctionnelles sont indépendants des normalisations.

En effet soient $F_1' = a_1 F_1, ..., F_p' = a_p F_p$, une autre famille d'invariants relatifs fondamentaux du préhomogène $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_1)$, on note les fonctions Zétas associées par Z' et Z'^*, $\mathcal{F}'$ la transformation de Fourier associée et les coefficients de l'équation fonctionnelle par $a'_{O^*,O}$.

Pour $u=(u_1,...,u_p)\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^p$ on définit les ouverts (éventuellement vides) :

$$O_u=\{x\in\mathfrak{g}_1\mid F_1(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1\ ,\ F_2(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1u_2\ ,...,F_p(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1...u_p\},$$
$$O_u^*=\{x\in\mathfrak{g}_{-1}\mid F_1^*(x)\mathbb{F}^{*2}=u_p\ ,\ F_2^*(x)\mathbb{F}^{*2}=u_{p-1}u_p\ ,...,F_p^*(x)\mathbb{F}^{*2}=u_p...u_1\}.$$

Ainsi que les analogues pour les invariants $F_i',i=1,...,p$, que l'on note O_u' et $O_u'^*$.

On définit également les fonctions Zétas associées, pour $f\in S(\mathfrak{g}_1)$ (resp.$h\in S(\mathfrak{g}_{-1})$) :

$$Z_u(f;\omega)=Z(f\mathbf{1}_{O_u};\omega)\quad(\text{resp.}Z_u^*(h;\omega)=Z^*(h\mathbf{1}_{O_u^*};\omega)\ )\ .$$

$$Z_u'(f;\omega)=Z'(f\mathbf{1}_{O_u'};\omega)\quad(\text{resp.}Z_u'^*(h;\omega)=Z'^*(h\mathbf{1}_{O_u'^*};\omega)\ )\ .$$

Lemme 3.5.3 *Soit $\pi\in\widehat{(\mathbb{F}^*)^p}$ alors :*

1. $a'_{O^*,O}(\pi)=a_{O^*,O}(\pi)$.
2. *On exclut les $\mathbb{F}-$formes du cas exceptionnel (E_7,α_6) ainsi que le cas classique (C_n,α_k) avec le parabolique P_0'.*
   i) On suppose que pour tout $u,v\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p$ il existe un coefficient $a_{v,u}(\pi)$ tel que pour tout $f\in S(\mathfrak{g}_1)$ on ait l'équation fonctionnelle :

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\pi)=\sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p}a_{v,u}(\pi)Z_u(f;\pi^*|\ |^{-N1_p})$$

   alors on a l'équation fonctionnelle :

$$Z_v'^*(\mathcal{F}'(f);\pi)=\sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p}a_{v',u'}(\pi)Z_u'(f;\pi^*|\ |^{-N1_p}),$$

   $w=(w_1,...,w_p)\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\to w'=(w_1',...,w_p')\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ *défini par* $w_i'=a_{i-1}a_iw_i$.

   ii) On suppose que pour tout $\pi\in\widehat{(\mathbb{F}^*)^p}$ il existe un coefficient $A(\pi)$ tel que pour tout $f\in S(\mathfrak{g}_1)$ on ait l'équation fonctionnelle :

$$Z^*(\mathcal{F}(f);\pi)=A(\pi)Z(f;\pi^*|\ |^{-N1_p})$$

   alors on a les équations fonctionnelles :

   a) $Z'^*(\mathcal{F}(f);\pi)=A(\pi)Z'(f;\pi^*|\ |^{-N1_p})$.

   b) $Z_v'^*(\mathcal{F}'(f);\pi)=\sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p}a'_{v,u}(\pi)Z_u'(f;\pi^*|\ |^{-N1_p})$ *avec*

$$a'_{v,u}(\pi)=\frac{1}{f^p}\sum_{(b_1,...,b_p)\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^p}\left(\prod_{1\le i\le p}(b_i,u_pv_p...u_{p-i+1}v_{p-i+1})\right)A(\pi(\tilde{\omega}_{b_1},...,\tilde{\omega}_{b_p})).$$

Démonstration: Soient $\mathfrak{B} = (e_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{B}^* = (e_i^*)_{1\leq i\leq m}$ la base duale pour $\widetilde{B}$ alors pour $Re(\pi) > 0$

$$Z(f;\pi) = \lambda \int_{\mathbb{F}^m} f(\sum_{1\leq i\leq m} x_i e_i) \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(F_j(\sum_{1\leq i\leq m} x_i e_i))dx_1...dx_m$$

avec $\lambda = |(det\ (\theta_{x_0}/\mathfrak{g}_1)\ )_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}^*}|^{\frac{1}{2}}|F_p(x_0)|^N$.

Soient $\mathfrak{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq m}$ une autre base de $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{B}'^* = (e'^*_i)_{1\leq i\leq m}$ la base duale pour $\widetilde{B}$ alors pour $Re(\pi) > 0$

$$Z'(f;\pi) = \lambda' \int_{\mathbb{F}^m} f(\sum_{1\leq i\leq m} x'_i e'_i) \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(F'_j(\sum_{1\leq i\leq m} x'_i e'_i))dx'_1...dx'_m$$

avec $\lambda' = |a_p|^N|(det\ (\theta_{x_0}/\mathfrak{g}_1)\ )_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}'^*}|^{\frac{1}{2}}|F_p(x_0)|^N = |a_p|^N|det(P)|\lambda$, P étant la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ à $\mathfrak{B}'$ donc par prolongement méromorphe :

$$Z'(f;\pi) = |a_p|^N \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(a_j)\ Z(f;\pi)\ ,\ Z'_O(f;\pi) = |a_p|^N \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(a_j)\ Z_O(f;\pi)\ ,$$

$$Z'_u(f;\pi) = |a_p|^N \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(a_j)\ Z_{u'}(f;\pi).$$

Pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ et $z \in \mathfrak{g}_{-1}$ on a $\mathcal{F}'(f)(z) = |a_p|^N\mathcal{F}(f)(z)$.

Par le choix de la normalisation des invariants relatifs fondamentaux (cf.§3.3) on a pour $j = 1, ..., p$, $F'^*_j = c_j F^*_j$ avec $c_j = \dfrac{a_{p-j}}{a_p}$, donc par la normalisation des mesures du §3.2 on a pour $g \in S(\mathfrak{g}_{-1})$:

$$Z'^*(g;\pi) = |a_p|^{-N} \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(c_j)\ Z^*(g;\pi)\ ,\ Z'^*_{O^*}(g;\pi) = |a_p|^{-N} \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(c_j)\ Z^*_{O^*}(g;\pi)\ ,$$

$$Z'^*_u(g;\pi) = |a_p|^{-N} \prod_{1\leq j\leq p} \pi_j(c_j)\ Z^*_{u'}(g;\pi),$$

d'où le résultat de 1. et 2 i),ii)a).

Pour 2)ii),b) soit f le cardinal de $\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)$.

Pour $v \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^p$, $h \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$ et $Re(\pi) > 0$ on a :

$$Z^*_v(h;\ \pi) = \frac{1}{f^p} \sum_{(b_1,...,b_p)\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^p} \left(\prod_{1\leq i\leq p} (b_i, v_p...v_{p-i+1})\right)\ Z^*(h;\pi.(\tilde{\omega}_{b_1},...,\tilde{\omega}_{b_p}))\ .$$

Par prolongement méromorphe, cette égalité est vraie pour tout caractère π donc, en appliquant l'équation fonctionnelle abstraite à $Z^*(\mathcal{F}(f);\pi.(\tilde{\omega}_{b_1},...,\tilde{\omega}_{b_p}))$, on obtient :

$$Z'^*_v(\mathcal{F}(f);\pi) = \sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p} a'_{v,u}(\pi)Z'_u(f;\pi^*|\ |^{-N1_p})$$

avec $a'_{v,u}(\pi) = \dfrac{1}{f^p} \displaystyle\sum_{(b_1,...,b_p)\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^p} \left(\prod_{1\leq i\leq p} (b_i, u_p v_p...u_{p-i+1}v_{p-i+1})\right) A(\pi(\tilde{\omega}_{b_1},...,\tilde{\omega}_{b_p}))$. □

Remarque 3.5.4

1. Plus généralement, soit $\mathfrak{g}'$ une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{g}$, notons T l'isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$, considérons le préhomogène $(P(H'_1,...,H'_p),\mathfrak{g}'_1)$ avec $H'_i = T(H_i)$ pour $i = 1,...,p)$ et $\tilde{B}_{\mathfrak{g}}(H_0,H_0) = \tilde{B}_{\mathfrak{g}'}(H'_0,H'_0)$, alors pour toute orbite O de $P(H_1,...,H_p)$ dans $\mathfrak{g}"_1$ et toute orbite O^* de $P(H_1,...,H_p)$ dans $\mathfrak{g}"_{-1}$ on a :

$$a^{\mathfrak{g}'}_{T(O^*),T(O)} = a^{\mathfrak{g}}_{O^*,O}.$$

2. Lorsque $p \geq 2$, et en excluant les 2 exceptions du lemme 3.5.7, l'équation fonctionnelle admet une écriture plus simple en utilisant les conventions usuelles (cf.[Fa-Ko], [Cl], [H 1]) que l'on rappelle.
On définit pour $\pi = (\pi_1,...,\pi_p) \in \Omega(\mathbb{F}^{*p})$, $i(\pi) = (\pi_p,...,\pi_1)$ et $\tilde{\pi} = (\pi_1\pi_2^{-1},...,\pi_{p-1}\pi_p^{-1},\pi_p)$ ainsi que l'analogue sur $\mathbb{C}^p$:

$$\text{pour} \quad s = (s_1,...,s_p) \quad \tilde{s} = (s_1 - s_2,...,s_{p-1} - s_p, s_p) \quad , \quad i(s) = (s_p,...,s_1),$$

alors $(\widetilde{\pi})^* = \widetilde{i(\pi)}^{-1}$, $(\widetilde{s})^* = -\widetilde{i(s)}$ et l'équation fonctionnelle s'écrit simplement lorsqu'on pose :

$$\widetilde{Z}_O(\ ;\pi) = Z_O(\ ,\widetilde{\pi})\ ,\ \widetilde{Z}^*(\ ;\pi) = Z^*(\ ;\widetilde{\pi}) \quad \text{alors}$$

$$\widetilde{Z}^*_{O^*}(\mathcal{F}(f);\pi) = \sum_{\text{orbites } O \text{ de } P_{\mathfrak{t}} \text{ dans } \mathfrak{g}"_1} \widetilde{a}_{O^*,O}(\pi)\widetilde{Z}_O(f;i(\pi)^{-1}|\ |^{-N1_p})\ ,$$

$$\widetilde{Z}_O(f;\ \pi) = \sum_{\text{orbites } O^* \text{ de } P_{\mathfrak{t}} \text{ dans } \mathfrak{g}"_{-1}} \widetilde{a}^*_{O,O^*}(\pi)\widetilde{Z}_{O^*}(\mathcal{F}(f);i(\pi)^{-1}|\ |^{-N1_p})$$

$$\text{avec} \quad \widetilde{a}_{O^*,O}(\pi) = a_{O^*,O}(\widetilde{\pi}) \text{ et } \widetilde{a}^*_{O,O^*}(\pi) = a^*_{O,O^*}(\widetilde{\pi}).$$

De plus, par le choix de la normalisation des invariants relatifs fondamentaux, on a la formule habituelle :

$$\forall x \in \mathfrak{g}"_1 \quad \widetilde{\pi}(F^*)(x^{-1}) = \widetilde{i(\pi)}^{-1}(F)(x).$$

Dans le cas archimédien, pour $s = (s_1,...,s_p) \in \mathbb{C}^p$ on pose comme dans [Fa-Ko] :

$$F_s = F^{\tilde{s}} = F_1^{s_1-s_2}...F_{p-1}^{s_{p-1}-s_p}.F_p^{s_p} \quad , \quad (F^*)_s = (F^*)^{\tilde{s}} \quad \text{alors} \quad F^*_s(x^{-1}) = F_{-i(s)}(x)$$

et pour $m = (m_1,...,m_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_p \geq 0 = m_{p+1}$ soient $F_m(\partial) = (F_1(\partial))^{m_1-m_2}...(F_p(\partial))^{m_p}$ et $F^*_m(\partial) = (F^*_1(\partial))^{m_1-m_2}...(F^*_p(\partial))^{m_p}$, alors on a les relations habituelles :

$$F^*_m(\partial)F_s = B_m(s)F_{s-i(m)} \text{ et } F_m(\partial)F^*_s = B^*_m(s)F^*_{s-i(m)}$$

$$\text{avec } B_m(s) = \prod_{\{k=1,...,p|m_k>m_{k+1}\}} [\ \prod_{j=m_{k+1}}^{m_k-1} \tilde{b}_k(s_1,...,s_p - j)\ ] \quad \text{et} \quad \tilde{b}_k(s) = b_k(\tilde{s}),$$

$$\text{avec } B^*_m(s) = \prod_{\{k=1,...,p|m_k>m_{k+1}\}} [\ \prod_{j=m_{k+1}}^{m_k-1} \tilde{b}^*_k(s_1,...,s_p - j)\ ] \quad \text{et} \quad \tilde{b}^*_k(s) = b^*_k(\tilde{s})$$

par application du lemme 3.4.2 et de la proposition 3.4.4.

3.6 Deux exemples fondamentaux

Le calcul des coefficients apparaissant dans l'équation vérifiée par les fonctions Zétas associées aux préhomogènes $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_1)$ (ou bien $(G, \mathfrak{g}_1)$) se fera par descente en se ramenant à des préhomogènes de dimensions plus petites dont les invariants relatifs fondamentaux ont des degrés plus petits.

Dans ce paragraphe on rappelle 2 exemples utilisés ultérieurement, ils correspondent aux cas où l'invariant relatif fondamental de $(G, \mathfrak{g}_1)$ est de degré 1 ou 2.

On rappelle également que pour la fonction Zéta de $(G, \mathfrak{g}_1)$ (resp.$(G, \mathfrak{g}_{-1})$ avec un seul invariant relatif fondamental F (resp. F^*) on a simplement lorsque :

$\omega \in \widehat{\mathbb{F}}$ et $s \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$:

$$Z_u(f;\omega,s) = Z(f1_{\{x\in\mathfrak{g}_1 | F(x)\mathbb{F}^{*2}=u\}};\omega,s) = \frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|}\sum_{a\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \tilde{\omega}_a(u) Z(f;\tilde{\omega}_a.\omega,s) \ ,$$

$$Z^*_u(g;\omega,s) = Z(g1_{\{x\in\mathfrak{g}_{-1} 1 | F^*(x)\mathbb{F}^{*2}=u\}};\omega,s) = \frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|}\sum_{a\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \tilde{\omega}_a(u) Z^*(g;\tilde{\omega}_a.\omega,s) \ ,$$

$|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|$ = cardinal de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$.

3.6.1 $\mathfrak{g}_1$ est de dimension 1

C'est l'exemple le plus simple de préhomogène : celui associé à l'action de $Gl_1(\mathbb{F})$ sur $\mathbb{F}$, c'est à dire au cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre déployée de rang 1 :

$$\mathfrak{g} = \mathbb{F}X_\alpha \oplus \mathbb{F}h_\alpha \oplus \mathbb{F}X_{-\alpha}$$

$(X_\alpha, h_\alpha, X_{-\alpha})$ étant un sl_2-triplet, alors $H_0 = \frac{1}{2}h_\alpha$ et, ainsi qui'il est dit dans le §3.1, la normalisation choisie est :

$\tilde{B}_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1 (= -2\tilde{B}_{\mathfrak{g}}(H_0, H_0))$ afin que $\forall (x,y) \in \mathbb{F}\times\mathbb{F}$ on ait $\tau(\tilde{B}_{\mathfrak{g}}(xX_\alpha, yX_{-\alpha})) = \tau(xy)$.

On rappelle que la mesure de Haar choisie sur $\mathbb{F}$ est autoduale pour $\mathcal{F}$.

Théorème 3.6.1 *(Tate [Ta] p.319) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{F})$, $Z(f;\omega,s) = \int_{\mathbb{F}} f(x)\omega(x)|x|^s dx$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et satisfait à l'équation fonctionnelle :*

$$Z(\mathcal{F}(f);\omega,s) = \omega(-1)\rho(\omega,s+1)Z(f;\omega^{-1},-s-1).$$

On rappelle que les coefficients ρ, plus précisément $\omega(-1)\rho(\omega,s) = \omega(-1)\rho(\omega|\ |^s)$ (appelés également $\Gamma_{\mathbb{F}}(\omega|\ |^s)$ (cf.[Sa 3]) ou $b_\omega(s)$ (cf.[Ig 3]) ou $\Gamma(\omega|\ |^s)$ dans le cas $\mathfrak{p}$-adique (cf.[Sa-Ta]) sont donnés par :

1. Dans le cas complexe : pour $m \in \mathbb{Z}$ soit $\overline{\omega}_m(t) = (\frac{t}{\sqrt{|t|_{\mathbb{C}}}})^m$, on a :

$$\overline{\omega}_m(-1)\rho(\overline{\omega}_m, s) = i^{|m|_{\mathbb{R}}}(2\pi)^{1-2s}\frac{\Gamma(s+\frac{|m|_{\mathbb{R}}}{2})}{\Gamma(1-s+\frac{|m|_{\mathbb{R}}}{2})}.$$

2. Dans le cas réel on a :

$$\rho(\tilde{\omega}_1, s) \quad = \pi^{-s+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})} \qquad = 2.(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos(\tfrac{\pi s}{2})$$

$$\tilde{\omega}_{-1}(-1)\rho(\tilde{\omega}_{-1}, s) \quad = i\pi^{-s+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{1+s}{2})}{\Gamma(1-\frac{s}{2})} \quad = 2i.(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sin(\tfrac{\pi s}{2}) \ ,$$

ce que l'on peut écrire en utilisant la convention $\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{-1} = i$:

$$\tilde{\omega}_a(-1)\rho(\tilde{\omega}_a, s) = 2.(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\sqrt{\tilde{\omega}_a(-1)}\cos(\frac{\pi}{2}(s+\frac{\tilde{\omega}_a(-1)-1}{2})).$$

3. Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique de caractéristique résiduelle q, on a $\rho(\tilde{\omega}_1, s) = q^{\nu(s-\frac{1}{2})}\frac{1-q^{s-1}}{1-q^{-s}}$ et $\rho(\omega, s) = q^{\nu(s-\frac{1}{2})}C_\omega q^{m(\omega)(s-1/2)}$ si ω est un caractère de $\mathfrak{O}^* = \{x \in \mathbb{F} \mid |x|_{\mathbb{F}} = 1\}$ ramifié de degré $m(\omega) \geq 1$, prolongé sur $\mathbb{F}^*$ en posant $\omega(\pi) = 1$; C_ω est une somme de Gauss ($C_{\omega^{-1}}.C_\omega = \omega(-1)$).

Définition 3.6.2 *1. On pose* $\rho'(\omega, s) := \omega(-1)\rho(\omega, s)$.

2. Pour $x \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, *on définit : :*

$$\rho(\omega, s; x) = \rho(\omega|\ |^s; x) := \frac{1}{|\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2|}\sum_{y\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}(x, y)\rho(\omega\tilde{\omega}_y|\ |^s).$$

Dans les notations de F.Sato ([Sa 3]) on a : $\rho'(\omega, s) = \Gamma_{\mathbb{F}}(\omega, s)$ et $\rho(\omega, s; x) = \omega(-1)\Gamma_{\mathbb{F}}(\omega, s; -x)$.

Pour b et $x \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, on a $\rho(\omega\tilde{\omega}_b, s; x) = \tilde{\omega}_b(x)\rho(\omega, s; x)$ et $\sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(x, \delta)\rho(\omega, s; xb) = \rho(\omega\tilde{\omega}_\delta, s)(b, \delta)$.

Dans le cas $\mathfrak{P}-$adique, on a : $\rho(\omega, s; x) = q^{m(\omega)(s-\frac{1}{2})}\rho(\omega, \frac{1}{2}; x)$ lorsque $m(\omega) > 1$.

Alors du théorème précédent on déduit que :

Corollaire 3.6.3 *Pour* $v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{F})$, $Z_v(f; \omega, s)$ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *et satisfait aux équations fonctionnelles :*

$$Z_v(\mathcal{F}(f); \omega, s) = \sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\omega(-1)\rho(\omega, s+1; -uv)Z_u(f; \omega^{-1}, -s-1),$$

$$Z_v(f;\omega,s)=\sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\rho(\omega,s+1;uv)Z_u(\mathcal{F}(f);\omega^{-1},-s-1).$$

Pour $v,w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, on a l'égalité :

$$\sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\rho(\omega,s+1;u)\rho(\omega^{-1},-s;-uvw)=\begin{cases}\omega(-1)\ si\ v=w\\ 0\ sinon.\end{cases}$$

3.6.2 L'invariant relatif fondamental est une forme quadratique

La fonction Zéta associée à une forme quadratique non dégénérée a été étudiée par Rallis et Schiffmann [Ra-Sc]) ; ils ont, entre autre, établi les équations fonctionnelles. On redonne celles associées à notre situation.

Rappelons que, suivant A.Weil, à un caractère quadratique, $\tau\circ\phi,\phi$ étant une forme quadratique non dégénérée définie sur un espace vectoriel de dimension m, on associe un nombre complexe $\gamma(\tau\circ\phi)$, de module 1. Avec le choix de τ on a :

1. $\mathbb{F}=\mathbb{C}:\gamma(\tau\circ\phi)=1$,
2. $\mathbb{F}=\mathbb{R}:\gamma(\tau\circ\phi)=e^{i\frac{\pi}{4}(p-q)}$, (p,q) étant la signature de ϕ,
3. $\mathbb{F}$ $\mathfrak{P}$-adique : $\gamma(\tau\circ\phi)=\alpha(1)^{m-1}\alpha(D)h$, D et h étant respectivement le discriminant et l'invariant de Hasse de ϕ.
   On peut noter que la formule $\gamma(\tau\circ\phi)=\alpha(1)^{m-1}\alpha(D)h$, est vérifiée également sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Pour $t\in\mathbb{F}^*$, l'application $\gamma_{\tau\circ\phi}(t)=\gamma(\tau\circ(t\phi))$ définit une application de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ dans $\mathbb{C}^*$.

On note α l'application associée à $\phi(x)=x^2,x\in\mathbb{F}$, et $\alpha_t=\frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|}\sum_{b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(b)(t,b)$ pour $t\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$.
On rappelle que :

$$\alpha(1)\alpha(xy)=\alpha(x)\alpha(y)(x,y)\quad x,y\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\quad([\text{Ra-Sc}]),$$

et on regroupe par commodité dans le lemme suivant quelques résultats élémentaires utilisés partiellement pour simplifier les coefficients de certaines équations fonctionnelles.

Lemme 3.6.4 *A) Pour $\pi\in\widehat{\mathbb{F}^*}$ on pose :*

$$h(\pi):=\sum_{t\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(t)\rho(\pi;t)\ (resp.\ h(s)=h(|\ |^s)\ ,\ s\in\mathbb{C})$$

alors pour $u,c,\delta\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$ on a :

$$\sum_{t\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha_t\ (t,u)\rho(\pi\tilde{\omega}_t)=\sum_{b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(bu)\rho(\pi;b)=\frac{\alpha(u)}{\alpha(1)}h(\pi\tilde{\omega}_u),$$

$$\sum_{b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(bu)(b,\delta)\rho(\pi;bc)=(c,\delta)\frac{\alpha(uc)}{\alpha(1)}h(\pi\tilde{\omega}_{uc\delta})\ .$$

B) Pour $a\in\{0,1\}$, $\pi_1,\pi_2\in\widehat{\mathbb{F}^*}$ *et* $u,v,\delta\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$ *on pose :*

$$A^a_{\pi_1,\pi_2}(u,v,\delta):=\sum_{t\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}(\delta,t)\ \alpha(t)^a\ \rho(\pi_1;tu)\ \rho(\pi_2;tv)(=A^a_{\pi_2,\pi_1}(v,u,\delta))\ ,$$

$$\omega\in\widehat{\mathbb{F}^*}\quad A^a_{\omega,s_1,s_2}=A^a_{\omega|\ |^{s_1},\omega|\ |^{s_2}}(u,v,\delta)\ ,\ A^a_{s_1,s_2}=A^a_{|\ |^{s_1},|\ |^{s_2}}(u,v,\delta).$$

On a les égalités suivantes pour $b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$:

1) $A^a_{\pi_1\tilde{\omega}_b,\pi_2\tilde{\omega}_b}(u,v,\delta)=(b,uv)A^a_{\pi_1,\pi_2}(u,v,\delta)$,

2) $A^0_{\pi_1,\pi_2}(bu,bv,\delta)=(b,\delta)A^0_{\pi_1,\pi_2}(u,v,\delta)$,

3) $\alpha(b\delta)A^1_{\pi_1,\pi_2}(u,v,b\delta)=\alpha(\delta)A^1_{\pi_1,\pi_2}(bu,bv,\delta)$,

4) $\sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\tilde{\omega}_b(u)A^0_{\pi_1,\pi_2}(u,v,\delta)=(v,\delta b)\rho(\pi_1\tilde{\omega}_b)\rho(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta b})$,

5) $\sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\tilde{\omega}_b(u)A^1_{\pi_1,\pi_2}(u,v,\delta)=(v,\delta b)\frac{\alpha(v)}{\alpha(1)}\rho(\pi_1\tilde{\omega}_b)h(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta bv})$

6) $A^1_{\pi_1,\pi_2}(u,v,\delta)=(v,\delta)\frac{\alpha(v)}{\alpha(1)}\frac{1}{|\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2|}\sum_{b\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(b,uv)\rho(\pi_1\tilde{\omega}_b)h(\pi_2\tilde{\omega}_{bv\delta}).$

Démonstration: A) On utilise les définitions :

$$A=\sum_{t\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha_t\ (t,u)\rho(\pi\tilde{\omega}_t)=\sum_{b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(b)\rho(\pi;ub)=\sum_{c\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(uc)\rho(\pi;c)$$

$$=\frac{\alpha(u)}{\alpha(1)}\sum_{c\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(c)(u,c)\rho(\pi;c)=\frac{\alpha(u)}{\alpha(1)}\sum_{c\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(c)\rho(\pi\tilde{\omega}_u;c)\ =\frac{\alpha(u)}{\alpha(1)}h(\pi\tilde{\omega}_u).$$

$$B=\sum_{b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(bu)(b,\delta)\rho(\pi;bc)\ =\sum_{b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(bcu)(bc,\delta)\rho(\pi;b)$$
$$=\frac{\alpha(1)}{\alpha(\delta)}(u,\delta)\sum_{b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2}\alpha(bcu\delta)\rho(\pi;b)=\frac{\alpha(uc\delta)}{\alpha(\delta)}(u,\delta)h(\pi\tilde{\omega}_{uc\delta})=(c,\delta)\frac{\alpha(uc)}{\alpha(1)}h(\pi\tilde{\omega}_{uc\delta})\ .$$

B) 1)2)3) sont immédiats.

Pour 4) et 5) on rempace A^a par sa valeur d'où :

$$S_b(a)=\sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\omega_b(u)A^a_{\pi_1,\pi_2}(u,v,\delta)=\rho(\pi_1\tilde{\omega}_b)\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(t,\delta b)\alpha(t)^a\rho(\pi_2;tv)$$

$$=\rho(\pi_1\tilde{\omega}_b)(v,\delta b)\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(t)^a\rho(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta b};tv)=\rho(\pi_1\tilde{\omega}_b)(v,\delta b)\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(vt)^a\rho(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta b};t)$$

or

$$\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(vt)^a\rho(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta b};t)=\begin{cases}\rho(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta b})\text{ si }a=0\\ \\ \frac{\alpha(v)}{\alpha(1)}\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(t)\rho(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta vb};t)=\dfrac{\alpha(v)}{\alpha(1)}h(\pi_2\tilde{\omega}_{\delta vb})\text{ si }a=1.\end{cases}$$

6) se déduit de 5) puisque $\dfrac{1}{|\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2|}S_b(1)$ est le coefficient de la fonction $f(\ )=A^1_{\pi_1,\pi_2}(\ ,v,\delta)$ dans la base $\{\tilde{\omega}_b, b\in\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2\}$ des fonctions définies sur $\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$. □

Théorème 3.6.5 *(Rallis-Schiffmann) On suppose que $\mathfrak{g}$ est simple, que $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ est 1-irréductible, que $2H_0$ est 1-simple et que l'invariant relatif fondamental, F, est une forme quadratique de discriminant D.*
Soient $N=\frac{1}{2}dim(\mathfrak{g}_1)$, $C=\tilde{B}(H_0,H_0)$, $\gamma_{\tau\circ F}=\sum_{a\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\beta_a(F)\tilde{\omega}_a$ et $\delta=(-1)^{[N]}D$.

$$1)\frac{Z^*(\mathcal{F}(f);\omega,s)}{\omega(C)^{-2}|C|_{\mathbb{F}}^{-2s-N}}=\rho(\omega,s+1)\sum_{a\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\overline{\beta_a(F)}(a,-1)\rho(\omega\tilde{\omega}_a,s+N)Z(f;\tilde{\omega}_a\omega^{-1},-s-N).$$

2) Lorsque N est un entier, on a :

$$\frac{Z^*(\mathcal{F}(f);\omega,s)}{\omega(C)^{-2}|C|_{\mathbb{F}}^{-2s-N}}=\rho(\omega,s+1)\gamma(\tau\circ F)\rho(\omega\tilde{\omega}_\delta,s+N)Z(f;\ \omega^{-1}\tilde{\omega}_\delta,-s-N).$$

3) Lorsque N n'est pas un entier, on a :

$$\frac{Z^*(\mathcal{F}(f);\omega,s)}{\omega(C)^{-2}|C|_{\mathbb{F}}^{-2s-N}}=\frac{\alpha(-1)}{\alpha(\delta)}\gamma(\tau\circ F)\rho(\omega,s+1)\sum_{u\in F(\mathfrak{g}_1)^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(\delta u)h(\omega\tilde{\omega}_{\delta u}|\ |^{s+N})Z_u(f;\ \omega^{-1},-s-N).$$

4) Lorsque $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et F est anisotrope, $Z^*(\mathcal{F}(f);s)=A_N(s)Z(f;-s-N)$, avec

$$A_N(s)=-2|C|_{\mathbb{R}}^{-2s-N}(2\pi)^{-2s-N-1}\Gamma(s+1)\Gamma(s+N)\sin(\pi s).$$

5) Pour $v\in F(\mathfrak{g}_1)^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a :

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\omega,s)=\omega(C)^{-2}|C|_{\mathbb{F}}^{-N-2s}\sum_{u\in F(\mathfrak{g}_1)^*/\mathbb{F}^{*2}}a_{v,u}^{(F)}(\omega,s)Z_u(f;\ \omega^{-1},-s-N),$$

$$Z_v(f;\omega,s)=\omega(C)^2|C|_{\mathbb{F}}^{N+2s}\sum_{u\in F(\mathfrak{g}_1)^*/\mathbb{F}^{*2}}a_{v,u}^{(F)}(\omega,s)Z_u^*(\mathcal{F}(f);\ \omega^{-1},-s-N)\ \textit{avec}$$

$$\begin{aligned}a_{v,u}^{(F)}(\omega,s)\ &=\sum_{t\in\mathbb{F}/\mathbb{F}^{*2}}\gamma_{\tau\circ F}(t)\rho(\omega,s+1;tv)\rho(\omega,s+N;tu)\\ &=\alpha(-1)^{a_N}\gamma(\tau\circ F)A^{a_N}_{\omega,s+1,s+N}(v,u,\delta)\ ,\ a_N=\begin{cases}0\ si\ N\in\mathbb{N},\\ 1\ si\ N\notin\mathbb{N}.\end{cases}\end{aligned}$$

6) Pour $u,v\in F(\mathfrak{g}_1)^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a :

$$\sum_{w\in F(\mathfrak{g}_1)^*/\mathbb{F}^{*2}}a_{v,w}^{(F)}(\omega,s)a_{w,u}^{(F)}(\omega^{-1},-s-N)=\delta_{u,v},$$

$$\sum_{w\in F(\mathfrak{g}_1)^*/\mathbb{F}^{*2}}A^{a_N}_{\omega,s+1,s+N}(v,w,\delta)A^{a_N}_{\omega^{-1},-s-N+1,-s}(w,u,\delta)=\alpha(-1)^{2a_N}\gamma(\tau\circ F)^2\delta_{u,v}.$$

Démonstration: 1) Elle consiste simplement à exprimer les résultats de [Ra-Sc] dans nos notations.
Soit E un espace vectoriel de dimension n, F une forme quadratique définie sur E non dégénérée,

$$\beta(x,y) = F(x+y) - F(x) - F(y) \ , \ x,y \in E$$

la forme bilinéaire symétrique associée, induisant un isomorphisme linéaire entre E et E^* défini par :

$$f \in \mathcal{S}(E) \ : \ \hat{f}(x) = \int_E f(y)\tau(\beta(x,y))d_F y \ , \ x \in E \ ,$$

$d_F x$ étant la mesure de Haar de E autoduale correspondante :

$$\int_E \hat{f}(y)\tau(-\beta(x,y))d_F y = f(x), \ x \in E \ .$$

Si on pose pour $\omega|\ |^s$ caractère continu de $\mathbb{F}^*$:

$$f \in \mathcal{S}(E) \ : \ Z'_f(\omega,s) = \int_E f(x)\omega(F(x))|F(x)|^{s-\frac{n}{2}} d_F x$$

on a le théorème 2.13 p.521 de [Ra-Sc] :

$$Z'_f(\omega,s) = \rho(\omega, s-\frac{n}{2}+1) \sum_{a \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \overline{\beta_a(F)}\tilde{\omega}_a(-1)\rho(\omega\tilde{\omega}_a, s) Z'_{\hat{f}}(\tilde{\omega}_a\omega^{-1}, -s+\frac{n}{2}).$$

Ici $E = \mathfrak{g}_1$, dx étant la mesure de Haar de $\mathfrak{g}_1$ normalisée par F au sens du §3.2 il existe une constante μ telle que $d_F x = \mu dx$.
Comme $2H_0$ est 1-simple, F est non dégénérée et on note Ψ l'isomorphisme de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_{-1}$ défini par

$$x, y \in \mathfrak{g}_1 \quad \tilde{B}(x, \Psi(y)) = \beta(x,y) \ ,$$

alors pour $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $x \in \mathfrak{g}_1$ on a

$$\hat{f}(x) = \mu(\mathcal{F}f)(\Psi(x)) \ , \ f(x) = \mu \int_{\mathfrak{g}_1} (\mathcal{F}f)(\Psi(y))\tau(\tilde{B}(-x, \Psi(y)))d_F y.$$

On reprend les notations et les résultats de la démonstration du lemme 3.2.1.
Soit $\mathfrak{B}$ une base de $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{B}^*$ la base duale dans $\mathfrak{g}_{-1}$ pour $\tilde{B}$, comme :

$$\int_{\mathfrak{g}_1} g(\Psi(x))d_F x = \mu\lambda^2 |det(\Psi)|_{\mathbb{F}}^{-1} \int_{\mathfrak{g}_{-1}} g(y)dy \quad \text{avec} \quad dx = \lambda d_{\mathfrak{B}} x,$$

on a :

$$f = \mu^2\lambda^2 |det(\Psi)|_{\mathbb{F}}^{-1} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = \mu^2\lambda^2 |det(\Psi)|_{\mathbb{F}}^{-1} f \ \text{ d'où } \mu = \frac{\sqrt{|det(\Psi)|_{\mathbb{F}}}}{\lambda}$$

et pour $g \in S(\mathfrak{g}_{-1})$ on a $\int_{\mathfrak{g}_{-1}} g(y)dy = \mu \int_{\mathfrak{g}_1} g(\Psi(x))d_F x$.
Comme $\forall x \in \mathfrak{g}_1$ et $g \in G$ on a $\Psi(gx) = \chi(g)\ g.\Psi(x)$, le polynome $F^* \circ \Psi$ est relativement invariant par G donc il existe une constante non nulle, notée α, telle que $F^* \circ \Psi = \alpha F$. Il est facile de vérifier que α est indépendant de la normalisation de F et par conséquent de la $\mathbb{F}$-forme $\mathfrak{g}$ considérée.

Soit $x_0 \in \mathfrak{g}_1'$, on a pour tout $x \in \mathfrak{g}_1$, $\frac{1}{\alpha}F^*(\Psi(x)) = F(x) = F^*(\theta_{x_0}(x)).F(x_0)^2$ par (3) du §3.2 donc les 2 formes quadratiques $F(x_0)^2.F^* \circ \theta_{x_0}$ et $\frac{1}{\alpha}F^* \circ \Psi$ sont égales d'où elles ont même discriminant donc

$$\alpha^{-2N} det(\Psi)^2 = det(\theta_{x_0}/\mathfrak{g}_1)^2 F(x_0)^{4N} \quad \text{or} \quad \lambda = |det(\theta_{x_0}/\mathfrak{g}_1)|_{\mathbb{F}}^{\frac{1}{2}} |F(x_0)|_{\mathbb{F}}^N \quad \text{d'où} \quad \mu = |\alpha|_{\mathbb{F}}^{\frac{N}{2}}.$$

Il reste à déterminer α. Comme $[\Psi(x), x]$ est dans le centre de $\mathfrak{g}_0$ (prop.1.1.10 [Ru 2]), il est proportionnel à H_0 lorsque $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$ module absolument simple. On vérifie que ceci est également vrai dans l'unique cas restant puisqu'on peut supposer que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est déployée et qui est, vu les hypothèses, de type $(A_n, \{\alpha_1, \alpha_n\})$ ([Ru 2],propositions 3.3.7 et 3.3.8).
Ainsi $\Psi(x) = -\frac{1}{C}F(x)\Phi(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}_1'$ donc $F^*(\Psi(x)) = \dfrac{1}{C^2}F(x)$ et $\alpha = \frac{1}{C^2}$.
On applique le théorème 2.13 de [Ra-Sc] en notant que pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$, on a :

$$Z^*(\mathcal{F}(f); \omega, s) = \omega(C)^{-2}|C|_{\mathbb{F}}^{-2s} Z'_{\hat{f}}(\omega, s+N) \quad \text{et} \quad Z'_f(\omega, s) =)|C|_{\mathbb{F}}^{-N}\ Z(f;\ \omega, s-N).$$

2) De l'égalité :

$$(*) \quad \gamma_{\tau\circ F}(t) = \gamma(\tau \circ F)\tilde{\omega}_\delta(t)\ \Big(\alpha(t)\alpha(-1)\Big)^{a_N} \quad \text{([Ra-Sc])},$$

on déduit que :

$$\beta_a(F) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \neq \delta \\ \gamma(\tau \circ F) \text{ si } a = \delta, \end{cases} \qquad \text{lorsque } a_N = 0$$

et pour $a \in \mathbb{F}^*$:

$$\beta_a(F) = \alpha(-1)\gamma(\tau \circ F)\frac{1}{|\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2|} \sum_{y \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2} (y, a\delta)\alpha(y) = \alpha(-1)\gamma(\tau \circ F)\alpha_{a\delta} \text{ pour } a_N = 1.$$

Comme $\overline{\gamma(\tau \circ F)} = \gamma_{\tau\circ F}(-1) = \gamma(\tau \circ F)(\delta, -1)(\alpha(-1))^{2a_N}$, on a :

$$\overline{\beta_a(F)} = \begin{cases} 0 \text{ si } a \neq \delta \\ \gamma(\tau \circ F)(\delta, -1) \text{ si } a = \delta, \end{cases} \qquad \text{lorsque } a_N = 0$$

d'où 2) et lorsque $a_N = 1$:

$$\overline{\beta_a(F)} = \alpha(-1)\gamma(\tau \circ F)(a, -1)\frac{1}{|\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2|} \sum_{y \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2} (y, a\delta)\alpha(y)$$

d'où 3) en utilisant le A) du lemme 3.6.4.

5) On a :

$$a_{v,u}^{(F)}(\omega, s) = \frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|} \sum_{a,b \in (\mathbb{F}/\mathbb{F}^{*2})^2} (a, uv)(b, -u)\ \overline{\beta_b(F)}\ \rho(\omega\tilde{\omega}_a|\ |^{s+1})\rho(\omega\tilde{\omega}_{ab}|\ |^{s+N})$$

or $\beta_b(F) = \dfrac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|} \displaystyle\sum_{t \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} (b, t)\gamma_{\tau\circ F}(t)$ donc $\overline{\beta_b(F)} = \dfrac{(b, -1)}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|} \displaystyle\sum_{t \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} (b, t)\gamma_{\tau\circ F}(t)$ d'où la 1ère égalité et la seconde résulte de la relation (*) appliquée à la 1ère égalité. □

Remarque 3.6.6 *1) Lorsque* $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ *on a* $b_{\mathfrak{g}}(s)=b^*_{\mathfrak{g}}(s)=\dfrac{1}{C^2}s(s+N-1)$.

En effet il suffit de considérer une base $\mathfrak{B}=\{e_i, 1\leq i\leq 2N\}$ de $\mathfrak{g}_1$ dans laquelle

$$F(\sum_{1\leq i\leq 2N} x_ie_i)=\sum_{1\leq i\leq 2N} a_ix_i^2;$$

dans la base de $\mathfrak{g}_{-1}$, duale pour $\tilde{B}$, et notée $(e_i^*)_{1\leq i\leq 2N}$, on aura :

$$\Psi(\sum_{1\leq i\leq 2N} x_ie_i)=2\sum_{1\leq i\leq 2N} a_ix_ie_i^* \quad \text{d'où} \quad F^*(\sum_{1\leq i\leq 2N} y_ie_i^*)=\frac{1}{4C^2}\sum_{1\leq i\leq 2N}\frac{y_i^2}{a_i}$$

par le calcul précédent. □

2) Rappelons que le coefficient est indépendant de la normalisation de F c'est à dire que pour u et v éléments de $F(\mathfrak{g}_1)^*/(\mathbb{F}^*)^2$ et $t\in\mathbb{F}^*$ on a : $a^{(tF)}_{tv,tu}=a^{(F)}_{v,u}$.

3) i) Dans le cas réel, on a pour $x=\pm 1$: $\rho(\tilde{\omega}_{\pm 1},s;x)=\tilde{\omega}_{\pm 1}(x)(2\pi)^{-s}\Gamma(s)e^{-ix\frac{\pi}{2}s}$ et pour $u,v=\pm 1$: $m\in\mathbb{N}$:

$$A^a_{s_1,s_2}(u,v,(-1)^m)=2.(2\pi)^{-(s_1+s_2)}\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)\ i^m\cos\frac{\pi}{2}(s_1u+s_2v+m-\frac{a}{2}).$$

ii) Dans le cas $\mathfrak{p}-$adique, lorsque la caractéristique résiduelle est différente de 2, on note ϵ un élément de $\mathfrak{O}^*-(\mathfrak{O}^*)^2$, alors $\{1,\epsilon,\pi,\epsilon\pi\}$ est un ensemble de représentants dans $\mathbb{F}^*$ de $\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$.
Soit C_0 la constante définie par :

$$C_0=\int_{|x|=q}\tau(x)\ \chi_0(x)|x|^{-\frac{1}{2}}dx$$

χ_0 étant l'unique caractère non trivial de $\mathfrak{O}^*$ tel que $m(\chi_0)=1$, on a $C_0^2=(\pi,-1)=(-\frac{1}{q})$ (symbole de Jacobi) et

$$\Gamma(\chi_0|\ |^s)=C_0q^{s-\frac{1}{2}}=\chi_0(-1)\rho(\chi_0|\ |^s)=(\pi,-1)\rho(\chi_0|\ |^s)\ \ (\text{ [Sa-Ta]}).$$

Soient $s_0\in\mathbb{C}$ défini par $|\pi|^{s_0}=(\pi,-1)$ et $s_1\in\mathbb{C}$ défini par $|\pi|^{s_1}=-1$, on a :

$$\rho(\tilde{\omega}_\pi|\ |^s)=\rho(\chi_0|\ |^{s+s_0})=C_0q^{s-\frac{1}{2}}\ ,\ \rho(\tilde{\omega}_{\epsilon\pi}|\ |^s)=\rho(\tilde{\omega}_\pi|\ |^{s+s_1})=-C_0q^{s-\frac{1}{2}}\ ,$$

$\rho(\tilde{\omega}_\epsilon|\ |^s)=\rho(|\ |^{s+s_1})=\dfrac{1+q^{s-1}}{1+q^{-s}}$ et $\alpha(1)=\alpha(\epsilon)=1,\alpha(\pi)=C_0=-\alpha(\epsilon\pi)$ (prop.4-1 p.537 de [Ra-Sc])

d'où $\alpha_1=\alpha_\epsilon=\frac{1}{2}$ et $\alpha_\pi=-\alpha_{\epsilon\pi}=\frac{1}{2}C_0(\pi,-1)$.

Pour $s\in\mathbb{C}$ soit $f(s)=q^{-\frac{1}{2}}(q^s-q^{-s})$, alors :

Lemme 3.6.7 *$\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2 et τ est d'ordre 0 alors :*

A) Pour $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ et $s \in \mathbb{C}$ on a :

$$\alpha(u)h(\tilde{\omega}_u|\ |^s) = \frac{1+\tilde{\omega}_\epsilon(u)}{2}\ [(u,\pi)q^{s-\frac{1}{2}} + \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-2s}}\ ] - \frac{1-\tilde{\omega}_\epsilon(u)}{2}.\frac{q^{s-1}-q^{-s}}{1-q^{-2s}}.$$

B) Pour $a \in \{0,1\}$ et $u,v,\delta \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a :

$$2(1-q^{-2s_1})(1-q^{-2s_2})A^a_{s_1,s_2}(u,v,\delta)$$

$$= \sum_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3 \in \{-1,1\}} P^{a,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}_{s_1,s_2}(u,v,\delta)\frac{1+\epsilon_1\ \tilde{\omega}_\epsilon(u)}{2}.\frac{1+\epsilon_2\tilde{\omega}_\epsilon(v)}{2}.\frac{1+\epsilon_3\tilde{\omega}_\epsilon(\delta)}{2}$$

avec :

1. $P^{0,1,1,1}_{s_1,s_2}(1,x,y) = (1-q^{-1})^2\ +\ \tilde{\omega}_\pi(y)f(s_1-\frac{1}{2})f(s_2-\frac{1}{2})\ +\tilde{\omega}_\pi(-xy)f(s_1)f(s_2)$,
2. $P^{0,1,-1,1}_{s_1,s_2}(1,x,y) = -(1-q^{-1}).\Big(f(s_2-\frac{1}{2}) + \tilde{\omega}_\pi(y)f(s_1-\frac{1}{2})\Big)$,
3. $P^{0,1,1,-1}_{s_1,s_2}(1,x,y) = \ -C_0\tilde{\omega}_\pi(-y)\ .\Big(f(s_1)f(s_2-\frac{1}{2}) + \tilde{\omega}_\pi(x)f(s_2)f(s_1-\frac{1}{2})\Big)$,
4. $P^{0,1,-1,-1}_{s_1,s_2}(1,x,y) = \ C_0(1-q^{-1}).\Big(f(s_2)\tilde{\omega}_\pi(x) + \tilde{\omega}_\pi(-y)f(s_1)\Big)$,
5. $P^{1,1,1,1}_{s_1,s_2}(x,y,1) = (1-q^{-1})^2 - \Big(\tilde{\omega}_\pi(x)f(s_1)f(s_2-\frac{1}{2}) + \tilde{\omega}_\pi(y)f(s_1-\frac{1}{2})f(s_2)\Big)$,
6. $P^{1,-1,-1,1}_{s_1,s_2}(x,y,1) = f(s_1-\frac{1}{2})f(s_2-\frac{1}{2}) + \tilde{\omega}_\pi(-xy)f(s_1)f(s_2)$,
7. $P^{1,1,-1,1}_{s_1,s_2}(x,y,1) = (1-q^{-1}).\Big(\tilde{\omega}_\pi(x)f(s_1) - f(s_2-\frac{1}{2})\Big)$,
8. $P^{1,-1,1,1}_{s_1,s_2}(x,y,1) = (1-q^{-1}).\Big(\tilde{\omega}_\pi(y)f(s_2) - f(s_1-\frac{1}{2})\Big)$.

Démonstration: Elle résulte d'un simple calcul et des résultats de 3.6.4. □

Pour $s \in \mathbb{C}$, posons $f_+(s) = q^{-\frac{1}{2}}(q^s + q^{-s})$ et

$$A^1{}_{s_1,s_2}(x,y,1) = 2(1-q^{-2s_1})(1-q^{-2s_2})P(x,y),$$

Le calcul explicite donne donc :

1. Lorsque $x,y \in \{1,\epsilon\}$:

$$P(x,y) = \begin{cases} (1-q^{-1})^2 - 2q^{-\frac{1}{2}}f_+(s_1+s_2-\frac{1}{2})(\pi,x) + (\pi,x)(1+q^{-1})f_+(s_2-s_1) \text{ lorsque } x=y, \\ \\ (1-q^{-1})^2 + (\pi,y)(1-q^{-1})f(s_2-s_1) \text{ lorsque } x \neq y. \end{cases}$$

2. Lorsque $x \in \{\pi,\epsilon\pi\}$ et $y \in \{1,\epsilon\}$:

$$P(x,y) = (1-q^{-1})\Big((\pi,y)f(s_2) - f(s_1-\frac{1}{2})\Big).$$

3. Lorsque $x \in \{1, \epsilon\}$ et $y \in \{\pi, \epsilon\pi\}$:

$$P(x,y) = (1-q^{-1})\Big((\pi,x)f(s_1) - f(s_2 - \frac{1}{2})\Big).$$

4. Lorsque $x, y \in \{\pi, \epsilon\pi\}$: $P(x,y) =$

$$-q^{-\frac{1}{2}} f_+(s_2 - s_1)\Big(1+(\pi,-xy)\Big) + \Big(1+(\pi,-xy)q^{-1}\Big)q^{-\frac{1}{2}}\Big((\pi,-xy)q^{s_1+s_2-\frac{1}{2}} + q^{-(s_1+s_2-\frac{1}{2})}\Big).$$

Notons également que :

Lemme 3.6.8 *Dans le cas réel ou $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2 avec τ d'ordre 0, on a :*

1. $A^1_{s,s+\frac{1}{2}}(1,x,1) = 0$ *pour* $x \neq 1$ *et*

   $A^1_{s,s+\frac{1}{2}}(1,1,1) = |2|_{\mathbb{F}}^{-2s+\frac{1}{2}} \rho(|\ |^{2s}) = h(\tilde{\omega}_u|\ |^s)\rho(\tilde{\omega}_u|\ |^{s+\frac{1}{2}})$ *pour* $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$.

2. $h(\tilde{\omega}_u|\ |^s) = |2|_{\mathbb{F}}^{-2s+\frac{1}{2}} \tilde{\omega}_u(-1)\rho(\tilde{\omega}_u|\ |^{-s+\frac{1}{2}})\rho(|\ |^{2s})$ *pour* $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$.

Démonstration: 1) Résulte d'un simple calcul à l'aide de la formule explicite dans le cas réel (et on utilise la formule de duplication de Legendre) et dans le cas $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2 (relation B)5, du lemme 3.6.7).
On vérifie que la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} \quad f(x) = h(\tilde{\omega}_x|\ |^s)\rho(\tilde{\omega}_x|\ |^{s+\frac{1}{2}})$$

est constante, soit en effectuant le calcul directement, soit par la relation 5)B du lemme 3.6.4 puisque

$$\frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|}\sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \tilde{\omega}_x(a)f(x) = A^1_{s+\frac{1}{2},s}(a,1,1) = A^1_{s,s+\frac{1}{2}}(1,a,1) = 0 \text{ pour } a \neq 1$$

donc $f(x) = f(1)$.

La dernière égalité s'obtient avec l'identité $\rho(\tilde{\omega}_u|\ |^{s+\frac{1}{2}})\rho(\tilde{\omega}_u|\ |^{-s+\frac{1}{2}}) = \tilde{\omega}_u(-1)$. □

Remarques :

1) Au vu du lemme 3.6.8, il semble inutile d'introduire la fonction $h(\pi)$ (ici quotient de fonctions ρ de Tate) mais je ne sais pas si ce résultat subsiste en caractéristique résiduelle différente de 2 lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}-$adique.

2) Par le 5) du théorème 3.6.5, les valeurs prises par $A^1_{s,s+\frac{1}{2}}(\ ,\ ,1)$ sont les les coefficients de l'équation fonctionnelle de la fonction Zêta associée à une forme quadratique isotrope de discriminant -1, cas traité dans [Da-Wr], malheureusement nos résultats (B) du lemme 3.6.7) ne sont pas en accord avec les résultats de la proposition 2.5 de [Da-Wr].

3.7 Application au cas archimédien

L'équation fonctionnelle abstraite permet de déterminer le polynome $b_{\mathfrak{g},P_{\mathfrak{t}}}$, et par conséquent tous les polynomes $b_k, k = 1, ..., p$, par descente.

O étant une orbite de P dans $\mathfrak{g}"_1$ et O^* étant une orbite de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}"_{-1}$, les opérateurs différentiels introduits au §3.4 permettent classiquement de déterminer la forme des coefficients a_{O,O^*}. Ce coefficient est noté simplement $a(\overline{\omega}_m, s)$ dans le cas complexe puisque $\mathfrak{g}"_1$ (resp. $\mathfrak{g}"_{-1}$) est une seule orbite.

Lemme 3.7.1 *On suppose que $p \geq 1$. $\forall s \in \mathbb{C}^p$ et $k = 1, ..., p$:*

1. *Dans le cas complexe, soit $a(s) = a(\overline{\omega}_0, s)$:*

$$\begin{aligned} a(s) &= (2i\pi)^{-2d_k}\Big(b_k(s)\Big)^2 a(s - \tfrac{1}{m_k}1_p + 1_{p-k}) \\ &= (2i\pi)^{-2d'_{p-k}}\Big(b_k^*(s^* - 1_{p-k} - (N-1)1_p)\Big)^2 a(s - 1_k). \end{aligned}$$

2. *Dans le cas réel :*

$$\begin{aligned} a_{O^*,O}(\tilde{\omega}_{\pm 1}; s) &= (-2i\pi)^{-d_k} b_k(s) a_{O^*,O}(\tilde{\omega}_{\pm 1}\tilde{\omega}_{-1}^{1_p}\tilde{\omega}_{-1}^{1_{p-k}}; s - \tfrac{1}{m_k}1_p + 1_{p-k}) \\ &= (2i\pi)^{-d'_{p-k}} b_k^*(s^* - 1_{p-k} - (N-1)1_p) a_{O^*,O}(\tilde{\omega}_{\pm 1}\tilde{\omega}_{-1}^{1_k}; s - 1_k). \end{aligned}$$

$m_k = 1$ à l'exception du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P'_0 et des formes de (E_7, α_6) pour lesquels $\frac{1}{m_1} = 2$ (et $k = 1$).

Démonstration: Pour établir ce résultat "classique," dans le cas réel on calcule de 2 manières $Z^*_{O^*}(\mathfrak{F}(F_k f); \omega, s)$ et $Z^*_{O^*}(\mathfrak{F}(F_k^*(\partial) f); \omega\tilde{\omega}_{-1}^{1_k}, s - 1_k)$.

Pour $Z^*_{O^*}(\mathfrak{F}(F_k f); \omega, s)$, on applique d'une part le théorème 3.5.2, d'autre part on applique d'abord le lemme 3.4.1 à $\mathfrak{F}(F_k f)$ puis une intégration par partie suivie du lemme 3.4.2 et pour finir à nouveau le théorème 3.5.2.

Pour $Z^*_{O^*}(\mathfrak{F}(F_k^*(\partial) f); \omega\tilde{\omega}_{-1}^{1_k}, s - 1_k)$, on applique d'une part le lemme 3.4.1 à $\mathfrak{F}(F_k^*(\partial))$ puis le théorème 3.5.2, d'autre part on applique d'abord le théorème 3.5.2 puis une intégration par partie suivie du lemme 3.4.2.
Dans le cas complexe, on procède de même avec $Z^*(\mathfrak{F}(|F_k|_{\mathbb{C}} f); s)$ et $Z^*(\mathfrak{F}(F_k^*(\overline{\partial})F_k^*(\partial) f); s - 1_k)$. □

En prenant $k = p$ puis en appliquant à 2 reprises (avec s "convenable") le lemme 3.7.1, on en déduit :

Lemme 3.7.2 *1. Dans le cas complexe :*
Pour $p \geq 1$ on a : $b_p(s)^2 = b_p^*(s^* - (N-1)1_p)^2$.
Pour $p \geq 2$ et $k = 1, .., p-1$ on a : $b_p(s)^2 = b_k(s)^2 b_{p-k}^*(s^* - (N-1)1_p)^2$,
à l'exception des formes de (E_7, α_6) et du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P'_0 pour lesquels on a : $\Big(b_2(s)b_2(s - 1_2)\Big)^2 = \Big(b_1(s)b_1^*(s^* - (N-2)1_2)\Big)^2$.

2. *Dans le cas réel :*
Pour $p \geq 1$ on a : $b_p(s) = (-1)^d b_p^*(s^* - (N-1)1_p)$.
Pour $p \geq 2$ et $k = 1, .., p-1$ on a : $b_p(s) = b_k(s)(-1)^{d'_k}\ b^*_{p-k}(s^* - (N-1)1_p)$,
à l'exception des formes de (E_7, α_6) et du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P'_0 pour lesquels on a : $b_2(s)b_2(s-1_2) = b_1(s)b_1^*(s^* - (N-2)1_2)$.

Avec les notations de la proposition 3.4.4, on obtient :

Proposition 3.7.3 *On suppose que $p \geq 2$. Soient $b = b_{\mathfrak{g},P(H_1,..,H_p)}$, P_1 et P_2 les sous-groupes paraboliques associés respectivement à $H_1, .., H_k$ dans $Aut(\mathfrak{U})$ et à $H_{k+1}, .., H_p$ dans $Aut(\mathfrak{U}')$. On a :*

$$b(s_1, ..., s_p) = A_k^{-d_k} B_k^{-d'_k} b_{\mathfrak{U},P_1}(s_{p-k+1}, ..., s_p) b_{\mathfrak{U}',P_2}(s_1, ..., s_{p-k-1}, \sum_{p-k \leq i \leq p} s_i + r_k)$$

avec $r_k = \frac{p_1+2p_2}{2d'_k}$ et pour $i = 1, 2 : p_i = dim(E_i(h_k) \cap \mathfrak{g}_i)$,
à l'exception du cas classique (C_n, α_k) avec le parabolique P'_0 et des formes de (E_7, α_6) pour lesquelles on a :

$$b(s_1, s_2) = \pm\ C^4.\ s_2(s_2+3)(2s_1+s_2+4)(2s_1+s_2+7)\ \textit{avec}\ C = \frac{2}{\widetilde{B}(H_0, H_0)}.$$

Démonstration: 1) Dans le cas réel, on applique les lemmes 3.7.2 et 3.4.4.
Soit $N_{\mathfrak{U}'}$ la constante associée au préhomogène $(\mathfrak{U}'_0, \mathfrak{U}'_1)$, dans les notations du lemme 1.4.7 et avec cette démonstration on a :

$$N = \frac{2p_{0,2} + p_1}{2d'_k m'_k} = (\frac{p_1}{2d'_k} + \frac{dim(\mathfrak{U}') + p_2}{d'_k})\frac{1}{m'_k} = \frac{r_k}{m'_k} + N_{\mathfrak{U}'} \quad \text{donc} \quad N - N_{\mathfrak{U}'} = \frac{r_k}{m'_k}.$$

Lorsque $d_k + d'_k = d_p$, la relation (3) de la démonstration du lemme 1.4.7 nous donne $m'_k = 1$ d'où le résultat.
Sinon on est dans l'un des 2 cas cités dans la proposition et $k = 1$ avec $m'_1 = \frac{1}{2}$, $d_1 = d'_1 = d$ et on a :

$$b_2(s_1, s_2)b_2(s_1, s_2 - 1) = (A_1 B_1)^{-d_1} b_{\mathfrak{U}}(s_2) b_{\mathfrak{U}}(s_2 - 1) b_{\mathfrak{U}'}(2s_1 + s_2 + 2r_1 - 1) b_{\mathfrak{U}'}(2s_1 + s_2 + 2r_1).$$

Dans le cas des formes réelles de (E_7, α_6), les invariants relatifs fondamentaux des préhomogènes $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$ et $(\mathfrak{U}'_0, \mathfrak{U}'_1)$ sont des formes quadratiques et on applique la remarque 3.6.3 en notant que $N = 4r_1 = 8$.
2) Dans le cas complexe, on applique le résultat du cas réel $((\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_0, (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_1)$ avec le sous-groupe parabolique associé à $H_1, ..., H_p$ car les 2 préhomogènes ont les mêmes polynomes de Bernstein.

□

Remarque 3.7.4 *:*

1. *On ne donne pas le résultat lorsque le préhomogène est de type (C_n, α_k) avec l'action du sous-groupe parabolique P_0' car ce résultat ne sera pas utilisé ultérieurement ; lorsque l'algèbre est déployée, donc k est pair, $b(s_1, s_2)$ est proportionnel à :*

$$\prod_{j=0}^{\frac{k}{2}-1}\Big((s_2+2j)(2s_1+s_2+2n-2k-1-2j)\Big).$$

Dans le cas (E_7, α_6), avec la normalisation $C = 1$, on établira que $b(s_1, s_2)$ est unitaire (cf corollaire 8.1.5).

2. *A l'exception des cas indiqués dans la proposition 3.7.3, on a immédiatement par récurrence l'existence, pour $\ell = 1, ..., p$, de nombres rationnels positifs, $\lambda_{\ell,j}, j = 1, ..., d_{p-\ell+1} - d_{p-\ell}$, avec $d_0 = 0$, tels que $b(s_1, ..., s_p)$ soit proportionnel à :*

$$\prod_{\ell=1}^{p}\Big(\prod_{j=1}^{d_{p-\ell+1}-d_{p-\ell}}(s_\ell + ... + s_p + \lambda_{\ell,j})\Big).$$

Si on note $\lambda^{\mathfrak{g}}_{\ell,j}$ ceux associés au préhomogène $(P_{\mathfrak{t}}, \mathfrak{g}_1)$ alors on a la formule de récurrence suivante :

$$\lambda^{\mathfrak{g}}_{\ell,j} = \begin{cases} \lambda^{\mathfrak{u}'}_{\ell,j} + r_k & \ell = 1, ..., p-k \\ \\ \lambda^{\mathfrak{u}}_{\ell-p+k,j} & \ell = p-k+1, ..., p. \end{cases}$$

$b(s_1, ..., s_p)$ sera donné explicitement dans chaque cas lorsque le sous-groupe parabolique est maximal parmi les sous-groupes paraboliques très spéciaux.

4 Décomposition des mesures sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ et application

Dans le cas archimédien, on a montré que le polynome de Bernstein, $b_{\mathfrak{g},P_\mathfrak{t}}$, associé au préhomogène $(P_\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_{\pm 1})$ est un produit de 2 polynomes de Bernstein associés à 2 préhomogènes de rang plus petits (cf.prop.3.7.3). Il en est de même, sous une forme plus élaborée faisant intervenir les orbites, pour les coefficients de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Zéta (cf.§ 5).

Pour obtenir ce type de résultat, on se propose de décomposer les mesures de Haar sur $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ sous l'action du radical unipotent du sous-groupe parabolique associé à $\mathfrak{t}_k = \mathbb{F}h_k \oplus \mathbb{F}H_0$, avec $1 \leq k \leq p-1$, de donner la décomposition correspondante sur la transformation de Fourier ainsi que l'expression de la mesure relativement invariante par G_{h_k} sur W_{h_k} (cf.lemme 1.1.1).

Ces résultats généralisent ceux obtenus antérieurement dans le cas commutatif ([Mu 1]) et utilisés dans [Bo-Ru 2] (th.4.28).

4.1 Notations

Pour $i, j \in \mathbb{Z}$ soit $E_{i,j} = E_{i,j}(h_k) = E_i(h_k) \cap E_j(2H_0 - h_k)$ et $p_{i,j}$ sa dimension, notée également p_i lorsque $i = j$ ($p_i := p_{i,i}$).

On note : $E'_{2,0} = \{x \in E_{2,0} \mid (x, h_k)$ se complète en un sl_2-triplet 1-adapté $\}$ et $E'_{0,2} = \{x \in E_{0,2} \mid (x, 2H_0 - h_k)$ se complète en un sl_2-triplet 1-adapté $\}$.

On rappelle que :

$$W_k := W_{h_k} = \{x + y \mid x \in E'_{2,0}, y \in E'_{0,2}, [x, y] = 0\}$$

et on note :

$$\mathfrak{n}_k := \mathfrak{n}_{\mathfrak{t}_k} = E_{-1,1} \oplus E_{-2,2} \quad , \quad N_k := N_{\mathfrak{t}_k} = exp(ad(\mathfrak{n}_k)).$$

Lorsque $x + y \in W_k$, soit $\theta_x := \theta_{x,h_k}(-1)$, $\theta_y := \theta_{y,2H_0-h_k}(-1)$ et $\theta_{x+y} := \theta_{x+y,2H_0}(-1)$ alors $\theta_{x+y} = \theta_x.\theta_y = \theta_y.\theta_x$ est une bijection de $E_{i,j}$ sur $E_{-i,-j}$ donnée par :

$$\theta_x/_{E_{-1,\pm 1}} = -ad(x)/_{E_{-1,\pm 1}} \quad , \quad \theta_x/_{E_{1,\pm 1}} = -ad(x^{-1})/_{E_{1,\pm 1}} \quad , \quad \theta_x^2/_{E_{i,j}} = (-1)^i.Id$$

$$\theta_x/_{E_{-2,\pm 2}} = \frac{1}{2}ad(x)^2/_{E_{-2,\pm 2}} \quad , \quad \theta_x/_{E_{2,\pm 2}} = \frac{1}{2}ad(x^{-1})^2/_{E_{2,\pm 2}}$$

avec des relations analogues pour θ_y.

Définition 4.1.1 *Pour $x + y \in W_k$, soit $F_{x,y}$ la restriction de $\tilde{B}(\theta_{x+y}(\ ),\ )$ à $E_{-1,1} \times E_{-1,1}$, $Q_{x,y}$ la forme quadratique associée, pour $A, B \in E_{-1,1}$ on a :*

$$F_{x,y}(A, B) = \tilde{B}([x, [y^{-1}, A]], B)\ ,\ Q_{x,y}(A) = \frac{1}{2}F_{x,y}(A, A) = \frac{1}{2}\tilde{B}((ad(A)^2(x), y^{-1}),$$

et $\gamma_k(x, y)$ la constante associée au caractère quadratique $\tau \circ Q_{x,y}$ lorsque $E_{1,1} \neq \{0\}$, et $\gamma_k(x, y) = 1$ sinon.
$\gamma_k(\ ,\ )$ est constante sur les orbites de G_{h_k} dans W_{h_k}.

Définition 4.1.2 *V étant un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ et V^* son dual dans $\mathfrak{g}$ pour $\tilde{B}$, on note $\mathcal{F}_V$ (resp.$\overline{\mathcal{F}_V}$) la transformation de Fourier définie sur V par la la restriction de $\tau \circ \widetilde{B}$ (resp.$\overline{\tau \circ \widetilde{B}}$) à $V \times V^*$*

4.2 Mesures sur les sous espaces $E_{i,j}$ et $E_{-i,-j}$ pour $(i,j) \neq (0,0)$

Lemme 4.2.1 *Pour $(i,j) \neq (0,0)$ il existe une unique mesure de Haar sur $E_{i,j}$ et une unique mesure de Haar sur $E_{-i,-j}$, notées dx, telles que :*

1. $\overline{\mathcal{F}_{E_{-i,-j}}} \circ \mathcal{F}_{E_{i,j}} = \mathcal{F}_{E_{-i,-j}} \circ \overline{\mathcal{F}_{E_{i,j}}} = Id_{E_{i,j}}$
2. *Pour tout $x+y \in W_k$ et $f \in L^1(E_{-i,-j})$ on a :*

$$\int_{E_{i,j}} f(\theta_{x+y}(z))\ dz = |F_k(x)|^{\frac{ip_{i,j}}{d_k}} |P_{p-k}(y)|^{\frac{jp_{i,j}}{d'_k}} \int_{E_{-i,-j}} f(u)\ du.$$

Démonstration: Omise car elle est analogue à celle du lemme 3.2.1 en se rappelant que $|det(\theta_{x+y}/E_{i,j})|^{\frac{1}{2}} |F_k(x)|^{\frac{ip_{i,j}}{2d_k}} |P_{p-k}(y)|^{\frac{jp_{i,j}}{2d'_k}}$ est une constante (cf.démonstration du lemme 1.4.7) ; dans une base $\mathfrak{B}$ de $E_{i,j}$ (donc $E_{-i,-j}$ est muni de la base $\mathfrak{B}^*$ duale pour $\tilde{B}$) elle a pour expression $dz = \lambda_{\mathfrak{B}} d_{\mathfrak{B}} z$ avec :

$$\lambda_{\mathfrak{B}} = |det(\ \theta_{x+y} : E_{i,j}(\mathfrak{B}) \to E_{-i,-j}(\mathfrak{B}^*)\ )|^{\frac{1}{2}} |F_k(x)|^{\frac{ip_{i,j}}{2d_k}} |P_{p-k}(y)|^{\frac{jp_{i,j}}{2d'_k}}$$

(et $\dfrac{1}{\lambda_{\mathfrak{B}}} d_{\mathfrak{B}^*} z$ sur $E_{-i,-j}$). □

Dorénavant chaque sous-espace $E_{i,j}$ pour $(i,j) \neq (0,0)$ est muni de cette unique mesure de Haar et avec cette normalisation on a les lemmes suivants :

Lemme 4.2.2 *Soient $(i,j) \neq (0,0)$ et $g \in L^1(E_{i,j})$.*

1. *Pour $x \in E'_{2,0}$ et $y \in E'_{0,2}$, on a :*

$$\int_{E_{i,j}} g(u)\ du = |F_k(x)|^{\frac{ip_{i,j}}{d_k}} \int_{E_{-i,j}} g(\theta_x(z))\ dz = |P_{p-k}(y)|^{\frac{jp_{i,j}}{d'_k}} \int_{E_{i,-j}} g(\theta_y(z))\ dz.$$

2. *Soit σ une involution de $\mathfrak{g}$ telle que $\sigma(h_k) = -h_k$, $\sigma(H_0) = -H_0$ et on suppose que $W_{k,\sigma} = \{z \in W_k \mid \sigma(x) = \Phi(x)\} \neq \emptyset$, alors*

$$\int_{E_{-i,-j}} g(\sigma(v))\ dv = |F_k(x)|^{\frac{-ip_{i,j}}{d_k}} |P_{p-k}(y)|^{\frac{-jp_{i,j}}{d'_k}} \int_{E_{i,j}} g(u)\ du \quad \text{avec } x+y \in W_{k,\sigma}.$$

Démonstration: 1) Soit $x \in E'_{2,0}$, on le complète par un élément $z \in E'_{0,2}$ de telle manière que $x+z \in W_k$ et on munit :
• $E_{i,j}$ d'une base $\mathfrak{B}$ et $E_{-i,-j}$ de la base $\mathfrak{B}^*$, duale de $\mathfrak{B}$ pour $\tilde{B}$,
• $E_{-i,j}$ de la base $\mathfrak{B}' = \theta_x(\mathfrak{B})$ donc $\theta_x(\mathfrak{B}^*)$ est la base duale de $E_{i,-j}$ pour $\tilde{B}$.

Par le choix des bases, on a :

$$|det(\ \theta_{x+y} : E_{i,j}(\mathfrak{B}) \to E_{-i,-j}(\mathfrak{B}^*)\ )| = |det(\ \theta_{x+y} : E_{-i,j}(\theta_x(\mathfrak{B})) \to E_{i,-j}(\theta_x(\mathfrak{B}^*))\ )|\ ,$$

donc $\dfrac{\lambda_{\mathfrak{B}}}{\lambda_{\mathfrak{B}'}} = |F_k(x)|^{\frac{ip_{i,j}}{d_k}}$ d'où la première égalité. On procède de même pour la seconde égalité.

2) Soit $x+y \in W_{k,\sigma}$, alors σ et θ_{x+y} commutent donc $\theta = \sigma\theta_{x+y}$ est une bijection de $E_{i,j}$ pour laquelle $\theta^2 = (-1)^{i+j} Id_{E_{i,j}}$ donc :

$$\int_{E_{i,j}} g(\theta(v))\ dv = \int_{E_{i,j}} g(v)\ dv = \int_{E_{i,j}} g\circ\sigma(\theta_{x+y}(v))\ dv$$

d'où le résultat. Notons que $|F_k(x)|^{\frac{-ip_{i,j}}{d_k}} |P_{p-k}(y)|^{\frac{-jp_{i,j}}{d'_k}}$ est constant sur $W_{k,\sigma}$ et sa valeur dépend de la normalisation choisie pour les invariants relatifs F_k et F_p. □

Lemme 4.2.3 *On suppose que $E_{-1,1} \neq \{0\}$. Soit $x+y \in W_k$, pour $u \in L^1(E_{-1,1})$ et $\mathcal{F}_{E_{-1,1}}(u) \in L^1(E_{1,-1})$ on a :*

$$\int_{E_{-1,1}} \tau\Big(Q_{x,y}(A)\Big)\mathcal{F}_{E_{-1,1}}(u)\Big(\theta_{x+y}(A)\Big)dA = C(x,y)\int_{E_{-1,1}} \overline{\tau\Big(Q_{x,y}(A)\Big)}u(A)dA$$

avec

$$C(x,y) = \gamma_k(x,y)|F_k(x)|^{-\frac{p_1}{2d_k}}|P_{p-k}(y)|^{\frac{p_1}{2d'_k}}.$$

Démonstration: C'est le résultat concernant la transformation de Fourier d'un caractère quadratique, dû à A.Weil ([We]) traduit dans notre situation. Rappelons-le brièvement : E étant un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}$ et Q une forme quadratique non dégénérée sur E, on note $F(A,B) = Q(A+B) - Q(A) - Q(B)$ la forme bilinéaire associée , alors $\tau\circ Q$ est un caractère quadratique non dégénéré du groupe additif E et on l'égalité :

$$\int_E \overline{\tau}(Q(A))u(A)dA = \gamma^{-1}(\tau\circ Q)\ |\ \rho\ |^{\frac{1}{2}} \int_E \tau(Q(A))u^*(\rho(A))dA$$

lorsque u et u^* sont intégrables , avec

$$u^*\Big(\rho(A)\Big) = \int_E u(B)\tau\Big(F(A,B)\Big)dB$$

ρ étant l' isomorphisme symétrique associé à Q de E sur E^* et $|\rho|$ est définie par

$$\int_{E^*} g(u)du = |\rho|\int_E g(\rho(A))dA$$

les mesures de Haar sur E et E^* étant duales.
Dans notre situation $E = E_{-1,1}$, E^* est identifié à $E_{1,-1}$ à l'aide de $\tilde{B}$, $Q := Q_{x,y}$ donc $F := F_{x,y}$ et $\rho := \theta_{x+y}/E_{-1,1}$ donc $u^* = \mathcal{F}_{E_{-1,1}}(u)$ et par le choix des mesures sur $E_{-1,1}$ et $E_{1,-1}$ ainsi que le lemme 4.2.1 on a $|\rho|^{-1} = |F_k(x)|^{\frac{-p_1}{d_k}}|P_{p-k}(y)|^{\frac{p_1}{d'_k}}$. □

Lemme 4.2.4

$$\begin{array}{lcll} \int_{\mathfrak{g}_1} f(x)\ dx & = & \int\int\int_{E_{2,0}\times E_{0,2}\times E_{1,1}} & f(x+y+z)\ dx\ dy\ dz\ , \\ \int_{\mathfrak{g}_{-1}} g(y)\ dy & = & \int\int\int_{E_{-2,0}\times E_{0,-2}\times E_{-1,-1}} & g(x+y+z)\ dx\ dy\ dz\ . \end{array}$$

Démonstration: Pour $f \in L^1(\mathfrak{g}_1)$ et $g \in L^1(\mathfrak{g}_{-1})$ on pose

$$\begin{array}{lcll} \int_{\mathfrak{g}_1} f(x)\ d'x & := & \int\int\int_{E_{2,0}\times E_{0,2}\times E_{1,1}} & f(x+y+z)\ dx\ dy\ dz\ , \\ \int_{\mathfrak{g}_{-1}} g(y)\ d'y & := & \int\int\int_{E_{-2,0}\times E_{0,-2}\times E_{-1,-1}} & g(x+y+z)\ dx\ dy\ dz\ . \end{array}$$

Il suffit de vérifier les 2 hypothèses du lemme 3.2.1, ce qui se fait immédiatement :
• pour la transformation de Fourier avec $f(x+y+z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$
• en prenant $x+y \in W_k$ et en appliquant le lemme 4.2.1 ce qui donne le résultat puisque

$$|F_k(x)|^{2Nm_k}|P_{p-k}(y)|^{2Nm_k} = |F(x+y)|^{2N} \quad \text{avec } Nm_k = \frac{\frac{p_1}{2}+p_{2,0}}{d_k} = \frac{\frac{p_1}{2}+p_{0,2}}{d'_k}$$

(dém. du lemme 1.4.7). □

Indiquons le dernier choix de mesures nécessaire pour établir le théorème 4.3.3 :

Définition 4.2.5 *Soit $x \in E'_2(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ (resp.$y \in E'_2(2H_0 - h_k) \cap \mathfrak{g}_1$) et $\mathfrak{s}$ la sous-algèbre engendrée par le sl_2-triplet (x, h_k, x^{-1}) (resp.$(y, 2H_0 - h_k, y^{-1})$, on munit $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{\pm 1}$ des uniques mesures vérifiant :*

1. $\overline{\mathcal{F}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{-1}}} \circ \mathcal{F}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1} = Id_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1}$
2. *Pour tout $x_0 \in \mathfrak{U}'(\mathfrak{s})_1$ et $f \in L^1(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{-1})$ on a :*

$$\begin{array}{rcll} \int_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1} f(\theta_{x_0}(z))\ dz & = & |P_{p-k}(x_0)|^{\frac{p_{0,2}-p_2}{d'_k}} & \int_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{-1}} f(u)\ du \\ (resp. & = & |F_k(x_0)|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}} & \int_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{-1}} f(u)\ du). \end{array}$$

c'est à dire que $\widetilde{B_{\mathfrak{U}(\mathfrak{s})}} = \widetilde{B}/\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ et les mesures sont adaptées à la restriction de P_{p-k} (resp.F_k) à $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$.

Ce choix est cohérent avec le lemme 4.2.1 puisque $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_{\pm 1} = (E_{0,\pm 2})_x = (E_{0,\pm 2})_{x^{-1}} = E_{0,\pm 2}$ (resp.$(E_{\pm 2,0})_y = (E_{\pm 2,0})_{y^{-1}} = E_{0,\pm 2}$) lorsque le préhomogène est commutatif.

Avec ce choix et dans les notations de cette définition on a :

Lemme 4.2.6 *1. Soit $x \in E'_{2,0}$, pour $f \in L^1(E_{0,2})$ et $g \in L^1(E_{0,-2})$ on a :*

$$\begin{array}{rcl} \int_{E_{0,2}} f(z)dz & = & |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |F_k(x)|^{\frac{p_2}{d_k}} \int\int_{(u,v)\in E_{-2,2}\times (E_{0,2})_x} f([x,u]+v)dudv \\ \int_{E_{0,-2}} g(z)dz & = & |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |P_k^*(x^{-1})|^{\frac{p_2}{d'_{p-k}}} \int\int_{(u,v)\in E_{2,-2}\times (E_{0,-2})_x} f([x^{-1},u]+v)dudv. \end{array}$$

2. Soit $y \in E'_{0,2}$, pour $f \in L^1(E_{2,0})$ et $g \in L^1(E_{-2,0})$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \int_{E_{2,0}} f(z)dz & = & |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |P_{p-k}(y)|^{\frac{p_2}{d'_k}} \int\int_{(u,v)\in E_{2,-2}\times (E_{2,0})_y} f([y,u]+v)dudv \\ \int_{E_{-2,0}} g(z)dz & = & |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |F_{p-k}^*(y^{-1})|^{\frac{p_2}{d'_k}} \int\int_{(u,v)\in E_{-2,2}\times (E_{-2,0})_y} f([y^{-1},u]+v)dudv. \end{array}$$

Démonstration: 1) On a :

$$E_{0,2} = [x, E_{-2,2}] \oplus (E_{0,2})_x \quad \text{et} \quad E_{0,-2} = [x^{-1}, E_{2,-2}] \oplus (E_{0,-2})_x \ .$$

Soient $(f_i)_{1\leq i\leq p_2}$ et $(f_i^*)_{1\leq i\leq p_2}$ 2 bases de $E_{-2,2}$ et $E_{2,-2}$, duales pour $\tilde{B}$, alors $([x, f_i])_{1\leq i\leq p_2}$ et $(\frac{1}{2}[x^{-1}, f_i^*])_{1\leq i\leq p_2}$ sont 2 bases de $[x, E_{-2,2}]$ et $[x^{-1}, E_{2,-2}]$, duales pour $\tilde{B}$, on les complète par 2 bases de $(E_{0,\pm 2})_x$ duales pour $\tilde{B}$.

Notons λ, λ_2 et λ_x les constantes associées aux mesures définies sur $E_{0,2}, E_{-2,2}$ par le lemme 4.2.1 et sur $(E_{0,2})_x$ par la définition 4.2.5, ceci avec les bases duales indiquées , il suffit de calculer $C = \frac{\lambda}{\lambda_2.\lambda_x}$ c'est à dire (cf. démonstration du lemme 3.2.1 pour $(E_{0,2})_x$ et du lemme 4.2.1 pour $E_{0,2}$ et $E_{-2,2}$) :

$$\begin{aligned} C &= |det(\theta_{x+y}/E_{0,2})|^{\frac{1}{2}} |det(\theta_{x+y}/E_{-2,2})|^{-\frac{1}{2}} |det(\theta_y/(E_{0,2})_x)|^{-\frac{1}{2}} |F_k(x)|^{\frac{p_2}{d_k}} \\ &= |det(\theta_{x+y}/[x, E_{-2,2}])|^{\frac{1}{2}} |det(\theta_{x+y}/E_{-2,2})|^{-\frac{1}{2}} |F_k(x)|^{\frac{p_2}{d_k}} \\ &= |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |F_k(x)|^{\frac{p_2}{d_k}} \end{aligned}$$

d'où le résultat.
2) Idem □

4.3 Décomposition des mesures sur $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$

Définition 4.3.1 *1. Pour f appartenant à $L^1(\mathfrak{g}_1)$, x dans $E'_{2,0}$ et y dans $E_{0,2}$, on pose :*

$$\begin{aligned} S_f(x+y) &= |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |F_k(x)|_{\mathbb{F}}^{md'_k} \int_{\mathfrak{n}_k} f(e^{ad(A)}(x+y))\ dA \\ T_f(x+y) &= \begin{cases} |F_k(x)|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_1}{2d_k}} \int_{E_{-1,1}} f(e^{ad(A)}(x+y))dA & si \quad E_{-1,1} \neq \{0\} \\ f(x+y) & si \quad E_{-1,1} = \{0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

avec $m = \dfrac{r_k}{d_k} = \dfrac{\frac{p_1}{2} + p_2}{d_k d'_k}$.

2. Pour g appartenant à $L^1(\mathfrak{g}_{-1})$, x' dans $E_{-2,0}$ et y' dans $E'_{0,-2}$, soit

$$\begin{aligned} S_g^*(x'+y') &= |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |F_{p-k}^*(y')|_{\mathbb{F}}^{md_k} \int_{\mathfrak{n}_k} g(e^{ad(A)}(x'+y'))\ dA \\ T_g^*(x'+y') &= \begin{cases} |F_{p-k}^*(y')|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_1}{2d'_k}} \int_{E_{-1,1}} g(e^{ad(A)}(x'+y'))dA & si \quad E_{-1,1} \neq \{0\} \\ g(x'+y') & si \quad E_{-1,1} = \{0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathfrak{n}_k$ étant muni de la mesure produit.

Remarque 4.3.2 *Les normalisations de S_f, S_g^*, T_f et T_g^* sont dûes au lemme 4.2.3.*

Soient $A_1 \in E_{-1,1}$, $A_2 \in E_{-2,2}$, $x \in E'_{2,0}$, $y \in E_{0,2}$, $x' \in E_{-2,0}$, $y' \in E'_{0,-2}$, on a (cf. démonstration du lemme 1.1.1) :

$$exp(ad(A_1 + A_2))(x+y) = x + [A_1 + A_2, x] + y + \frac{1}{2} ad(A_1)^2(x) = exp(ad(A_1)(x + [A_2, x] + y) \ ,$$

$exp(ad(A_1+A_2))(x'+y') = x'+[A_1+A_2,y']+y'+\frac{1}{2}ad(A_1)^2(y') = exp(ad(A_1)(x'+[A_2,y']+y')$,
donc :

$$\begin{aligned} S_f(x+y) &= |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |F_k(x)|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{d_k}} \quad \int_{E_{-2,2}} T_f(x+[A,x]+y)\ dA \\ S_g^*(x'+y') &= |2|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{2}} |F^*_{p-k}(y')|_{\mathbb{F}}^{\frac{p_2}{d'_k}} \quad \int_{E_{-2,2}} T_g^*(x'+[A,y']+y')\ dA\ . \end{aligned}$$

Théorème 4.3.3 *1. Pour f dans $L^1(\mathfrak{g}_1)$ on a :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{g}_1} f(x)dx &= \int\int_{E_{2,0}\times E_{0,2}} T_f(x+y)|F_k(x)|^{\frac{p_1}{2d_k}} dxdy \\ &= \int_{E_{2,0}} |F_k(x)|^{\frac{p_1}{2d_k}}\ (\ \int_{(E_{0,2})_x} S_f(x+y)\ dy\ )\ dx\ . \end{aligned}$$

2. Pour g dans $L^1(\mathfrak{g}_{-1})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{g}_{-1}} g(x)dx &= \int\int_{E_{-2,0}\times E_{0,-2}} T_g^*(x'+y')\mid F^*_{p-k}(y')\mid^{\frac{p_1}{2d'_k}} dx'dy' \\ &= \int_{E_{0,-2}} |F^*_{p-k}(y')|^{\frac{p_1}{2d'_k}}\ (\ \int_{(E_{-2,0})_{y'}}\ S_g^*(x'+y')\ dx'\ )\ dy'. \end{aligned}$$

Démonstration: Par le lemme 4.2.4 on a

$$\int_{\mathfrak{g}_1} f(x)\,dx = \int\int_{E_{2,0}\times E_{0,2}} \left(\int_{E_{1,1}} f(x+y+z)\,dz\right) dxdy = \int\int_{E'_{2,0}\times E_{0,2}} \left(\int_{E_{1,1}} f(x+y+z)\,dz\right) dxdy$$

Or pour $x \in E'_{2,0}$ on a par le 1. du lemme 4.2.2 :

$$\begin{aligned} \int_{E_{1,1}} f(x+y+z)\ dz &= |F_k(x)|^{\frac{p_1}{d_k}} \int_{E_{-1,1}} f(x+y+\theta_x(A))\ dA \quad \text{donc} \\ \int_{\mathfrak{g}_1} f(x)\ dx &= \int\int_{E'_{2,0}\times E_{0,2}} \left(|F_k(x)|^{\frac{p_1}{d_k}} \int_{E_{-1,1}} f(x+y+\theta_x(A))\ dA\right) dxdy \\ &= \int_{E'_{2,0}} \left(\int_{E_{0,2}} \left(|F_k(x)|^{\frac{p_1}{d_k}} \int_{E_{-1,1}} f(x+y+[A,x]\ dA\right) dy\right) dx. \end{aligned}$$

D'où la première égalité du 1. est obtenue en effectuant la translation $y \to y+\frac{1}{2}ad(A)^2(x)$ et pour l'autre égalité de 1., on applique le lemme 4.2.6 et la remarque 4.3.2 à la première égalité.
On procède de même pour 2. □

Remarque 4.3.4 *Soit f dans $L^1(\mathfrak{g}_1)$ (resp. $g \in L^1(\mathfrak{g}_{-1})$), T_f (resp.T_g^*) est défini presque partout et $|F_k(x)|^{\frac{p_1}{2d_k}} T_f(x+y)$ (resp.$F^*{}_{p-k}(y')^{\frac{p_1}{2d'_k}} T_g^*(x'+y')$) est intégrable sur $E_{2,0}\times E_{0,2}$ (resp.$E_{-2,0}\times E_{0,-2}$) muni de la mesure produit.*

Théorème 4.3.5 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ alors :*

1. $\mathcal{F}_{E_{0,2}}\Big(T_f(x+\,.\,)\Big)(y') = \mathcal{F}_{(E_{0,2})_x}\Big(S_f(x+\,.\,)\Big)(y')$ *lorsque* $[x,y']=0$.
2. *Pour $x' \in E_{-2,0}$ et $y' \in E'_{0,-2}$ tels que $[x',y']=0$ on a :*

$$S^*_{\mathcal{F}(\mathbf{f})}(x'+y') = \mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}\Big(\ \ \gamma_k(x\ ,y'^{-1}).\mathcal{F}_{E_{0,2}}(T_{\mathbf{f}}(x+\,.\,))(y')\ \Big)(x').$$

Démonstration: 1. Résulte du lemme 4.2.6 et de la remarque 4.3.2.

2. Soient $C \in \mathfrak{n}_k : C = C_1 + C_2$, avec $C_i \in E_{-i,i}$, $x' \in E_{-2,0}$, $y' \in E'_{0,-2}$ et

$$\begin{aligned}(1) &= \mathcal{F}(f)(exp(adC(x'+y'))) \\ &= \int\int\int_{x_i \in E_{i,2-i}, i=0,1,2} f(x_2+x_1+x_0)\tau(\tilde{B}((exp(adC)(x'+y'), x_2+x_1+x_0))dx_2dx_1dx_0\end{aligned}$$

par le lemme 4.2.4, alors par orthogonalité et en utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned}(1) &= \int\int_{x_i \in E_{i,2-i}, i=1,2} \mathcal{F}_{E_{0,2}}\Big(f(x_2+x_1+\bullet)\Big)(y')\tau(\tilde{B}\Big(x_2, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y') + [C_2, y']\Big)). \\ &\quad \tau(\tilde{B}\Big(x_1, [C_1, y']\Big))dx_2dx_1 \\ &= \int_{E_{1,1}} (2)\tau(\tilde{B}\Big(x_1, [C_1, y']\Big))\ dx_1 \text{ avec :} \\ (2) &= \int_{E_{2,0}} \mathcal{F}_{E_{0,2}}\Big(f(x_2+x_1+\bullet)\Big)(y')\tau(\tilde{B}\Big(x_2, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y') + [C_2, y']\Big))dx_2.\end{aligned}$$

On applique le lemme 4.2.6 à $E_{2,0}$ avec y'^{-1} d'où :

$$(2) = |2|^{\frac{p_2}{2}}|F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_2}{d'_k}} \int\int_{(u,v)\in E_{2,-2}\times(E_{2,0})_{y'}} \mathcal{F}_{E_{0,2}}(\ f([y'^{-1}, u] + v + x_1 + \bullet)\ )(y')(3)dudv$$

avec

$$\begin{aligned}(3) &= \tau(\tilde{B}([y'^{-1}, u] + v, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y') + [C_2, y']) \\ (3) &= \tau(\tilde{B}(v, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y')).\tau(\tilde{B}(u, -2C_2 + \tfrac{1}{2}\ [ad(C_1)^2(y'), y'^{-1}])) \text{ lorsque } [x', y'] = 0\end{aligned}$$

par orthogonalité.

Donc, lorsque $[x', y'] = 0$, on a en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}(2) &= |2|^{\frac{p_2}{2}}|F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_2}{d'_k}} \int_{(E_{2,0})_{y'}} \mathcal{F}_{E_{2,-2}}(g(\bullet, v, x_1))(-2C_2 + \tfrac{1}{2}\ [ad(C_1)^2(y'), y'^{-1}]). \\ &\quad \tau(\tilde{B}(v, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y'))dv.\end{aligned}$$

avec $g(u, v, x_1) = \mathcal{F}_{E_{0,2}}(\ f([y'^{-1}, u] + v + x_1 + \bullet)\ )(y')$.

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et que y' est fixé dans $E'_{0,-2}$, on a $g \in \mathcal{S}(E_{2,-2} \times (E_{2,0})_{y'} \times E_{1,1})$.

On a à évaluer :

$$\begin{aligned}(4) &= S^*_{\mathcal{F}f}(x'+y') \\ &= |2|^{\frac{p_2}{2}}|F^*_{p-k}(y')|^{md_k} \int_{E_{-1,1}} (\ \int_{E_{-2,2}} (1)\ dC_2\ )\ dC_1 \\ &= |2|^{\frac{p_2}{2}}|F^*_{p-k}(y')|^{md_k}.\int_{E_{-1,1}} (5)\ dC_1 \quad \text{avec} \\ (5) &= \int_{E_{-2,2}} (\ \int_{E_{1,1}} (2)\tau(\tilde{B}(x_1, [C_1, y']))\ dx_1\ )\ dC_2 \\ &= |2|^{\frac{p_2}{2}}|F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_2}{d'_k}}. \\ &\quad \int_{E_{-2,2}} (\ \int_{E_{1,1}} \Big(\int_{(E_{2,0})_{y'}} \mathcal{F}_{E_{2,-2}}(\ g(\bullet, v, x_1)\ )(-2C_2 + \tfrac{1}{2}\ [ad(C_1)^2(y'), y'^{-1}]) \\ &\quad \tau(\tilde{B}(v, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y'))\ dv\Big)\ \tau(\tilde{B}(x_1, [C_1, y']))\ dx_1\ )\ dC_2\ ,\end{aligned}$$

mais cette intégrale converge absolument donc on peut appliquer le théorème de Fubini d'où :

$$\begin{aligned}
(5) &= \int_{(E_{2,0})_{y'}} \tau(\tilde{B}(v, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y'))\ (\int_{E_{1,1}} (6)\tau(\tilde{B}(x_1, [C_1, y']))\ dx_1\ )\ dv \quad \text{avec} \\
(6) &= |2|^{\frac{p_2}{2}} |F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_2}{d'_k}} \int_{E_{-2,2}}\ \mathcal{F}_{E_{2,-2}}(\ g(\bullet, v, x_1)\ )(-2C_2 + \tfrac{1}{2}\ [ad(C_1)^2(y'), y'^{-1}])\ dC_2 \\
&= |2|^{-\frac{p_2}{2}} |F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_2}{d'_k}} . g(0, v, x_1) \\
&= |2|^{-\frac{p_2}{2}} |F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_2}{d'_k}} . \mathcal{F}_{E_{0,2}}(f(v + x_1 + \bullet)(y')
\end{aligned}$$

Ainsi l'intégration suivant le sous-espace $E_{-2,2}$ est "annulée" par "double transformation de Fourier". Il reste encore à simplifier l'intégration suivant le sous-espace $E_{-1,1}$ à l'aide du lemme 4.2.3.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
(4) &= S^*_{\mathcal{F}f}(x' + y') \\
&= |2|^{\frac{p_2}{2}} |F^*_{p-k}(y')|^{md_k} . \\
&\quad \int_{E_{-1,1}} (\ \int_{(E_{2,0})_{y'}} \tau(\tilde{B}(v, x' + \tfrac{1}{2}ad(C_1)^2(y'))\ h(C_1, v)\ dv\ )\ dC_1\ , \\
\text{avec } h(C_1, v) &= \int_{E_{1,1}} (6)\tau(\tilde{B}(x_1, [C_1, y']))\ dx_1 \\
&= |2|^{-\frac{p_2}{2}} |F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_2}{d'_k}} . \mathcal{F}_{E_{1,1}}\Big(\mathcal{F}_{E_{0,2}}(f(v + x_1 + \ .))(y')\Big)([C_1, y'])\ ,
\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et que y' est fixé dans $E'_{0,2}$, on a $h \in \mathcal{S}(E_{-1,1} \times (E_{2,0})_{y'})$ donc l'intégrale double figurant dans (4) converge absolument et on utilise à nouveau le théorème de Fubini d'où :

$$\begin{aligned}
(4) &= \mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(h_1)(x') \quad \text{et pour} \quad v \in (E'_{2,0})_{y'} \\
h_1(v) &= |F^*_{p-k}(y')|^{\frac{p_1}{2d'_k}} \int_{E_{-1,1}} \tau \circ Q_{v,y'^{-1}}(C_1)\ (\int_{E_{1,1}} g(0, v, x_1).\tau(\tilde{B}(x_1, [C_1, y']))\ dx_1\ )dC_1 \\
&= |F^*_{p-k}(y')|^{\frac{p_1}{2d'_k}} |F_k(v)|^{\frac{p_1}{d_k}} . \int_{E_{-1,1}} \tau(Q_{v,y'^{-1}}(C_1))(\int_{E_{-1,1}} u(A)\tau(-F_{v,y'^{-1}}(C_1, A))dA)dC_1\ ,
\end{aligned}$$

avec $u(A) = g(0, v, [A, v])$, en appliquant le 1. du lemme 4.2.2 à $E_{1,1}$ avec θ_v.
D'où :

$$\begin{aligned}
h_1(v) &= |F_k(v)|^{\frac{p_1}{d_k}} |F^*_{p-k}(y')|^{\frac{p_1}{2d'_k}} . \int_{E_{-1,1}} \tau(Q_{v,y'^{-1}}(C_1))(\int_{E_{-1,1}} u(A)\tau(F_{v,y'^{-1}}(C_1, A))dA)dC_1 \\
&= |F_k(v)|^{\frac{p_1}{d_k}} |F^*_{p-k}(y')|^{\frac{p_1}{2d'_k}} . \int_{E_{-1,1}} \tau(Q_{v,y'^{-1}}(C_1))\mathcal{F}_{E_{-1,1}}(u)(\theta_{v+y'^{-1}}(C_1))dC_1 \\
&= \gamma_k(v, y'^{-1})\ k(v) \quad \text{avec :} \\
k(v) &= |F_k(v)|^{\frac{p_1}{2d_k}} \int_{E_{-1,1}} \tau(-Q_{v,y'^{-1}}(C_1)\ )u(C_1)dC_1\ ,
\end{aligned}$$

par application du lemme 4.2.3.
Or :

$$\begin{aligned}
k(v) &= |F_k(v)|^{\frac{p_1}{2d_k}} . \int_{E-1,1} \tau(-Q_{v,y'}(A))\mathcal{F}_{E_{0,2}}(f(v + [A, v] + \bullet))(y')dA \\
&= |F_k(v)|^{\frac{p_1}{2d_k}} . \int_{E_{-1,1}} \Big(\int_{E_{0,2}} f(v + [A, v] + y)\tau(\tilde{B}(y, y'))\tau(-Q_{v,y'^{-1}}(A))dy\Big)dA \\
&= |F_k(v)|^{\frac{p_1}{2d_k}} . \int_{E_{-1,1}} \Big(\int_{E_{0,2}} f(exp(adA)(v + y))\tau(\tilde{B}(y, y'))dy\Big)dA
\end{aligned}$$

et comme il y a convergence absolue, on peut intervertir l'ordre des intégrations d'où :

$$\begin{aligned} k(v) &= |F_k(v)|^{\frac{p_1}{2d_k}} . \int_{E_{0,2}} \left(\int_{E_{-1,1}} f(exp(adA)(v+y))dA \right) \tau(\tilde{B}(y,y'))dy \\ &= \mathcal{F}_{E_{0,2}}(T_f(v+.))(y'). \end{aligned}$$ □

Remarque 4.3.6 *1. Lorsque $E_{2,2} = \{0\}$, on a la forme simple du cas commutatif.*

2. Le théorème est encore vrai sans irréductibilité mais avec quelques aménagements.

3. Soit U un ouvert de $\{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F_k(x)F(x) \neq 0\}$ et $f \in \mathcal{C}_C^\infty(U)$ alors pour $y \in E'_{0,-2}$ fixé la fonction $\gamma_k(\ , y^{-1})\mathcal{F}_{E_{0,2}}(T_f(x+\ ))(y) \in \mathcal{C}_C^\infty((E'_{2,0})_y)$ (cf.lemme 1.1.1 et $(E'_{2,0})_y$ est une réunion finie de $(G_{h_k})_y$-orbites ouvertes).

Plus généralemnt, si V un ouvert de $\{x \in \mathfrak{g}_1 \mid \prod_{1\leq i\leq k} F_i(x)F(x) \neq 0\}$ et $f \in \mathcal{C}_C^\infty(V)$ alors pour $y \in E'_{0,-2}$ fixé la fonction $\gamma_k(\ , y^{-1})\mathcal{F}_{E_{0,2}}(T_f(x+\ ))(y) \in \mathcal{C}_C^\infty((E''_{2,0})_y)$ (cf.lemme 1.1.1 et $(E''_{2,0})_y$ est une réunion finie de $P(H_1, ..., H_k)_y$-orbites ouvertes).

Les résultats obtenus dans le théorèmes 4.3.3 sont reliés à l'action de G_{h_k} sur les sous-variétés :

$$\begin{array}{rclcrcl} \tilde{W}_k &=& \{x+y \mid x \in E'_{2,0}\ ,\ y \in E_{0,2}\ ,\ [x,y]=0\} & \text{et} & W_k &=& \{z \in \tilde{W}_k \mid F_k(z)F_p(z) \neq 0\} \\ \tilde{W}_k^* &=& \{x'+y' \mid x' \in E_{-2,0}, y' \in E'_{0,-2}, [x',y']=0\} & \text{et} & W_k^* &=& \{z \in \tilde{W}_k^* \mid F_{p-k}^*(z)F_p^*(z) \neq 0\}. \end{array}$$

4.4 Expression des mesures G_{h_k} invariantes sur W_k et W_k^*

W_k et W_k^* sont des réunions finies de $G_{h_k}-$orbites et on a :

Proposition 4.4.1 *Soit $x_1 + y_1 \in W_k$, l'orbite $U = G_{h_k}.(x_1+y_1)$ est ouverte dans $\tilde{W}_k$. Elle est munie d'une mesure λ, G_{h_k}-invariante et $\forall f \in L^1(U,\lambda)$ on a :*

$$\begin{aligned} \int_U f\ d\lambda &= \int_{G_{h_k}.x_1} |F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}}{d_k}} \left(\int_{G_{h_k,x}.(g.y_1)} f(x+y)\ |P_{p-k}(y)|^{-\frac{p_{0,2}-p_2}{d'_k}} .\ dy \right) dx \\ &= \int_{G_{h_k}.y_1} |P_{p-k}(y)|^{-\frac{p_{0,2}}{d'_k}} \left(\int_{G_{h_k,y}.(g'.x_1)} f(x+y)\ |F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}}\ dx \right) dy \end{aligned}$$

g (resp. g') étant un élément de G_{h_k} tel que $x = g(x_1)$. (resp. $y = g'(y_1)$) .

Les mesures sont choisies suivant le §4.2.

Démonstration: 1) L'espace tangent en (x,y) à W_k est donné par :

$$T_{(x,y)}(W_k) = \{(u,v) \in E_{2,0} \times E_{0,2} \ , \quad \text{tels que} \quad [x,v]+[u,y]=0\}$$

Comme $x_1+y_1 \in W_k \subset \mathfrak{g}_1'$ on a $\mathrm{ad}(x_1+y_1)(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_1$ et $E_{0,0}$ =Ker(adx_1)$\cap$Ker(ady_1) $\cap$ $E_{0,0}\oplus$ad(x_1)ad$(y_1)(E_{-2,-2})$ donc $\dim(\mathfrak{g}_0) - \dim(\mathfrak{g}_1) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}(x_1+y_1)/\mathfrak{g}_0) =$ $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}x_1)\cap\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}y_1)/E_{0,0})+p_1+p_2$ d'où $\dim(E_{0,0})$-$\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}x_1)\cap\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}y_1)\cap E_{0,0}) =$ $p_{2,0}+p_{0,2}-p_2$ ainsi l'application de $E_{0,0}$ dans $T_{(x_1,y_1)}(W_k)$ donnée par $A \to [A, x_1+y_1]$ est surjective, donc l'application de G_{h_k} dans W_k donnée par $g \to g(x_1+y_1)$ est submersive donc ouverte d'où l'orbite U est ouverte dans W_k par conséquent elle est localement fermée dans l'espace vectoriel topologique $E_{2,0}+E_{0,2}$ et homéomorphe à $G_{h_1}/_{G_1}$, G_1 étant le centralisateur de x_1+y_1 dans G_{h_k} (proposition 6, §5, $n°3$, chapitre IX de [Bou 4].

2) On utilise les résultats sur les mesures quasi-invariantes sur les espaces homogènes. $G_{h_k}, G_{h_k,x_1}, G_{h_k,y_1}, G_1$ sont des groupes réductifs car ce sont les centralisateurs dans $Aut_0(\mathfrak{g})$ des sous-algèbres suivantes, toutes réductives dans $\mathfrak{g}$:

$$\mathbb{F}.H_0\oplus\mathbb{F}.h_k \ , \ \mathfrak{s}_1 = \mathbb{F}.h_k\oplus\mathbb{F}.H_0\oplus\mathbb{F}.x_1\oplus\mathbb{F}.x_1^{-1} \ , \ \mathfrak{s}_2 = \mathbb{F}.H_0\oplus\mathbb{F}.h_k\oplus\mathbb{F}.y_1\oplus\mathbb{F}.y_1^{-1} \ , \ \mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1+\mathfrak{s}_2$$

ainsi ce sont des groupes unimodulaires [2] d'où sur $G_{h_k}/_{G_1}$ on a une mesure G_{h_k} invariante à gauche, unique à une constante multiplicative près (corollaire 2, §2 n°6 Int, chap.VII de [Bou 3]), ce qui démontre le premier point.
L'expression des deux décompositions qui suivent proviennent des inclusions :

$$G_1 \subset G_{h_k,x_1} \subset G_{h_k} \qquad G_1 \subset G_{h_k,y_1} \subset G_{h_k}$$

et des décompositions correspondantes des mesures.

Soit $f \in L^1(U)$ alors $k(\dot{g}) = f(g(x_1+y_1)) \in L^1(G_{h_k}/G_1)$, G_{h_k}/G_1 étant muni de la mesure invariante à gauche $d\dot{g}$, $k_1(\dot{g}') = \int_{G_{h_k,x_1}/G_1} f(g'g"(x_1+y_1))d\dot{g}" \in L^1(G_{h_k}/G_{h_k,x_1})$, $G_{h_k}/G_{h_k,x_1}$ étant muni de la mesure invariante à gauche $d\dot{g}'$, et on a :

$$\int_{G_{h_k}/G_1} k(\dot{g})d\dot{g} = \int_{G_{h_k}/G_{h_k,x_1}} d\dot{g}'\left(\int_{G_{h_k,x_1}/G_1} f(g'g"(x_1+y_1))d\dot{g}"\right)$$

(a) du corollaire 1, n°8, §2, chap VII, [Bou 3]).

Posons $x = g'x_1$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{G_{h_k,x_1}/G_1} f(g'g"(x_1+y_1))d\dot{g}" &= \int_{G_{h_k,x_1}/G_1} f(x+g'g"g'^{-1}(g'y_1))d\dot{g}" \\ &= \int_{G_{h_k,x}/g'G_1g'^{-1}} f(x+g"(g'y_1))d\dot{g}" \\ &= \int_{G_{h_k,x}\cdot(g'.y_1)} \ f(x+y)\ |P_{p-k}(y)|^{-\frac{p_{0,2}-p_{2,2}}{d_k'}} \ dy \ ,\end{aligned}$$

par unicité (à une constante multiplicative près) de la mesure invariante sur $G_{h_k,x_1}/G_1$, la dernière égalité est obtenue par considération du préhomogène $((E_{0,0})_x, E_{0,2})_x)$ (cf.(N2) §3.2).

[2] G étant un sous-groupe algébrique réductif de $Gl_p(\mathbb{F})$, sa composante connexe algébrique, G^0, est le produit d'un groupe commutatif inclus dans le centre et du groupe dérivé, l'intersection des 2 étant un sous-groupe fini ([B-T],prop.2.2 p.63), donc G^0 est unimodulaire ([Bou 3],Intégration,chap.7, §2, $n°9$ prop. 14) d'où G l'est aussi car le groupe quotient de G par G^0 est fini (b) prop.10, §2, $n°7$,même réf. et [Ch],chap.2,§3, $n°3$, th.2).

De même :

$$\int_{G_{h_k}/G_{h_k,x_1}} k_1(\dot{g}')d\dot{g}' = \int_{G_{h_k}x_1} k_1(\pi^{-1}(\dot{g}'))|F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}}{d_k}}dx \ ,$$

π étant la projection canonique de G_{h_k} sur $G_{h_k}/G_{h_k,x_1}$, par unicité (à une constante multiplicative près) de la mesure invariante sur $G_{h_k}/G_{h_k,x_1}$ et en considérant du préhomogène $(E_{0,0}, E_{2,2})$. On obtient ainsi la première égalité.

On obtient la deuxième relation en considérant les sous-groupes G_1 et G_{h_k,y_1} de G_{h_k}.

3) Il reste à donner la valeur de la constante apparaissant dans la deuxième formule, ce qui découle d'un simple calcul d'intégrales.

L'orbite $U^* = G_{h_k}(x_1^{-1} + y_1^{-1})$ est également munie d'une mesure G_{h_k}-invariante (à une constante multiplicative près) que l'on peut définir par

$$\int_{U^*} f d\lambda^* = \int_U f \circ \Phi d\lambda\cdot$$

Lorsque $h \in \mathcal{C}_K(U)$ et $g \in \mathcal{C}_K(\mathfrak{n}_k)$, on définit la fonction $E(h,g) \in \mathcal{C}_K(\{x \in \mathfrak{g}_1 | F_p(x)F_k(x) \neq 0\})$ par :

$$E(h,g)(\Psi(A,x,y)) = E(h,g)(exp(ad(A)(x+y)) = h(x+y).g(A).$$

On a la même application, notée E^* , lorsque $k \in \mathcal{C}_K(U^*)$ et $g \in \mathcal{C}_K(\mathfrak{n}_k)$ et $E^*(k,g) \in \mathcal{C}_K(\{x \in \mathfrak{g}_{-1} | F_p^*(x)F_{p-k}^*(x) \neq 0\})$ (cf. lemme 1.1.1) et on a :

$$\begin{array}{rcl} E(k\circ\Phi, g) & = & E^*(k,g)\circ\Phi \ , \\ S_{E(h,g)}/U & = & |2|^{\frac{p_2}{2}} C(g)|F_k(x)|^{md'_k} h \text{ avec } C(g) = \int_{\mathfrak{n}_k} g(u)du. \end{array}$$

Soient $r_1 = p_{2,0} - p_2$, $r_2 = p_{0,2} - p_2$ rappelons que :

$$m_k = \frac{\frac{p_1}{2} + p_{2,0}}{Nd_k} = \frac{\frac{p_1}{2} + p_{0,2}}{Nd'_k} \ , \ m = \frac{\frac{p_1}{2} + p_2}{d_k d'_k} \ , \ d := d_p = m_k(d_k + d'_k)$$

et que pour $x + y \in W_k$: $|F(x+y)| = \left(|F_k(x)||P_{p-k}(y)|\right)^{m_k}$.
Par le 1) du théorème 4.3.3 et en raison du support de h, on a :

$$\int_{\mathfrak{g}_1} E(h,g)(x)|F(x)|^{-\frac{r_2}{m_k d'_k}}.|F_k(x)|^{-\frac{md}{m_k}}dx = |2|^{\frac{p_2}{2}} C(g)\int_U h d\lambda \ .$$

On suppose $C(g)$ non nul alors pour $k \in S(U^*)$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \int_{U^*} k d\lambda^* & = & \int_U k\circ\Phi d\lambda \\ & = & |2|^{-\frac{p_2}{2}} C(g)^{-1} \int_{\mathfrak{g}_1} E(k\circ\Phi, g)(x)|F(x)|^{-\frac{r_2}{m_k d'_k}}.|F_k(x)|^{-\frac{md}{m_k}}dx \\ & = & |2|^{-\frac{p_2}{2}} C(g)^{-1} \int_{\mathfrak{g}_{-1}} E^*(k,g)(y)|F^*(y)|^{-\frac{r_1}{m_k d_k}}|F_{p-k}^*|^{-\frac{md}{m_k}}dy \end{array}$$

en utilisant le 3) du lemme 3.2.2 ainsi que les relations suivantes pour $x \in \{x \in \mathfrak{g}_1 | F_p(x) \neq 0\}$ et $y \in \{x \in \mathfrak{g}_{-1} | F_p^*(y)F_{p-k}^*(y) \neq 0\}$ (cf.(R2) §3.3) :

$$F^*\circ\Phi(x) = F(x)^{-1} \qquad |F_k\circ\Phi^{-1}(y)|^{m_k} = |F^*(y)|^{-1}.|F_{p-k}^*(y)|^{m_k}.$$

Par le 2) du théorème 4.3.3 et par le choix du support de k, on obtient :

$$\int_{U^*} k d\lambda^* = \int_{G_{h_k}.y_1^{-1}} |F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_{0,2}}{d'_k}} \left(\int_{G_{h_k,y'}.(g.x_1^{-1})} k(x'+y') |P^*_k(x')|^{-\frac{r_1}{d_k}} dx' \right) dy'.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_U h d\lambda &= \int_{U^*} h \circ \Phi^{-1} d\lambda^* \\ &= \int_{G_{h_k}.y_1^{-1}} |F^*_{p-k}(y')|^{-\frac{p_{0,2}}{d'_k}} \left(\int_{G_{h_k,y'}.(g.x_1^{-1})} h(x'^{-1}+y'^{-1}) |P^*_k(x')|^{-\frac{r_1}{d_k}} dx' \right) dy' \\ &= \int_{G_{h_k}.y_1} |P_{p-k}(y')|^{-\frac{p_{0,2}}{d'_k}} \left(\int_{G_{h_k,y}.(g.x_1)} h(x+y) |F_k(x)|^{-\frac{r_1}{d_k}} dx \right) dy \end{aligned}$$

par le choix des mesures adaptées à F_k et P_{p-k} dans la définition 4.2.5 (cf.3) du lemme 3.2.2 ainsi que (R2) du §3.3).

□

On en déduit les résultats suivants :

Corollaire 4.4.2 *W_k et W_k^* sont munis de mesures G_{h_k}-invariantes : $d\lambda$ et $d\lambda^*$.*

1. *Pour $f \in L^1(W_k)$ on a :*

$$\begin{aligned} \int_{W_k} f \; d\lambda &= \int_{E'_{2,0}} |F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}}{d_k}} \left(\int_{(E'_{0,2})_x} f(x+y) \; |P_{p-k}(y)|^{-\frac{p_{0,2}-p_2}{d'_k}} \; dy \right) dx \\ &= \int_{E'_{0,2}} |P_{p-k}(y)|^{-\frac{p_{0,2}}{d'_k}} \left(\int_{(E'_{2,0})_y} f(x+y) \; |F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}} \; dx \right) dy \end{aligned}$$

2. *Pour $g \in L^1(W_k^*)$ on a :*

$$\begin{aligned} \int_{W_k^*} g \; d\lambda^* &= \int_{E'_{-2,0}} |P^*_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}}{d_k}} \left(\int_{(E'_{0,-2})_x} g(x+y) \; |F^*_{p-k}(y)|^{-\frac{p_{0,2}-p_2}{d'_k}} \; dy \right) dx \\ &= \int_{E'_{0,-2}} |F^*_{p-k}(y)|^{-\frac{p_{0,2}}{d'_k}} \left(\int_{(E'_{-2,0})_y} g(x+y) \; |P^*_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}} \; dx \right) dy \end{aligned}$$

3. *Les résultats sont analogues sur :*

$$W'_k = \{x+y \,|x \in E'_{2,0} \,,\; y \in E'_{0,-2} \,,\; [x,y]=0\} \,,\; \{x+y \,|x \in E'_{-2,0} \,,\; y \in E'_{0,2} \,,\; [x,y]=0\}.$$

Le théorème 4.3.3 devient :

Corollaire 4.4.3 *1. Soit f dans $L^1(\mathfrak{g}_1)$, S_f est défini presque partout sur $(W_k, d\lambda)$ et $|F_k(\;)|^{md_k} |F(\;)|^{\frac{p_{0,2}-p_2}{m_k d'_k}} S_f$ est intégrable sur $(W_k, d\lambda)$ et on a :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{g}_1} f(x) dx &= \int_{W_k} |F_k(u)|^{md_k} |F(u)|^{\frac{p_{0,2}-p_2}{m_k d'_k}} S_f(u) d\lambda(u) \;, \\ Z(f;\pi) &= \int_{W_k} |F_k(u)|^{md_k} |F(u)|^{\frac{p_{0,2}-p_2}{m_k d'_k}} \pi(F(u)) S_f(u) d\lambda(u) \;\; \textit{pour } \Re(\pi) > 0. \end{aligned}$$

Soit O une orbite ouverte de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}_1$ alors :

$$Z_O(f;\pi)=\int_{O\cap W_k}|F_k(u)|^{md_k}|F(u)|^{\frac{p_{0,2}-p_2}{m_kd'_k}}\pi(F(u))S_f(u)d\lambda(u)\ \textit{pour}\ \Re(\pi)>0.$$

2. *Soit g dans $L^1(\mathfrak{g}_{-1})$, S_g^* est défini presque partout sur $(W_k^*,d\lambda^*)$ et $|F^*_{p-k}(\ )|^{md'_k}|F^*(\ )|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{m_kd_k}}S_g^*$ est intégrable sur $(W_k^*,d\lambda^*)$ et on a :*

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\mathfrak{g}_{-1}}g(x)dx &= \textstyle\int_{W_k^*}|F^*_{p-k}(u)|^{md'_k}|F^*(u)|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{m_kd_k}}S_g^*(u)d\lambda^*(u)\\ Z^*(g;\pi) &= \textstyle\int_{W_k^*}|F^*_{p-k}(u)|^{md'_k}|F^*(u)|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{m_kd_k}}\pi(F^*(u))S_g^*(u)d\lambda^*(u)\ \textit{pour}\ \Re(\pi)>0.\end{aligned}$$

Soit O^* une orbite ouverte de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}_{-1}$ alors :

$$Z^*_{O^*}(g;\pi)=\int_{O^*\cap W_k^*}|F^*_{p-k}(u)|^{md'_k}|F^*(u)|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{m_kd_k}}\pi(F^*(u))S_g^*(u)d\lambda^*(u)\ \textit{pour}\ \Re(\pi)>0.$$

Soient :

$$\begin{aligned}N_{k,0} &= exp\big(ad(\mathfrak{n}_{k,0})\big)\text{avec }\mathfrak{n}_{k,0} = \oplus_{k+1\le i<j\le p}(E_{i,j}(-1,1)\oplus E_{i,j}(-2,2))\ ,\\ N_{k,2} &= exp\big(ad(\mathfrak{n}_{k,2})\big)\text{ avec }\mathfrak{n}_{k,2} = \oplus_{1\le i<j\le k}(E_{i,j}(-1,1)\oplus E_{i,j}(-2,2))\ ,\end{aligned}$$

comme $\mathfrak{n}_{k,0}$ et $\mathfrak{n}_{k,2}$ commutent, il en est de même pour $N_{k,0}$ et $N_{k,2}$.
$N_{k,0}$ centralise $E_{\pm2,0}$ et $N_{k,2}$ centralise $E_{0,\pm2}$.

$x_i,t_i,i=0$ ou 2 sont des éléments de $E_{i,2-i}$ et $y_i,z_i,i=0$ ou -2 sont des éléments de $E_{i,-2-i}$.

Remarque 4.4.4 *1. Soit O une orbite ouverte de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}_1$ et $t_2+t_0\in O\cap W_k$ alors $O\cap W_k=G_{\mathfrak{t}}N_{k,0}N_{k,2}.(t_2+t_0)$ et*

$$x_2+x_0\in O\cap W_k\Leftrightarrow\ x_2\in G_{\mathfrak{t}}N_{k,2}t_2\ \textit{et}\ x_0\in\big(G_{\mathfrak{t}}\big)_{x_2}N_{k,0}(gt_0)\ ,\ \textit{avec}\ x_2=gt_2.$$

2. *Soit O^* une orbite ouverte de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}_{-1}$ et $z_{-2}+z_0\in O^*\cap W_k^*$ alors $O^*\cap W_k^*=G_{\mathfrak{t}}N_{k,0}N_{k,2}.(z_{-2}+z_0)$ et*

$$y_{-2}+y_0\in O^*\cap W_k^*\Leftrightarrow\ y_0\in G_{\mathfrak{t}}N_{k,0}z_0\ \textit{et}\ y_{-2}\in\big(G_{\mathfrak{t}}\big)_{y_0}N_{k,2}(g'z_{-2})\ ,\ \textit{avec}\ y_0=g'z_0.$$

3. *Soit $t_2+z_0\in W'_k$ alors $x_2+x_0\in G_{\mathfrak{t}}N_{k,0}N_{k,2}.(t_2+z_0)\Leftrightarrow x_2\in G_{\mathfrak{t}}N_{k,2}t_2$ et $x_0\in\big(G_{\mathfrak{t}}\big)_{x_2}N_{k,0}(gz_0)$ avec $x_2=gt_2\Leftrightarrow x_0\in G_{\mathfrak{t}}N_{k,0}z_0$ et $x_2\in\big(G_{\mathfrak{t}}\big)_{x_0}N_{k,2}(g't_2)$ avec $x_0=g'z_0$.*

En effet dans le préhomogène faiblement sphérique $(G_{\mathfrak{t}}N_{k,2},E_{2,0})$, l'orbite contenant x_2 rencontre $W_{\mathfrak{t}'}$ avec $\mathfrak{t}'=\oplus_{1\le i\le k}\mathbb{F}H_i$ et soit $x'_2=gn.x_2\in W_{\mathfrak{t}'}$, avec $g\in G_{\mathfrak{t}}$ et $n\in N_{k,2}$. Dans le préhomogène faiblement sphérique $((G_{\mathfrak{t}})_{x'_2}N_{k,0},(E_{0,2})_{x'_2})$, l'orbite contenant $gnx_0=gx_0$ rencontre $W_{\mathfrak{t}"}$ avec $\mathfrak{t}"=\oplus_{k+1\le i\le p}\mathbb{F}H_i$ donc il existe $g'\in(G_{\mathfrak{t}})_{x'_2}N_{k,0}$ tel que $g'gx_0\in W_{\mathfrak{t}"}$ d'où $g'gn(x_2+x_0)\in W_{\mathfrak{t}}$. On procède de même pour t_0+t_2 : il existe $g"\in G_{\mathfrak{t}}N_{k,0}N_{k,2}$ tel que $g"(t_0+t_2)\in W_{\mathfrak{t}}$; comme $g"(t_0+t_2)$ et $g'gn(x_2+x_0)$ sont dans $W_{\mathfrak{t}}$ et dans la même orbite de $P_{\mathfrak{t}}$, ils sont dans la même orbite de $G_{\mathfrak{t}}$ par le lemme 1.4.4 d'où 1.
Il en est de même pour 2.

5 Application aux fonctions Zétas

5.1 Les coefficients de l'équation fonctionnelle

On utilise les décompositions établies dans le §4 relativement à $ad(h_k)$ pour obtenir les coefficients de l'équation fonctionnelle vérifiée par les fonctions Zétas par application à 2 reprises des équations fonctionnelles associées à des centralisateurs de sl_2-triplets.
Les notations sont celles du §4.

Soit O^* une orbite de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}"_{-1}$, prenons $z \in O^* \cap W_k^*$ et soit $z = z_{-2} + z_0$ sa décomposition suivant $ad(h_k), z_i \in E_i(h_k) \cap \mathfrak{g}_{-1}$.

On désigne par $t_i, i = 1, ..., l$ un ensemble de représentants des orbites de $(G_{\mathfrak{t}})_{z_0} N_{k,2}$ dans $(E"_{2,0})_{z_0}$, et pour chaque $t_i : \{t_{i,j}, j = 1, ..., p_i\}$ est un ensemble de représentants des orbites de $(G_{\mathfrak{t}})_{t_i} N_{k,0}$ dans $(E"_{0,2})_{t_i}$.

Comme $t_i + t_{i,j}$ et $t_i + t_{i,k}$, $j \neq k$, ne sont pas dans la même orbite de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}_1$ (cf.remarque 4.4.4), pour chaque orbite O de $P_{\mathfrak{t}}$ dans $\mathfrak{g}"_1$ et chaque t_i il existe au plus une valeur j telle que $P_{\mathfrak{t}}(t_i + t_{i,j}) = O$, lorsqu'elle existe on notera $t_{i(O)}$ l'élément correspondant et $I_{O,O^*} = \{i \mid \exists j$ tel que $t_i + t_{i,j} \in O\}$, sinon $I_{O,O^*} = \emptyset$.

Lorsque $I_{O,O^*} \neq \emptyset$, $\{t_i, i \in I_{O,O^*}\}$ est un ensemble de représentants des orbites de $(G_{\mathfrak{t}})_{z_0} N_{k,2}$ dans l'ouvert non vide $(\pi_{h_k}(O))_{z_0}$ (notation du lemme 1.1.1) et on a le schéma suivant pour les différents représentants :

Pour	O^*	:	$z_{-2} + z_0$	$\in W_k^* \cap O^*$,
Pour	O	:	$t_i + t_{i(0)}$	$\in W_k \cap O$,
avec		:	z_{-2} et t_i commutant avec le $sl_2 -$ triplet	: $(z_0^{-1}, 2H_0 - h_k, z_0)$,
et		:	z_0 et $t_{i(0)}$ commutant avec le $sl_2 -$ triplet	: (t_i, h_k, t_i^{-1})
ainsi que		:	$t_i + z_0^{-1} \in W_k$.	

La transformation de Fourier étant définie à partir de la restriction de $\tilde{B}$, les différents coefficients de l'équation fonctionnelle de la Fonction Zéta sont alors reliés par une relation donnée la proposition 5.1.1.

Notations préliminaires :

• $a^{(z_0)}_{z_{-2},t_i}$ désigne le coefficient associé aux orbites $((G_{\mathfrak{t}})_{z_0} N_{k,2}.z_{-2}$ et $(G_{\mathfrak{t}})_{z_0} N_{k,2}.t_i$ dans le préhomogène : $(G_{\mathfrak{t}})_{z_0} N_{k,2}, (E_{2,0})_{z_0})$ et le préhomogène dual $((G_{\mathfrak{t}})_{z_0} N_{k,2}, (E_{-2,0})_{z_0})$,

• $a^{(t_i)}_{z_0,t_{i(O)}}$ désigne le coefficient associé aux orbites $((G_{\mathfrak{t}})_{t_i} N_{k,0}.z_0$ et $(G_{\mathfrak{t}})_{t_i} N_{k,0}.t_{i(O)}$ dans le préhomogène : $((G_{\mathfrak{t}})_{t_i} N_{k,0}, (E_{0,2})_{t_i})$ et le préhomogène dual $((G_{\mathfrak{t}})_{t_i} N_{k,0}, (E_{0,-2})_{t_i})$.

Proposition 5.1.1 *Lorsque $I_{O,O^*} = \emptyset$ on a $a_{O^*,O}(\pi) = 0$ et sinon*

$$a_{O^*,O}(\pi) = \sum_{i \in I_{O,O^*}} a^{(z_0)}_{z_{-2},t_i}(\pi_{p-k+1}, ..., \pi_p).\gamma_k(t_i, z_0^{-1}).a^{(t_i)}_{z_0,t_{i(O)}}(\pi_1, ..., \pi_{p-k-1}, \pi_{p-k}^{\frac{1}{m_k}} \prod_{p-k+1 \leq j \leq p} \pi_j |^{\frac{r_k}{m_k}})$$

($r_k = \dfrac{p_2 + \frac{p_1}{2}}{d'_k}$ *et* $m_k = 1$ *sauf lorsque* (Δ, λ_0) *est une* $\mathbb{F}$*-forme de* (E_7, α_6) *ou bien de type* (C_n, α_k) *avec* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'_0$, *dans ce cas* $p = 2, k = 1$ *et* $m_1 = \frac{1}{2}$)

Démonstration: Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(O)$ et π un caractère tel que $Re(\pi) > 0$.
Comme $Re(\pi) > 0$, $Z^*_{O^*}(\mathcal{F}(f); \pi)$ est donné sous forme intégrale donc par application du 2. du corollaire 4.4.3 on a :

$$\begin{aligned} Z^*_{O^*}(\mathcal{F}(f);\pi) &= \int_{O^* \cap W_k^*} |F^*_{p-k}(u)|^{md'_k} |F^*_p(u)|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{m_k d_k}} \pi(F^*(u)) S^*_{\mathcal{F}(f)}(u) d\lambda^*(u) \\ &= \int_{O(z_0)} |F^*_{p-k}(y'))|^{md'_k - \frac{p_{0,2}}{d'_k}} I(y') dy' \text{ avec} \\ I(y') &= \int_{O'} S^*_{\mathcal{F}(f)}(x'+y') \pi(F^*(x'+y')) |P^*_k(x')|^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}} |F^*_p(x'+y')|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{m_k d_k}} dx' \end{aligned}$$

avec $m = \dfrac{r_k}{d_k}$, en appliquant le 2 du corollaire 4.4.2, avec $O(z_0) = G_{\mathfrak{t}} N_{k,0}.z_0$ et $O' = (G_{\mathfrak{t}})_{y'} N_{k,2}(g z_{-2}) \subset (E_{-2,0})_{y'}$, g étant un élément de $G_{\mathfrak{t}}.N_{k,0}$ tel que $gz_0 = y'$ (cf.2.remarque 4.4.4).

1) On suppose que (Δ, λ_0) n'est pas une $\mathbb{F}$-forme de (E_7, α_6) et que $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{t}'_0$ lorsque (Δ, λ_0) est de type (C_n, α_k) c'est à dire qu'on suppose que $m_k = 1$.

Le préhomogène faiblement sphérique $((G_{\mathfrak{t}})_{y'}.N_{k,2}, (E_{2,0})_{y'})$ est muni des invariants relatifs fondamentaux G_j, restrictions de F_j, pour $j = 1, ..., k$, donc les invariants relatifs fondamentaux du préhomogène $((G_{\mathfrak{t}})_{y'}.N_{k,2}, (E_{-2,0})_{y'})$ sont donnés par :

$$j = 1, ..., k \ , \ x' \in (E_{-2,0})_{y'} \quad : \quad G^*_j(x') = \frac{F^*_{p-k+j}(x'+y')}{F^*_{p-k}(y')}$$

(cf.démonstration de la proposition 3.4.4) donc $P^*_k = G^*_k$ et :

$$\prod_{1 \le i \le p} \pi_i(F^*_i(x'+y')) = \prod_{1 \le i \le p-k-1} \pi_i(F^*_i(y'))(\prod_{p-k \le i \le p} \pi_i)(F^*_{p-k}(y')) \prod_{1 \le j \le k} \pi_{p-k+j}(G^*_j(x')),$$

soient $C(y') = \prod_{i=1}^{i=p-k-1} \pi_i(F^*_i(y'))(\prod_{i=p-k}^{i=p} \pi_i)(F^*_{p-k}(y'))$ et $\pi' = (\pi_{p-k+1}, ..., \pi_p)$ alors :

$$I(y') = C(y') |F^*_{p-k}(y')|^{\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}} Z^*_{O'}(S^*_{\mathcal{F}(f)}(\ + y'); \pi') \ ,$$

$Z^*_{O'}$ étant la fonction Zéta associée à l'orbite O' du préhomogène $((G_{\mathfrak{t}})_{y'}.N_{k,2}, (E_{-2,0})_{y'})$.

Posons $h_f(x, y') = \mathcal{F}_{E_{0,2}}(T_f(x+\ ))(y')$, alors pour y' fixé $h_f(\ , y') \in \mathcal{C}^\infty_C((E"_{2,0})_{y'})$ (cf.3.remarque 4.3.6) et pour $i = 1, ..., l$ notons $O_i = (G_{\mathfrak{t}})_{y'} N_{k,2}.g(t_i)$, alors par le théorème 4.3.5 on a :

$$\begin{aligned} S^*_{\mathcal{F}(f)}(x'+y') &= \mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(\gamma_k(\ , y'^{-1}) h_f(\ , y')\ )(x') \\ &= \textstyle\sum_{1 \le i \le l} \gamma_k(t_i, z_0^{-1}) \mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(1_{O_i}.h_f(\ , y')\ )(x') \quad \text{d'où} \\ |F^*_{p-k}(y'))|^{md'_k - \frac{p_{0,2}}{d'_k}} I(y') &= \textstyle\sum_{1 \le i \le l} \gamma_k(t_i, z_0^{-1}) C(y') |F^*_{p-k}(y')|^{\frac{p_1}{2d'_k}} I_i(y') \ \text{ avec} \\ I_i(y') &= Z^*_{O'}(\ \mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(1_{O_i}.h_f(\ , y'))\ ; \pi'), \end{aligned}$$

en utilisant l'égalité : $\frac{\frac{p_1}{2}+p_{2,0}}{d_k}=\frac{\frac{p_1}{2}+p_{0,2}}{d'_k}$ (dém. du lemme 1.4.7).
On applique l'équation fonctionnelle dans le préhomogène faiblement sphérique $((G_{\mathfrak{t}})_{y'}.N_{k,2}, (E_{2,0})_{y'})$ ainsi que 1. de la remarque 3.5.4 puisque les algèbres de Lie $\mathfrak{U}(\mathbb{F}y'\oplus\mathbb{F}(2H_0-h_k)\oplus\mathbb{F}y'^{-1})$ et $\mathfrak{U}(\mathbb{F}z_0\oplus\mathbb{F}(2H_0-h_k)\oplus\mathbb{F}z_0^{-1})$ sont isomorphes, l'isomorphisme étant donné par un élément de $G_{\mathfrak{t}}.N_{k,0}$ qui centralise $\oplus_{1\leq i\leq k}\mathbb{F}H_i$, ce qui donne :

$$Z^*_{O'}(\ \mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(1_{O_i}.h_f(\ ,y'))\ ;\pi')=a^{(z_0)}_{z_{-2},t_i}(\pi')Z_{O_i}(h_f(\ ,y');\pi'^*|\ |^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}\mathbf{1}_k}).$$

Comme $h_f(\ ,y')\in\mathcal{C}^\infty_C((E"_{2,0})_{y'})$ on a :

$$Z_{O_i}(h_f(\ ,y');\pi'^*|\ |^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}})=\int_{O_i}h_f(x,y')\pi'^*(G(x))|G_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}}dx$$

d'où :

$$Z^*_{O^*}(\mathcal{F}(f);\pi)=\sum_{1\leq i\leq l}\gamma_k(t_i,z_0^{-1})a^{(z_0)}_{z_{-2},t_i}(\pi')J_i$$

avec :

$$J_i=\int_{O(z_0)}|F^*_{p-k}(y'))|^{\frac{p_1}{2d'_k}}\ C(y')\bigg(\int_{O_i}h_f(x,y')\pi'^*(G(x))|F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}}dx\bigg)dy'\ ,$$

et on a :

$$\pi'^*(G(x))=\prod_{j=1}^{j=k-1}\pi_{p-j}(F_j(x))\bigg(\prod_{p-k+1}^{p}\pi_j\bigg)^{-1}(F_k(x)).$$

Soit $V=G_{\mathfrak{t}}.N_{k,0}.N_{k,2}(t_i+z_0)$, V est ouvert dans W'_k et $x+y'\in V\Leftrightarrow y'\in O(z_0)$ et $x\in O_i$ $\Leftrightarrow x\in G_{\mathfrak{t}}.N_{k,2}.t_i$ (noté $O(t_i)$) et $y'\in(G_t)_x.N_{k,0}(g'z_0)$ avec $x=g't_i$ (cf.remarque 4.4.4) et qui sera notée $O(x)$. Soit g la fonction mesurable sur W'_k définie par :

$$g(x+y')=h_f(x,y')\pi'^*(G(x))C(y')|F^*_{p-k}(y')|^{\frac{\frac{p_1}{2}+p_{0,2}}{d'_k}}\mathbf{1}_V(x+y'),$$

alors par le 3. du corollaire 4.4.2 et de la remarque 4.4.4 on a :

$$\int_{W'_k}gd\lambda'=\int_{O(t_i)}\pi'^*(G(x))|F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}}{d_k}}\bigg(\int_{O(x)}h_f(x,y')C(y')|F^*_{p-k}(y')|^{md_k}dy'\bigg)dx\ .$$

Comme $f\in\mathcal{C}^\infty_C(O)$, $T_f\in\mathcal{C}^\infty_C(W_k)$ donc $T_f\in\mathcal{S}(W_k)$ et est à support compact dans $E"_{2,0}$ donc relativement à la variable x, comme $Re(\pi)>0$ l' intégrale double ci-dessus converge absolument d'où $g\in L^1(W'_k)$ et $J_i=\int_{W'_k}gd\lambda'$.

On considère maintenant les préhomogènes faiblement sphériques : $(G_{\mathfrak{t}})_x.N_{k,0}, (E_{0,\pm2})_x, H_0-\frac{h_k}{2})$ $(x=g'.t_i)$. $((G_{\mathfrak{t}})_xN_{k,0},(E_{0,-2})_x)$ est muni des invariants relatifs fondamentaux provenant du préhomogène : $(P_{\mathfrak{t}},\mathfrak{g}_1)$ donnés par la restriction de $F^*_1,..,F^*_{p-k}$ et notés $H^*_1,...,H^*_{p-k}$. Posons $\pi"=(\pi_1,...,\pi_{p-k-1},\prod_{j=p-k}^{j=p}\pi_j|\ |^{md_k})$ et soit :

$$\begin{aligned}D(x)&=\int_{O(x)}h_f(x,y')C(y')|F^*_{p-k}(y')|^{md_k}dy'\\&=\int_{O(x)}\mathcal{F}_{(E_{0,2})_x}(S_f(x+\ ))(y')\pi"(H^*(y'))dy'\quad\text{(1 du th.4.3.5)}\\&=Z^*_{O(x)}(\mathcal{F}_{(E_{0,2})_x}(S_f(x+\ ));\pi")\end{aligned}$$

On applique à nouveau l'équation fonctionnelle dans ce préhomogène faiblement sphérique en tenant compte du 1. de la remarque 3.5.4 (conjugaison par $g' \in G_{\mathfrak{t}}N_{k,2}$ qui centralise $\oplus_{j=k+1}^{p}\mathbb{F}H_i$) donc :

$$\begin{aligned} D(x) &= \textstyle\sum_j a_{z_0,t_{i,j}}^{(t_i)}(\pi")Z_{i,j}(x) \text{ avec} \\ Z_{i,j}(x) &= Z_{O(x,t_{i_j})}(S_f(x+\,);\pi"^*|\ |^{-\frac{p_{0,2}-p_2}{d'_k}\mathbf{1}_{p-k}}) \text{ et} \\ O(x,t_{i_j}) &= (G_{\mathfrak{t}})_x.N_{k,0}(g't_{i,j}). \end{aligned}$$

Comme le préhomogène $(G_{\mathfrak{t}})_x.N_{k,0},(E_{0,-2})_x,H_0-\frac{h_k}{2})$ est muni des invariants relatifs fondamentaux H_j^*, restriction de $F_j^*, j=1,...,p-k$, les invariants relatifs fondamentaux associés dans le préhomogène $(G_{\mathfrak{t}})_x.N_{k,0},(E_{0,2})_x,H_0-\frac{h_k}{2})$ sont donnés par $H_j(y)=\dfrac{F_{j+k}(x+y)}{F_k(x)}$ pour $j=1,...,p-k$ (cf.§3.3).
Comme $f\in\mathcal{C}_C^\infty(O)$, $S_f\in\mathcal{C}_C^\infty(W_k)$ donc $Z_{i,j}(x)$ est donné par l'intégrale :

$$Z_{i,j}(x)=\int_{O(x,t_{i,j})} S_f(x+y)(\prod_{1\le i\le p}\pi_i)^{-1}(F_p(x+y))(\prod_{p-k\le i\le p}\pi_i)(F_k(x))\prod_{k+1\le j\le p-1}(\pi_{p-j}(F_j(x+y)).$$

$$\left(\frac{|F_k(x)|}{|F_p(x+y)|}\right)^{md_k+\frac{p_{0,2}-p_2}{d'_k}}dy$$

d'où

$$J_i=\sum_j a_{z_0,t_{ij}}^{(t_i)}(\pi")\int_{W_k\cap P_{\mathfrak{t}}(t_i+t_{i,j})} S_f(u)\pi^*(F(u))|F_p(u)|^{-N}|F_k(u)|^{md_k}|F_p(u)|^{\frac{p_{0,2}-p_2}{m_kd'_k}}d\lambda(u)$$

puisque $N=\dfrac{\frac{p_1}{2}+p_{0,2}}{d'_k}$ (dém.du lemme 1.4.7) donc :

$$\begin{aligned} J_i &= \textstyle\sum_j a_{z_0,t_{i,j}}^{(t_i)}(\pi")Z_{P_{\mathfrak{t}}(t_i+t_{i,j})}(f;\pi^*|\ |^{-N\mathbf{1}_p}) \quad \text{(1. corollaire 4.4.3)} \\ &= \begin{cases} a_{z_0,t_i(O)}^{(t_i)}(\pi")Z_O(f;\pi^*|\ |^{-N\mathbf{1}_p}) & \text{lorsque} \quad i\in I(O,O^*) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

par le choix du support de f, d'où le résultat d'abord pour $\Re(\pi)>0$ puis en général par prolongement méromorphe.

2) Dans les 2 cas restants on a $p=2$ donc $k=1$ et $m_1=m'_1=\frac{1}{2}$.
Lorsque $y'\in E'_{0,-2}$, le préhomogène $(G_{H_1})_{y'},(E_{2,0})_{y'})$ est munit de l'invariant relatif fondamental $G(x)=F(x+y'^{-1})$ donc $G^*(x')=F^*(x'+y')$; de même pour $x\in E'_{2,0}$, le préhomogène $(G_{H_1})_x,(E_{0,2})_x)$ est muni de l'invariant relatif fondamental $H(y)=F(x+y)$ donc $H^*(y')=F^*(x^{-1}+y')$.
On reprend les calculs précédents, en prenant garde que les mesures données dans les théorème 4.3.3,4.3.5 et dans le §4.4 sont données pour F_1 restreint à $(E_{2,0})_{y'}$ et P_1 restreint à $(E_{0,2})_x$ ce qui apporte à chaque fois une constante lorsqu'on remplace les fonctions Zéta relatives à $(E_{2,0})_{y'}$ et à $(E_{0,2})_x$ par leurs valeurs mais ce qui n'est pas le cas pour celles du dual (compensation avec la transformation de Fourier). □

Remarque 5.1.2 *De la même manière on détermine $a^*_{O,O^*}(\pi)$ en prenant $x = x_2 + x_0 \in W_k \cap O$ ($x_i \in E_i(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$) puis un ensemble de représentants des orbites de $(G_\mathfrak{t})_{x_2}$ dans $(E"_{0,-2})_{x_2}$, noté $\{u_i\}$ et pour chaque u_i un ensemble de représentants des orbites de $(G_\mathfrak{t})_{u_i}$ dans $(E"_{-2,0})_{u_i}$, noté $(u_{i,j})_{1\leq j\leq r_i}$. On pose $I^*_{O,O^*} = \{i \mid \exists j \text{ tel que } u_{i,j} + u_i \in O^*\}$ et lorsque $I^*_{O,O^*} \neq \emptyset$ soit $u_{i(O^*)}$ l'unique représentant tel que $u_{i(O^*)} + u_i \in W^*_k \cap O^*$.*
Alors :
• *lorsque $I^*_{O,O^*} = \emptyset$ on a $a^*_{O,O^*}(\pi) = 0$ et sinon*

$$\bullet\ a^*_{O,O^*}(\pi) = \sum_{i\in I_{O,O^*}} a^{*(x_2)}_{x_0,u_i}(\pi_{k+1},...,\pi_p)\gamma_k^{-1}(x_2,u_i^{-1})a^{*(u_i)}_{x_2,u_{i(O^*)}}(\pi_1,...,\pi_{k-1},\pi_k^{\frac{1}{m_k}}\prod_{k+1\leq j\leq p}\pi_j|\ |^{\frac{md'_k}{m_k}})$$

5.2 Le cas complexe

Dans les notations du paragraphe précédent, lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ les préhomogènes ont tous une seule orbite non singulière et $\gamma_k \equiv 1$ donc la proposition 5.1.1 donne :

Corollaire 5.2.1 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

$$a(\pi) = a^{\mathfrak{U}}(\pi_{p-k+1},...,\pi_p)a^{\mathfrak{U}'}(\pi_1,...,\pi_{p-k-1},\pi_{p-k}^{\frac{1}{m_k}}\prod_{p-k+1\leq j\leq p}\pi_j|\ |^{\frac{r_k}{m_k}})\ ,$$

avec $\mathfrak{U} := \mathfrak{U}(\mathfrak{s})$, $\mathfrak{s}$ étant l'algèbre engendré par z_0 et z_0^{-1}, $\mathfrak{U}' := \mathfrak{U}(\mathfrak{s}')$, $\mathfrak{s}'$ étant l'algèbre engendré par z_{-2} et z_{-2}^{-1} et $a^{\mathfrak{U}}$, $a^{\mathfrak{U}'}$ étant les coefficients correspondant pour les fonctions Zétas associées.

Par conséquent on relie classiquement le polynome de Bernstein au coefficient de l'équation fonctionnelle, résultat déjà établi pour quelques cas (cf. [Bo-Ru 2], [Fa-Ko], [Cl],...).

Théorème 5.2.2 *1. On suppose que (Δ, λ_0) est une $\mathbb{F}$-forme de (E_7, α_6) ou bien que (Δ, λ_0) est de type (C_n, α_k) avec $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'_0$, et soit*

$$b_{\mathfrak{g},P_\mathfrak{t}}(s_1,s_2) = C\prod_{j=1}^{\frac{d_1}{2}}\Big(\ (s_2+\lambda_{2,j})(2s_1+s_2+\lambda_{1,j})\Big)$$

le polynome de Bernstein du préhomogène $(P_\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_1)$, alors il existe une constante D telle que :

$$a(\omega_{q_1}.|\ |^{s_1},\omega_{q_2}.|\ |^{s_2}) = D\prod_{j=1}^{\frac{d_1}{2}}\Big(\rho'(\omega_{q_2};s_2+\lambda_{2,j}+1)\rho'(\omega_{q_1}^2\omega_{q_2};2s_1+s_2+\lambda_{1,j}+1)\Big).$$

2. Dans tous les autres cas, soit

$$b_{\mathfrak{g},P_{\mathfrak{t}}}(s_1,...,s_p)=C\prod_{\ell=1}^{p}\Big(\prod_{j=1}^{d_{p-\ell+1}-d_{p-\ell}}(s_\ell+...+s_p+\lambda_{\ell,j})\Big)$$

le polynome de Bernstein du préhomogène $(P_{\mathfrak{t}},\mathfrak{g}_1)$*, alors il existe une constante* D *telle que :*

$$a(\omega_{q_1}.|\ |^{s_1},...,\omega_{q_p}.|\ |^{s_p})=D\prod_{\ell=1}^{p}\Big(\prod_{j=1}^{d_{p-\ell+1}-d_{p-\ell}}\rho'(\omega_\ell....\omega_p;s_\ell+...+s_p+\lambda_{\ell,j}+1)\Big).$$

Démonstration: Par récurrence sur p.
Pour $p=1$ cela découle du théorème 2 de J.I.Igusa [Ig 5] et pour $p\geq 2$ on applique le corollaire 5.2.1 ainsi que la remarque 3.7.4 et la proposition 3.7.3.
Pour éviter d'utiliser le théorème 2 de J.I.Igusa, on aurait pu commencer par montrer le théorème pour les paraboliques très spéciaux minimaux en utilisant les résultats des 2 exemples fondamentaux. □

Remarque 5.2.3 A l'aide des résultats des sections suivantes, on vérifie qu'avec les normalisations choisies on a :

$$C=D=1\ (1).$$

c'est à dire que dans la notation suivante :
A toute application polynomiale $b:\mathbb{C}^p\mapsto\mathbb{C}$, $b(s_1,...,s_p)=\prod_{1\leq j\leq q}(a_{1,j}s_1+...+a_{p,j}s_p+a_j)$, les $a_{r,j}$, étant entiers lorsque $r=1,...,p$ et $j=1,...,q$ et les coefficients a_j rationnels pour $j=1,...,q$,
et tout caractère continu $\pi=(\pi_1,...,\pi_p)$ de $(\hat{\mathbb{F}}^*)^p$, on associe la quantité :

$$\rho'_b(\pi)=\prod_{1\leq j\leq q}\rho'(\pi_1^{a_{1,j}}...\pi_p^{a_{p,j}}|\ |^{a_j+1}),$$

$\rho'(\pi_1)=\pi_1(-1)\rho(\pi_1)$ étant le coefficient de Tate (cf.3.6.1) alors on a :

$$a(\pi)=\rho'_{b_{\mathfrak{g},P_{\mathfrak{t}}}}(\pi).$$

Démonstration: En effet, à l'exception de l'unique cas $(C_n,\alpha_k),k$ pair, avec le sous-groupe parabolique $P_{\mathfrak{t}'_0}$, (1) sera vérifié dans les sections qui suivent pour tous les préhomogènes $(P_{\mathfrak{t}},\mathfrak{g}_{\pm 1})$ lorsque le sous-groupe parabolique standard très spécial est maximal parmi ceux-ci donc (1) est vérifié pour tous les sous-groupes paraboliques standards très spéciaux (puisque cela correspond à certaines valeurs nulles de $s_{i_1},...$) sauf dans le cas $(C_n,\alpha_k),k$ pair, avec le sous-groupe parabolique $P_{\mathfrak{t}'_0}$.
Mais dans ce dernier cas $2H_0=H_1+H_2$, H_1 et H_2 étant dans la même orbite de $Aut(\mathfrak{g})$ (cf.3) β de la démonstration de la prop.1.2.4) donc

$$\widetilde{B}(\frac{H_1}{2},\frac{H_1}{2})=\frac{1}{4}\widetilde{B}(H_1,H_1)=\frac{1}{2}\widetilde{B}(H_0,H_0)=-\frac{\text{degré}(F_2)}{4}.$$

Or les préhomogènes $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$ et $(\mathfrak{U}'_0, \mathfrak{U}'_1)$ sont des préhomogènes commutatifs de type (D_k, α_k) et les invariants relatifs fondamentaux sont de degré $\dfrac{\text{degré}(F_2)}{2} = \dfrac{k}{2}$ (même ref. qu'avant) ainsi les normalisations sont cohérentes avec la descente et les coefficients de la prop.3.7.3 valent 1 ($A_1 = B_1 = 1$) donc $C = \pm 1$ et par la proposition 5.1.1 et le th.6.2.1 ii) on a $a(\pi_1, \pi_2) = \rho'_B(\pi_1, \pi_2)$ avec $b_{\mathfrak{g}, P_\mathfrak{t}}(s_1, s_2) = C.B(s_1, s_2)$.

Il reste à vérifier que $C = 1$. Pour ceci on considère la même situation sur $\mathbb{R}$ c'est à dire le préhomogène $((\mathfrak{g}_\mathbb{R})_0, (\mathfrak{g}_\mathbb{R})_{\pm 1})$ pour lequel on a encore $a(\pi_1, \pi_2) = \rho'_B(\pi_1, \pi_2)$, le coefficient ρ' étant cette fois-ci le coefficient de Tate **réel**, mais alors par le 2) du lemme 3.7.1 on a :

$$b(s_1, s_2) = (-2\sqrt{-1}\pi)^k \frac{(a(|\ |^{s_1}, |\ |^{s_2})}{(a(|\ |^{s_1}, \tilde{\omega}_{-1}|\ |^{s_2-1})} = \frac{(-2\sqrt{-1}\pi)^k}{(2\sqrt{-1}\pi)^k} B(s_1, s_2) = B(s_1, s_2).$$

□

La détermination des orbites pouvant s'avérer difficile notamment dans la proposition 5.1.1 (cf.par exemple §8.2.3 et 8.2.4) et au vu des résultats du corollaire 3.6.3 et du théorème 3.6.5, on termine ce paragraphe par une situation particulièrement simple.

5.3 Un cas particulier

Dans ce paragraphe, on suppose que (Δ, λ_0) n'est pas une $\mathbb{F}$-forme de (E_7, α_6) et que $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{t}'_0$ lorsque (Δ, λ_0) est de type (C_n, α_k) c'est à dire qu'on suppose que $m_k = 1$.

On note par $\mathbb{H}$ un sous-groupe particulier de $\mathbb{F}^*$ contenant $\mathbb{F}^{*2}$:

- soit $\mathbb{H} := \mathbb{F}^{*2}$,
- soit $\mathbb{H}$ contient chaque $\chi_i(G_\mathfrak{t})$ pour $i = 1, ..., p$,

Pour $u = (u_1, ..., u_p) \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^p$ on définit les ouverts (éventuellement vides) :

$O_u = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F_1(x)\mathbb{H} = u_1\ ,\ F_2(x)\mathbb{H} = u_1u_2\ , ..., F_p(x)\mathbb{H} = u_1...u_p\ \}$,
(noté également $O_{u_1,...,u_p}$)

$O^*_u = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid F^*_1(x)\mathbb{H} = u_p\ ,\ F^*_2(x)\mathbb{H} = u_{p-1}u_p\ , ..., F^*_p(x)\mathbb{H} = u_p...u_1\ \}$
(noté également $O^*_{u_1,...,u_p}$).

On a :

$$x \in O_u \Leftrightarrow x^{-1} \in O^*_u.$$

Chaque O_u (resp.O^*_u) est invariant par $(\cap_{1 \leq i \leq p} Ker\chi_i)N_\mathfrak{t}$.

On définit également les fonctions Zétas associées, pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ (resp.$h \in S(\mathfrak{g}_{-1})$) :

$$Z_u(f; \omega) = Z(f\mathbf{1}_{O_u}; \omega) \quad (\text{resp.} Z^*_u(h; \omega) = Z^*(h\mathbf{1}_{O^*_u}; \omega)\ )\ .$$

Soit $x \in W_k$ et $x = x_2 + x_0$ sa décomposition relativement à $ad(h_k)$, on suppose que $\gamma_k(x_2, x_0)$ (qui ne dépend que de la $G_{h_k}-$orbite de x) est indépendant du choix de $x \in O_{u_1,...,u_p}$ et on pose : $\tilde{\gamma}_k(u_1, u_2, ..., u_p) = \tilde{\gamma}_k(u) := \gamma_k(x_2, x_0)$.

Proposition 5.3.1 *Soit* $w \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^p$.

Lorsque $W_k^* \cap O_w^* \neq \emptyset$, *soit* $z = z_0 + z_{-2} \in W_k^* \cap O_w^*$, *on note* $\mathfrak{s}$ *l'algèbre engendrée par* z_0 *et* z_0^{-1}, $\mathfrak{s}'$ *celle engendrée par* z_{-2} *et* z_{-2}^{-1}, $\mathfrak{U} := \mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ *et* $\mathfrak{U}' := \mathfrak{U}(\mathfrak{s}')$.

On suppose que :

1. *Pour tout* $\pi' \in \Omega((\mathbb{F}^*)^k)$ *et* $\forall (u, v) \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k \times \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k$ *il existe une constante* $b_{v,u}^{(w_{k+1},...,w_p)}(\pi')$ *telle que dans le préhomogène faiblement sphérique :* $((G_{\mathfrak{t}})_{z_0} N_{k,2}, \mathfrak{U}_{\pm 1})$ *on a les équations fonctionnelles suivantes pour tout* $\pi' \in \Omega((\mathbb{F}^*)^k)$ *et* $\forall v \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k$:

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f); \pi') = \sum_{u \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k} b_{v,u}^{(w_{k+1},...,w_p)}(\pi') Z_u(f; \pi'^* |\ |^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}\mathbf{1}_k}) \ , \ \forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{U}_1),$$

avec $b_{v,u}^{(w_{k+1},...,w_p)} = 0$ *si l'un des deux ouverts est vide.*
(u *est associé aux valeurs des invariants relatifs fondamentaux* $F_1, ..., F_k$*)*

2. *Pour tout* $\pi" \in \Omega((\mathbb{F}^*)^{p-k})$ *et* $\forall (u', v') \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^{p-k} \times \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^{p-k}$ *il existe une constante* $c_{v',u'}^{(w_1,...,w_k)}(\pi")$ *telle que dans le préhomogène faiblement sphérique :* $((G_{\mathfrak{t}})_{z_{-2}} N_{k,0}, \mathfrak{U}'_{\pm 1})$ *on a les équations fonctionnelles suivantes pour tout* $\pi" \in \Omega((\mathbb{F}^*)^{p-k})$ *et* $\forall v' \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^{p-k}$:

$$Z_{v'}^*(\mathcal{F}(g); \pi") = \sum_{u' \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^{p-k}} c_{v',u'}^{(w_1,...,w_k)}(\pi") Z_{u'}(g; \pi"^* |\ |^{-\frac{p_{0,2}-p_2}{d'_k}\mathbf{1}_{p-k}}) \ , \ \forall g \in \mathcal{S}(\mathfrak{U}'_1) \ ,$$

avec $c_{v',u'}^{(w_1,...,w_k)} = 0$ *si l'un des deux ouverts est vide.*
(v' *est associé aux valeurs des invariants relatifs fondamentaux* $F_1^*, ..., F_{p-k}^*$*)*

alors pour $\pi \in \Omega((\mathbb{F}^*)^p)$ *et* $\forall \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right) \in D^p$ *et* $\forall h \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ *on a :*

$$Z_v^*(\mathcal{F}(h); \pi) = \sum_{u \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^p} d_{v,u}(\pi) Z_u(h; \pi^* |\ |^{-N\mathbf{1}_p}) \quad avec$$

$$d_{v,u}(\pi) = \tilde{\gamma}_k(u_1, ..., u_k, v_{k+1}, ..., v_p) b_{(v_1,...,v_k),(u_1,...,u_k)}^{(v_{k+1},...,v_p)}(\pi') . c_{(v_{k+1},...,v_p),(u_{k+1},...,u_p)}^{(u_1,...,u_k)}(\pi")$$

lorsque $u = (u_1, ..., u_p)$ *et* $v = (v_1, ..., v_p)$,
avec $\pi' = (\pi_{p-k+1}, ..., \pi_p)$ *et* $\pi" = (\pi_1, ..., \pi_{p-k-1}, \ \prod_{p-k \leq j \leq p} \pi_j \ |\ |^{r_k})$.

Démonstration: 1) On reprend brièvement la démonstration de la proposition 5.1 mais relativement aux ouverts O_u et O_v^*.

Prenons $u, v \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^p$ tels que O_u et O_v^* soient non vide, $f \in \mathcal{C}_C^\infty(O_u)$ et $Re(\pi) > 0$.

Posons $u' = (u_{k+1}, ..., u_p)$, $u" = (u_1, ..., u_k)$ et $v' = (v_{k+1}, ..., v_p)$, $v" = (v_1, ..., v_k)$, on a :

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\pi) \ = \int_{E_{0,-2}\cap O_{v'}^*} C(y')|F_{p-k}^*(y')|^{\frac{p_1}{2d_k'}} Z_{v"}^*(\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(\gamma_k(\ ,y'^{-1})h_f(\ ,y')\ ;\pi')dy'\ ,$$

par l'hypothèse faite sur γ on a :

$$\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}\ (\ \gamma_k(\ ,y'^{-1})h_f(\ ,y')\ ) = \sum_{w\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k} \tilde{\gamma}_k(w,v')\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(1_{O_w}h_f(\ ,y')\ )$$

donc on a également :

$$Z_{v"}^*(\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(\gamma_k(\ ,y'^{-1})h_f(\ ,y')\ ;\pi') = \sum_{w\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k} \tilde{\gamma}_k(w,v')Z_{v"}^*(\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(1_{O_w}h_f(\ ,y')\ ;\pi')$$

et par l'hypothèse 1 :

$$Z_{v"}^*(\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(\gamma_k(\ ,y'^{-1})h_f(\ ,y')\ ;\pi') = \sum_{w\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k} \tilde{\gamma}_k(w,v')b_{v",w}^{(v')}(\pi')Z_w(h_f(\ ,y');\pi'^*|\ |^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}\mathbf{1}_k})$$

donc :

$$\begin{aligned}
Z_v^*(\mathcal{F}f;\pi) &= \sum_{w\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^k} \tilde{\gamma}_k(w,v')b_{v",w}^{(v')}(\pi')I_w \ avec \\
I_w &= \int_{E_{0,-2}\cap O_{v'}^*} C(y')|F_{p-k}^*(y')|^{\frac{p_1}{2d_k'}} Z_w(h_f(\ ,y');\pi'^*|\ |^{-\frac{p_{2,0}-p_2}{d_k}\mathbf{1}_k})dy' \\
&= \int_{E_{2,0}\cap O_w} Z_{v'}^*(\mathcal{F}_{(E_{0,2})_x}(S_f(x+\ ));\pi").|F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}}{d_k}}\pi'^*(G(x))dx \\
&= \sum_{w'\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^{p-k}} c_{v',w'}^{(w)}(\pi") \int_{E_{2,0}\cap O_w} Z_{w'}(S_f(x+\ );\pi"^*|\ |^{-\frac{p_{0,2}-p_2}{d_k'}\mathbf{1}_{p-k}}).|F_k(x)|^{-\frac{p_{2,0}}{d_k}}\pi'^*(G(x))dx
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse 2. d'où :

$$I_w = \sum_{w'\in\left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^{p-k}} c_{v',w'}^{(w)}(\pi")Z_{(w,w')}(f;\pi|\ |^{-N\mathbf{1}_p}) = c_{v',u'}^{(u")}(\pi")Z_u(f;\pi|\ |^{-N\mathbf{1}_p})$$

par choix du support de f, donc :

$$Z_v^*(\mathcal{F}f;\pi) = \tilde{\gamma}_k(u",v')b_{v",u"}^{(v')}(\pi')c_{v',u'}^{(u")}(\pi")Z_u(f;\pi|\ |^{-N\mathbf{1}_p}).$$

Ainsi $\forall f \in C_c^\infty(O_u)$ et $Re(\pi) > 0$, on a :

$$Z_v^*(\hat{f};\pi) = d_{v,u}(\pi) Z_u(f;\pi^*|\ |^{-N\mathbf{1}_p}) \ ,$$

et $d_{v,u} = 0$ lorsque O_u ou O_v^* sont vides (puisque $O_u = \emptyset \ \Leftrightarrow \ O_{u"} = \emptyset$ ou $O_{u'} = \emptyset$ et idem pour O_v^*).

2) Lorsque $\mathbb{H}$ contient chaque $\chi_i(P_\mathfrak{t})$ pour $i = 1, ..., p$, les ouverts non vides O_u (resp. O_u^*) sont réunion de $P_\mathfrak{t}-$orbites dans $\mathfrak{g}_1''$ (resp. $\mathfrak{g}_{-1}''$) donc pour $Re(\pi) > 0$ et $O \subset O_u$ on a : $d_{v,u}(\pi) = \sum_{\{O^* \ | \ O^* \subset O_v^*\}} a_{O^*,O}(\pi)$, par prolongement méromorphe, cette égalité est vraie pour tout caractère π donc $\sum_{\{O^* \ | \ O^* \subset O_v^*\}} a_{O^*,O}(\pi)$ est indépendante de l'orbite $O \subset O_u$ d'où le résultat.

3) Lorsque $\mathbb{H} = \mathbb{F}^{*2}$, pour $v \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^p$, $h \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$ et $Re(\pi) > 0$ on a :

$$Z_v^*(h;\ \pi) = \frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|^p} \sum_{(a_1,...,a_p) \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^p} \left(\prod_{1 \leq i \leq p} (a_i, v_p ... v_{p-i+1}) \right) \ Z^*(h; \pi.(\tilde{\omega}_{a_1}, ..., \tilde{\omega}_{a_p})) \ .$$

Par prolongement méromorphe, cette égalité est vraie pour tout caractère π donc, en appliquant l'équation fonctionnelle abstraite à $Z^*(\mathcal{F}(f); \pi.(\tilde{\omega}_{a_1}, ..., \tilde{\omega}_{a_p}))$, on montre qu'il existe une fonction méromorphe en π dépendant de l'orbite O, de u et de v, notée $\alpha_{O,\pi}(u,v)$, telle que $\forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$:

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\pi)) = \sum_{\{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^p \ , \ \text{orbites } O \ | \ O \cap O_u \neq \emptyset\}} \alpha_{O,\pi}(u,v) \ Z(f\mathbf{1}_{O \cap O_u}; \pi^*.|\ |^{-N\mathbf{1}_p}).$$

Or, pour $f \in \mathcal{C}_C^\infty(O \cap O_u)$ et $Re(\pi) > 0$, on a :

$$\alpha_{O,\pi}(u,v) = d_{v,u}(\pi)$$

donc par prolongement méromorphe, cette égalité est vraie pour tout caractère π donc $\alpha_{O,\pi}(u,v)$ est indépendant de l'orbite O rencontrant O_u d'où le résultat. □

Remarque 5.3.2 *1. Lorsque O_u est inclus dans une seule orbite de $P_\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}"_1$, pour u et v dans D^p, on dit que $u \sim v \ \Leftrightarrow O_u$ et O_v sont dans la même orbite de $P_\mathfrak{t}$ (ce qui est équivalent à O_u^* et O_v^* sont dans la même orbite de $P_\mathfrak{t}$) alors $\forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$, $\pi \in \Omega((\mathbb{F}^*)^p)$ et pour toute orbite O^* de $P_\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{g}"_{-1}$, on a :*

$$Z_{O^*}^*(\mathcal{F}(f);\pi) = \sum_{\{O | O \text{ orbites de } P_\mathfrak{t} \text{ dans } \mathfrak{g}"_1\}} A_{O^*,O}(\pi) Z_O(f;\pi^*|\ |^{-N\mathbf{1}_p}) \quad \textit{avec}$$

$$A_{O^*,O}(\pi) = \sum_{\{w \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{H}\right)^p, w \sim v\}}$$

$$\tilde{\gamma}_k(u_1, ..., u_k, w_{k+1}, ..., w_p) b_{(w_1,...,w_k),(u_1,...,u_k)}^{(w_{k+1},...,w_p)}(\pi') c_{(w_{k+1},...,w_p),(u_{k+1},...,u_p)}^{(u_1,...,u_k)}(\pi")$$

$u = (u_1, ..., u_p)$, $v = (v_1, ..., v_p)$ choisis tels que $O_u \subset O$ et $O_v^* \subset O^*$ (mais quelconques).

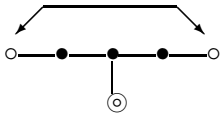
2. *Lorsque* $\mathbb{H} = \mathbb{F}^*$, *on normalise les invariants* $F_1, ..., F_p$ *de telle manière qu'ils représentent tous* 1 *alors* $\forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ *on a :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f); \pi) = A(\pi) Z(f; \pi^* | \ |^{-N1_p}) \quad avec$$

$$A(\pi) = \tilde{\gamma}_k(1, ..., 1) b^{(1,...,1)}_{(1,...,1),(1,...,1)}(\pi') c^{(1,...,1)}_{(1,...,1),(1,...,1)}(\pi") \ .$$

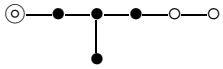
Terminons par les 2 exemples réels suivants pour lesquels l'invariant relatif fondamental F est de degré 4 donc $\widetilde{B}(H_0, H_0) = -2$:

• (E_6, α_2) de type III réel c'est à dire que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de rang 2 et de diagramme de Satake de type EIII, $(\overline{\mathfrak{g}_0}, \overline{\mathfrak{g}_1})$ est de type (E_6, α_2), donc $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (BC_2, λ_1) :



(λ_1 est la restriction de α_2 et λ_2 de α_1 et également de α_6)

• (E_7, α_1) de type EVII réel c'est à dire que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de rang 3 et de diagramme de Satake de type EVII, $(\overline{\mathfrak{g}_0}, \overline{\mathfrak{g}_1})$ est de type (E_7, α_1), donc $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (C_3, λ_1) :



(λ_1 est la restriction de α_1, λ_2 de α_5 et λ_3 de α_6)

Dans les 2 cas le sous-groupe parabolique standard très spécial est donné par $P = P(H_1, H_2)$ avec $H_1 = h_{\lambda_1}$ et $H_2 = 2H_0 - H_1 = h_\mu$; H_1 et H_2 sont dans la même orbite de G.

Indiquons également les différents sous-espaces qui interviennent ainsi que leurs dimensions : $\mathfrak{g}_2 = E_{2,2} = \mathfrak{g}^{\widetilde{\lambda}}$ est de dimension 1, $\widetilde{\lambda}$ étant la plus grande racine; $E_{1,1} = \mathfrak{g}^{\lambda_1+\lambda_2}$ est de dimension $4d$, $\mathfrak{g}^{\lambda_1}$ de dimension $d+2$ d'où $\mathfrak{g}_1$ est de dimension $8+6d$.

Type réel	EIII	EVII
μ	$\lambda_1 + 2\lambda_2$	$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$
$\widetilde{\lambda}$	$2(\lambda_1 + \lambda_2)$	$2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3$
d	2	4

La restriction de l'invariant relatif fondamental F_1 (resp. P_1) à $\mathfrak{U}(\mathbb{R}H_2)_1 = \mathfrak{g}^{\lambda_1}$ (resp. à $\mathfrak{U}(\mathbb{R}H_1)_1 = \mathfrak{g}^{\mu}$ est donc une forme quadratique anisotrope (chaque $\mathfrak{U}(\mathbb{R}H_i)$, $i = 1, 2$, est de rang 1).

Proposition 5.3.3 *1.* $b_1(s_1, s_2) = s_2(s_2 + \frac{1+d}{2})$, $b_2(s_1, s_2) = s_2(s_2 + \frac{1+d}{2})(s_1 + s_2 + \frac{2d+1}{2})(s_1 + s_2 + \frac{3d+2}{2})$.

2. P a une seule orbite dans $\mathfrak{g}$"$_1$.

3. Soient $(s_1, s_2) \in \widehat{(\mathbb{C})^2}$, $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ *alors :*

$$Z^*(\mathcal{F}f; (s_1, s_2)) = C_d(s_1, s_2)\sin(\pi s_2)\cos(\pi(s_1 + s_2))Z(f; (s_1, -s_1 - s_2 - \frac{3}{2}d - 2) \quad \textit{avec}$$

$$C_d(s_1, s_2) = 4(2\pi)^{-2s_1-4s_2-3d-6}\Gamma(s_2 + 1)\Gamma(s_2 + \frac{d+3}{2}).$$

$$\Gamma(s_1 + s_2 + \frac{2d+3}{2})\Gamma(s_1 + s_2 + \frac{3}{2}d + 2).$$

Démonstration: 1) Dûe à la normalisation de $\widetilde{B}$.

2) Soit x et x' 2 éléments de $W_{\mathfrak{t}}$, décomposons $x = x_2 + x_0$ et $x' = x'_2 + x'_0$ avec x_i et $x'_i \in E_i(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$, alors x_2 et x'_2 sont dans la même orbite de $\mathrm{Int}(\mathfrak{U}(\mathbb{R}H_1)_0)$ car l'algèbre $\mathfrak{U}(\mathbb{R}H_1)$ est de rang 1 et le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{R}H_1)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{R}H_1)_1)$ est commutatif (cf.par exemple démonstration de 6.1.7) donc on peut supposer que $x_2 = x'_2$ ensuite on procède de même avec x_0 et x'_0 dans le préhomogène commutatif $((\mathfrak{U}_{x_2})_0, (\mathfrak{U}_{x_2})_1)$ avec $\mathfrak{U}_{x_2} := \mathfrak{U}(\mathbb{R}x_2 \oplus \mathbb{R}H_2 \oplus \mathbb{R}x_2^{-1})$.

3) On applique le 4) du théorème 3.6.5 ainsi que la proposition 5.3.1 avec $\mathbb{H} = \mathbb{R}^*$.
Soit $x \in W_{\mathfrak{t}}$, $x = x_2 + x_0$ avec $x_i \in E_i(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ alors on a vu que $-x_2 + x_0$ et $x_2 + x_0$ sont dans la même orbite de G_{H_1}, donc la forme quadratique définie sur $E_{-1,-1}$ par $\widetilde{B}(ad(\ )^2(x_2), x_0)$ est de type $(2d, 2d)$ d'où $\gamma_1(x_2, x_0) = 1$. □

Remarques : 1) Cette proposition est bien connue lorsque $s_1 = 0$ ([Muro 2]).

2) La situation n'est plus aussi simple pour les autres formes qui seront traitées dans la section 8.2 (prop.8.2.6, cf.également prop. 8.2.11).

6 Le cas commutatif

Dans cette section, on traite les équations fonctionnelles des préhomogènes de type commutatifs, bien que ces résultats soient connus en grande partie, comme cela a été rappelé dans l'introduction, afin de les exprimer dans nos notations et normalisations pour une utilisation ultérieure (cf. §8.3 qui traite du cas exceptionnel (E_7, α_2) et remarque 5.2.3).

Notation : ϕ étant une forme quadratique non dégénérée, on note simplement $\gamma(\phi)$ la constante $\gamma(\tau \circ \phi)$ (cf.§3.6.2).

6.1 Structure

6.1.1 Rappels

On considère le sous-groupe parabolique très spécial standard défini dans le lemme 2.3.2, $P_0 = P(h_{\lambda_1}, ..., h_{\lambda_n}), \{\lambda_n, ..., \lambda_1\}$ étant l'ensemble maximal canonique de racines orthogonales de Δ_1 (l'ordre est inversé).

On rappelle que le système de racines obtenu à partir des restrictions non nulles de Δ à $\mathfrak{t}_0 = \oplus_{1 \leq i \leq n} \mathbb{F} h_{\lambda_i}$ est de type C_n, qu'il existe une algèbre déployée, notée $\tilde{\mathfrak{g}}$, admettant $\mathfrak{t}_0$ comme sous-algèbre de Cartan (prop.2.2.1 [Mu 3]) et que :

$$\tilde{B} = -\frac{d_n B}{2B(H_0, H_0)} (= -\frac{2d_1 B}{B(h_{\lambda_i}, h_{\lambda_i})}),$$

($d_n = nd_1$ lemme 6.1.4) ainsi pour toute racine longue α de Δ on a $\tilde{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = d_1$.

Pour $i \neq j$, soit $E^{i,j}_{u,v} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h_{\lambda_i}, x] = ux \ , \ [h_{\lambda_j}, x] = vx \ , \ [h_{\lambda_k}, x] = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \neq i, j \leq n\}$ le sous espace associé à la racine $\dfrac{u\lambda_i + v\lambda_j}{2}$ de R $(u, v = \pm 1)$.

Proposition 6.1.1 *1. Pour $1 \leq k \neq r \leq n$, $E^{k,r}_{1,1} \neq \{0\}$ et il existe un élément de $Aut_e(\mathfrak{g}_0)$, $g_{k,r}$ dont la restriction à $\oplus_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ soit une involution qui se réduise à l'identité sur $\oplus_{1 \leq i \neq k, r \leq n} \mathfrak{g}^{\lambda_i}$ et $g_{k,r}(\mathfrak{g}^{\lambda_k}) = \mathfrak{g}^{\lambda_r}$.*

2. Il existe un système de Chevalley , $(X_\mu, h_\mu, X_{-\mu})_{\mu \in R}$, de $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{t}_0)$ tel que toutes les formes quadratiques $f_{\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}}$ définies sur $E^{i,j}_{-1,1}$ par $f_{\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}}(A) = \frac{1}{2}\tilde{B}(ad(A)^2(X_{\lambda_i}), X_{-\lambda_j})$ sont équivalentes et représentent d_1.

3. Dans le cas réel, on peut supposer de plus que $\Theta(X_{\lambda_i}) = X_{-\lambda_i}, i = 1, ..., n$, Θ étant une involution de Cartan telle que $\Theta/\mathfrak{a} = -id$.

4. Pour toute orbite non réduite à $\{0\}$ de G dans $\mathfrak{g}_1$, il existe $j \in \{1, ..., n\}$ telle que cette orbite rencontre $\oplus_{1 \leq i \leq j}(\mathfrak{g}^{\lambda_i} - \{0\})$.

Démonstration: 1)-2) C'est la démonstration de la prop.4.1.1 [Mu 3]) qui convient également lorsque $\dim(\mathfrak{g}^{\lambda_i}) > 1$ pour $i = 1, ..., n$ (cf.également la démonstration du 1) du lemme 6.1.7).

3) Lorsque $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ on a $[\Theta(X_{\lambda_i}),X_{\lambda_i}]=c_ih_{\lambda_i}$ avec $c_i=\tilde{B}(\Theta(X_{\lambda_i}),X_{\lambda_i})>0$ donc

$$(\frac{1}{\sqrt{c_i}}X_{\lambda_i},h_{\lambda_i},\Theta(\frac{1}{\sqrt{c_i}}X_{\lambda_i}))$$

est encore un sl_2-triplet d'où le résultat (cf.lemme 1.1.7 de [Bo-Ru 2]).
4) est une conséquence de la prop.5.2.2 de [Mu 2] et du 1) de cette proposition. □

On normalise les invariants relatifs fondamentaux par :

$$i=1,...,n\ :\ F_i(\sum_{1\leq j\leq n}X_{\lambda_j})=1\quad\text{donc}\quad F_i^*(\sum_{1\leq j\leq n}X_{-\lambda_j})=1\text{ pour }i=1,...,n.$$

On note $E:=E^{1,2}_{-1,1}, f:=f_{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}}$, d est la dimension commune des sous-espaces $E^{i,j}_{\pm1,\pm1}$, et $\delta:=(-1)^{[\frac{d}{2}]}$.discriminant de f.

On rappelle que :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\\
\mathfrak{g}_{-1} &= \oplus_{1\leq i\leq n}\mathfrak{g}^{-\lambda_i}\oplus_{1\leq i<j\leq n}E^{i,j}_{-1,-1}\\
\mathfrak{g}_1 &= \oplus_{1\leq i\leq n}\mathfrak{g}^{\lambda_i}\oplus_{1\leq i<j\leq n}E^{i,j}_{1,1}\\
\mathfrak{g}_0 &= E(0)\oplus_{1\leq i<j\leq n}\left(E^{i,j}_{-1,1}\oplus E^{i,j}_{1,-1}\right)\\
E(0) &= \cap_{1\leq i\leq n}E_0(h_{\lambda_i})\ .
\end{aligned}$$

En raison des relations de commutation :

$$W_{\mathfrak{t}_0}=\oplus_{1\leq i\leq n}\ (\mathfrak{g}^{\lambda_i}-\{0\})\quad(\text{resp. }W^*_{\mathfrak{t}_0}=\oplus_{1\leq i\leq n}\ (\mathfrak{g}^{-\lambda_i}-\{0\})\ )$$

et $F/W_{\mathfrak{t}_0}=\prod_{1\leq i\leq n}G_i$ (resp.$F^*/W^*_{\mathfrak{t}_0}=\prod_{1\leq i\leq n}G^*_i$), G_i étant l'invariant relatif fondamental du préhomogène $(E_0(h_{\lambda_i})\cap\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}^{\lambda_i})$ normalisé par $G_i(X_{\lambda_i})=1$ donc G^*_i, invariant relatif fondamental du préhomogène dual, vérifie $G^*_i(X_{-\lambda_i})=1$ ($G_1=F_1$ et $F_1^*=G_n^*$).

Définition 6.1.2 *Le préhomogène $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ est dit presque déployé si les sous-espaces radiciels $\mathfrak{g}^{\lambda_r}, r=1,...,n$ sont de dimension* 1.

Lorsque $\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\in\Delta$, f_0 est la restriction de f à $\mathfrak{g}^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}$ et e est la dimension de $\mathfrak{g}^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}$, on rappelle que :

Lemme 6.1.3 *1. f représente d_1.*

2. $\mathfrak{g}$ est de rang $n\Leftrightarrow f$ est anisotrope.

3. Lorsque $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ est presque déployé :

i) $f\sim f_0\oplus f_1$, f_0 est anisotrope et f_1 est hyperbolique.

ii) Lorsque $n\geq 2, F_2\sim -f\oplus$ la forme hyperbolique à deux variables.

iii) Lorsque $e=0$ ou bien $e=d$, f et af, $a\in\mathbb{F}^*$, sont équivalentes $\Leftrightarrow a$ est un élément de $f(E)^*$ à **l'exception** *du cas $d=3$ lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}-$adique.*

iv) $f(E)^*\subset\cap_{1\leq i\leq n-1}\chi_i(P_0)$.

Démonstration: 1. résulte du 2. de la prop.6.1.1.
2. résulte de la démonstration du 2) du lemme 4.1.3 de [Mu 3].
3.i) Ce résultat, bien connu dans le cas réel (lemme 2-22 p.49, [Bo-Ru 2]), résulte d'un simple calcul puisque pour $\mu \in \Delta_{-1,1} = \{\mu \in \Delta \,|n(\mu,\lambda_2) = -n(\mu,\lambda_1) = 1\}$ on a $\mu' = -(\mu+\lambda_1-\lambda_2) \in \Delta_{-1,1}$ or :

$$s_\mu(\lambda_1)(h_{\lambda_2}) = (\lambda_1 - n(\lambda_1,\mu)\mu)(h_{\lambda_2}) = -n(\lambda_1,\mu) \leq 2,$$

et l'égalité : $n(\lambda_1,\mu) = -2 \Rightarrow s_\mu(\lambda_1) = \lambda_2$ donc $\mu = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}$ est une racine courte, ainsi :

$$\Delta_{-1,1} = \begin{cases} \{\mu_i \ , \mu_i' := -(\mu_i + \lambda_1 - \lambda_2), i = 1, ..., l_1\} \text{ si } e = 0 \\ \{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}, \mu_i \ , \mu_i' := -(\mu_i + \lambda_1 - \lambda_2), i = 1, ..., l_1\} \text{ si } e > 0, \end{cases}$$

les racines $\{\mu_i \ , \mu_i', i = 1, ..., l_1\}$ ayant même longueur que λ_1.
Par dualité de la forme de Killing, on a pour $A_0 \in \mathfrak{g}^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}}$ et $x_i, y_i \in \mathbb{F}, i = 1, ..., l_1$:

$$f(\sum_{i=1}^{l_1}(x_i X_{\mu_i} + y_i X_{\mu_i'}) + A_0) = f(A_0) + \sum_{i=1}^{l_1} x_i y_i \tilde{B}([X_{\mu_i}, X_{\lambda_1}], ([X_{\mu_i'}, X_{-\lambda_2}]),$$

Tout $A \in \mathfrak{g}^{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}} - \{0\}$ se complète en 1 sl_2-triplet $(A, h_{\lambda_2} - h_{\lambda_1}, B), B \in \mathfrak{g}^{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}} - \{0\}$, donc $ad(A)^2$ est une bijection de $\mathfrak{g}^{\lambda_1}$ sur $\mathfrak{g}^{\lambda_2}$ qui sont de dimension 1 d'où $\exists x \in \mathbb{F}^*$ tel que $ad(A)^2(X_{\lambda_1}) = xX_{\lambda_2}$ et $f(A) = \frac{x}{2} \neq 0$.
3.ii) Soit $x = a_1 X_{\lambda_1} + a_2 X_{\lambda_2} + y, y \in E_{1,1}^{1,1}, a_2 \neq 0$, alors par le calcul habituel (cf.démonstration du lemme 1.1.1) :

$$x = exp(ad(A))(a_1 X_{\lambda_1} + bX_{\lambda_2}) \text{ avec } b = a_2 - \frac{B(ad(y)^2(X_{-\lambda_1}, X_{-\lambda_2})}{2a_1 B(X_{\lambda_2}, X_{-\lambda_2})},$$

donc avec les normalisations choisies :

$$F_2(x) = a_1 b = a_1 a_2 - f(\theta_{X_{\lambda_1}}(1)(y)).$$

3)iii) Comme $f \sim f_1$ ou bien $f \sim f_0$, 3.iii) est évident dans le cas réel puisque f_0 est définie positive et dans le cas $\mathfrak{p}-$adique car alors $d \leq 4$ et f représente 1.
3. iv) résulte de la démonstration du 1) du lemme 4.1.3 de [Mu 3]. □

Lemme 6.1.4 *Soit* $\overline{d} = 2\dfrac{dim(\mathfrak{g}_1) - d_n}{(d_n - 1)d_n}$ *alors :*

$$d = (d_1)^2\overline{d} \ , \ N = \frac{dim(\mathfrak{g}_1)}{d_n} = \frac{\overline{d}}{2}(nd_1 - 1) + 1 \ \textit{et} \ \ d_k = kd_1 \ \textit{pour} \ \ k = 1, ..., n.$$

Démonstration: 1) Comme tous les sous-espaces $\mathfrak{g}^{\lambda_j}$, $j = 1, ..., n$, sont conjugués et qu'ils commutent, la relation sur les degrés des invariants s'établit par récurrence sur n (cf.lemme 1.4.7).

2) Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est quasi-déployé, F_k est de degré k pour $k = 1, ..., n$ (prop.3.2 de [Mu 3]) donc $d_1 = 1$ et $\overline{d} = d$.

3) Lorsque $\dim(\mathfrak{g}^{\lambda_1}) > 1$, sur une extension algébrique convenable de dimension finie de $\mathbb{F}$, notée $\mathbb{E}$, $\overline{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$ est déployée, on a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} d_n &= nd_1 \\ \dim(\overline{\mathfrak{g}^{\lambda_1}}) &= d_1 + \frac{(d_1-1)d_1}{2}\overline{d} \\ \dim(\overline{\mathfrak{g}_1}) &= d_n + \frac{(d_n-1)d_n}{2}\overline{d} \\ \dim(\mathfrak{g}_1) &= n\dim(\mathfrak{g}^{\lambda_1}) + \frac{(n-1)n}{2}d \quad \text{d'où le résultat.} \quad \square \end{aligned}$$

Pour des raisons de normalisations, on redonne le résultat suivant déjà connu ([Fa-Ko],[Bo-Ru 2]) :

Lemme 6.1.5 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: *le polynôme de Bernstein associé à* $(P_0, \mathfrak{g}_1)$ *est donné par :*

$$(s_1, ...s_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ b(s_1, ...s_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{d_1-1} \big(\sum_{n-k \le i \le n} s_i + \frac{\overline{d}}{2}(j + d_1 k) \ \big).$$

Démonstration: On applique la proposition 3.7.3 en notant que par le choix de la normalisation de B on a :

$$k = 1, ..., n \quad \widetilde{B}(\sum_{1 \le i \le k} h_{\lambda_i}, \sum_{1 \le i \le k} h_{\lambda_i}) = -2d_k,$$

et on a $d_1 = 1$ ou 2 donc pour $(s_1, ...s_n) \in \mathbb{C}^n$ on a :

$$b(s_1, ...s_n) = (C^{-d_1})^n \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=0}^{d_1-1} \big(\sum_{n-k \le i \le n} s_i + \frac{\overline{d}}{2}(j + d_1 k) \ \big)$$

avec :

- lorsque $d_1 = 1$, $C = \widetilde{B}(X_{\lambda_1}, X_{-\lambda_i}) = 1$
- lorsque $d_1 = 2$, $C = \widetilde{B}(\frac{h_{\lambda_1}}{2}, \frac{h_{\lambda_1}}{2}) = -1$ (remarque 3.6.6). $\square$

Remarque 6.1.6 *Rappelons la terminologie utilisée dans [Bo-Ru 2]), on dit que :*

- $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est de type I lorsqu'il est presque déployé et* f *est anisotrope* $\Leftrightarrow$ *rang*$(\mathfrak{g}) = d_n$. *On a donc* $e = d$ *et* $d \le 4$ *dans le cas* $\mathfrak{p}-$*adique.*
- $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est de type II lorsqu'il est presque déployé et* f *est isotrope* $\Leftrightarrow$ *rang*$(\mathfrak{g}) > d_n$. *On a donc* $\gamma(f) = \gamma(f_0)$, $e < d$ *et* $\mathfrak{g}$ *est déployée* $\Leftrightarrow$ $e \le 1$ *(démonstration du lemme 6.1.3).* $e = 0$ *lorsque* $n \ge 3$ *(cf. tableau 1).*
- $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est de type III lorsqu'il n'est pas presque déployé* $\Leftrightarrow$ *rang*$(\mathfrak{g}) < d_n$.

Pour $u \in \left(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\right)^n$, O_u et O_u^* ont été définis dans le §3.5.

6.1.2 Le type III

Par les tables de [Wa] et [Ve] (cf. également le tableau 1 et les tables de [Bo-Ru 2]p.222-224), les cas possibles, en dehors du cas où $\mathfrak{g}$ est de rang 1, sont :

i) $(\overline{\Delta}, \alpha_0) = (A_{2nm-1}, \alpha_{nm})$ et $(\Delta, \lambda_0) = (A_{2n-1}, \alpha_n)$ avec $m \geq 2$
ii) $(\overline{\Delta}, \alpha_0) = (C_{2n}, \alpha_{2n})$ et $(\Delta, \lambda_0) = (C_n, \alpha_n)$.

Les démonstrations sont faites cas par cas ainsi dans le cas ii) lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique, on supposera la caractéristique résiduelle différente de 2, pour des raisons techniques.

Lemme 6.1.7 *Soit $x_0 \in \mathfrak{g}^{\lambda_1}$, on suppose que l'application de E dans $\mathfrak{g}^{\lambda_2}$ définie par $ad(A)^2(x_0)$ est surjective alors :*

1. *Les orbites de G et de $Ker(\chi_n)$ dans $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1'$ sont les mêmes et ont pour représentants : $0, \sum_{1 \leq j \leq i} X_{\lambda_j}, i = 1, .., n-1$.*

2. *Dans le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\lambda_n})_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\lambda_n})_1)$, $(Aut_0(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\lambda_n}))_{h_{n-1}}$ a n orbites de représentants : $0, \sum_{1 \leq j \leq i} X_{\lambda_j}, i = 1, .., n-1$ et $P_{\oplus_{1 \leq j \leq n-1} \mathbb{F}h_{\lambda_j}}$ a une seule orbite dans $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\lambda_n})_1$".*

Démonstration: 1) Tout élément $A \in E_{-1,1}^{k,r}$ pour lequel il existe $x \in \mathfrak{g}^{\lambda_k}$ tel que $ad(A)^2(x) \neq 0$ se complète en un sl_2-triplet $(A, h_{\lambda_r} - h_{\lambda_k}, B)$ avec $B \in E_{1,-1}^{k,r}$(cf. démonstration du lemme 2.2.2 de [Mu 3]) par conséquent l'automorphisme élémentaire :

$$g_A = expad(B)expad(A)expad(B).g_{k,r} \in G_{\mathfrak{t}_0}$$

se réduit à l'identité sur $\oplus_{1 \leq j \leq n, j \neq k,r} \mathfrak{g}^{\lambda_j}$, sur $\mathfrak{g}^{\lambda_j}$ (resp. $\mathfrak{g}^{\lambda_k}$) à $\frac{1}{2}ad(A)^2 \circ g_{k,r}$ (resp. $\frac{1}{2}ad(B)^2 \circ g_{k,r}$).

2) Soit $x \in \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1'$, on peut supposer que $x = \sum_{1 \leq i \leq j} x_i, x_i \in \mathfrak{g}^{\lambda_i} - \{0\}$ (4 prop.6.1.1). Soit $i \in \{1, ..., j\}$, par 1) il existe $A_i \in E_{1,-1}^{i,n}$ et une involution $g_{A_i} \in G_{\mathfrak{t}_0} \cap G_e$ réduite à l'identité sur $\oplus_{1 \leq k \leq n-1, k \neq i} \mathfrak{g}^{\lambda_k}$ telle que $g_{A_i}(x) = \sum_{1 \leq k \leq j, k \neq i} x_k + X_{\lambda_i}$ puisque l'application est surjective d'où 1. et 2. puisque la restriction des g_{A_i} à $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\lambda_n})$ est dans $Aut_0(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\lambda_n}))$.□

Proposition 6.1.8 *1. Dans le cas réel ou bien dans le cas $\mathfrak{P}$-adique lorsque $(\overline{\Delta}, \alpha_0) = (A_{2nm-1}, \alpha_{nm})$ et $(\Delta, \lambda_0) = (A_{2n-1}, \alpha_n)$ avec $m \geq 2$, P_0 a une seule orbite dans $\mathfrak{g}"_1$ et G a $n+1$ orbites dans $\mathfrak{g}_1$ de représentants : $0, \sum_{1 \leq j \leq i} X_{\lambda_j}, i = 1, .., n$. Les orbites de $Ker(\chi_n)$ dans $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1'$ sont les mêmes que celles de G.*

2. *Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique et que $(\overline{\Delta}, \alpha_0) = (C_{2n}, \alpha_{2n})$ et $(\Delta, \lambda_0) = (C_n, \alpha_n)$, G a trois orbites dans $\mathfrak{g}_1'$ lorsque $n = 1$ et pour $n \geq 2$ il y a quatre orbites en bijection avec $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$.*

   Les orbites de P_0 dans $\mathfrak{g}"_1$ (resp.$\mathfrak{g}"_{-1}$) sont données par O_u (resp.O_u^*) avec u décrivant $(F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1} - \{0\})/\mathbb{F}^{*2})^n$.

Démonstration: 1) Lorsque $\mathfrak{g}$ est de rang 1, on montre que $Ker(\chi_1)$ agit transitivement sur $\{x \in \mathfrak{g}_1 | F_1(x) = u\}$, $u \in \mathbb{F}^*$ étant représenté par F_1.

a) Lorsque F_1 est une forme quadratique (donc anisotrope), on sait que $SO(P)$ agit transitivement sur $\{x \in \mathfrak{g}_1 / P(x) = t\}$. Soit U le sous-groupe algébrique connexe de $Aut(\mathfrak{g})$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'_0 = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, alors $U \subset (Ker\chi_1)^0$.
On considère l'application de restriction, notée f, de U dans $O(P)$, qui à g de U associe la restriction de g à $\mathfrak{g}_1$. f étant continue , $f(U)$ est un sous-groupe connexe de $O(P)$ donc un sous-groupe de $SO(P)$, comme le noyau de f est réduit à l'identité , on a :

$$dim\ \mathfrak{L}(U) = dim\ \mathfrak{L}(f(U)) = dim\ \mathfrak{g}'_0$$

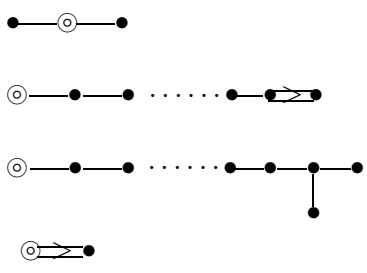
Il suffit donc de vérifier que

$$(1) \qquad dim\ \mathfrak{g}'_0 = dim\ (\mathfrak{L}(SO(P)))$$

pour avoir $\overline{f(U)} = \overline{SO(P)}$, ainsi tout élément de $SO(P)$ se prolonge en un élément de $Aut_0(\overline{\mathfrak{g}})$ normalisant $\mathfrak{g}_1$, donc par dualité , il normalise également $\mathfrak{g}_{-1}$, et par engendrement également $\mathfrak{g}$. Ainsi tout élément de $SO(P)$ se prolonge en un élément de $Ker(\chi_1)$.
Notons que lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, U est un groupe compact donc $f(U)$ également ainsi $f(U)$ est un sous-groupe analytique compact de $SO(P)$, donc $f(U)$ est un sous-groupe algébrique de $SO(P)$ ayant la même algèbre de Lie donc $f(U) = SO(P)$.
Or

$$\dim\ (\mathfrak{L}(SO(P))) = \frac{\dim(\mathfrak{g}_1)(\dim(\mathfrak{g}_1) - 1)}{2}$$

La vérification de (1) est immédiate à l'aide des tables de [Wa], [Ve] et du tableau 1, en effet les diagrammes de Satake correspondants aux cas absolument irréductibles, commutatifs, de $\mathbb{F}$-rang un, très réguliers, ayant un invariant relatif fondamental de degré deux, sont les suivants :



$\dim\ \mathfrak{g}'_0 = 6$, $\dim\ \mathfrak{g}_1 = 4$,

$\dim\ (\mathfrak{g}'_0) = (n-1)(2n-1)$, $\dim(\mathfrak{g}_1) = 2n-1$,

$\dim\ (\mathfrak{g}'_0) = (n-1)(2n-3)$, $\dim(\mathfrak{g}_1) = 2(n-1)$,

$\dim\ (\mathfrak{g}'_0) = \dim\ (\mathfrak{g}_1) = 3$.

b) Lorsque F_1 n'est pas une forme quadratique , $\mathfrak{g}$ est isomorphe à $sl_2(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ étant une algèbre à division et $\mathbb{F}$ est un corps p-adique.

Donnons une brève description de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ lorsque $\mathfrak{g}$ s'identifie à $sl_{2n}(\mathbb{D})$. Ce cas est le même que $sl_{2n}(\mathbb{F})$. On a

$$H_0 = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_1 = \{\begin{pmatrix} 0_n & A_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_n \in M_{n\times n}(\mathbb{D})\} \quad \mathfrak{g}_{-1} = \{\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ B_n & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B_n \in M_{n\times n}(\mathbb{D})\}$$

$\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - h_{\lambda_{n-i+1}})$ est l'ensemble des matrices ayant tous ses éléments nuls sauf ceux dont les indices des lignes et des colonnes appartiennent à l'ensemble $\{n-i+1, n+i\}$. E est l'ensemble des matrices ayant tous ses éléments nuls sauf celui situé sur la $n-1$ ligne et n colonne ou bien celui situé sur la $n+1$ ligne et $n+2$ colonne.

Dans le cas $n=1$, $\mathfrak{g}_1$ s'identifie à $\mathbb{D}$, l'invariant est alors donné par la norme de $\mathbb{D}$, notée N, G s'identifie à $\mathbb{D}^* \times \mathbb{D}^*$ opérant par $x \to axb^{-1}$. U contient $\{x \in \mathbb{D} \ / \ N(x) = 1\}$ qui opère transitivement sur l'ensemble $\{x \in \mathbb{D} \ / \ N(x) = t\}, t \in \mathbb{F}^*$. Notons qu'ici G a deux orbites dans $\mathfrak{g}_1$. $\square$ du rang 1.

2) Évident dans le cas réel puisque $\chi_i(G_{\mathfrak{t}_0}) = \mathbb{R}^{*+}$ et $F_i(x) \geq 0$ pour $i = 1, ..., n$, de plus $G_{\mathfrak{t}_0}$ (resp. $\mathrm{Ker}(\chi_n)$) opère transitivement sur $\oplus_{1 \leq i \leq j} \mathfrak{g}^{\lambda_i} - 0$ (resp. lorsque$j < n$) par 1) et toute $G-$ orbite non réduite à $\{0\}$ rencontre $\oplus_{1 \leq i \leq j} \mathfrak{g}^{\lambda_i} - 0$.

3) Pour le cas $sl_{2n}(\mathbb{D})$, $\mathbb{D}$ étant une algèbre à division.

Vérifions que l'hypothèse du lemme 6.1.6 est vérifiée et pour ceci on peut supposer $n = 2$. On a :

$$E = \{A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{D}\}$$

et pour $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $ad(A)^2(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2axb & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi cette application est surjective sur $\mathfrak{g}^{\lambda_2}$ lorsque x est non nul. On peut appliquer au préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ le 1) du lemme 6.1.6.

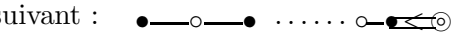
Comme on peut toujours plonger $sl_{2n}(\mathbb{D})$ dans $sl_{2n+2}(\mathbb{D})$ de la manière suivante :

$$A \to \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ . & A & . \\ 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut appliquer au préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ le 2) du lemme 6.1.6.
Notons que dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, $\chi_i(G) = \mathbb{F}^*$ pour $i = 1, ..., n$ car la norme est surjective sur $\mathbb{F}$.

4) Le cas (C_{2n}, α_{2n}) non déployé
La démonstration se trouve dans le §6.1.3.

6.1.3 Le cas $(\mathbf{C_{2n}}, \alpha_{\mathbf{2n}})$ de type III

Le cas traité correspond au diagramme de Satake suivant : 

Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps local non archimédien, on suppose **la caractéristique résiduelle différente de** 2.

- **La description du cas** (C_l, α_l) **déployé**

$\mathfrak{g}$ s'identifie à l'ensemble des matrices de la forme : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A, B, C, D sont des matrices carrées d'ordre l telles que $D = -{}^tA, B$ et C sont symétriques.(cf.N.Jacobson,Lie Algebras,Interscience,1962)

La forme de Killing est donnée par la relation suivante :$B(U,V) = (2l+2)\text{trace}(U.V)$
$2H_0$ est alors donné par : $2H_0 = \begin{pmatrix} I_l & 0_l \\ 0_l & -I_l \end{pmatrix}$, O_l étant la matrice carrée d'ordre l dont tous les coefficients sont nuls et I_l la matrice carrée d'ordre l dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la première diagonale qui sont égaux à 1
Un calcul facile donne :

$$\mathfrak{g}_1 = \{\begin{pmatrix} 0_l & U \\ 0_l & 0_l \end{pmatrix} \quad U = {}^t U \in \mathfrak{M}_{l,l}\} \quad \mathfrak{g}_{-1} = \{\begin{pmatrix} 0_l & 0_l \\ U_l & 0_l \end{pmatrix} \quad U = {}^t U \in \mathfrak{M}_{l,l}\}$$

On identifie ainsi $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ à l'espace des matrices symétriques ayant l lignes.
L'action de $Aut(\mathfrak{g})_{H_0} = Aut_0(\mathfrak{g})_{H_0}$ ([Bou 2], chapitre 8, n°3, corollaire 2) (resp.G_e) s'identifie à l'action de l'ensemble des matrices :

$$\{g = \begin{pmatrix} A & 0_l \\ 0_l & \mu {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{F}^* \quad A \quad \text{inversible}\} \quad (\text{resp : } \mu = 1 \text{ et } det(A) = 1)$$

agissant par la conjugaison usuelle , ce qui donne avec les notations ci-dessus :

$$g(U) = \mu^{-1} AU({}^tA)$$

on a ainsi, modulo l'action du centre, l'action usuelle de $Gl_l(\mathbb{F})$ sur les matrices symétriques.

$\mathfrak{a}$ peut être choisi comme l'ensemble des matrices diagonales de $\mathfrak{g}$, et P_0 correspond aux éléments g pour lesquels la matrice A est triangulaire supérieure.

Pour $X \in \mathfrak{M}_{l,l}, X_i$ désigne la matrice tronquée à i, lignes et i colonnes obtenues en conservant les lignes et les colonnes comprises entre $l-i+1$ et l.
Les invariants relatifs fondamentaux (non normalisés) et les caractères associés sont alors donnés par :

$$F_i(U) = det(U_i) \qquad \chi(g) = \mu^{-l}(det(A_i))^2.$$

- **La description du cas** (C_{2n}, α_{2n}) **de type III**

Soit $\mathbb{E}$ l'extension galoisienne sur laquelle $\mathfrak{g}$ se déploie , on a $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\sqrt{\epsilon})$, ϵ étant une unité qui n'est pas un carré ([Ve]).
On note par $\overline{x}$ la conjugaison de x dans $\mathbb{E}$ et $(.,.)$ le symbole de Hilbert défini sur $\mathbb{F}^* \times \mathbb{F}^*$.

Si on identifie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$ à l'espace des matrices donné précédemment, $\mathfrak{g}$ s'identifie alors à

$$\{X \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E} \ / \ T\overline{X}T^{-1} = X\} \quad \text{avec}$$

$$T = \begin{pmatrix} J & 0_l \\ 0_l & {}^tJ \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} I_\beta & 0 & 0 \\ 0 & I_\beta & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ...0 & I_\beta \end{pmatrix} \quad , \quad I_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (\beta, \epsilon) = -1.$$

On peut remarquer que $J^2 = \beta Id$.

En particulier $\mathfrak{g}_1$ (resp.$\mathfrak{g}_{-1}$) s'identifie à l'espace des matrices symétriques de $\mathfrak{M}_{2n,2n}(\mathbb{E})$ vérifiant la relation

$$J\overline{U} = U({}^tJ) \quad (\text{resp. } ({}^tJ)\overline{U} = UJ \ )$$

On note avec un $\mathbb{E}$ en indice, tous les groupes précédents provenants de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$.

Comme $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ engendrent $\mathfrak{g}$, on a

$$G_{\mathbb{E}} \cap Aut(\mathfrak{g}) = \{g \in G_{\mathbb{E}} \ / g(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_1\}$$

et son action s'identifie à l'action des matrices

$$\{g = \begin{pmatrix} A & 0_l \\ 0_l & \mu {}^tA^{-1} \end{pmatrix} \text{ avec} \quad \mu \in \mathbb{F}^* \ , \ J\overline{A} = \pm AJ \quad A \text{ inversible}\}$$

agissant sur $\mathfrak{g}_1$ (resp.$\mathfrak{g}_{-1}$) après identification matricielle par :

$$g(U) = \mu^{-1} AU({}^tA) \quad (\text{resp. } g(U) = \mu {}^tA^{-1} U A^{-1} \ ).$$

Notons que

$$\widetilde{G_{2n}(\mathbb{E})} = \{A \in G_{2n}(\mathbb{E}) \quad J\overline{A} = \pm AJ\} = G_1 \cup \sqrt{\epsilon} G_1 \quad avec \quad G_1 = \{A \in G_{2n}(\mathbb{E}) \quad J\overline{A} = AJ\}.$$

Donnons la description de chaque $h_{\lambda_{n-i+1}}, 1 \leq i \leq n$, ils sont représentés par les matrices

$$h_{\lambda_{n-i+1}} = (h^{(i)}_{k,l})$$

avec

$$h^{(i)}_{k,l} = 0 \quad \text{si} \quad k \neq l \quad \text{ou} \quad \text{si} \quad k = l \notin \{2i-1, 2i, 2(n+i)-1, 2(n+i)\}$$

$$h^{(i)}_{2i-1,2i-1} = h^{(i)}_{2i,2i} = 1 = -h^{(i)}_{2(n+i)-1,2(n+i)-1} = -h^{(i)}_{2(n+i),2(n+i)}.$$

La sous-algèbre $\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - h_{\lambda_{n-i+1}})$ correspond aux matrices $U^{(i)}$ de $\mathfrak{g}$ dont tous les éléments $u_{k,l}$ sont nuls , sauf ceux tels que k et l appartiennent à l'ensemble $\{2i-1, 2i, 2(n+i) - 1, 2(n+i)\}$. Les sous-espaces $\mathfrak{g}^{\lambda_{n-i+1}}$ (resp.$\mathfrak{g}^{-\lambda_{n-i+1}}$) correspondants sont les matrices $U^{(i)}$ de $\mathfrak{g}_1$ dont tous les éléments $u_{k,l}$ sont nuls , sauf ceux tels que k et l appartiennent à l'ensemble $\{2i-1, 2i\}$ (resp. $\{2(n+i)-1, 2(n+i)\}$). En particulier, l'écriture sous forme de matrices $(2,2)$ donne

$$\text{pour} \quad \mathfrak{g}^{\lambda_i} \quad : \quad \mathbb{D} = \{X_{a,b} = \begin{pmatrix} \beta\overline{a} & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{E} \quad b \in \mathbb{F}\}$$

$$\text{pour} \quad \mathfrak{g}^{-\lambda_i} \quad : \quad \mathbb{D}' = \{Y_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & \beta\overline{a} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{E} \quad b \in \mathbb{F}\}$$

On a :

$$det(X_{a,b}) = \overline{a}a\beta - b^2 = (x^2 - \epsilon y^2)\beta - b^2 \qquad a = x + \sqrt{\epsilon}y,\ x, y \in \mathbb{F}$$

ce qui donne lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ($\epsilon = \beta = -1$) : $det(X_{a,b}) = -(x^2 + y^2 + b^2)$.

La normalisation des invariants relatifs fondamentaux dépend du choix du sl_2-triplet de base : $(X_{\lambda_1}, h_{\lambda_1}, X_{-\lambda_1})$. Dans cet exemple on convient de prendre :

$$X_{\lambda_1} \ \text{correspond à} \ X_{0,1} \ \text{alors} \ X_{-\lambda_1} \ \text{correspond à} \ Y_{0,-1}$$

ainsi à l'identification matricielle près :

$$F_{\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - h_{\lambda_1}))}(X_{a,b}) = -det(X_{a,b}) \quad \text{et} \quad F^*_{\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0 - h_{\lambda_1}))}(Y_{a,b}) = -det(Y_{a,b})$$

c'est à dire que l'un des coefficients de la forme quadratique anisotrope à 3 variables et réduite sous forme de carrés, est un carré alors $\epsilon = -\text{discriminant}(F_1)$.

$G_{\mathfrak{t}_0}$ correspond aux matrices dont les éléments A sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ...0 & A_n \end{pmatrix}$,

(resp. P_0 correspond aux matrices dont les éléments A sont de la forme : $A = \begin{pmatrix} A_1 & * & * \\ 0 & A_2 & * \\ ... & ... & ... \\ 0 & ...0 & A_n \end{pmatrix}$)

les matrices A_i,$i = 1, ..., n$, ayant 2 lignes et 2 colonnes.

Tout élément de $\widetilde{G}_2 \cap G_1$ s'étend en un élément de $G_{\mathfrak{t}_0} \cap G_1$ centralisant $\oplus_{1 \le j \le n, j \ne i} \mathfrak{g}^{\lambda_j}$ puisque toute matrice inversible à 2 lignes et 2 colonnes vérifiant l'égalité $I_\beta \overline{A} = A I_\beta$ s'étend en un élément $\tilde{A}$ par :

$$A \to \tilde{A} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & A & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & I_2 \end{pmatrix}.$$

Description complète du cas $(\mathbf{C_4}, \alpha_{\mathbf{4}})$:

$$\mathfrak{g} = \{ \begin{pmatrix} A_1 & A_3 & B_1 & B_3 \\ A_4 & A_2 & {}^tB_3 & B_2 \\ C_1 & C_3 & -{}^tA_1 & -{}^tA_4 \\ {}^tC_3 & C_2 & -{}^tA_3 & -{}^tA_2 \end{pmatrix}, \quad A_i, B_i, C_i, B, C \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{E}) \quad \text{avec :}$$

$$B_1\ ,\ B_2\ ,\ C_1\ ,\ C_2 \ \text{symétriques et :}$$

$$1 \le i \le 4 : \ I_\beta \overline{A_i} = A_i I_\beta\ ,\ 1 \le j \le 3 : \ I_\beta \overline{B_j} = B_j({}^tI_\beta) \text{ et } ({}^tI_\beta)\overline{C_j} = C_j I_\beta \ \}$$

$\mathfrak{g}^{\lambda_1}$ (resp.$\mathfrak{g}^{-\lambda_1}$) correspond au sous-ensemble précédent dont tous les éléments sont nuls sauf peut-être B_2 (resp. C_2). $\mathfrak{U}(\mathbb{F}(h_1)$ (resp. $\mathfrak{U}(\mathbb{F}(h_2)$) correspond au sous-ensemble précédent dont tous les éléments sont nuls sauf peut-être ceux qui portent un indice 1 (resp. 2). $E = E^{1,2}_{-1,1}$ correspond à l'ensemble des matrices représenté par A_3.
L'action de E sur $\mathfrak{g}^{\lambda_1}$ définie par $\frac{1}{2}ad(\ )^2$ est représentée matriciellement par $B_1 := A_3B_2({}^tA_3)$ lorsque l'élément de E est représenté par A_3, celui de $\mathfrak{g}^{\lambda_1}$ par B_2 et celui de $\mathfrak{g}^{\lambda_2}$ par B_1.

Pour $x \in \mathfrak{g}^{\lambda_1}$, $y \in \mathfrak{g}^{-\lambda_2}$, la forme quadratique $f_{x,y}$ est donnée dans la description des matrices ci-dessus par :

$$X \in \mathbb{D} \quad Y \in \mathbb{D}' \quad A \in \mathbb{H} \qquad f_{X,Y}(A) = cste.\mathrm{Trace}(AX({}^tA)Y)$$

$$\text{avec} \quad \mathbb{H} = \{\begin{pmatrix} a & \beta\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{E}\} = G_1 \cup \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

• On rappelle que les orbites du cas de rang 1, (C_2, α_2), sont en bijection avec $F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1} - 0)/\mathbb{F}^{*2}$.

Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique, les représentants de $F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1} - 0)/\mathbb{F}^{*2}$ contiennent $\{1, \beta, \epsilon\beta\}$, il y a égalité lorsque la caractéristique résiduelle est différente de 2 et $X_{0,1}$, $X_{1,0}$, $X_{\alpha,0}$ (resp.$Y_{0,1}$, $Y_{1,0}$, $Y_{\alpha,0}$), avec $\alpha\overline{\alpha} = \epsilon$, sont des représentants des orbites non réduites à 0 dans $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{D}'$). De plus, comme le produit de deux éléments de $F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1} - 0)/\mathbb{F}^{*2}$ décrit $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, F_i décrit $\mathbb{F}^*$ pour $i \geq 2$.

Lorsque deux matrices X et X' de $\mathbb{D}$ vérifient l'égalité $\det(X) \equiv \det(X')$ (modulo $\mathbb{F}^{*2}$), il existe A dans $\widetilde{G_2(\mathbb{E})} \cap G_1$ tel que $gX({}^tg) = X'$ puisque X et ϵX sont dans la même G_1-orbite et que X et X' sont dans la même $\widetilde{G_2(\mathbb{E})}$ (cf. le cas de rang 1).

Soit $x \in O_u$ supposé non vide, alors il existe $g \in N_0$ et $x_i \in \mathfrak{g}^{\lambda_i}, i = 1, ..., n$, tels que $x = g(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i)$ et $G_i(x_i) \equiv u_i \ (\mathrm{mod}(\mathbb{F}^{*2}))$ pour $i = 1, ..., n$, donc chaque $u_i \in G_i(\mathfrak{g}^{\lambda_i})^*/\mathbb{F}^{*2} = F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^*/\mathbb{F}^{*2}$ (toutes les formes quadratiques G_i sont équivalentes à F_1 par construction) d'où O_u est une seule P_0-orbite par le résultat de rang 1 rappelé ci-dessus et parce que chaque $\chi_i(P_0) = \mathbb{F}^{*2}$.

• **Fin de la démonstration du 2. de la proposition 6.1.7**

Elle se fait par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant rappelé ci-dessus.Les orbites de G et de G_1 sont donc les mêmes. On peut toujours supposer que x et x' appartiennent à $\oplus_{1 \leq i \leq n}(\mathfrak{g}^{\lambda_i} - 0)$ et on note X_i (resp.X'_i) les différentes composantes. On a :

$$(-1)^n F_n(x) = \prod_{1 \leq i \leq n} det(X_i) \equiv (-1)^n F_n(x') = \prod_{1 \leq i \leq n} det(X'_i) \quad (\mathbb{F}^{*2})$$

Notons $\{\epsilon_i \ , i = 1, 2, 3\} = Image(F_1)/\mathbb{F}^{*2}$ et soient n_i (resp. n'_i) le nombre de composantes X_k (resp. X'_k) de x (resp. de x') telles que $\det(X_k) \equiv -\epsilon_i \ (\mathbb{F}^{*2})$ (res. $\det(X'_k) \equiv -\epsilon_i \ (\mathbb{F}^{*2})$). Comme on a supposé que la caractéristique résiduelle est différente de 2, et que $n_1 + n_2 + n_3 = n'_1 + n'_2 + n'_3 = n$, on obtient pour tout i : $n_i \equiv n'_i$ (modulo 2) , ainsi on a deux cas :

a) il existe i tel que $n_i \equiv n_i' \equiv 1$, il suffit alors d'appliquer le résultat du cas $n-1$, car on peut toujours supposer que $X_1 = X_1'$ (cf. 1)prop.6.1.1).

b) Pour tout i, on a $n_i \equiv n_i' \equiv 0$. Il reste alors à montrer que deux éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} X & 0_2 \\ 0_2 & X \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} Y & 0_2 \\ 0_2 & Y \end{pmatrix}$$

sont dans la même orbite lorsque $\det(X)\det(Y)$ n'est pas un carré, ce qui termine la démonstration du cas $n=2$. Il suffit ensuite d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour le cas $n-2$.

Démonstration du cas $n=2$:

i) Considérons le polynome du second degré, à coefficient dans $\mathbb{F}$, défini par

$$l(u,v) = \det(uX - Y) - v^2 \det(X) \quad u, v \in \mathbb{F}$$

On peut l'écrire

$$\begin{aligned} l(u,v) &= \det(X)(u^2 - v^2) + 2u\det(X)C(X,Y) + \det(Y) \\ &= \det(X)(u + C(X,Y))^2 - v^2\det(X) + \det(Y) - \det(X)C(X,Y)^2 \end{aligned}$$

Comme la forme quadratique $u^2 - v^2$ est isotrope , elle représente $\mathbb{F}$ d'où il existe un couple (u,v) tel que $l(u,v) = 0$.
Soit (u,v) tel que $\det(uX - Y) = v^2\det(X)$, nécessairement $uv \neq 0$ car X et Y ne sont pas dans la même orbite ainsi il existe un élément B de $\widetilde{GL_2(\mathbb{E})} \cap G_1$ tel que

$$Y = uX + B(uX)({}^tB).$$

ii) Soit A la matrice de $\mathfrak{M}_{4,4}(\mathbb{E})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} Id_2 & B \\ -X({}^tB)X^{-1} & Id_2 \end{pmatrix} \qquad \text{alors :}$$

$$A \begin{pmatrix} uX & 0_2 \\ 0_2 & uX \end{pmatrix} {}^tA = \begin{pmatrix} Y & 0_2 \\ 0_2 & Y' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad Y' \neq 0_2$$

donc $\det A \neq 0$ et $\det(Y) \equiv \det(Y')$ $(\mathbb{F}^{*2})$, on vérifie facilement que A est un élément de $\widetilde{G_4(\mathbb{E})} \cap G_1$. □

• Indiquons également les caractéristiques de $f_{x,y}$:

Lemme 6.1.9 *La classe d'équivalence de $f_{X,Y}, X \in \mathbb{D} - 0$, $Y \in \mathbb{D}' - 0$, ne dépend que de l'orbite de X dans $\mathbb{D}$ et de l'orbite de Y dans $\mathbb{D}'$ et $f_{X,Y}$ a pour discriminant un.*

Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $f \sim f_{X,Y}$ a pour signature (2,2).

Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique de caractéristique résiduelle différente de deux, l'invariant de Hasse de $f_{X,Y}$ vaut $-(\delta_1, \det(X).\det(Y)\ ).(-\det(X), -\det(Y)\ ) = \gamma(f_{X,Y})$, avec $\delta_1 = -disc(F_1)$.

Démonstration: Il suffit de faire la démonstration pour la forme quadratique

$$f_{X,Y}(A) = c\text{Trace}(AX({}^tA)Y) \quad c \neq 0 \quad A \in \mathbb{H}$$

Un calcul immédiat donne $f_{BX{}^tB,{}^tCYC}(A) = f_{X,Y}(CAB)$ d'où la première assertion.
Le discriminant (noté "disc") de cette forme quadratique est un polynome en X et Y, relativement invariant donc à Y (resp. X) fixé, c'est un invariant relatif de $\mathfrak{g}^{\lambda_1}$ (resp. $\mathfrak{g}^{-\lambda_2}$) d'où

$$\text{disc}(f_{X,Y}) = cste.(\det(X))^p.(\det(Y))^q$$

Comme

$$\text{disc}(tf_{X,Y}) = \text{disc}(f_{tX,Y}) = \text{disc}(f_{X,tY}) = t^4\text{disc}(f_{X,Y})$$

on a $p = q = 2$ ainsi $f_{X,Y}$ a un discriminant constant qu'il reste à calculer.

Rappelons que par normalisation, la forme quadratique anisotrope F_1 est équivalente à $X^2 + aY^2 + bZ^2$ avec $\text{disc}(F_1) \equiv ab \equiv -\epsilon$.

Prenons $X = X_{0,1}$ et $Y = Y_{0,1}$, le calcul donne :

$$f_{X_{0,1},Y_{0,1}}(A) = 2cste(a\overline{a} + \beta b\overline{b}) \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} a & \beta\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$$

d'où le discriminant de $f_{X,Y}$ vaut 1.

1) Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $f \sim f_{X,Y}$ a pour signature $(2, 2)$.

2) Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique de caractéristique résiduelle différente de deux, on a $\gamma(f_{X,Y}) = h_{X,Y}$, $h_{X,Y}$ désignant l'invariant de Hasse de $f_{X,Y}$, il y a seulement deux classes d'équivalence de telles formes quadratiques selon qu'elle représente 0 (alors $h_{X,Y} = 1$) ou non (alors $h_{X,Y} = -1$) ([O'M]).
Soit $h'(X, Y) = -(\epsilon, \det(X)\det(Y)\ ).(-\det(X), -\det(Y)\ )$, on vérifie que $h_{X,Y} = h'(X, Y)$ dans chaque cas.

On a

$$h'(X_{d,0}, Y_{d,0}) = -(-\beta d\overline{d}, -\beta d\overline{d}) = -(-\beta d\overline{d}, -1) = -(\beta d\overline{d}, -1)$$

et $\quad f_{X_{d,0},Y_{d,0}}(A) = \beta d\overline{d}f_1(a) + f_1(\beta\overline{d}b) \quad avec\ f_1(a) = f_1(a_1 + \sqrt{\epsilon}a_2) = a^2 + \overline{a}^2 = 2(a_1^2 + \epsilon a_2^2)$

d'où $f_{X_{d,0},Y_{d,0}}$ représente 0 si et seulement si il existe a dans E^* tel que $-\beta d\overline{d}f_1(a)$ soit représenté par f_1 c'est à dire que

$$h_{X_{d,0},Y_{d,0}} = (-\beta d\overline{d}, -\epsilon) = -(\beta d\overline{d}, -1)$$

parce que la caractéristique résiduelle est différente de 2 (rappelons que dans ce cas $(-1, -1) = (\epsilon, -1) = 1$).
On a :

$$f_{X_{\alpha,0},Y_{1,0}}(A) = \beta f_2(\overline{a}) + f_2(\beta\overline{b}) \quad (\text{resp. } f_{X_{1,0},Y_{\alpha,0}}(A) = \beta f_2(a) + f_2(\beta\overline{b})\ )$$

avec $f_2(a) = \alpha a^2 + \overline{\alpha a}^2$. Après réduction de f_2, le calcul direct donne $h_{X_{\alpha,0},Y_{1,0}} = h_{X_{1,0},Y_{\alpha,0}} = (\beta, -1) = h'(X_{\alpha,0}, Y_{1,0})$ et

$$f_{X_{d,0},Y_{0,1}}(A) = 2\beta(d\overline{ab} + \overline{d}ab) \quad (\text{resp. } f_{X_{0,1},Y_{d,1}}(A) = 2\beta(ad\overline{b} + \overline{a}db)\ )$$

s'annule pour $a = d = 1$ et $b = \sqrt{\epsilon}$ donc $h_{X_{d,0},Y_{0,1}} = h_{X_{0,1},Y_{d,0}} = 1 = h'(X_{d,0}, Y_{0,1})$. □

Remarque : La constante $\gamma_{I(k),J(r)}$ donnée dans le ii) p.498 de la note aux CRAS Paris (I.Muller- Décomposition orbitale des espaces préhomogènes réguliers de type parabolique commutatif et application, t.303, Série I, n°11, 1986, p.495-498) est erronée puisqu'elle est donnée par $\gamma(f_{X,Y})$ donc dans les notations de cette note on a $\gamma_{I(k),J(r)} = -(-D, a_{I(k)}a_{J(r)})(a_{I(k)}, a_{J(r)})$.

6.1.4 Calcul de γ_k

Pour x dans $\mathfrak{g}^{\lambda_1} - \{0\}$, y dans $\mathfrak{g}^{-\lambda_2} - \{0\}$, on considère la forme quadratique définie sur E par

$$f_{x,y}(A) = \frac{1}{2}\tilde{B}(ad(A)^2(x), y),$$

et pour $u, v \in F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1} - \{0\})$, soit $\tilde{\gamma}(u, v) := \gamma(f_{x,y})$, avec $F_1(x) = u$ et $G_2^*(y) = v$, ce qui est bien défini puisque $G_{\mathfrak{t}_0}$ opère transitivement sur $\{x \in W_{\mathfrak{t}_0} | F_i(x) \equiv u_1...u_i \ (\mathbb{F}^{*2}) \ , i = 1, ..., n\}, (u_1, ..., u_n) \in \mathbb{F}^{*n}$ (cf.démonstration de la prop.6.1.7).

Lemme 6.1.10 *1. Pour le type I avec $d \equiv 0$ mod(4), ou bien le type II avec $e = 0$, ou bien le type III on a $\delta = 1$.*

2. Dans le cas réel on a :

$$\gamma(f) := \begin{cases} 1 \text{ pour le type III et le type II avec } e = 0, \\ (-1)^{\frac{d}{4}} \text{ pour le type I avec } d \equiv 0 \ mod(4). \end{cases}$$

et dans le cas $\mathfrak{p}-$adique, $\gamma(f) = -1$ pour le type III (C_n) et pour le type I avec $d = 4$.

3.

$$\tilde{\gamma}(u, v) = \begin{cases} \gamma(f) \text{ pour le type III réel et le type III } (A_n), \\ -(\delta_1, uv)(u, v) \text{ pour le type III } (C_n) \ \mathfrak{p} - \text{adique.} \end{cases}$$

Pour les types I et II :

$$\tilde{\gamma}(u, v) = \gamma(uvf) = \gamma(uvf_0) = \overline{\gamma(uvF_2)} = \begin{cases} 1 \text{ pour le type II avec } e = 0, \\ (\delta, uv)\gamma(f) \text{ pour le type I avec } d \text{ pair.} \end{cases}$$

4. Soient $k, 1 \leq k \leq n-1$, $x = x_2 + x_0 \in O_{(u_1,...,u_n)}$ avec $x_i \in E_i(h_k) \cap \mathfrak{g}_1$ alors

$$\gamma_k(x_2, x_0) = \begin{cases} \gamma(f)^{k(n-k)} \text{ pour le type II avec } e = 0, \text{le type III réel et le type III } (A_n), \\ \gamma(u_1u_2f_0) \text{ pour le type II avec } e > 0, \\ \prod_{1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n} \gamma(u_iu_jf) \text{ pour le type I,} \\ (\delta, F_k(x_2))^n)(\delta, F_k(x_2)F_{n-k}^*(x_0^{-1}))^k\gamma(f)^{k(n-k)} \text{ pour le type I avec } d \text{ pair,} \\ (-1)^{k(n-k)}(\delta_1, F_k(x_2)^{n-k}F_{n-k}^*(x_0^{-1})^k)(F_k(x_2), F_{n-k}^*(x_0^{-1})) \\ \text{pour le type III } (C_n) \ \mathfrak{p} - \text{adique.} \end{cases}.$$

Démonstration: 1) Pour le type III (C_n) on applique le lemme 6.1.9.

2) Lorsque $tf_{x,y} \sim f_{x,y}\ \forall t \in \mathbb{F}^*$, on a d pair et $\gamma(tf_{x,y}) = \gamma(f_{x,y}) = ((-1)^{\frac{d}{2}}\mathrm{disc}(f_{x,y}), t)\gamma(f_{x,y})$ $\forall t \in \mathbb{F}^*$, donc $(-1)^{\frac{d}{2}}\mathrm{disc}(f_{x,y}) \equiv 1 \equiv \delta\ (\mathrm{mod}(\mathbb{F}^{*2}))$.

Cette situation se produit :

• Dans le type III (A_n) ou bien le type III réel (cf.démonstration 2)3) de la prop.6.1.8 et le lemme 6.1.9), de plus $f_{x,y} \sim f$.

• Dans le type II avec $e = 0$ (i)3) du lemme 6.1.3) alors $\gamma(f) = 1$ (cf.remarque 6.1.6) et $f_{x,y} \sim f$.

• Dans le cas $\mathfrak{p}-$adique de type I avec $d \equiv 0\ (\mathrm{mod}(4))$ car alors $d = 4$ donc f représente $\mathbb{F}^*$ et $tf \sim f\ \forall t \in \mathbb{F}^*$ (3) du lemme 6.1.3) d'où $\gamma(f) = -1$ [O'M].

3) Les autres résultats proviennent de la dualité pour la forme de Killing. □

6.2 Equations fonctionnelles

On applique la proposition 5.3.1 dont les hypothèses sont vérifiées par le lemme 6.1.10 puisque $\mathfrak{g}_1$ est commutative.

6.2.1 Le cas transitif

Théorème 6.2.1 *Pour les types :*

i) I avec $d = 4$ dans le cas $\mathfrak{P}-$adique,

ii) II avec $e = 0$,

iii) III réel,

iv) III (A_n) $\mathfrak{p}-$adique

1) Alors P_0 (resp.G) a une seule orbite dans $\mathfrak{g}"_1$ et $\mathfrak{g}"_{-1}$ (resp.$\mathfrak{g}'_1$ et $\mathfrak{g}'_{-1}$) et

$$\chi_1(P_0) = ... = \chi_n(P_0) = F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^* = \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} \text{ pour le type III réel,} \\ \mathbb{F}^* \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

2) $\forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n) \in (\widehat{\mathbb{F}^*})^n$ on a :

$$Z^*(\mathcal{F}(f); \pi) = a(\pi)Z(f; \pi^*|\ |^{-N1_n}) \quad avec \quad a(\pi) = \gamma(f)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq j \leq n} a^{(1)}(\pi_j ... \pi_n|\ |^{\frac{d}{2d_1}(n-j)+1})$$

$$et \quad a^{(1)}(\pi_1) = \begin{cases} \rho'(\pi_1) \text{ pour i) et ii)}, \\ -2(2\pi)^{-2s-\frac{d}{8}-2}\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{d}{8}+1)\sin\pi s \text{ pour le type III réel avec } \pi_1 = |\ |^s, \\ (-1)^{d_1-1}\prod_{0\leq j\leq d_1-1}\rho'(\pi_1|\ |^j) \text{ pour le type III } (A_n)\ \mathfrak{p}-\text{adique.} \end{cases}$$

Démonstration: 1) C'est la proposition 6.1.8 dans les cas III réel, alors $F_i(\mathfrak{g}_1) \geq 0$ pour $i = 1, ..., n$, et III (A_n) $\mathfrak{p}-$adique pour lequel $F_i(\mathfrak{g}_1) = \mathbb{F}$ pour $i = 1, ..., n$, puisque la norme d'une algèbre à division est surjective sur $\mathbb{F}$.

Dans les autres cas, les préhomogène sont presque déployés et on a $f(E)^* = \mathbb{F}^* = \chi_i(G_{\mathfrak{t}_0})$ pour $i = 1, ..., n$.
En effet, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ apparait dans le tableau 3 de [Mu 3], à l'exception du cas où $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (D_n, α_1) avec $\mathfrak{g}$ déployée (type II avec $e = 0$ et $n = 2$).
Lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (D_n, α_1) avec $\mathfrak{g}$ déployée, soit $t \in \mathbb{F}^*$ et ϕ l'homomorphisme de Δ dans $\mathbb{F}^*$ défini par $\phi(\alpha_1) = \phi(\alpha_n)^{-1} = t$, $\phi(\alpha_i) = 1$ pour $2 \leq i \leq n-1$, il se prolonge en l'élément $g_\phi \in G_{\mathfrak{t}_0}$ défini par $g_\phi/\mathfrak{g}^\mu = \phi(\mu)Id/\mathfrak{g}^\mu$.
Dans les autres cas il existe un préhomogène commutatif : $(\widetilde{\mathfrak{g}_0}, \widetilde{\mathfrak{g}_1}, \widetilde{H_0}, \widetilde{\mathfrak{t}_0} = \oplus_{1\leq i\leq n+1}\mathbb{F}h_{\widetilde{\lambda_i}})$, tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{U}(\mathbb{F}h_{\widetilde{\lambda}_{n+1}})$ et $\widetilde{H_0} = H_0 + \dfrac{h_{\widetilde{\lambda}_{n+1}}}{2}$ (cf.prop 4.2.1 de [Mu 3]) et on applique le 2.du lemme 6.1.7 ainsi que le lemme 6.1.3,iv.

2) Par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant connu puisqu'il est soit donné par l'équation fonctionnelle de Tate dans les cas I et II (avec $\widetilde{B}(X_{\lambda_1}, X_{-\lambda_1}) = 1$), dans le cas III réel c'est l'équation fonctionnelle vérifiée par une forme quadratique définie positive (avec $\widetilde{B}(\dfrac{h_{\lambda_1}}{2}, \dfrac{h_{\lambda_1}}{2}) = -1$) et dans le cas III (A_n) $\mathfrak{p}-$adique, elle est dùe à Jaquet-Godement [Go-Ja] ; on applique ensuite la proposition 5.3.1 avec $\mathbb{H} = \mathbb{F}^*$ et $\gamma_k = \gamma(f)^{k(n-k)}$ (lemme 6.1.10). □

Remarque : $\gamma(f) = \pm 1$, $\gamma(f) = \begin{cases} -1 \text{ dans le cas i,} \\ 1 \text{ dans les cas ii) et iii)} \end{cases}$ (démonstration du lemme 6.1.10), on n'a pas cherché sa valeur dans le cas iv).

6.2.2 Le cas non transitif

Pour $u = (u_1, ..., u_n) \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n$ on note :

$$p(u)_j := \begin{cases} 1 \text{ pour } j = 0 \\ u_1...u_j \text{ pour } j = 1, ..., n \end{cases} \quad , \quad p(u) := p(u)_n \text{ et } h(u) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(u_i, u_j).$$

Théorème 6.2.2 *Pour les types :*

i) I réel et I $\mathfrak{p}-$adique avec $d \leq 3$ (alors $d_1 = 1$),

ii) II avec $e>0$ (alors $d_1=1$ et $n=2$),

iii) III (C_{2n},α_{2n}) $\mathfrak{p}-$adique de caractéristique résiduelle différente de 2 (alors $d=2d_1=4$),

On a $\forall f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $\pi=(\pi_1,...,\pi_n)\in(\widehat{\mathbb{F}^*})^n$ ($\widetilde{\pi}=(\pi_1\pi_2^{-1},...,\pi_n)$) :

1. $(v_1,...,v_n)\in(F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^*/\mathbb{F}^{*2})^n$:

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\widetilde{\pi})=\sum_{u=(u_1,...,u_n)\in(F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^*/\mathbb{F}^{*2})^n}\widetilde{a}_{v,u}^{(n)}(\pi)\ Z_u(f;(\widetilde{\pi})^*|\ |^{-N1_n})\quad avec:$$

$$\widetilde{a}_{v,u}^{(n)}(\pi)\quad=\quad\Lambda_n(v,u)\prod_{1\leq i\leq n}C(\pi_{n-i+1}|\ |^{\frac{d}{2d_1}(i-1)+1};v_i,u_i)\ avec\ \Lambda_1(v,u)=1\ et\ pour\ n\geq 2$$

$$\Lambda_n(v,u)\quad=\quad\begin{cases}\prod_{1\leq i<j\leq n}\gamma(u_iv_jf)\ dans\ les\ cas\ i)\ et\ ii),\\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\ \gamma(F_1)^n\ \left(\prod_{1\leq i<j\leq n}(\delta_1,u_iv_j).(u_i,v_j)\ \right)\ dans\ le\ cas\ iii),\end{cases}$$

$$C(\pi;v,u)\quad=\quad\begin{cases}\pi(-1)\rho(\pi;-uv)\ dans\ les\ cas\ i)\ et\ ii),\\ A^1_{\pi,\pi|\ |^{\frac{1}{2}}}(v,u,\delta_1)\ dans\ le\ cas\ iii).\end{cases}$$

2. *Dans les cas i) et ii) avec d est pair :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f);\pi)=B(\pi)Z(f;(\pi_{n-1},...,\pi_1,\Big(\prod_{1\leq i\leq n}\pi_i\Big)^{-1}.\tilde{\omega}_\delta^{n-1}.|\ |^{-N})\quad avec:$$

$$B(\pi)=\gamma(f)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leq j\leq n}\rho'(\pi_{n-j+1}...\pi_n.\tilde{\omega}_\delta^{j-1}|\ |^{\frac{d}{2}(j-1)+1}).$$

3. *Dans les cas i) avec $d=1$, on a :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f);\widetilde{\pi})=C_n\prod_{1\leq i\leq n}\pi_i(-1)\sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n}\epsilon(u)\ .\widetilde{b}_u^{(n)}(\pi)\ Z_u(f;(\widetilde{\pi})^*|\ |^{-\frac{n+1}{2})1_n})\quad avec:$$

$$\widetilde{b}_u^{(n)}(\pi)=\rho(\pi_n|\ |)\prod_{1\leq j\leq[\frac{n-1}{2}]}\rho(\pi_{n-2j}|\ |^{j+1}\tilde{\omega}_{(-1)^jp(u)_{2j}})\prod_{1\leq j\leq[\frac{n}{2}]}h(\pi_{n-2j+1}|\ |^{j+\frac{1}{2}}\tilde{\omega}_{(-1)^jp(u)_{2j}})$$

et :

- *lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}-$ adique, soit $p_n=\begin{cases}1\ si\ n\ est\ pair\ ,\\ 0\ sinon\ ,\end{cases}$*

alors :

$$C_n=(-1,-1)^{[\frac{n}{2}]}\alpha(1)^{[\frac{n}{2}]+\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)^2}\ ,\ \epsilon(u)=(p(u),-1)^{[\frac{n}{2}]}h(u)^n\alpha(p(u))^{p_n}$$

- *lorsque $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, soit $q(u)$ le nombre de composantes négatives de u, alors :*

$$C_n=e^{-i\frac{\pi}{4}(\frac{(n-1)n}{2}+[\frac{n}{2}])}\ ,\ \epsilon(u)=i^{(n-1)q(u)}(-1)^{[\frac{q(u)}{2}]}.$$

4. Dans le cas iii) avec $\pi_i = \tilde{\omega}_{a_i}|\ |^{s_i}, i = 1, ..., n$ *on a :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f); \widetilde{\pi}) = D_n \sum_{u \in (F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^*/\mathbb{F}^{*2})^n} (\delta_1, p(u))^n \ .\alpha(p(u)) \ .\widetilde{c}_u^{(n)}(\pi)\ Z_u(f; (\widetilde{\pi})^*|\ |^{-(n+\frac{1}{2})1_n}) \quad \textit{avec :}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \gamma(F_1)^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ \widetilde{c}_u^{(n)}(\pi) &= \textstyle\prod_{1 \leq i \leq n} \rho(\pi_{n-i+1}|\ |^i \tilde{\omega}_{p(\delta_1 u)_{i-1}}) h(\pi_{n-i+1}|\ |^{i+\frac{1}{2}} \tilde{\omega}_{p(\delta_1 u)_i}) \ \textit{et} \\ p(\delta_1 u)_i &= \begin{cases} 1 \ \textit{si} \ \ i = 0 \\ {\delta_1}^i u_1 ... u_i \ \textit{si} \ \ i \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Dans les cas i) et ii) avec $n = 2$ *et* d *impair, les orbites de* P_0 *dans* $\mathfrak{g}"_1$ *(resp.*$\mathfrak{g}"_{-1}$*) sont en bijection avec* $\mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2$ *et données par :*

$$w \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2 \ : \ O'_w = \cup_{u \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2} O_{(u,wu)} \ (\textit{resp.}\ O^{*'}_w = \cup_{u \in \mathbb{F}^*/(\mathbb{F}^*)^2} O^*_{(u,wu)})$$

et $\forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ *et* $\pi = (\pi_1, \pi_2) \in \widehat{\mathbb{F}^*}^2$ *(*$\widetilde{\pi} = (\pi_1 \pi_2^{-1}, \pi_2)$*) :*

$$Z^*_{O^{*\prime}_v}(\mathcal{F}(f); \widetilde{\pi}) = \sum_{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})} \widetilde{a}'_{v,u}(\pi_1, \pi_2)\ Z_{O'_u}(f; (\widetilde{\pi})^*|\ |^{-N1_n}) \quad \textit{avec :}$$

$$\widetilde{a}'_{v,u}(\pi_1, \pi_2) = \alpha(-1)\gamma(F_2)(\pi_1.\pi_2)(-1)A^1_{\pi_2|\ |, \pi_1|\ |^{\frac{d}{2}+1}}(v, u, \delta_2)\ , \ \delta_2 = (-1)^{[\frac{d}{2}+1]} disc(F_2).$$

Démonstration: 1) On procède par récurrence sur n en appliquant la proposition 5.3.1 avec $\mathbb{H} = \mathbb{F}^{*2}$ et γ_k donné dans le lemme 6.1.10 ; le cas $n = 1$ est rappelé dans le corollaire 3.6.3 et le théorème 3.6.5.
2) Lorsque d est pair, le résultat provient du calcul de $\sum_{v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n} Z^*_v(\mathcal{F}(f); \pi)$ en appliquant 1) ainsi que la relation $\gamma(tf) = (\delta, t)\gamma(f)$.
3) On a pour $j \geq 2$:

$$\prod_{1 \leq i \leq j-1} \alpha(u_i v_j) = \gamma(v_j(\oplus_{1 \leq i \leq j-1} u_i X_i^2)) = (z_{j-1}, v_j)(\alpha(v_j)\alpha(-1))^{p_j} \gamma_{j-1}(u)$$

avec :

$$\gamma_j(u) = \gamma(\oplus_{1 \leq i \leq j} u_i X_i^2) = \prod_{1 \leq i \leq j} \alpha(u_i)\ , \ z_j = \begin{cases} 1 \text{ si } j = 0 \\ (-1)^{[\frac{j}{2}]} u_1 ... u_j \text{ pour } j = 1, ..., n\ , \end{cases} \quad ,$$

$$p_j = \begin{cases} 1 \text{ si } j \text{ est pair,} \\ 0 \text{ si } j \text{ est impair} \end{cases}$$

donc

$$\widetilde{a}^{(n)}_{v,u}(\pi) = \prod_{1 \leq j \leq n} \pi_j(-1) \prod_{1 \leq j \leq n-1} \gamma_j(u) \prod_{1 \leq j \leq n} C_j(u, v_j)$$

avec

$$C_j(u, v_j) = (z_{j-1}, v_j)(\alpha(v_j)\alpha(-1))^{p_j} \rho(\pi_{n-j+1}|\ |^{\frac{j+1}{2}}; -u_j v_j)$$

or

$$\sum_{v_j\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} C_j(u,v_j)=(z_{j-1},-u_j)(\alpha(-u_j)\alpha(-1)^2)^{p_j}.\begin{cases}\rho(\pi_{n-j+1}|\ |^{\frac{j+1}{2}}\tilde{\omega}_{z_{j-1}}) \text{ si } j \text{ est impair},\\ h(\pi_{n-j+1}|\ |^{\frac{j+1}{2}}\tilde{\omega}_{z_j}) \text{ si } j \text{ est pair},\end{cases}$$

(cf.3.6.2 et 3.6.4) d'où

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{v\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n}\widetilde{a}^{(n)}_{v,u}(\pi) &= \textstyle\prod_{1\le j\le n}\pi_j(-1)\prod_{1\le j\le n-1}\gamma_j(u)\prod_{1\le j\le n}(\sum_{v_j\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}C_j(u,v_j))\\ &= \textstyle\prod_{1\le j\le n}\pi_j(-1)\widetilde{b}^{(n)}_u(\pi)\prod_{2\le j\le n}\gamma_{j-1}(u)(z_{j-1},-u_j)(\alpha(-u_j)\alpha(-1)^2)^{p_j}\\ &= \textstyle\prod_{1\le j\le n}\pi_j(-1)\widetilde{b}^{(n)}_u(\pi)\prod_{2\le j\le n}\gamma(-u_j(\oplus_{1\le i\le j-1}u_iX_i^2)\alpha(-1)^{p_j}.\end{aligned}$$

Or :

$$\gamma(u_j(\oplus_{1\le i\le j-1}u_iX_i^2)=\prod_{1\le i\le j-1}\alpha(u_iu_j)=\alpha(-1)^{j-1}\alpha(u_j)^{j-1}(u_j,p(u)_{j-1})\prod_{1\le i\le j-1}\alpha(u_i),$$

donc

$$\sum_{v\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n}\widetilde{a}^{(n)}_{v,u}(\pi)=\widetilde{b}^{(n)}_u(\pi)\alpha(1)^{\frac{n(n-1)}{2}-[\frac{n}{2}]}h(u)\overline{\gamma_n(u)}^{n-1}\prod_{1\le j\le n}\pi_j(-1),$$

Il ne reste plus qu'à exprimer $\gamma_n(u)$ suivant le corps $\mathbb{F}$ (cf.3.6.2).

4) On a $F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^*=\mathbb{F}^*-\delta_1\mathbb{F}^{*2}$ et

$$\alpha(\delta_1)A^1_{\tilde{\omega}_a|\ |^s,\ \tilde{\omega}_a|\ |^{s+\frac{1}{2}}}(\delta_1,u,\delta_1)=(a,u\delta_1)A^1_{s,s+\frac{1}{2}}(1,u\delta_1,1)=0\ \text{ pour }\ u\delta_1\neq 1$$

(lemme 3.6.4,B)1 et 3) et 1) du lemme 3.6.8) donc on applique 1) en sommant sur $\{v\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n\}$ comme précédemment or :

$$\Lambda_n(v,u)=C(u)\prod_{1\le j\le n}(v_j,p(\delta_1u)_{j-1})\ ,\ \text{avec}\ \ C(u)=D_n.(\delta_1,\prod_{1\le i\le n}u_i^{n-i}),$$

donc

$$\sum_{v\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n}\widetilde{a}^{(n)}_{v,u}(\pi)=C(u)\prod_{1\le j\le n}C_j,$$

avec

$$\begin{aligned}C_j &= \textstyle\sum_{v\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(v,p(\delta_1u)_{j-1})A^1_{\pi_{n-j+1}|\ |^j,\pi_{n-j+1}|\ |^{j+\frac{1}{2}}}(v,u_j,\delta_1)\\ &= (u_j,\delta_1p(\delta_1u)_{j-1})\alpha(u_j)\rho(\pi_{n-j+1}|\ |^j\tilde{\omega}_{p(\delta_1u)_{j-1}})h(\pi_{n-j+1}|\ |^{j+\frac{1}{2}}\tilde{\omega}_{p(\delta_1u)_j})\end{aligned}$$

(B)5),lemme 3.6.4).
On termine en notant que :

$$\prod_{1\le i\le n}\alpha(u_i)=\gamma(\oplus_{1\le i\le n}u_iX_i^2)=\alpha(1)^{n-1}\alpha(p(u))h(u)\quad\text{[Ra-Sc].}$$

5) On a $\chi_2(P_0) = \mathbb{F}^{*2}$ (prop.3.2,ii)[Mu 3]) et $\chi_1(P_0) = \mathbb{F}^*$ d'où les P_0-orbites dans $\mathfrak{g}"_{\pm 1}$. Le reste découle des égalités suivantes : $\delta_2 = -\delta, \gamma(f) = \overline{\gamma(F_2)}$ (ii) du lemme 6.1.3) et

$$\widetilde{a}'_{v,u}(\pi_1, \pi_2) = \sum_{v_1 \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \widetilde{a}^{(2)}_{(v_1, vv_1),(u_1, uu_1)}(\pi_1, \pi_2). \qquad \square$$

Remarque :

1) Ce théorème donne les coefficients des équations fonctionnelles vérifiées par la fonction Zéta associée à l'action de P_0 puisque chaque O_u (resp. O^*_u) avec $u \in (F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^*/\mathbb{F}^{*2})^n$, est une seule P_0- orbite dans le cas iii).

Dans le cas non transitif avec $n \geq 3$ (donnés dans i), les orbites dépendent de la parité de n. Pour éviter cette distinction, on considère le sous-groupe $P'_0 = G'_0.N_0$ de P_0 avec $G'_0 := \{g \in G_{\mathfrak{t}_0} | \chi_i(g) \in f(E)^*, i = 1, ..., n\}$, alors, à l'exception du cas $d = 2$ lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}-$adique, chaque O_u (resp. O^*_u) avec $u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n$, est une seule P'_0-orbite.

Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}-$adique et $d = 2$, les P'_0-orbites sont données par :

$$O'_\epsilon = \cup_{u \in (\epsilon)} O_u \quad (\text{resp.} O^{*'}_\epsilon = \cup_{u \in (\epsilon)} O^*_u) \quad \text{avec}$$

$$\epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \quad \text{et} \quad (\epsilon) = \{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n, (\delta, u_i) = \epsilon_i, i = 1, ..., n\},$$

et $\forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n) \in (\widehat{\mathbb{F}^*})^n$ $(\widetilde{\pi} = (\pi_1 \pi_2^{-1}, ..., \pi_n))$ on a :

$$Z^*_{O^{*'}_{\epsilon'}}(\mathcal{F}(f); \widetilde{\pi}) = \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} \widetilde{b}^{(n)}_{\epsilon',\epsilon}(\pi)\ Z_{O_\epsilon}(f; (\widetilde{\pi})^* | \ |^{-N1_n}) \quad \text{avec :}$$

$$\widetilde{b}^{(n)}_{\epsilon',\epsilon}(\pi) = (\overline{\alpha(\delta)})^{\frac{n(n-1)}{2}} s(\epsilon', \epsilon) \prod_{i=1}^{n} C_\delta(\pi_{n-i+1} | \ |^i; \epsilon'_i \epsilon_i) \ ,$$

$$s(\epsilon', \epsilon) = \prod_{i=1}^{n} (\epsilon'_i)^{i-1} (\epsilon_i)^{n-i} \in \{-1, 1\} \text{ et } C_\delta(\pi; t) = \frac{1}{2}(\rho'(\pi) + t\rho'(\pi\tilde{\omega}_\delta)), t \in \mathbb{C}$$

$$\text{lorsque} \quad \epsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_n) \quad , \quad \epsilon' = (\epsilon'_1, ..., \epsilon'_n)$$

et la caractéristique résiduelle de $\mathbb{F}$ est différente de 2.

2) On retrouve également les coefficients des équations fonctionnelles vérifiées par la fonction Zéta associée à l'action de G.

• Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, lorsque $d = 2$ et f est anisotrope, G a une seule orbite dans $\mathfrak{g}'_1$ lorsque n est impair et pour n pair , les orbites sont séparées par les valeurs de $(\delta, F_n(x))$ pour $x \in \mathfrak{g}'_1$.

Pour $\epsilon = \pm 1$ et $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ (resp. $g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$ posons $Z_\epsilon(f; \pi) = Z(fI_{\{u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} \ | \ (\delta,u)=\epsilon\}}(F_n(x)); \pi)$ (resp. $Z^*_\epsilon(f; \pi) = Z * (gI_{\{u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} \ | \ (\delta,u)=\epsilon\}}(F^*_n(x)); \pi)$ alors il est immédiat que pour $\epsilon' = \pm 1$ on a :

$$Z^*_{\epsilon'}(\mathcal{F}(f); \pi) = \sum_{\epsilon = \pm 1} a_{\epsilon',\epsilon}(\pi) Z_\epsilon(f; \pi^{-1} | : |^{-N}) \text{ avec } a_{\epsilon',\epsilon}(\pi) = \frac{\epsilon^{n-1}}{2}(B(\pi) + \epsilon\epsilon' B(\pi\tilde{\omega}_\delta))$$

et $B(\pi)=\gamma(f)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leq j\leq n}\rho'(\pi\tilde{\omega}_\delta^{j-1}|\ |^j)$ (2) théorème 6.2.2).

On peut remarquer que $a_{\epsilon',\epsilon}(\tilde{\omega}_\delta\pi)=\epsilon.\epsilon'.a_{\epsilon',\epsilon}(\pi)$.

Revenant au cas général, soient O et O^* deux orbites de G dans $\mathfrak{g}'_1$ et $\mathfrak{g}'_{-1}$ alors O et O^* contiennent des orbites O_u et O_u^* de P_0 dans $\mathfrak{g}"_1$ et pour tout $h\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$ et $\pi\in\widehat{\mathbb{F}^*}$ on a $Z^*_{O^*}(h;\pi)=\sum_{v|O_v^*\subset O^*}Z_v^*(h;(id,...,\pi))$.

• Une première solution consiste à calculer

$$\sum_{v|O_v^*\subset O^*}\widetilde{a}_{v,u}^{(n)}(\pi,...,\pi)$$

et à vérifier que cette quantité est indépendante du choix de u tel que $O_u\subset O$, ce qui prouve à nouveau l'existence de l'équation fonctionnelle.
Ceci s'avère difficile à vérifier et a été fait dans le cas réel (cf.lemme 5.40 de [Bo-Ru 2]).

• Une seconde solution consiste à considérer une orbite O_u de P_0 dans $\mathfrak{g}"_1$ telle que $O_u\subset O$ et à prendre$f\in\mathcal{S}(O_u)$ telle que $Z(f;\omega|\ |^s)=Z_u(f;(id,...,\omega|\ |^s))$ ne soit pas identiquement nulle et de comparer les 2 équations fonctionnelles, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} Z^*_{O^*}(\mathcal{F}f;\pi) & = & a_{O^*,O}(\pi)Z(f;\pi^{-1}|\ |^{-N}) \\ & = & \sum_{v|O_v^*\subset O^*}Z_v^*(\mathcal{F}f;(id,...,\pi)) \\ & = & (\sum_{v|O_v^*\subset O^*}\widetilde{a}_{v,u}^{(n)}(\pi,...,\pi)\ Z(f;\pi^{-1}|\ |^{-N}) \text{ d'où} \\ a_{O^*,O}(\pi) & = & \sum_{v|O_v^*\subset O^*}\widetilde{a}_{v,u}^{(n)}(\pi,...,\pi) \end{array}$$

donc cette somme est indépendante du choix de u tel que $O_u\subset O$.

On indique uniquement les résultats dans le cas $\mathfrak{p}$-adique ($C_n\alpha_n$) de type I (i.e.$\mathfrak{g}$ est déployé) ou III (i.e.$(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ n'est pas presque déployé).

• Dans le cas déployé, donc $d=1$, avec $n\geq 3$, $n=2\ell$ ou $n=2\ell+1$, soient :

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & \sum_{1\leq i\leq n-1}X_{\lambda_i}+(-1)^\ell X_{\lambda_n}\ ,\ Y_1=\sum_{1\leq i\leq n-1}X_{-\lambda_i}+(-1)^\ell X_{-\lambda_n}, \\ X_{-1} & = & \sum_{1\leq i\leq n-3}X_{\lambda_i}+wX_{\lambda_{n-2}}+ww'X_{\lambda_{n-1}}+(-1)^\ell w'X_{\lambda_n}, \\ Y_{-1} & = & \sum_{1\leq i\leq n-3}X_{-\lambda_i}+\frac{1}{w}X_{-\lambda_{n-2}}+\frac{1}{ww'}X_{\lambda_{n-1}}+(-1)^\ell\frac{1}{w'}X_{-\lambda_n}, \end{array}$$

w et w' étant 2 éléments fixés dans $\mathbb{F}^*$ tels que $(w',w(-1)^{\ell+1})=-(w,-1)$.

a) $n=2\ell$

Pour $u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, soient

$$O'_u=\{x\in\mathfrak{g}_1|F(x)\in(-1)^\ell u\ \mathbb{F}^{*2}\}\ ,\ O'^*_u=\{x\in\mathfrak{g}_{-1}|F^*(x)\in(-1)^\ell u\ \mathbb{F}^{*2}\},$$

$$O'_{1,\epsilon}=G(X_\epsilon)\ ,\ O'^*_{1,\epsilon}=G(Y_\epsilon)\ ,\ \epsilon=\pm1,$$

alors $O'_{1,1}\cup O'_{1,-1}=O'_1$ et $O'^*_{1,1}\cup O'^*_{1,-1}=O'^*_1$.

Les orbites de G dans $\mathfrak{g}'_1$ (resp.$\mathfrak{g}'_{-1}$) sont données par :

$$O'_{1,1}, O'_{1,-1}, O_{u_0}, u_0 \in \mathbb{F}^* - \mathbb{F}^{*2}/\mathbb{F}^{*2} \text{ (resp. } O'^*_{1,1}, O'^*_{1,-1}, O'^*_{u_0}, u_0 \in \mathbb{F}^* - \mathbb{F}^{*2}/\mathbb{F}^{*2})$$

et

$\cup_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n|p(u)=(-1)^\ell u_0} O_u \subset O'_{u_0}$ (resp. $\cup_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n|p(u)=(-1)^\ell u_0} O^*_u \subset O'^*_{u_0}$) lorsque $u_0 \neq 1$,

$\cup_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n|p(u)=(-1)^\ell, h(u)=\epsilon} O_u \subset O'_{1,\epsilon}$ (resp. $\cup_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n|p(u)=(-1)^\ell, h(u)=\epsilon} O^*_u \subset O'^*_{1,\epsilon}$) avec $\epsilon = \pm 1$.

b) $n = 2\ell + 1$

G a 2 orbites dans $\mathfrak{g}'_1$ (resp.$\mathfrak{g}'_{-1}$) : $O'_\epsilon = G(X_\epsilon)$ (resp.$O'^*_\epsilon = G(Y_\epsilon)$) avec $\epsilon = \pm 1$ et

$\cup_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n|(p(u),(-1)^\ell)h(u)=\epsilon} O_u \subset O'_\epsilon$ (resp. $\cup_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n|(p(u),(-1)^\ell)h(u)=\epsilon} O^*_u \subset O'^*_\epsilon$) avec $\epsilon = \pm 1$.

Dans les deux cas (pair et impair), on a :

$$\frac{a_{O'^*,O'}(\pi)}{\prod_{1\leq i\leq n-1}\alpha(u_i)^{n-i}} = \pi(-1)^n\alpha(-1)^{[\frac{n}{2}]} \sum_{v\in S(O'^*)} \prod_{1\leq j\leq n} \alpha(v_j)^{p_j}((-1)^{[\frac{j-1}{2}]}p(u)_{j-1}, v_j)\rho(\pi|\ |^{\frac{j+1}{2}}; -v_j u_j),$$

avec :

$$S(O'^*_{\epsilon'}) = \{v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n | (p(v), (-1)^\ell)h(v) = \epsilon'\} \text{ lorsque } n \text{ est impair,}$$

et lorsque n est pair :

$$\begin{aligned} S(O'^*_{1,\epsilon}) &= \{v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n | p(v) = (-1)^\ell, h(v) = \epsilon\}, \\ S(O'^*_{v_0}) &= \{v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n | p(v) = (-1)^\ell v_0\} \quad v_0 \neq 1 \quad , \end{aligned}$$

Dans les deux cas (pair et impair), $O_u \subset O'$ quelconque.

Dans le cas impair, on peut choisir $u = (1, ..., (-1)^\ell)$ pour O'_1 et $u = (1..., w, ww', w'(-1)^\ell)$ pour O'_{-1}.
Dans le cas pair, on peut choisir $u = (1..., w, ww', w'(-1)^\ell)$ pour $O'_{1,-1}$, $u = (1, ..., u_0(-1)^\ell)$ pour O'_{u_0} et $O'_{1,1}$ lorsque $u_0 = 1$.

On n'a pas cherché à simplifier ces sommes.

Lorsque la caractéristique résiduelle est différente de 2, on donne $a_{O'^*_1,O'}(s) + a_{O'^*_{-1},O'}(s)$ dans le cas n impair et $a_{O'^*_v,O'}(s)$ lorsque $v \neq 1$ ainsi que $a_{O'^*_{1,-1},O'}(s) + a_{O'^*_{1,1},O'}(s)$ dans le cas n pair.

Dans le cas n impair, on introduit les ouverts de $\mathfrak{g}_1$, $O'_{u_0,\epsilon} = O'_\epsilon \cap \{x \in \mathfrak{g}_1 | F(x) \in u_0\mathbb{F}^{*2}\}$, (resp.de $\mathfrak{g}_{-1}$, $O'^*_{u_0,\epsilon} = O'^*_\epsilon \cap \{x \in \mathfrak{g}_{-1} | F^*(x) \in u_0\mathbb{F}^{*2}\}$), $\epsilon = \pm 1$ ainsi que les fonctions Zéta associées : $Z_{u_0,\epsilon}(f;\ ) = Z(f1_{O'_{u_0,\epsilon}};\ )$.
On a $\cup_{\{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n|p(u)=u_0, h(u)=(u_0,-1)^\ell\epsilon\}} O_u \subset O'_{u_0,\epsilon}$.

• Dans le cas symplectique commutatif de type non déployé, i.e. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (C_n, α_n) avec n pair et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type $(C_{\frac{n}{2}}, \alpha_{\frac{n}{2}})$ avec $n \geq 4$, $\mathbb{F}$ étant un corps $\mathfrak{p}-$adique de caractéristique résiduelle différente de 2.

Les orbites de G dans $\mathfrak{g}'_1$ (resp.$\mathfrak{g}'_{-1}$) sont données par :

$$O'_u = \{x \in \mathfrak{g}_1 | F(x) \in u\mathbb{F}^{*2}\} \quad (\text{resp.} O'^*_u = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} | F^*(x) \in u\mathbb{F}^{*2}\}),\ u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$$

et

$$\cup_{u' \in (Im(F_1)^*/\mathbb{F}^{*2})^{\frac{n}{2}} | p(u')=u} O_{u'} \subset O'_u \quad (\text{resp. } \cup_{u' \in (Im(F_1)^*/\mathbb{F}^{*2})^{\frac{n}{2}} n | p(u')=u} O^*_{u'} \subset O'^*_u).$$

Définition 6.2.3 *$\mathbb{F}$ est réel ou bien $\mathfrak{p}-$adique.*
Pour $s \in \mathbb{C}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$f_1(s) = 1\ ,\ f_{n+1}(s) = |2|_{\mathbb{F}}^{-2ns-n(n+1)-\frac{n}{2}} \prod_{1 \leq j \leq n} \rho(|\ |^{2s+2j+1})\ ,\ n \geq 1.$$

Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}-$adique de caractéristique résiduelle différente de 2, on a :

$$f_{n+1}(s) = (-1)^n q^{n(2s+n+1)} \prod_{1 \leq j \leq n} \frac{1 - q^{-2(s+j)}}{1 - q^{-2(s+j)-1}}\ ,\ n \geq 1.$$

Proposition 6.2.4 *Cas symplectique commutatif de rang ≥ 2, sur un corps $\mathfrak{p}-$adique de caractéristique résiduelle différente de 2, i.e. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (C_n, α_n) et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est soit de type (C_n, α_n) (donc de type I) soit de type $(C_{\frac{n}{2}}, \alpha_{\frac{n}{2}})$ (donc de type III avec n pair).*

Soient $a \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}, s \in \mathbb{C}$ alors pour $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ on a :

1. *Lorsque n est pair :*
   a)

$$\frac{Z^*(\mathcal{F}(f); \tilde{\omega}_a, s)}{f_{\frac{n}{2}}(s)} = K_n \rho(\tilde{\omega}_a, s+1) \sum_{u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} (u, \delta_1)^{\frac{n}{2}} \alpha(u) h(\tilde{\omega}_{a\delta_1^{\frac{n}{2}} u} | \ |^{s+\frac{n+1}{2}})\ Z_u(f; \tilde{\omega}_a, -s - \frac{n+1}{2})$$

   avec :

$$\delta_1 \ = \ -\text{discriminant de } \begin{cases} F_2 \text{ lorsque } \mathfrak{g} \text{ est déployée (i.e. de type I),} \\ F_1 \text{ lorsque } \mathfrak{g} \text{ est non déployée (i.e. de type III),} \end{cases}$$

$$\delta_1 \ = \ -1 \text{ lorsque } \mathfrak{g} \text{ est déployée,}$$

$$K_n = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } \mathfrak{g} \text{ est déployée (type I),} \\ \\ (\ \gamma(F_1)^{\frac{n}{2}} (-1)^{\frac{n(n-2)}{8}} \text{ lorsque } \mathfrak{g} \text{ est non déployée (de type III).} \end{cases}$$

   b) Pour $v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a :

$$Z^*_v(\mathcal{F}(f); s) = K_n f_{\frac{n}{2}}(s) \sum_{u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{s+1, s+\frac{n+1}{2}}(v, u, \delta_1{}^{\frac{n}{2}}) Z_u(f; -s - \frac{n+1}{2}).$$

2. *Lorsque n est impair, donc $\mathfrak{g}$ est déployée (i.e. de type I) :*

$$\frac{Z^*(\mathcal{F}(f);\tilde{\omega}_a,s)}{f_{[\frac{n}{2}]}(s)} = \rho(\tilde{\omega}_a,s+1)(a,-1)(\ Z_{O'_1}(f;\tilde{\omega}_a,-s-\frac{n+1}{2})-Z_{O'_{-1}}(f;\tilde{\omega}_a,-s-\frac{n+1}{2})).$$

Pour $v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a :

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);s) = f_{[\frac{n}{2}]}(s) \sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2},\epsilon=\pm 1} \epsilon\rho(s+1;-uv)Z_{u,\epsilon}(f;-s-\frac{n+1}{2}).$$

Démonstration: • Dans le cas déployé, on applique le 3) du théorème 6.2.2 avec $\pi = (\pi_1,...,\pi_1)$ et $\pi_1 = \tilde{\omega}_a|\ |^s$ alors $C_n = 1$ et pour $u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n$ on a

$$\epsilon(u) = (p(u),-1)^{[\frac{n}{2}]}h(u)^n\alpha(p(u)^{p_n}$$

et :

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_u^{(n)}(\pi) &= \rho(\pi_1|\ |)\prod_{1\le j\le[\frac{n-1}{2}]}\rho(\pi_1|\ |^{j+1}\tilde{\omega}_{(-1)^j p(u)_{2j}})\prod_{1\le j\le[\frac{n}{2}]}h(\pi_1|\ |^{j+\frac{1}{2}}\tilde{\omega}_{(-1)^j p(u)_{2j}})\\ &= \rho(\pi_1|\ |)f_{[\frac{n}{2}]}(s).\begin{cases}1 \text{ lorsque } n \text{ est impair,}\\ h(\pi_1|\ |^{\frac{n+1}{2}}\tilde{\omega}_{(-1)^{\frac{n}{2}}p(u)}) \text{ lorsque } n \text{ est pair,}\end{cases}\end{aligned}$$

(lemme 3.6.8).

Lorsque n est pair, $\epsilon(u)\widetilde{b}_u^{(n)}(\pi)$ ne dépend que de $p(u)$, donc en sommant sur les $\{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n | p(u) = u_0\}$ avec u_0 décrivant $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, en obtient le premier résultat.

Comme on a $\forall v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$:

$$Z_v^*(h;s) = \frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|}\sum_{b\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(b,v)Z^*(h;\tilde{\omega}_b,s)$$

et que $\forall a \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$:

$$Z^*(\mathcal{F}(f);\tilde{\omega}_a,s) = \sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} B_u(\tilde{\omega}_a,s)Z_u(f;\tilde{\omega}_a,-s-\frac{n+1}{2}),$$

on a : $\forall v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a :

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);s) = \sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A_{v,u}(s)Z_u(f;-s-\frac{n+1}{2}),$$

avec

$$A_{v,u}(s) = \frac{1}{|\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|}\sum_{b\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\tilde{\omega}_b(uv)B_u(\tilde{\omega}_b,s)$$

d'où le second résultat en appliquant 6,B du lemme 3.6.4..

Lorsque n est impair, $\epsilon(u)\widetilde{b}_u^{(n)}(\pi)$ ne dépend que de $(p(u),-1)^{[\frac{n}{2}]}h(u)$, donc en sommant sur les $\{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n | (p(u),-1)^{[\frac{n}{2}]}h(u) = \epsilon\}$ avec $\epsilon = \pm 1$, en obtient le premier résultat ce qui implique le second résultat comme ci-dessus.

• Dans le cas non déployé, on applique le 4) du théorème 6.2.2 en remplaçant n par $\frac{n}{2}$, avec $\pi = (\pi_1, ..., \pi_1)$ et $\pi_1 = \tilde{\omega}_a |\ |^s$ alors pour $u \in (F_1(\mathfrak{g}^{\lambda_1})^*/\mathbb{F}^{*2})^n$ on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_u^{(\frac{n}{2})}(\pi) &= \prod_{1\leq i\leq \frac{n}{2}} \rho(\pi_1 |\ |^i \tilde{\omega}_{p(\delta_1 u)_{i-1}}) h(\pi_1 |\ |^{i+\frac{1}{2}} \tilde{\omega}_{p(\delta_1 u)_i}) \\
&= \rho(\pi_1 |\ |) h(\pi_1 |\ |^{\frac{n+1}{2}} \tilde{\omega}_{\delta_1^{\frac{n}{2}} p(u)}) \prod_{1\leq i\leq \frac{n}{2}-1} \rho(\pi_1 |\ |^{i+1} \tilde{\omega}_{p(\delta_1 u)_i}) h(\pi_1 |\ |^{i+\frac{1}{2}} \tilde{\omega}_{p(\delta_1 u)_i}) \\
&= \rho(\pi_1 |\ |) h(\pi_1 |\ |^{\frac{n+1}{2}} \tilde{\omega}_{\delta_1^{\frac{n}{2}} p(u)}) f_{\frac{n}{2}}(s),
\end{aligned}$$

(lemme 3.6.8) ainsi $\widetilde{c}_u^{(\frac{n}{2})}(\pi)$ ne dépend que de $p(u)$ d'où le résultat et on termine comme dans le cas déployé pair. □

Remarque 6.2.5 *Les coefficients obtenus dans le cas n pair (1) de la proposition 6.2.4) sont à comparer à ceux associés à une forme quadratique définie sur un espace vectoriel de dimension $n+1$ et de discriminant $(-\delta_1)^{\frac{n}{2}}$.*

Posons $n = 2\ell$, les valeurs explicites :

$$\frac{K_{2\ell}}{2} \alpha (-\delta_1)^{\ell} (-1)^{\ell-1} q^{(\ell-1)(2s+\ell)} g_\ell(s) P^{1,\epsilon_1,\epsilon_2,1}_{s+1,s+l+\frac{1}{2}}(\delta_1^\ell v, \delta_1^\ell u, 1),$$

avec $g_1(s) = \dfrac{1}{(1-q^{-2(s+1)})(1-q^{-2(s+3)})}$ *et pour* $\ell \geq 2$:

$$g_\ell(s) = \frac{q_\ell(s)}{r_\ell(s)}\ ,\ r_\ell(s) = \prod_{j=1}^{\ell}(1-q^{-2(s+j)-1})\ ,\ q_\ell(s) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ell = 2 \\ \prod_{j=2}^{\ell-1}(1-q^{-2(s+j)}) \text{ si } \ell \geq 3 \end{cases}$$

sont données dans le lemme 3.6.7 (B).

On rappelle que les racines du polynome de Bernstein associé au préhomogène de type $(C_{2\ell}, \alpha_\ell)$ sont données par : $\{-\frac{j}{2}, j = 0, ..., 2\ell-1\}$ donc les pôles de g_ℓ, qui sont simples et donnés par $\{-(j+\frac{1}{2}) + ik\frac{\pi}{\ln q}, 1 \leq j \leq \ell, k \in \mathbb{Z}\}$, pour $\ell \geq 2$, ne font intervenir que les racines non entières du polynome de Bernstein.

7 Les cas classiques

Dans ce paragraphe, on détermine les polynômes de Bernstein ainsi que les coefficients de l'équation fonctionnelle associée au préhomogène $(P_0, \mathfrak{g}_1)$, P_0 étant le sous-groupe parabolique standard très spécial défini dans le §2.4, (cf.§7.1.2) par la méthode de descente.

Les résultats obtenus sont complets dans le cas symplectique, presque complets dans les cas orthogonaux BI,DI (§7.3) et DIII réel (1) du th.7.4.4). Le cas DIII $\mathfrak{p}-$adique est incomplet puisqu'on suppose certaines conditions restrictives (2) du th.7.4.4) et que l'on est incapable d'en déduire les résultats pour $(G, \mathfrak{g}_1)$.

Notation : ϕ étant une forme quadratique non dégénérée, on note simplement $\gamma(\phi)$ la constante $\gamma(\tau \circ \phi)$ (cf.§3.6.2).

7.1 Généralités

7.1.1 Description des cas classiques considérés

Les cas classiques correspondent aux préhomogènes obtenus à partir d'une algèbre simple $\overline{\mathfrak{g}}$ de type B_n, C_n ou D_n (notée R_n) munie d'une graduation de type (R_n, α_k) avec :

- $1 \leq 3k \leq 2n-2$ et k pair dans le cas C_n,
- $1 \leq 3k \leq 2n-2$ dans le cas D_n,
- $1 \leq 3k \leq 2n-1$ dans le cas B_n,

ces conditions plus restrictives que la condition pour que $2H_0$ soit 1- simple ([Ru 3],Table I p.137) sont dûes au choix du sous-groupe parabolique standard très spécial.

Dans les notations des planches de [Bou 1], le système de racines associé à $\overline{\mathfrak{g}}$, noté $\overline{\Delta}$, est donné par :

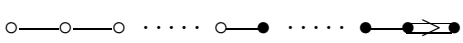
- $R_n := B_n \quad : \quad \overline{\Delta} = \{\overline{\epsilon}_i \pm \overline{\epsilon}_j \ , \ 1 \leq i \neq j \leq n \ , \ \overline{\epsilon}_i \ , \ 1 \leq i \leq n\}$,
- $R_n := C_n \quad : \quad \overline{\Delta} = \{\overline{\epsilon}_i \pm \overline{\epsilon}_j \ , \ 1 \leq i \neq j \leq n \ , \ 2\overline{\epsilon}_i \ , \ 1 \leq i \leq n\}$,
- $R_n := D_n : \quad \overline{\Delta} = \{\overline{\epsilon}_i \pm \overline{\epsilon}_j \ , \ 1 \leq i \neq j \leq n\}$,

et :

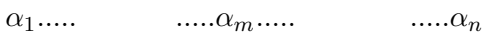
- $\overline{\Delta}_1 = \{\overline{\epsilon}_i \pm \overline{\epsilon}_j \ , \ \overline{\epsilon}_i \ , \ \ 1 \leq i \leq k < j \leq n \ \} \cap \overline{\Delta}$,
- $\overline{\Delta}_2 = \{\overline{\epsilon}_i + \overline{\epsilon}_j \ , \ 1 \leq i \leq j \leq k \ \} \cap \overline{\Delta}$.

$\mathfrak{g}$ étant une $\mathbb{F}$-forme de $\overline{\mathfrak{g}}$ convenable (i.e. $H_0 \in \mathfrak{g}$), $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est également de type classique : (R_m, λ_p) avec $R = B, C, BC$ ou D. Plus précisément :

1. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type BI, ou BI(n,k) ou $B_m(n,k)$ lorsque le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$ est de la forme :

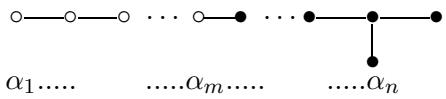


(diagrammes BI de [Wa])



i.e. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_)$ est de type (B_n, α_k) et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (B_m, λ_k) avec $k \leq m \leq n$, $\mathfrak{g}$ est de rang m et $\mathfrak{g}$ est déployée lorsque $m = n$.
Lorsque $\overline{R} = B$, on a toujours $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ de type $BI(n, k)$ par classification.

2. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type DI, ou DI(n, k) ou $D_m(n, k)$ lorsque le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$ est de la forme :



ou bien toutes les racines du diagramme de Satake sont blanches (fléchées ou non) (diagrammes DI de [Wa]).

i.e. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_)$ est de type (D_n, α_k) et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (D_n, α_k) lorsque $\mathfrak{g}$ est déployée et sinon de type (B_m, α_k) avec $k \leq m < n$, m étant le rang de $\mathfrak{g}$.

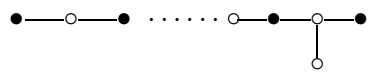
Les cas BI ou DI sont appelés "type I".

3. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type CII lorsque $\mathfrak{g}$ n'est pas déployée donc le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$ est de la forme :

ainsi que toutes les variantes ((diagrammes CII de [Wa]).

i.e. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (C_n, α_{2p}), i.e. $k = 2p$, et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (C_m, α_p) ou (BC_m, α_p).

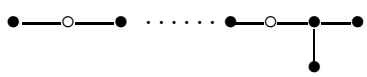
4. $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type DIII ou DIII(n,p) lorsque le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$ est de la forme :



ainsi que toutes les variantes (diagrammes DIII de [Wa]).

i.e. $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (D_n, α_{2p}) et $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (C_m, α_p) (lorsque n est pair) ou (BC_m, α_p) (lorsque n est impair).

Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, on ne considèrera pas l'unique forme de D_{2q+1} de diagramme de Satake :



([Ve])

et pour laquelle $rg(\mathfrak{g}) = \frac{n-3}{2} = q-1$, ainsi on aura toujours $m = [\frac{n}{2}]$.

On supposera également que $n - 3p \geq 4$ dans le cas réel et que $n - 3p \geq 2$ avec $n - p$ impair dans le cas $\mathfrak{p}$-adique.

On note le système de racines associé à $\mathfrak{g}$ de la manière suivante :

$$\Delta = \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \ , \ 1 \leq i \neq j \leq m \ , \ \epsilon_i \ , \ 2\epsilon_i \ , \ 1 \leq i \leq m\} \cap \Delta \supseteq \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \ , \ 1 \leq i \neq j \leq m\}.$$

Dans le cas orthogonal, i.e.$(\overline{R}_n, \alpha_k)$ avec $\overline{R} = B$ ou D, on a $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$ lorsque $k = 1$ (cas commutatif), $\mathfrak{g}_2$ est de dimension 1 lorsque $k = 2$ et pour $k \geq 3$ les différentes formes de $\mathfrak{g}$ se séparent simplement puisque :

Lemme 7.1.1 *Soit $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ un préhomogène de type (R_n, α_k) avec*

i) Pour R=C : $2 \leq k \leq n-1$,
ii) Pour R=D : $3 \leq k \leq n-2$,

et soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre engendrée par $\mathfrak{g}_{\pm 2}$, alors :

1. *$\mathfrak{g}$ est de type I $\Leftrightarrow$ $rg(\tilde{\mathfrak{g}}) = k$.*
2. *$\mathfrak{g}$ est de type CII $\Leftrightarrow$ $rg(\tilde{\mathfrak{g}}) = \frac{k}{2}$.*
3. *$\mathfrak{g}$ est de type DIII $\Leftrightarrow$ $rg(\tilde{\mathfrak{g}}) = \frac{k}{2}$ et $r(\mathfrak{g}) = [\frac{n}{2}]$.*

Démonstration: D'après la description de $\overline{\Delta}_2$, il est facile de vérifier que : $\{\overline{\epsilon}_i - \overline{\epsilon}_{i+1} \ , \ 1 \leq i \leq k-1, \mu\}$ avec :

- $\mu = \overline{\epsilon}_{k-1} + \overline{\epsilon}_k$ dans le cas orthogonal car $k \geq 3$,
- $\mu = 2\overline{\epsilon}_k$ dans le cas symplectique car $k \geq 2$,

est un ensemble de racines simples de $\overline{\tilde{\mathfrak{g}}}$, on en déduit le diagramme de Satake de $\tilde{\mathfrak{g}}$ à partir du diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$, d'où le résultat. □

7.1.2 Sous-groupe parabolique standard très spécial et préhomogène associé

On considère le sous-groupe parabolique $P(H_1, ..., H_{p_0}) = P_0$ donné dans le §2.4 c'est à dire que :

- Lorsque $\mathfrak{g}$ est déployée de type C_n : $H_{p_0-j+1} = 2h_{\epsilon_{2j-1}+\epsilon_{2j}}$ pour $j = 1, ..., p_0 = \frac{k}{2}$,
- dans tous les autres cas : $H_{p-j+1} = h_{\epsilon_j}$ pour $j = 1, ..., p_0 = p$,

ce qui donne dans les cas BI ou DI : $H_{p-j+1} = h_{\overline{\epsilon}_j}$ et pour les cas CII et DIII : $H_{p-j+1} = 2h_{\overline{\epsilon}_{2j-1}+\overline{\epsilon}_{2j}}$.

On peut noter que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{p_0}, \exists g_\sigma \in G$ tel que $\forall j = 1, ..., p_0$ on a $g_\sigma(H_j) = H_{\sigma(j)}$.

Les descriptions de $\overline{\Delta}_1$ et $\overline{\Delta}_2$ donnent les décompositions suivantes particulièrement simples :

$$\begin{array}{lcl} \bullet\ \mathfrak{g}_1 & = & \oplus_{1\leq j\leq p_0} E_2(H_j)\cap\mathfrak{g}_1 \\ \bullet\ \mathfrak{g}_2 & = & \oplus_{1\leq j\leq p_0} E_4(H_j)\cap\mathfrak{g}_2 \oplus_{1\leq i<j\leq p_0} E_2(H_i)\cap E_2(H_j)\ . \end{array} \tag{7.1}$$

Soit :

$$d_0 = \text{ dimension de } E_2(H_i)\cap E_2(H_j) \text{ pour } i\neq j = \begin{cases} 1 \text{ pour les types BI ou DI ,} \\ 4 \text{ pour tous les autres cas (i.e C ou DIII),} \end{cases}$$

et on a :

$$\dim(E_4(H_j)\cap\mathfrak{g}_2 = \begin{cases} 0 \text{ pour les types BI ou DI ,} \\ 1 \text{ pour le type DIII,} \\ 3 \text{ pour les types CI et CII.} \end{cases}$$

On rappelle que :

Lemme 7.1.2 *Pour $j=1,...,p_0$ on a degré de $(F_j) = d'.j$ avec $d' = \begin{cases} 4 \text{ dans le cas } DIII, \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$*

Démonstration: Il est bien connu par classification ([Ru 3],table I) que l'invariant relatif fondamental de $(\overline{\mathfrak{g}}_0,\overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de degré $2k$ dans les cas orthogonaux (B_n ou D_n,α_k) et dans le cas symplectique (C_n,α_{2k}). Comme le préhomogène $(E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_0, E_1(H_1)\cap g_1)$ est de type :
i) (B ou D,α_{k-1}) lorsque $\overline{R}=B$ ou D,
ii) $(C,\alpha_{2(k-1)})$ lorsque $\overline{R}=C$,
(par exemple démonstration de la proposition 1.2.4), on a le résultat par récurrence sur p_0.□

On rappelle également que :

- $N := \dfrac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{d_{p_0}} = \begin{cases} 2(n-k) \text{ lorsque } (\overline{\mathfrak{g}}_0,\overline{\mathfrak{g}}_1) \text{ est de type } (C_n,\alpha_k), \\ n-k \text{ lorsque } (\overline{\mathfrak{g}}_0,\overline{\mathfrak{g}}_1) \text{ est de type } (D_n,\alpha_k), \\ n-k+\dfrac{1}{2} \text{ lorsque } (\overline{\mathfrak{g}}_0,\overline{\mathfrak{g}}_1) \text{ est de type } (B_n,\alpha_k). \end{cases}$

- $\widetilde{B} = \dfrac{-d_{p_0}B}{2B(H_0,H_0)}$ donc $\widetilde{B}(H_j,H_j) = -2d'$ pour $j=1,...,p_0$.

Les coefficients des équations fonctionnelles vérifiées par les fonctions Zétas sont des sommes et produits de coefficients analogues associés aux préhomogènes obtenus à partir de centralisateurs de tds, ces derniers ont la même structure que le préhomogène de départ, en effet :

Proposition 7.1.3 *On suppose que $p_0\geq 2$.*

Soit $X\in W_{\mathfrak{t}_0}$, $\mathfrak{s}$ l'algèbre engendrée par les projections de X sur $E_2(H_i)\cap\mathfrak{g}_1$ et de X^{-1} sur $E_{-2}(H_i)\cap\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ alors $(\mathfrak{U}_0,\mathfrak{U}_1)$ est de même type que $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$, plus précisément :

1) Lorsque $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ *est de type* (C_n, α_{2p}), $(\overline{\mathfrak{U}}_0, \overline{\mathfrak{U}}_1)$ *est de type* $(C_{n-3}, \alpha_{2(p-1)})$ *et* $\mathfrak{U}$ *est déployé (resp.de type CII)* $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ *est déployé (resp.de type CII).*

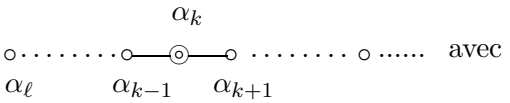
2) $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$ *est de type BI(n-2,k-1) (resp.DI(n-1,k-1)) lorsque* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est de type DI(n,k) (resp.BI(n,k) avec* $n \geq 5$*).*

3) $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$ *est de type DIII(n-3,p-1) et rang* $(\mathfrak{U}) = [\frac{n-3}{2}]$ *lorsque* $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ *est de type DIII(n,p) avec* $p \geq 3$ *et rang*$(\mathfrak{g}) = [\frac{n}{2}]$.

Démonstration: Puisque tous les $H_i, i = 1, ..., p_0$ sont G-conjugués, il suffit de le vérifier pour H_{p_0}.
Par la démonstration de la proposition 1.2.4, $(\overline{\mathfrak{U}}_0, \overline{\mathfrak{U}}_1)$ est de type :

i) (D_{n-1}, α_{k-1}) lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type BI(n, k),
ii) (B_{n-2}, α_{k-1}) lorsque $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type DI(n, k),
iii) $(D_{n-3}, \alpha_{2(p-1)})$ dans le cas DIII(n, p),
iv) $(C_{n-3}, \alpha_{2(p-1)})$) dans les cas symplectiques.
ce qui termine la démonstration dans le cas ii) et dans le cas i) avec k pair.

Il est facile de vérifier que le diagramme de Dynkin de $\overline{\mathfrak{U}}(\mathbb{F}H_{p_0})$ est donné par :



avec

$$\ell = \begin{cases} 3 \text{ dans le cas de type III ou le cas symplectique} \\ 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

donc $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})$ est de même type que $\mathfrak{g}$ et $rg(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})) = \begin{cases} rg(\mathfrak{g}) - 2 \text{ dans le cas CI,} \\ rg(\mathfrak{g}) - 1 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$.
Il en est de même pour le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})_1)$.
Soit $\mathfrak{L}$ l'algèbre de Lie engendrée par $\mathfrak{U}_2$ et $\mathfrak{U}_{-2}$, comme :

$$\mathfrak{U}_{\pm 2} = \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})_{\pm 2} \ ,$$

On a :

• pour $\mathfrak{g}$ de type BI : $rg(\mathfrak{L}) = k - 1$ lorsque $k - 1 \geq 3$ (lemme 7.1.1 appliqué au préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})_1)$) donc $\mathfrak{U}$ est de type I dans le cas i) avec $k \geq 5$ et impair (lemme 7.1.1).

Lorsque $n \geq 5$ et $k = 3$, $P(H_1, H_2)$ est un sous-groupe parabolique très spécial de $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$. Soit (x, H_1, x^{-1}) un sl_2-triplet du préhomogène $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$, le préhomogène $(\overline{\mathfrak{U}'}_0, \overline{\mathfrak{U}'_1})$, défini par le centralisateur dans $\mathfrak{U}$ du sl_2-triplet précédent, est de type (B_{n-3}, α_1) puisque $(\overline{\mathfrak{U}}_0, \overline{\mathfrak{U}_1})$ est de type (D_{n-1}, α_2).
Or les préhomogènes : $(\mathfrak{g}'_0, \mathfrak{g}'_1)$ de type DIII$(n-1, 1)$ admettent un seul sous-groupe parabolique très spécial standard non trivial donné par P'_0 (prop. 2.4.3) mais alors, soient $z \in E'_2(H'_1) \cap \mathfrak{g}'_1$, $\mathfrak{s}'$ l'algèbre engendrée par z, H'_1 et z^{-1}, le préhomogène $(\overline{\mathfrak{U}(\mathfrak{s}')}_0, \overline{\mathfrak{U}(\mathfrak{s}')}_1)$ est de type (A_3, α_2) (cf.par exemple la démonstration du lemme 7.4.1).

Par conséquent, $(\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1)$ est de type I.

• pour $\mathfrak{g}$ de type CII (resp.DIII) : $rg(\mathfrak{L}) = p-1$ (lemme 7.1.1 appliqué au préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_{p_0})_1)$) donc $\mathfrak{U}$ est de type CII (resp.DIII car $p \geq 3$) par le lemme 7.1.1.
Il reste à vérifier que $rg(\mathfrak{U}) \geq [\frac{n-3}{2}]$ dans le cas DIII(n,p) lorsque n est pair.
On peut supposer que $X \in \mathfrak{g}^{\epsilon_1-\epsilon_{p+1}} \oplus \mathfrak{g}^{\epsilon_1+\epsilon_{p+1}}$ (cf.§2.4) ainsi $\oplus_{2\leq i\leq p, \frac{n}{2}\geq j\geq p+2}\mathfrak{g}^{\epsilon_i\pm\epsilon_j} \subset \mathfrak{U}_1$ (resp. $\oplus_{2\leq i\leq p, \frac{n}{2}\geq j\geq p+2}\mathfrak{g}^{-\epsilon_i\pm\epsilon_j} \subset \mathfrak{U}_{-1}$) donc $rg(\mathfrak{U}) \geq rg(\mathfrak{g}) - 2 = \frac{n}{2} - 2$ d'où le résultat. □

Pour terminer ce paragraphe de généralités, on redonne les polynomes de Bernstein dans le cas réel dans notre normalisation, bien qu'ils soient déjà connus (cf. travaux de [Cl], notamment le théorème 1).

Pour x réel, on note B_x le polynome : $B_x(s) = s(s+x)$, alors :

Proposition 7.1.4 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

Lorsque $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (R_n, α_k) et que F_1 est de degré 2 (i.e. à l'exception du cas DIII), on a pour $j = 1, ..., p_0$:

$$b_j(s_1, ..., s_{p_0}) = b_j^*(s_1, ..., s_{p_0}) = \prod_{\ell=0}^{j-1} B_{N-(p_0-1)\frac{d_0}{2}-1}\ (\sum_{p_0-\ell\leq i\leq p_0} s_i + \frac{d_0}{2}\ell).$$

Démonstration: Par récurrence sur p_0 (donc sur k), le cas $p_0 = 1$ résultant de la remarque 3.6.6, 1) puisque F_1 est une forme quadratique et que $\widetilde{B}(\frac{H_1}{2}, \frac{H_1}{2}) = -1$.
On suppose la proposition vérifiée pour les préhomogènes : $(P_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ de type (R_m, α_q) avec $1 \leq q \leq k-1$.
Lorsque le préhomogène : $(P_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (R_n, α_k), soit $X \in W_{\mathfrak{t}_0}, I_r \subset \{1, ..., p_0\}$ de cardinal $p_0 - r$ avec $1 \leq r \leq p_0 - 1$, $\mathfrak{s}_r$ l'algèbre engendrée par les projections de X et de X^{-1} sur $E_2(\sum_{i\in I_r} H_i) \cap \mathfrak{g}_1$ et $E_{-2}(\sum_{i\in I_r} H_i) \cap \mathfrak{g}_{-1}$, on a :

$$\frac{dim(\mathfrak{U}(\mathfrak{s}_r)_1)}{2r} = \frac{\frac{dim(\mathfrak{g}_1)}{p_0}.r - d_0 r(p_0 - r)}{2r} = \frac{dim(\mathfrak{g}_1)}{2p_0} - (p_0 - r)\frac{d_0}{2}\ ,$$

donc les quantités qui suivent ont toutes la même valeur indépendamment de r :

$$\frac{dim(\mathfrak{U}(\mathfrak{s}_r)_1)}{2r} - (r-1)\frac{d_0}{2} - 1 = N - (p_0 - 1)\frac{d_0}{2} - 1 \quad (*)\ .$$

Pour $j = 1, ..., p_0 - 1$, on applique la proposition 3.4.4 et l'hypothèse de récurrence, d'où la formule donnant b_j en appliquant (*) ainsi que l'égalité $b_j = b_j^*$.
Pour le calcul de b_{p_0} on applique 3.7.3 avec $H_1, ..., H_{p_0-1}$ et H_{p_0}, il est facile de vérifier que la constante $r_{p_0-1} = (p_0 - 1)\frac{d_0}{2}$ et on applique (*).
Pour $b_{p_0}^*$ on a :

$$\begin{array}{rcll} b_{p_0}^*(s) & = & b_{p_0}(s^* - (N-1)1_{p_0}) & \text{(lemme 3.7.2)} \\ & = & b_1(s^* - (N-1)1_{p_0})\ b_{p_0-1}^*(s) & \text{(lemme 3.7.2)} \\ & = & b_1^*(s^* - (N-1)1_{p_0})\ b_{p_0-1}(s) & \text{(vérification précédente)} \\ & = & b_{p_0}(s) & \text{(lemme 3.7.2).} \quad \square \end{array}$$

Remarque : Le calcul de $N - (p_0 - 1)\frac{d_0}{2} - 1$ dans chaque cas donne :

a) Dans le cas symplectique, on a $k = 2p_0$ donc $N - (p_0 - 1)\frac{d_0}{2} - 1 = 2(n - 3p) + 1$.

b) Dans le cas orthogonal de type I, on a $k = p_0$ donc $N - (p_0 - 1)\frac{d_0}{2} - 1 = \frac{2n - 3k}{2} + \frac{\delta - 1}{2}$, avec $\delta = 0$ dans le cas D et 1 dans le cas B.

Ainsi si on définit les constantes suivantes :

$$p_C = q_C = 1 \quad , \quad p_D = p_B = \frac{1}{2} = -q_D \quad , \quad q_B = 0 \ ,$$

notée p_R et q_R lorsque $R = B, C$ on a :

$$b_j(s_1, ..., s_{p_0}) = b_j^*(s_1, ..., s_{p_0}) = \prod_{\ell=0}^{j-1} B_{p_R(2n-3k)+q_R} \ (\sum_{p_0 - \ell \leq i \leq p_0} s_i + \frac{d_0}{2}\ell).$$

Proposition 7.1.5 *Lorsque $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0)$ est de type DIII(n,p), on a pour $j = 1, ..., p$:*

$$b_j(s_1, ..., s_p) = b_j^*(s_1, ..., s_p) = \prod_{\ell=0}^{j-1} B_{n-3p-\frac{1}{2}} \ (\sum_{p-\ell \leq i \leq p} s_i + \ell) B_{n-3p-\frac{1}{2}} \ (\sum_{p-\ell \leq i \leq p} s_i + \ell + \frac{1}{2}).$$

Démonstration: $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (D_n, α_{2p}) et comme les polynomes de Bernstein ne dépendent pas de la forme réelle choisie mais des invariants relatifs et de la normalisation choisie pour B, on considère les polynomes obtenus dans la proposition 7.1.4 pour les formes de type I en notant que les normalisations sont les mêmes.

Pour $j = 1, ..., p$, soient :

$$b'_{2j}(s_1, ..., s_{2p}) = \prod_{\ell=0}^{2j-1} B_{n-3p-\frac{1}{2}} \ (\sum_{2p-\ell \leq i \leq 2p} s_i + \frac{1}{2}\ell) \ ,$$

alors on a les égalités suivantes :

$$b_j(s_1, ..., s_p) = b'_{2j}(0, s_1, ..., 0, s_p) \ \text{ et } \ {b_j}^*(s_1, ..., s_p) = {b'_{2j}}^*(0, s_1, ..., 0, s_p)$$

d'où le résultat. □

7.2 Le cas symplectique

Dans ce paragraphe, $\overline{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Lie simple de type C_n avec $n \geq 3$, $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (C_n, α_{2p}) avec $1 \leq p \leq \frac{n-2}{3}$ (cf.$n°13$ de la classification de [Sa-Ki]) et $\mathfrak{g}$ est soit déployée (type CI) soit de type CII.

Dans les cas réels et complexe, ils ont été étudiés par J.L Clerc dans le cadre des représentations d'algèbres de Jordan et dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, C.L.Pan a déterminé explicitement la fonction Z_L associée à l'invariant relatif fondamental.

Le procédé de descente s'appuie sur les résultats du cas $p = 1$ donnés dans le théorème 3.6.5 ce qui nécessite le résultat suivant :

Lemme 7.2.1 *Cas $p = 1$*

On suppose que $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (C_n, α_2) $(n \geq 3)$ alors F a pour discriminant 1 et $\gamma(F) = 1$ dans le cas déployé et $(-1)^n$ sinon.

Démonstration: 1) Dans le cas déployé, on a :

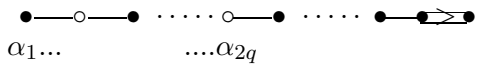
$$\mathfrak{g}_1 = \oplus_{3 \leq j \leq n} \ (\ \mathfrak{g}^{\epsilon_1 \pm \epsilon_j} \ \oplus \ \mathfrak{g}^{\epsilon_2 \pm \epsilon_j} \ ) \ ,$$

et comme $F(x) \neq 0 \Leftrightarrow \ (x, 2H_0)$ se complète en un sl_2-triplet, il existe des constantes non nulles : $a_i, b_i, i = 1, ..., n-2$ telles que :

$$F(\sum_{1 \leq i \leq n-2} (x_i X_{\epsilon_1 - \epsilon_{i+2}} + y_i X_{\epsilon_2 + \epsilon_{i+2}} + z_i X_{\epsilon_1 + \epsilon_{i+2}} + t_i X_{\epsilon_2 - \epsilon_{i+2}}) = \sum_{1 \leq i \leq n-2} (a_i x_i y_i \ + \ b_i z_i t_i)$$

d'où le résultat.

2) On rappelle que $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{E}$ est définie sur l'extension $\mathbb{E} = \mathbb{F}[\sqrt{\epsilon}]$; le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}$, qui est de rang q, est donné par :



Soit σ la conjugaison associée, un élément $x \in \mathfrak{g}_1$ s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_{1 \leq i \leq 2q} (x_i \overline{X}_{\epsilon_1 - \epsilon_{i+2}} + \overline{x_i} \ \sigma(\overline{X}_{\epsilon_1 - \epsilon_{i+2}}) + y_i \overline{X}_{\epsilon_1 + \epsilon_{i+2}} + \overline{y_i} \ \sigma(\overline{X}_{\epsilon_1 + \epsilon_{i+2}})) \\ & + & \sum_{1 \leq i \leq n-2q} (\ z_i \overline{X}_{\epsilon_1 - \epsilon_{i+2q}} + \overline{z_i} \ \sigma(\overline{X}_{\epsilon_1 - \epsilon_{i+2q}}) + \ t_i \overline{X}_{\epsilon_1 + \epsilon_{i+2q}} + \overline{t_i} \ \sigma(\overline{X}_{\epsilon_1 + \epsilon_{i+2q}}) \ ) \ , \end{array}$$

avec $x_i, y_i, z_i, t_i \in E$.
En tenant compte des relations suivantes :

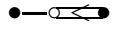
- $F(\sigma(x)) = F(x)$,
- $\sigma(\epsilon_1 \pm \epsilon_{2i+2}) = \epsilon_2 \pm \epsilon_{2i+1}$ et $\sigma(\epsilon_1 \pm \epsilon_{2i+1}) = \epsilon_2 \pm \epsilon_{2i+2}$ pour $i = 1, ..., q-1$,
- $\sigma(\epsilon_1 + \epsilon_j) = \epsilon_2 - \epsilon_j$ et $\sigma(\epsilon_1 - \epsilon_j) = \epsilon_2 + \epsilon_j$ pour $j = 2q+1, ..., n$,

il est immédiat que F est de la forme :

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \sum_{1 \leq i \leq q-1} (\ c_i \ x_{2i} \ \overline{y_{2i-1}} + \overline{c_i \ x_{2i}} \ y_{2i-1} + d_i \ x_{2i-1} \ \overline{y_{2i}} + \overline{d_i \ x_{2i-1}} \ y_{2i} \ ) \\ & + & \sum_{1 \leq j \leq n-2q} (\ f_j \ z_j \overline{z_j} + g_j \ t_j \overline{t_j} \ ) \quad , \quad c_i, d_i \in \mathbb{E}^* \ , \ f_j, g_j \in \mathbb{F}^*. \end{array}$$

Ainsi F est la somme directe de $q-1$ formes quadratiques Q_1 de la forme $Q_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x \ \overline{y} + \overline{x} \ y$ avec $x = x_1 + \sqrt{\epsilon} \ x_2$ et $y = y_1 + \sqrt{\epsilon} \ y_2$, Q_1 a pour discriminant 1 et $\gamma(Q_1) = 1$, et de $n - 2q$ formes quadratiques Q_j de la forme $Q_j(z_1, z_2, t_1, t_2) = \ f_j \ z \ \overline{z} + \ g_j \ t\overline{t}$ avec $z = z_1 + \sqrt{\epsilon} \ z_2$ et $t = t_1 + \sqrt{\epsilon} \ t_2$, qui sont de discriminant 1 également.

Soit j fixé et soit $\overline{\mathfrak{l}}$ l'algèbre engendrée par $\overline{\mathfrak{g}}^{\pm(\epsilon_1 \pm \epsilon_j)}$ et $\overline{\mathfrak{g}}^{\pm(\epsilon_2 \pm \epsilon_j)}$, $\overline{\mathfrak{l}}$ est $\sigma-$stable et $\mathfrak{l} = \overline{\mathfrak{l}} \cap \sigma(\overline{\mathfrak{l}})$ est de rang 1, de diagramme de Satake :



Q_j est un invariant relatif fondamental du préhomogène : $(\mathfrak{l}\cap\mathfrak{g}_0, \mathfrak{l}\cap\mathfrak{g}_1)$ donc Q_j est anisotrope d'où $\gamma(Q_j) = -1$ dans le cas réel et $h(Q_j) = -(-1,-1) = -\alpha(1)^4$ dans le cas $\mathfrak{p}$-adique car le discriminant de Q_j est 1 donc $\gamma(Q_j) = -1$.
Ainsi F a pour discriminant 1 et $\gamma(F) = (-1)^{n-2q} = (-1)^n$. □

On rappelle que :

$$b_{\mathfrak{g},P_0}(s_1,...,s_p) = \prod_{\ell=0}^{p-1}\Big((\sum_{p-\ell}^{p} s_i + 2\ell)\ .(\sum_{p-\ell}^{p} s_i + 2n - 6p + 2\ell + 1)\ \Big),$$

et que pour $\pi = (\pi_1,...,\pi_p) \in (\widehat{\mathbb{F}^*})^p$

$$\rho_{b_{\mathfrak{g},P_0}}(\pi) = \prod_{l=0}^{p-1} \rho\ (\pi_{p-l}...\pi_p|\ |^{2l+1})\rho\ (\pi_{p-l}...\pi_p|\ |^{2(l+n-3p+1)}).$$

Les facteurs ρ ont été explicités dans le §3.6.

Théorème 7.2.2 *On suppose que $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (C_n, α_{2p}) et soit $f \in S(\mathfrak{g}_1)$, alors pour $\forall f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $\pi \in (\widehat{\mathbb{F}^*})^p$ on a :*

$$Z^*(\hat{f};\pi) = \gamma^{np}\rho_{b_{\mathfrak{g},P_0}}(\pi)Z(f;\pi^*|\ |^{-2(n-2p)1_p})$$

avec $\gamma^n = \gamma(F_1)$, $\gamma = 1$ (resp.$\gamma = -1$) lorsque $\mathfrak{g}$ est déployé (resp.de type CII).

Démonstration: On procède par récurrence sur p.
Le cas $p = 1$ découle du 2) du théorème 3.6.5, du lemme 7.2.1 et de la normalisation choisie puisque dans ce cas $\mathfrak{g}_1$ est de dimension $4(n-2)$ et F_1 de discriminant 1..
On suppose le théorème vérifié lorsque $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type $(C_m, \alpha_{2(p-1)})$.
Lorsque $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (C_n, α_{2p}), on applique la proposition 5.3.1 avec $H = \mathbb{F}^*$ et $k = 1$, puisque toutes les hypothèses de cette proposition sont vérifiées. En effet, en reprenant les notations de la proposition 5.3.1 et $z \in W^*_{\mathfrak{t}_0}$, soient z_i (resp.z_i^{-1}) les projections de z sur $E_{-2}(H_i)\cap\mathfrak{g}_{-1}$ (resp.sur $E_2(H_i)\cap\mathfrak{g}_1$) et $\mathfrak{s}_i$ l'algèbre engendrée par z_i et z_i^{-1} alors $\mathfrak{U} = \cap_{2\le i\le p}\ \mathfrak{U}(\mathfrak{s}_i)$ or $\mathfrak{U}(\mathfrak{s}_p)$ est de même type que $\mathfrak{g}$ (prop. 7.1.3) donc, par cette même proposition, il en est de même pour $\mathfrak{U}$, comme $(\overline{\mathfrak{U}}_0, \overline{\mathfrak{U}}_1)$ est de type $(C_{n-3(p-1)}, \alpha_2)$, on a pour $\pi_1 \in \widehat{\mathbb{F}^*}$:

$$b(\pi_1) = \gamma^{n-3p+3}\rho(\pi_1|\ |)\rho(\pi_1|\ |^{2(n-3p+1)}).$$

$(\overline{\mathfrak{U}'}_0, \overline{\mathfrak{U}'}_1)$ est de type $(C_{n-3}, \alpha_{2(p-1)})$ et $\mathfrak{U}'$ est déployée (resp. de type CII) lorsque $\mathfrak{g}$ l'est (prop.7.1.3), donc par récurrence pour $(\pi_1,...,\pi_{p-1}) \in (\widehat{\mathbb{F}^*})^{p-1}$:

$$c(\pi_1,...,\pi_{p-1}) = \gamma^{(n-3)(p-1)} \prod_{0\le l\le p-2} \rho\ (\pi_{p-1-l}...\pi_{p-1}|\ |^{2l+1})\rho\ (\pi_{p-1-l}...\pi_{p-1}|\ |^{2(l+n-3p+1)}).$$

Notons que $r_1 = 2$ (cf. relation 7.1)). □

Remarques

1. Dans le cas réel non déployé, le théorème a été établi dans un cadre plus général par J-L Clerc (théorème 2 de [Cl]).
2. Dans le cas symplectique déployé, on peut montrer que $\mathfrak{g}"_1$ est une seule orbite pour P_0 à l'aide du théorème de Witt.
3. On ne donne pas toutes les équations fonctionnelles qui se déduisent du théorème 7.2.2 pour G et F_p en prenant $\pi_1 = ... = \pi_{p-1} = id$ (cf.§6).

7.3 Les cas orthogonaux de type I

$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type $BI(n,k)$ ou $DI(n,k)$ avec l'hypothèse supplémentaire $3k \leq 2(n-1)+\delta$, et $P_0 = P(H_1, ..., H_k)$.

Rappelons que $\delta = \begin{cases} 0 \text{ dans le cas DI(n,k),} \\ 1 \text{ dans le cas BI(n,k).} \end{cases}$

On procède comme dans le cas symplectique en ramenant le calcul des coefficients de l'équation fonctionnelle à ceux associés aux formes quadratiques sous-jacentes, ce qui nécessite dans cet exemple quelques choix supplémentaires.

7.3.1 Normalisation des invariants relatifs

Les sous-espaces radiciels : $\mathfrak{g}^{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j}$ pour $1 \leq i < j \leq k$, sont de dimension 1 et engendrent une algèbre de Lie simple de type D_k que l'on munit d'un système de Chevalley, (X_α), tel que les coefficients correspondants vérifient les conditions :

$$\text{Soit} \quad i<j \text{ et } \ell \neq i,j \quad \text{alors} \quad N_{\epsilon_i-\epsilon_j, \epsilon_j \pm \epsilon_\ell} = \begin{cases} -1 \text{ si } i<\ell<j \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

Un tel système existe ([Bou 2],chap.VIII,§13, $n°4$), on dit qu'il est $D-$adapté.Dans ces conditions on a :

Lemme 7.3.1 *1.* $N_{\epsilon_i-\epsilon_j, \pm\epsilon_\ell-\epsilon_i} = \begin{cases} 1 \textit{ si } i<\ell<j \textit{ ou } j<i<\ell \textit{ ou } \ell<j<i, \\ -1 \textit{ si } \ell<i<j \textit{ ou } i<j<\ell \textit{ ou } j<\ell<i. \end{cases}$

2. Pour $1 \leq i < j \leq k$, *soit* $\theta_{i,j} = \theta_{X_{\epsilon_i-\epsilon_j}, h_{\epsilon_i-\epsilon_j}}(-1)$, *alors pour* $\ell \neq i,j$ *et* $s,t = \pm 1$, *on a :*

$$\theta_{i,j}(X_{s\epsilon_i - t\epsilon_\ell}) = -N_{\epsilon_i-\epsilon_j, \epsilon_\ell-\epsilon_i} X_{s\epsilon_j - t\epsilon_\ell}.$$

Démonstration: 1) Lorsque $i<j$ on a :

$$N_{\epsilon_i-\epsilon_j, \pm\epsilon_\ell-\epsilon_i} = -N_{-\epsilon_i+\epsilon_j, \pm\epsilon_\ell-\epsilon_j} = -N_{\epsilon_i-\epsilon_j, \epsilon_j \mp \epsilon_\ell},$$

((3) du lemme 4 et proposition 7,§2, $n°4$, chap.VIII,[Bou 2]) et lorsque $i>j$ on a :

$$N_{\epsilon_i-\epsilon_j, \pm\epsilon_\ell-\epsilon_i} = N_{\epsilon_j-\epsilon_i, \epsilon_i \mp \epsilon_\ell},$$

or le système est (D) adapté d'où le résultat.
2) C'est un simple calcul, en remarquant que $N_{\epsilon_i-\epsilon_j,\epsilon_\ell-\epsilon_i} = N_{\epsilon_i-\epsilon_j,\pm\epsilon_\ell-\epsilon_i}$. □

On rappelle que $H_i = h_{\epsilon_{k-i+1}}$ pour $i = 1, ..., k$ et avec la normalisation choisie, on a pour toute racine $\alpha = \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$, avec $1 \leq i < j \leq k$, $\widetilde{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$.

On définit les formes quadratiques suivantes pour $i = 1, ..., k$:

$$x \in E_2(H_i) \cap \mathfrak{g}_1 \quad G_i(x) = b \begin{cases} \widetilde{B}(ad(x)^2(X_{-\epsilon_1-\epsilon_{k-i+1}}), X_{\epsilon_1-\epsilon_{k-i+1}}) \text{ pour } 1 \leq i \leq k-1, \\ \\ \widetilde{B}(ad(x)^2(X_{-\epsilon_1-\epsilon_2}), X_{-\epsilon_1+\epsilon_2}) \text{ pour } i = k \end{cases}$$

avec $b \in \mathbb{F}^*$.

Pour $i = 1, ..., k$, G_i représente l'invariant relatif fondamental du préhomogène commutatif régulier :

$$(\mathfrak{U}(\oplus_{1\leq j\neq i\leq k}\mathbb{F}H_j)_0, \mathfrak{U}(\oplus_{1\leq j\neq i\leq k}\mathbb{F}H_j)_1 = E_2(H_i) \cap \mathfrak{g}_1),$$

c'est une forme quadratique non dégénérée et relativement invariante par $\cap_{1\leq i\leq k} G_{H_i}$.
Toutes ces formes quadratiques sont équivalentes, en effet :

Lemme 7.3.2 *Pour $1 \leq i < j \leq k$ on a $G_{k-i+1} \circ \theta_{i,j} = G_{k-j+1}$.*

Démonstration: Pour $i \geq 2$ ou bien $i = 1$ et $j \geq 3$, le calcul donne :

$$\theta_{i,j}(X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_i}) = -N_{\epsilon_i-\epsilon_j,\epsilon_1-\epsilon_i} X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_j} = X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_j} \quad \text{(lemme 7.3.1)}$$

et pour $i = 1$ et $j = 2$ on a $\theta_{1,2}(X_{-\epsilon_1+\epsilon_2}) = X_{\epsilon_1-\epsilon_2}$ et $\theta_{1,2}(X_{-\epsilon_1-\epsilon_2}) = X_{-\epsilon_1-\epsilon_2}$. □

Remarques :

1) Le changement de système de Chevalley $D-$adapté a pour conséquence de multiplier toutes les formes quadratiques par une même constante définie à $\mathbb{F}^{*2}$ près.

En effet, soit X'_α un autre système de Chevalley $D-$adapté alors il existe une application t du système de racines D_k dans $\mathbb{F}^*$ telle que $X'_\alpha = t(\alpha)X_\alpha$. Comme les coefficients $N_{.,.}$ sont les mêmes pour les deux systèmes de Chevalley, t est un morphisme du $\mathbb{Z}$-module associé à D_k et $t(\epsilon_1 - \epsilon_i)t(-\epsilon_1 - \epsilon_i)t(\epsilon_1 - \epsilon_2)^{-1}t(-\epsilon_1 - \epsilon_2)^{-1} \in \mathbb{F}^{*2}$ pour $i = 2, ..., k$.

2) On rappelle que $\dim(\mathfrak{g}^{\epsilon_1}) = 2(n-m) + \delta$.

• Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on choisit la constante b telle que G_1 soit de signature (p, q) avec $p \geq q$.

• Dans le cas BI, lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique, on choisit la constante b telle que discriminant$(G_1) = (-1)^{n-m}$ dans un souci de simplification des coefficients de l'équation fonctionnelle (cf.§7.3.4).

Les invariants $F_1, F_2, ..., F_k$ sont normalisés par la condition :

$$\text{pour} \quad x = \sum_{1 \leq j \leq k} x_j \in W_{\mathfrak{t}_0} \quad F_i(x) = \prod_{1 \leq j \leq i} G_j(x_j) \ ,$$

il est alors aisé de vérifier que :

$$\text{pour} \quad y = \sum_{1 \leq j \leq k} y_j \in W^*_{\mathfrak{t}_0} \quad F^*_i(y) = \prod_{k-i+1 \leq j \leq k} G^*_j(y_j) \ .$$

Indiquons la nature de la forme quadratique G_i et de sa restriction aux centralisateurs de tds.

Lemme 7.3.3 *$G_1 \sim G_a \oplus \widetilde{G}_1$, $G_a = G_1/\mathfrak{g}^{\epsilon_1}$ est une forme quadratique anisotrope, $\widetilde{G}_1$ étant hyperbolique.*

Cas réel : G_1 a pour signature (p_0, q_0) avec $q_0 = m - k$ et $p_0 = 2n - m - k + \delta$; on a : $N = \dfrac{p_0 + q_0}{2}$.

Démonstration: 1) Lorsque $m = k$, $\mathfrak{U}(\oplus_{2 \leq j \leq k} \mathbb{F} H_j)$ est de rang 1 donc la forme quadratique G_1 est anisotrope, donc définie positive par normalisation dans le cas réel.
2) Lorsque $m > k$, prenons un système de Chevalley $D-$adapté de l'algèbre simple de type D_m définie par $\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq m\}$ et soit $x \in E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$, $x = \sum_{k+1 \leq \ell \leq m} (x_\ell X_{\epsilon_k - \epsilon_\ell} + y_\ell X_{\epsilon_k + \epsilon_\ell}) + Y, Y \in \mathfrak{g}^{\epsilon_k}$, le calcul donne :

$$G_1(x) = 2bb_1^2 (\sum_{k+1 \leq \ell \leq m} x_\ell y_\ell) + G_1(Y) \ ,$$

b_1^2 étant la constante provenant du système de Chevalley, or la restriction de G_1 à $\mathfrak{g}^{\epsilon_k}$ est anisotrope donc définie positive par choix de b dans le cas réel d'où le résultat. □

Lorsque Δ est de type B_n, on note Q_a la classe d'équivalence de la restriction d'une des formes quadratiques G_{k-i+1} à $\mathfrak{g}^{\epsilon_i}$; lorsque Δ est de type D_n, on pose $\forall t \in \mathbb{F}^* : \gamma_{\tau \circ Q_a}(t) = 1$ par extension.

Soit $z \in E'_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1 = E'_2(h_{\epsilon_k}) \cap \mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{U}^{(z)} = \mathfrak{U}(\mathbb{F}z \oplus \mathbb{F}H_1 \oplus \mathbb{F}z^{-1})$, alors pour $i = 2, ..., k$ on a $\dim(\mathfrak{U}_1^{(z)} \cap E_2(H_i)) = \dim(E_2(H_i) \cap \mathfrak{g}_1) - 1$ et :

Lemme 7.3.4 *Pour $i = 2, ..., k$: $G_i \sim G_i/_{\mathfrak{U}_1^{(z)} \cap E_2(H_i)} \oplus G_1(z)X^2$.*

Démonstration: Pour $i = 2, ..., k$, on a : $E_2(H_i) \cap \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{U}_1^{(z)} \cap E_2(H_i) \oplus \mathbb{F}v$, avec $v = [z, X_{-\epsilon_k + \epsilon_{k-i+1}}]$.
1) Lorsque $k = 2$:

$$[v, X_{-\epsilon_1 + \epsilon_2}] = [[z, X_{\epsilon_1 - \epsilon_2}], X_{-\epsilon_1 + \epsilon_2}] = [z, [X_{\epsilon_1 - \epsilon_2}, X_{-\epsilon_1 + \epsilon_2}]] = -[z, h_{\epsilon_1 - \epsilon_2}] = -z$$

car $[z, X_{-\epsilon_1+\epsilon_2}] = 0$, donc pour $y \in \mathfrak{U}_1^{(z)} \cap E_2(H_2)$ on a :

$$[y, [v, X_{-\epsilon_1+\epsilon_2}]] = -[y, z] = 0$$

d'où :

$$t \in \mathbb{F} \ : \ G_2(y + tv) = G_2(y) + t^2 G_2(v) = G_2(y) + t^2 G_1(z).$$

2) Lorsque $k \geq 3$.
Pour $i \leq k-1$:

$$[v, X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_{k-i+1}}] = N_{-\epsilon_k+\epsilon_{k-i+1},\pm\epsilon_1-\epsilon_{k-i+1}}[z, X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_k}] = -[z, X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_k}]$$

(1),lemme 7.3.1) car $[z, X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_{k-i+1}}] = 0$ donc $G_i(v) = G_1(z)$ et pour $y \in \mathfrak{U}_1^{(z)} \cap E_2(H_i)$ on a :

$$[y, [v, X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_{k-i+1}}]] = -[z, [y, X_{\pm\epsilon_1-\epsilon_k}]] = 0,$$

d'où :

$$t \in \mathbb{F} \ : \ G_i(y + tv) = G_i(y) + t^2 G_i(v) = G_i(y) + t^2 G_1(z).$$

De même pour $i = k$ on a :

$$[v, X_{-\epsilon_1\pm\epsilon_2}] = N_{\epsilon_1-\epsilon_k,-\epsilon_1\pm\epsilon_2}[z, X_{\pm\epsilon_2-\epsilon_k}] = [z, X_{\pm\epsilon_2-\epsilon_k}] \ \ (1), \text{lemme } 7.3.1)$$

donc pour $y \in \mathfrak{U}_1^{(z)} \cap E_2(H_k)$ on a :

$$[y, [v, X_{-\epsilon_1\pm\epsilon_k}]] = [z, [y, X_{\pm\epsilon_2-\epsilon_k}]] = 0.$$

De plus :

$$G_k(v) = b\widetilde{B}(ad(z)^2(X_{\epsilon_2-\epsilon_k}), X_{-\epsilon_2-\epsilon_k}) = b\widetilde{B}(ad(z)^2(\theta_{1,2}(X_{\epsilon_1-\epsilon_k})), \theta_{1,2}(X_{-\epsilon_1-\epsilon_k})) = G_1(z)$$

(2) du lemme 7.3.1) d'où le résultat. □

Remarque 7.3.5 *$disc(G_i/_{\mathfrak{U}_1^{(z)}\cap E_2(H_i)}) = G_1(z).disc(G_1)$ et pour $t \in \mathbb{F}^*$ on a :*

$$\gamma(tG_i/_{\mathfrak{U}_1^{(z)}\cap E_2(H_i)}) = \gamma(tG_i)\alpha(-tG_1(z)) = \gamma(tQ_a)\alpha(-tG_1(z)).$$

De la proposition 7.1.3, des 2 lemmes précédents, de leur démonstration et avec les normalisations choisies, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Lemme 7.3.6 *Dans le cas réel, prenons $G_1(z) = \pm 1$ alors la restriction de G_1 à $\mathfrak{U}_1^{(z)} \cap E_2(H_i)$ a pour signature $(p_0 - \frac{G_1(z)+1}{2}, q_0 - \frac{1-G_1(z)}{2})$ et $\mathfrak{U}^{(z)}$ a pour rang : rang $(\mathfrak{g}) - 1 + \frac{G_1(z)-1}{2}$.*

Remarque 7.3.7 *Lorsque rang$(\mathfrak{g}) \geq 2k$ on a rang$(\mathfrak{U}^{(z)}) \geq 2(k-1)$.*

En effet, comme $m > k$, on prend un système de Chevalley de l'algèbre simple de type D_m définie par $\{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, 1 \leq i < j \leq m\}$ et on peut supposer que $z = cX_{\epsilon_k-\epsilon_{k+1}} + dX_{\epsilon_k+\epsilon_{k+1}}$ (à l'action des automorphismes élémentaires près puisqu'on est dans un préhomogène commutatif régulier) donc :

$$\mathfrak{U}_1^{(z)} = \oplus_{1\leq j\leq k-1} \ \mathfrak{g}^{\epsilon_j} \ \ \oplus_{1\leq j\leq k-1, k+2\leq \ell\leq m} \ \mathfrak{g}^{\epsilon_j\pm\epsilon_\ell} \ \ \oplus_{1\leq j\leq k-1} \ \mathbb{F}Y_j \ ,$$

$$\text{avec} \quad Y_j = cX_{\epsilon_j-\epsilon_{k+1}} - dX_{\epsilon_j+\epsilon_{k+1}} \ . \qquad \square$$

7.3.2 Le résultat ($\mathbf{3k \leq 2(n-1)+\delta}$)

Pour $u = (u_1, ..., u_k) \in (\mathbb{F}/\mathbb{F}^{*2})^k$ on rappelle que :

$O_u = O_{u_1,...,u_k} = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F_1(x) \in u_1\mathbb{F}^{*2}\ ,\ F_2(x) \in u_1u_2\mathbb{F}^{*2}\ , ..., F_k(x) \in u_1...u_k\mathbb{F}^{*2}\}$,

$O_u \cap W_{\mathfrak{t}_0} = \{x = \sum_{1\leq i\leq k} x_i \in W_{\mathfrak{t}_0} | G_i(x_i) \in u_i\mathbb{F}^{*2} \text{ pour } i = 1, ..., k\}$,

$O_u^* = O^*_{u_k,...,u_1} = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid F_1^*(x) \in u_k\mathbb{F}^{*2}\ ,\ F_2^*(x) \in u_{k-1}u_k\mathbb{F}^{*2}\ , ..., F_k^*(x) \in u_k...u_1\mathbb{F}^{*2}\}$,

$O_u^* \cap W_{\mathfrak{t}_0}^* = \{x = \sum_{1\leq i\leq k} x_i \in W_{\mathfrak{t}_0}^* \mid G_i^*(x_i) \in u_i\mathbb{F}^{*2} \text{ pour } i = 1, ..., k\}$,

sont des ouverts (éventuellement vides) et que $Z_u(f;\pi) = Z(f\mathbf{1}_{O_u};\pi)$ (resp.$Z_u^*(h;\pi) = Z^*(h\mathbf{1}_{O_u^*};\pi)$) pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ (resp.$h \in S(\mathfrak{g}_{-1})$.

Dans le cas réel, on convient de prendre $u \in \{-1, 1\}^k$.

Lemme 7.3.8 *1. Dans le cas réel, O_u (resp.O_u^*) est non vide $\Leftrightarrow$ Max $(-k, k-2q_0) \leq \sum_{1\leq i\leq k} u_i \leq$Min $(k, 2p_0 - k)$.*

2. Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, lorsque $2n - 3k + \delta \geq 3$, O_u (resp.O_u^*) est non vide pour tout $u \in (\mathbb{F}/\mathbb{F}^{*2})^k$.

3. Lorsque rang$(\mathfrak{g}) \geq 2k$, $\forall u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k$ les ouverts O_u et O_u^* sont non vides.

Démonstration: Dans les 3 cas on procède par récurrence sur k, obtenue par descente.

a) Lorsque $k = 1$, le résultat est évident dans le cas réel et dans le cas $\mathfrak{p}$-adique puisque $n \geq 3$ donc $\mathfrak{g}_1$ est de dimension ≥ 4 d'où $\mathbb{F}^* \subset G_1(\mathfrak{g}_1)$ dans le cas $\mathfrak{p}$-adique.
Pour 3), on note que G_1 représente 0 par le lemme 7.3.3 (cf sa démonstration).

b) On suppose le lemme vérifié pour $k - 1 \geq 1$.

c) Lorsque $k \geq 2$, $Ou \neq \emptyset \Leftrightarrow$ il existe $z \in E_2'(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ tel que $G_1(z) = u_1$ et $O^{\mathfrak{U}^{(z)}}_{u_2,...,u_k} \neq \emptyset$ dans le préhomogène $(\mathfrak{U}_0^{(z)}, \mathfrak{U}_1^{(z)})$ utilisé dans le lemme 7.3.4.
G_1 est une forme quadratique non dégénérée définie sur un espace vectoriel de dimension $2(n-k)+\delta$ et donnée dans le lemme 7.3.3, pour lequel on applique a).

Le préhomogène $(\mathfrak{U}_0^{(z)}, \mathfrak{U}_1^{(z)})$ est de type BI$(n-2, k-1)$ ou DI$(n-1, k-1)$ lorsque $n \geq 5$, par la proposition 7.1.3.
Comme $2n - 3k + \delta = 2n' - 3k' + \delta'$, avec $n' = n - 2 + \delta$, $k' = k - 1$ et $\delta' = 1 - \delta$, on conclut par récurrence pour 2).
On procède de même dans le cas réel en appliquant également le lemme 7.3.6.

Pour 3), on applique la remarque 7.3.7 et l'hypothèse de récurrence au préhomogène $(\mathfrak{U}_0^{(z)}, \mathfrak{U}_1^{(z)})$ en notant que G_1 représente 0.

Dans le cas BI(n,k) avec $n \leq 4$, on a $k=2$ puisque $k \geq 2$ et que $3k \leq 2(n-1)+\delta \leq 7$ donc $n=4$.
$(\overline{\mathfrak{U}^{(z)}}_0, \overline{\mathfrak{U}^{(z)}}_1)$ est de type (A_3, α_2) qui est encore un préhomogène dont l'invariant relatif fondamental est une forme quadratique non dégénérée définie sur un espace vectoriel de dimension 4 d'où le résultat dans le cas $\mathfrak{p}$-adique (2) et 3)).
Dans le cas réel, on applique le lemme 7.3.6 pour 1).
Lorsque $\mathfrak{g}$ est de rang≥ 4, $\mathfrak{g}$ est déployée donc G_2 est de signature $(3,2)$ d'où $G_2/\mathfrak{U}_1^{(z)}$ représente 0 par le lemme 7.3.6. □

Notations :

Pour $(u,v) \in (\mathbb{F}/\mathbb{F}^{*2})^k$, f application de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ à valeur complexe et $\pi_1, \pi_2 \in \widehat{\mathbb{F}^*}$, on note :

$$A_{v,u}^{(f)}(\pi_1;\pi_2) = \sum_{t \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} f(t)\rho(\pi_1|\ |;tv)\rho(\pi_1\pi_2;tu).$$

On rappelle que $N = \dfrac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{2k} = n-k+\dfrac{\delta}{2}$.

Théorème 7.3.9 $\mathfrak{g}$ *est de type DI ou BI(n,k) avec* $\mathbf{3k \leq 2(n-1)+\delta}$.

Soit $v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k$ *tel que* O_v^* *soit non vide, alors pour* $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ *et* $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k) \in (\widehat{\mathbb{F}^*})^k$ *on a :*

$$Z_v^*(\mathcal{F}f;\pi) = \sum_{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k} a_{v,u}(\pi) Z_u(f;\ \pi^*|\ |^{-N1_k}),$$

avec $a_{v,u}(\pi) = 0$ *lorsque* O_v^* *est vide et sinon :*

$$a_{v,u}(\pi) = \prod_{1 \leq \ell \leq k} A_{v_\ell,u_\ell}^{(f_\ell)}(\pi_{k-\ell+1}....\pi_k|\ |^{\frac{1}{2}(\ell-1)}, |\ |^{\frac{1}{2}(2n-3k+\delta+1)})\ ,\ avec$$

$$f_\ell(t) = \begin{cases} \gamma(tQ_a)\ lorsque\ k=1 \\ \gamma(tQ_a)\prod_{2 \leq j \leq k}\alpha(-tv_j)\ lorsque\ \ell=1\ et\ k \geq 2, \\ \gamma(tQ_a)\prod_{1 \leq i \leq \ell-1}\alpha(-tu_i)\prod_{\ell+1 \leq j \leq k}\alpha(-tv_j)\ lorsque\ 2 \leq \ell \leq k-1, \\ \gamma(tQ_a)\prod_{1 \leq i \leq k-1}\alpha(-tu_i)\ lorsque\ \ell=k. \end{cases}$$

Démonstration: On procède par récurrence sur k, le cas $k=1$ est donné dans le théorème 3.6.5,5), on notera que $\widetilde{B}(\frac{H_1}{2},\frac{H_1}{2})=-1$.
On suppose le résultat vrai pour $k-1\geq 1$.
Lorsque $k\geq 2$, on applique la proposition 5.3.1, dont on reprend les notations, avec l'élément 1-simple H_1 .
Soient $w=(u_1,v_2,...,v_k)$ et $z=\sum_{1\leq i\leq k}y_i\in O_w^*\cap W_{\mathfrak{t}_0}^*$, avec $y_i\in E_{-2}(H_i)\cap\mathfrak{g}_{-1}, i=1,...,k$, $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ (resp.$\mathfrak{U}'=\mathfrak{U}(\mathfrak{s}')$), $\mathfrak{s}$ (resp.$\mathfrak{s}'$) étant l'algèbre engendrée par $z_0=\sum_{2\leq i\leq k}y_i$ et $z_0^{-1}=\sum_{2\leq i\leq k}y_i^{-1}$ (resp.$z_{-2}=y_1$ et z_{-2}^{-1}).

$\mathfrak{U}'$ est de type BI$(n-2,k-1)$ ou DI$(n-1,k-1)$ lorsque $n\geq 5$, par la proposition 7.1.3. On a $2(n'-1)-3k'+\delta'=2(n-1)-3k+\delta\geq 1$, avec $n'=n-2+\delta, k'=k-1$ et $\delta'=1-\delta$.
Dans le cas BI(n,k) avec $n\leq 4$, on a $k=2$ en raison de la condition imposée alors $(\overline{\mathfrak{U}'}_0,\overline{\mathfrak{U}'}_1)$ est de type (A_3,α_2) qui est encore un préhomogène dont l'invariant est une forme quadratique non dégénérée.
Dans les 2 cas, les coefficients sont donnés par la relation :

$$c^{(z_{-2})}_{(v_2,...,v_k),(u_2,...,u_k)}(\pi")=\prod_{1\leq\ell\leq k-1}A^{(f'_\ell)}_{v_{\ell+1},u_{\ell+1}}(\pi_{k-\ell}....\pi_k|\ |^{\frac{\ell}{2}};|\ |^{\frac{1}{2}(2n-3k+\delta+1)}),$$

ceci en appliquant l'hypothèse de récurrence lorsque $k\geq 3$ et pour $k=2$ le théorème 3.6.5,5), avec $f'_\ell(t)=f_{\ell+1}(t)$ par la remarque 7.3.5 et par l'hypothèse de récurrence lorsque $k\geq 3$.

$\mathfrak{U}=\cap_{2\leq i\leq k}\ \mathfrak{U}(\mathbb{F}y_i\oplus\mathbb{F}H_i\oplus\mathbb{F}y_i^{-1})$ or $\mathfrak{U}(\mathbb{F}y_k\oplus\mathbb{F}H_k\oplus\mathbb{F}y_k^{-1})$ est de type DI$(n-1,k-1)$ ou BI$(n-2,k-1)$ par la proposition 7.1.3 lorsque $k\geq 3$, ou bien $k=2$ mais alors, comme ci-dessus, l'invariant relatif fondamental est une forme quadratique non dégénérée.
Dans tous les cas l'invariant relatif fondamental du préhomogène $(\mathfrak{U}_0,\mathfrak{U}_1)$ est la restriction de la forme quadratique non dégénérée G_1 à $\mathfrak{U}_1$ de dimension $2n-3k+\delta+1(\geq 3)$ et pour $t\in\mathbb{F}^*$ on a :

$$\gamma(tG_1/\mathfrak{U}_1)=\gamma(tG_1)\prod_{2\leq i\leq k}\alpha(-tG_i^*(y_i))$$

en itérant la remarque 7.3.5 donc

$$b^{(z_0)}_{v_1,u_1}(\pi')=A^{(f_1)}_{v_1,u_1}(\pi_k;|\ |^{\frac{1}{2}(2n-3k+\delta+1)}),$$

on termine en appliquant la proposition 5.3.1. □

Lorsque $\pi_\ell=\tilde{\omega}_{\epsilon_\ell}|\ |^{s_\ell}$, avec $\epsilon_\ell\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, pour $\ell=1,...,k$ on a :

$$\begin{aligned}a_{v,u}(\pi_k\pi_{k-1}^{-1},...,\pi_2\pi_1^{-1},\pi_1)&=(\textstyle\prod_{\ell=1}^k(\epsilon_\ell,u_\ell v_\ell)\ )a_{v,u}(s_k-s_{k-1},...,s_1)\text{ et}\\ a_{v,u}(s_k-s_{k-1},...,s_1)&=\textstyle\prod_{\ell=1}^k A^{(f_\ell)}_{v_\ell,u_\ell}(|\ |^{s_\ell+\frac{1}{2}(\ell-1)};|\ |^{\frac{1}{2}(2n-3k+\delta+1)}).\end{aligned}$$

7.3.3 Le cas réel ($p_0 + q_0 = 2n - 2k + \delta$)

On rappelle que $\mathfrak{g}_1$ peut s'identifier à $M_{k,p_0+q_0}(\mathbb{R})$ et que pour $\ell = 1, ..., k$ F_ℓ est alors proportionnel à :

$$det_\ell(AI_{p_0,q_0}{}^tA) \text{ avec } A \in M_{k,p_0+q_0}(\mathbb{R}) \text{ et } I_{p_0,q_0} = \begin{pmatrix} 1_{p_0} & 0_{p_0} \\ 0_{q_0} & -1_{q_0} \end{pmatrix} ,$$

$det_\ell(X)$ étant le déterminant de la matrice tronquée X_ℓ définie pour $\ell = 1, ..., k$ par :

$$X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq k} \text{ alors } X_\ell = (x_{i,j})_{k-\ell+1\leq i,j\leq k} \ .$$

Soient $s_1, ..., s_k \in \mathbb{C}$ on a :

$$a_{v,u}(s_k - s_{k-1}, ..., s_1) = C(s_1, ..., s_k) a'_{v,u}{}^{(p_0,q_0;k)}(s_1, ..., s_k) \text{ avec :}$$

$$C(s_1, ..., s_k) = 2^k . (2\pi)^{-k(\frac{p_0+q_0+2}{2})}(2\pi)^{-2(s_1+...+s_k)} . \prod_{\ell=1}^{k} \Gamma(s_\ell + \frac{\ell+1}{2})\Gamma(s_{k-\ell+1} + \frac{p_0+q_0-\ell+1}{2})$$

$$a'_{v,u}{}^{(p_0,q_0;k)}(s_1, ..., s_k) = \prod_{\ell=1}^{k} \cos(\frac{\pi}{4} \ . \ \phi_\ell^{(p_0,q_0;k)}(v, u; s_\ell) \ , \text{ avec}$$

$$\phi_\ell^{(p_0,q_0;k)}(v, u; s_\ell) = 2(u_\ell + v_\ell) \ (s_\ell + \frac{\ell}{2}) + u_\ell(p_0 + q_0 - k) + (q_0 - p_0) + \sum_{\ell\leq j\leq k} v_j + \begin{cases} 0 \text{ lorsque } \ell = 1, \\ \sum_{1\leq i\leq \ell-1} u_i \text{ lorsque } \ell \geq 2. \end{cases}$$

noté également : $a'_{v,u}$ et $\phi_\ell(v, u; s_\ell)$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Remarque 7.3.10 *1. Comme* $\phi_\ell^{(p_0,q_0;k)}(-v, -u; s_\ell) = -\phi_\ell^{(q_0,p_0;k)}(v, u; s_\ell)$, *on a :*

$$a'_{-v,-u}{}^{(p_0,q_0;k)}(s_1, ..., s_k) = a'_{v,u}{}^{(q_0,p_0;k)}(s_1, ..., s_k) \quad (R9).$$

2. Lorsque $p_0 \geq k$ *on a* $a'_{(1,...,1),(1,...,1)}(s_1, ..., s_k) = \prod_{\ell=1}^{k} \cos(\pi(s_\ell + \frac{\ell+q_0}{2}))$.

3. Dans le cas particulier où $q_0 = 0$, *ce qui correspond à* $\mathfrak{g}$ *de rang* k, $\mathfrak{g}"_1 = O_{(1,...,1)}$ *et* $\mathfrak{g}"_{-1} = O^*_{(1,...,1)}$ *donc pour* $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ *et* $s = (s_1, ..., s_k) \in (\mathbb{C}^*)^k$ *on obtient :*

$$Z^*(\mathcal{F}f; (s_k - s_{k-1}, ..., s_2 - s_1, s_1)) = C(s_1, ..., s_k) \prod_{\ell=1}^{k} \cos(\pi s_\ell + \frac{\pi}{2}\ell) Z(f; s_2 - s_1, ..., s_k - s_{k-1}, -s_k - \frac{p_0}{2}),$$

qui n'est qu'un cas très particulier du théorème 3 de [Cl].

4. Pour $u = (1, ..., 1, -1, ..., -1)$ *avec* $u_1 = ...u_p = 1$ *et* $u_{p+1} = ... = u_k = -1$ *on a :*

$$a'_{u,u}(s_1, ..., s_k) = \prod_{\ell=1}^{p} \cos\pi(s_\ell + \frac{\ell+q_0-q}{2}) \prod_{\ell=p+1}^{k} \cos\pi(s_\ell + \frac{\ell+p_0-p}{2}) \quad \text{avec } q = k - p.$$

La plupart de ces coefficients sont nuls, en effet pour $u \in \{-1,1\}^k$, soit $p(u)$ (resp. $q(u)$) le nombre de composantes positives (resp. négatives) de u ($p(u)-q(u)=\sum_{1\le i\le k} u_i$, $p(u)+q(u)=k$) alors :

Lemme 7.3.11 *1. Soient $u \neq v$, on note $i_1,...,i_r$, avec $i_1 < ... < i_r$, les indices pour lesquels $u_{i_j} = -v_{i_j}$.*

i) Lorsque p_0+q_0+k est pair : $a_{v,u}=0$ pour $r \geq 2$ et pour $r=1$ on a $a_{v,u} \neq 0 \Leftrightarrow p(v)+p_0$ est pair.

ii) Lorsque p_0+q_0+k est impair alors $a_{v,u} \neq 0 \Leftrightarrow v_{i_j} = (-1)^{p(v)+p_0+j-1}$ pour $j=1,...,r$.

2. $a_{v,u}(s_1,...,s_k)=0$ lorsque $|p(u)-p(v)| \geq 2$.

Démonstration: Cela découle simplement de la formule :

$$j=1,...,r: \quad \phi_{i_j}(v,u;s_{i_j}) = (u_{i_j}-1)p_0 + (q_0-k)(u_{i_j}+1) + 2p(v) + 2\alpha_j$$

avec $\alpha_1=0$ et pour $j \geq 2$: $\alpha_j = \sum_{1\le \ell \le j-1} u_{i_\ell}$.

Comme $p_0, q_0, p(v), \alpha_j$ sont entiers, $\frac{\pi}{4}\phi_{i_j} \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$; si $u_{i_j} = u_{i_{j+1}}$ pour une valeur j lorsque $r \geq 2$, on a alors :

$$\phi_{i_{j+1}} = \phi_{i_j} + 2u_{i_j} \quad \text{donc} \quad \cos(\frac{\pi}{4}\ \phi_{i_j}(v,u;s_{i_j})\ )\cos(\frac{\pi}{4}\ \phi_{i_{j+1}}(v,u;s_{i_j})\ ) = 0.$$

Ainsi il reste à regarder les cas pour lesquels pour $j=1,...,r-1$ on a $u_{i_{j+1}} = -u_{i_j}$ mais alors $\phi_{i_{j+2}} = \phi_{i_j}$ donc il suffit de regarder ϕ_{i_1} et ϕ_{i_2} lorsque $r \geq 2$ et ϕ_{i_1} lorsque $r=1$ d'où le résultat.
2) Se déduit simplement de 1). □

Remarques :

1) De la démonstration du lemme précédent, on déduit immédiatement $a'_{v,u}$ lorsqu'il est non nul.

En effet, soit $I = \{i_1,...,i_r\} = \{i \mid u_i + v_i = 0\ \}$, on a :

$$a'_{v,u}(s_1,...,s_k) = B(I) \prod_{1\le l\le k, l\notin I} \cos(\ \frac{\pi}{2}\ [\ (2s_l+l)+(\frac{1-v_l}{2})p_0+(\frac{1+v_l}{2})(q_0-k)+v_l p(v)+v_l C_l(u)\ ]\ )$$

avec :

- $C_l(u)=0$ si $I=\emptyset$ ou bien si $l \leq i_1$ sinon $C_l(u) = \sum_{\{i\in I \mid 1\le i\le l-1\}} u_i$,
- $B(I)=1$ si $I=\emptyset$ et sinon $B(I) = (\ \cos(\frac{\pi}{4}\phi_{i_1})\ )^{r-[\frac{r}{2}]}\ (\ \cos(\frac{\pi}{4}\phi_{i_2})\ )^{[\frac{r}{2}]}$.

2) Notons que l'on retrouve les coefficients de l'équation fonctionnelle associée à $F=F_k$, en effet il est clair que pour tout couple d'entiers (p,q) tels que :

$$p+q=k \ \text{ et vérifiant : } \ \mathrm{Max}(-k, k-2q_0) \leq p-q \leq \mathrm{Min}(k, 2p_0-k)\ \ ,$$

l'ensemble : $O_{p,q} = \cup_{p(u)=p} O_u$ (resp.$O^*_{p,q} = \cup_{p(u)=p} O^*_u$) est inclus dans une seule orbite sous l'action de G.
Pour $s \in \mathbb{C}$, posons :

$$a'_{(p',q');(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s) = \sum_{v|p(v)=p'} a'_{v,u}{}^{(p_0,q_0;k)}(s,...,s) \quad (R1)$$

avec u quelconque tel que $p(u) = p$ (donc $q(u) = q$) alors de manière classique $a'_{(p',q');(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s)$ ne dépend pas du choix de u (cf.2) de la remarque qui suit le théorème 6.2.2) et on a :

$$a_{(p',q');(p,q)}(|\ |^s) = C(s,...,s) a'_{(p',q');(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s).$$

Les coefficients $a'_{(p',q');(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s)$ sont bien connus, ils sont donnés dans le théorème A.1 de [Sa 4] puisqu'on a $a'_{(p',q');(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s) = C^{(p,q)}_{(p',q')}(I_{p_0,q_0}; s)$.

En effet, de manière immédiate, on peut noter que :

i) $a'_{(p',q');(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s) = 0$ si $|p - p'| \geq 2$ (2) du lemme 7.3.11).

ii) $a'_{(q',p');(q,p)}{}^{(q_0,p_0;k)}(s) = a'_{(p',q');(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s)$ (1) remarque 7.3.10).

iii) Lorsque $p_0 \geq k$ on a

$$a'_{(k,0);(k,0)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s) = \prod_{\ell=1}^{k} \cos\pi(s + \frac{\ell + q_0}{2}) \quad (2) \text{ remarque } 7.3.10).$$

iv)

$$\begin{aligned} a'_{(p,q);(p,q)}{}^{(p_0,q_0;k)}(s) &= \prod_{\ell=1}^{p} \cos\pi(s + \frac{\ell + q_0 - q}{2}) \prod_{\ell=p+1}^{k} \cos\pi(s + \frac{\ell + p_0 - p}{2}) \\ &= (-1)^{pq} \prod_{\ell=1}^{q} \cos\pi(s + \frac{\ell + p_0}{2}) \prod_{\ell=q+1}^{k} \cos\pi(s + \frac{\ell + q_0}{2}), \end{aligned}$$

lorsque $q_0 - q \equiv p_0 - p$ (2) ou bien $p_0 - p \equiv 0$ (2) et $q_0 - q \equiv 1$ (2), par le 1) du lemme 7.3.11.

Cependant le calcul général est fastidieux car il fait apparaitre des sommes, il est alors plus simple de noter que :

v)

$$\begin{pmatrix} a'_{(1,0);(1,0)}{}^{(p_0,q_0;1)}(s) & a'_{(1,0);(0,1)}{}^{(p_0,q_0;1)}(s) \\ a'_{(0,1);(1,0)}{}^{(p_0,q_0;1)}(s) & a'_{(0,1);(0,1)}{}^{(p_0,q_0;1)}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi(s + \frac{q_0+1}{2}) & \sin\frac{\pi p_0}{2} \\ \sin\frac{\pi q_0}{2} & \cos\pi(s + \frac{p_0+1}{2}) \end{pmatrix}.$$

vi) Comme :

$$\phi_k(v,u)^{(p_0,q_0;k)}(s) = \phi_1(v_k,u_k)^{(p'_0,q'_0;1)}(s + \frac{k-1}{2}) \quad (R2)$$

avec $p'_0 = p_0 - p(u) + \frac{1+u_k}{2}$ et $q'_0 = q_0 - q(u) + \frac{1-u_k}{2}$ (rappelons que $p(u) \leq p_0$ et que $q(u) \leq q_0$) et que :

$$\prod_{l=1}^{k-1} \cos(\frac{\pi}{4}\phi_l(v,u)^{(p_0,q_0;k)}(s) = \prod_{l=1}^{k-1} \cos(\frac{\pi}{4}\phi_l(v',u')^{(p"_0,q"_0;k-1)}(s) \quad (R3)$$

avec $u' = (u_1, ..., u_{k-1})$, $v' = (v_1, ..., v_{k-1})$, $p"_0 = p_0 - \frac{1+v_k}{2}$ et $q"_0 = q_0 - \frac{1-v_k}{2}$,

les coefficients ${a'_{(p',q');(p,q)}}^{(p_0,q_0;k)}(s)$ vérifient les relations de récurrence du lemme A.3 de [Sa 4], relations de (A4) à (A7) qui proviennent des relations $(R1), (R2), (R3)$.
Notons que (v) est la relation (A8), ii) est la relation (A9), iii) est le lemme A.4, i) le lemme A.6 et iv) une partie du lemme A.8.

Ainsi on a bien l'égalité ${a'_{(p',q');(p,q)}}^{(p_0,q_0;k)}(s) = C^{(p,q)}_{(p',q')}(I_{p_0,q_0}; s)$, ces derniers coefficients étant donnés dans le théorème A.1 de [Sa 4] et c'est l'établissement des formules de récurrence de cette partie de [Sa 4] qui sont à l'origine de ce travail.
Cependant la constante $C(s, ..., s)$ diffère de la constante donnée par F.Sato qui n'a pas de facteur de la forme $2^{\cdots}$.

7.3.4 Le cas p-adique

Posons $r = 2n - 3k + \delta$ et pour $(s_1, ..., s_k) \in \mathbb{C}^k$, $u, v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k$ tels que O_u et O_v^* soient non vides :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{a}_{v,u}(s) & := & a_{v,u}(s_k - s_{k-1}, ..., s_2 - s_1, s_1) \\ & = & \prod_{\ell=1}^k A^{(f_\ell)}_{v_\ell,u_\ell}(|\ |^{s_\ell+\frac{1}{2}(\ell-1)}, |\ |^{\frac{1}{2}(r+1)}). \end{array}$$

Le calcul explicite donne :

$$\widetilde{a}_{v,u}(s) = \alpha(-1)^{ka_0}\ \gamma(Q_a)^k\ C(v,u) \prod_{1\leq\ell\leq k} A^{a_0}_{s_\ell+\frac{1}{2}(\ell+1),s_\ell+\frac{1}{2}(r+\ell)}(v_\ell, u_\ell, w_\ell\delta'_0)$$

avec $\delta'_0 = (-1)^{[\frac{k-\delta}{2}]}\delta_0$ et $\delta_0 = (-1)^{n-m}.\mathrm{discr}(Q_a)$, on rappelle que $\delta_0 = 1$ lorsque $\delta = 1$ par normalisation (§7.3.1) et lorsque $\delta = 0$ pour $m = n$ ou $n - m = 2$,

$$a_0 = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } k+\delta \text{ (i.e. } r) \text{ est impair ,} \\ 1 \text{ lorsque } k+\delta \text{ (i.e. } r) \text{ est pair.} \end{cases} \quad , \ C(v,u) = \prod_{1\leq i\leq k} \alpha(-u_i)^{k-i}\ \alpha(-v_i)^{i-1},$$

$$w_\ell = \begin{cases} v_2.....v_k \text{ lorsque } \ell = 1, \\ u_1.....u_{\ell-1}.v_{\ell+1}.....v_k \text{ lorsque } 2 \leq \ell \leq k-1, \\ u_1.....u_{k-1} \text{ lorsque } \ell = k. \end{cases}$$

Notons que dans ce cas :

$$b_k(s_k - s_{k-1}, ..., s_2 - s_1, s_1) = \prod_{1\leq\ell\leq k} (s_\ell + \frac{\ell+1}{2} - 1)(s_\ell + \frac{\ell+r}{2} - 1),$$

et que lorsque la caractéristique résiduelle de $\mathbb{F}$ est différente de 2 :

$$(1 - q^{-2(s_\ell+\frac{\ell+1}{2})})(1 - q^{-2(s_\ell+\frac{\ell+r}{2})}) A^{a_0}_{s_\ell+\frac{1}{2}(\ell+1),s_\ell+\frac{1}{2}(r+\ell)}(v_\ell, u_\ell, (-1)^{[\frac{k-\delta}{2}]}w_\ell\delta_0)$$

est un polynome en s_ℓ dont les valeurs explicites sont données dans le lemme 3.6.7.

Classiquement, les coefficients de l'équation fonctionnelle associée à F_k s'obtiennent à partir des coefficients $\widetilde{a}_{v,u}(s,...,s)$.

Lorsque $2 \leq 2k \leq n$, soit $H = \{s \in \mathbb{F}^* | sQ_a \sim Q_a\}$ ($H = \mathbb{F}^{*2}$ lorsque $\delta = 1$) et pour $u_0 \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ et $\epsilon = \pm 1$, soit $S(u_0, \epsilon) = \{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k \mid$ il existe $t \in H$ vérifiant $p(tu) = u_0$ et $h(tu) = \epsilon\}$ alors chaque $\cup_{u \in S(u_0,\epsilon)} O_u$ est inclus dans une seule orbite de G dans $\mathfrak{g}_1'$ (cf.[Mu 4]). Comme dans le cas commutatif (§6), on n'effectue pas le calcul des sommes correspondantes qui sont peu maniables, on se contente de donner les sommes de coefficients : $\sum_{o^*} a_{O^*,O}$ lorsque la caractéristique résiduelle de $\mathbb{F}$ est différente de 2.

Lorsque $r \geq 3$, O_u et O_u^* sont non vides pour $u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k$ (lemme 7.3.8), déterminons alors pour $a \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ et $s \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_u(\tilde{\omega}_a| \ |^s) &= (a, p(u)) \sum_{v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k} \widetilde{a}_{v,u}(s,...,s)(a,p(v)) \\ &= \alpha(-1)^{ka_0} \ \gamma(Q_a)^k \Big(\prod_{1 \leq i \leq k} \ \alpha(u_i) \Big)^{-k} (a, p(u)) b_u'(\tilde{\omega}_a| \ |^s) \end{aligned}$$

lorsque la caractéristique résiduelle de $\mathbb{F}$ est différente de 2.

On rappelle les notations pour $z = (z_1, ..., z_k) \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k$:

$$p(z)_i = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } i = 0 \\ z_1 ... z_i \text{ pour } i = 1, ..., k, \end{cases} \quad \text{et } h(z)_i = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } i = 1 \\ \prod_{j=1}^{k-1} (z_{j+1}, z_1 ... z_j) \text{ pour } i = 1, ..., k \end{cases}$$

ainsi que $p(z) := p(z)_k$ et $h(z) := h(z)_k$.

Proposition 7.3.12 *Lorsque la caractéristique résiduelle de $\mathbb{F}$ est différente de 2, $k \geq 2$ et $r \geq 3$ on a :*

$$\widetilde{b}_u(\tilde{\omega}_a| \ |^s) = f_{[\frac{k+1}{2}]}(s) f_{[\frac{k+\delta+1}{2}]}(s + \frac{1}{2}r - \frac{1}{1+a_0}) \rho(\tilde{\omega}_a| \ |^{s+1}) \gamma(Q_a)^k B_u(\tilde{\omega}_a| \ |^s)$$

avec :

1. *Lorsque r est impair (i.e. $a_0 = 0$) :*

   i) Lorsque k est pair (donc $\delta = 1$ et $\delta_0 = 1$) :

   $$B_u(\tilde{\omega}_a| \ |^s) = h(u) \ \alpha(p(u)) \ (p(u), -1) h(| \ |^{s + \frac{1}{2}(k+1)} \tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k}{2}} p(u)}).$$

   ii) Lorsque k est impair (donc $\delta = 0$) :

   $$B_u(\tilde{\omega}_a| \ |^s) = (p(u), \delta_0) \rho(| \ |^{s + \frac{1}{2}(r+k)} \tilde{\omega}_{a\delta_0}).$$

2. *Lorsque r est pair (i.e. $a_0 = 1$) :*

i) Lorsque k est pair (donc $\delta = 0$) : $B_u(\tilde{\omega}_a|\ |^s) = ((-1)^{\frac{k}{2}}, a\delta_0)(a, p(u))$.

$$\sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(x)\ (x, a\delta_0)h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(k+1)}\tilde{\omega}_{ax})\ \ A^1_{s+\frac{1}{2}(r+1),s+\frac{1}{2}(r+k)}(x, (-1)^{\frac{k}{2}}p(u), 1).$$

ii) Lorsque k est impair (donc $\delta = 1$ et $\delta_0 = 1$)

$$B_u(\tilde{\omega}_a|\ |^s) = h(u)\alpha(p(u))\ h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(r+1)}\tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k-1}{2}}p(u)}).$$

Démonstration: On remplace chaque $A^{a_0}_{s_\ell+\frac{1}{2}(\ell+1),s_\ell+\frac{1}{2}(r+\ell)}(v_\ell, u_\ell, w_\ell\delta'_0)$ par sa valeur d'où :

$$\prod_{\ell=1}^{k} A^{a_0}_{s_\ell+\frac{1}{2}(\ell+1),s_\ell+\frac{1}{2}(r+\ell)}(v_\ell, u_\ell, w_\ell\delta'_0) = \prod_{\ell=1}^{k}(\sum_{t_\ell\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(t_\ell)^{a_0}\rho(s+\frac{1}{2}(\ell+1); t_\ell v_\ell)\rho(s+\frac{1}{2}(r+\ell); t_\ell u_\ell)(w_\ell\delta'_0, t_\ell)\ )$$

$$= \sum_{t=(t_1,\ldots,t_k)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k} \Big(\prod_{\ell=1}^{k} f_\ell(t_\ell, u)\Big)\Big(\prod_{\ell=1}^{k}\rho(s+\frac{1}{2}(\ell+1); t_\ell v_\ell)\Big)\Big(\prod_{\ell=2}^{k}(v_\ell, p(t)_{\ell-1})\Big)$$

avec

$$f_\ell(t_\ell, u) = \alpha(t_\ell)^{a_0}\rho(s+\frac{1}{2}(r+\ell); t_\ell u_\ell)(t_\ell, p(u)_{\ell-1}\delta'_0\ )$$

donc

$$b'_u(\tilde{\omega}_a|\ |^s) = \Big(\prod_{1\le i\le k}\alpha(u_i)^i\Big)\sum_{t=(t_1,\ldots,t_k)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k}\Big(\prod_{\ell=1}^{k} f_\ell(t_\ell, u)\Big)C(t, s)$$

avec :

$$\begin{aligned} C(t,s) &= \textstyle\sum_{v\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k}\Big(\prod_{\ell=1}^{k}\rho(s+\frac{1}{2}(\ell+1); t_\ell v_\ell)\Big)(\prod_{\ell=2}^{k}\alpha(-v_\ell)^{\ell-1}(v_\ell, p(t)_{\ell-1})\Big)(a, p(v)) \\ &= \rho(\tilde{\omega}_a|\ |^{s+1})(t_1, a)\textstyle\prod_{\ell=2}^{k} C_\ell(t) \text{ avec} \\ C_\ell(t) &= \textstyle\sum_{v_\ell\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(v_\ell)^{1-\ell}(v_\ell, ap(t)_{\ell-1})\rho(s+\frac{1}{2}(\ell+1); t_\ell v_\ell). \end{aligned}$$

Le calcul donne (cf.3.6.2 et 3.6.4,A) :

$$C_\ell(t) = \alpha(1)^{1-\ell}(t_\ell, at'_{\ell-1})\begin{cases}\rho(|\ |^{s+\frac{1}{2}(\ell+1)}\tilde{\omega}_{at'_{\ell-1}}) \text{ lorsque } \ell \text{ est impair,}\\ \\ \alpha(-t_\ell)h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(\ell+1)}\tilde{\omega}_{at'_\ell}) \text{ lorsque } \ell \text{ est pair}\end{cases}$$

en posant $t'_{\ell-1} = (-1)^{[\frac{\ell-1}{2}]}p(t)_{\ell-1}$, d'où en réorganisant les produits : $C(t, s)\alpha(1)^{\frac{k(k-1)}{2}} =$

$$\rho(\tilde{\omega}_a|\ |^{s+1})h(t)\prod_{\ell=1}^{[\frac{k}{2}]}\alpha(-t_{2\ell})\prod_{\ell=1}^{k}(t_\ell, a(-1)^{[\frac{\ell-1}{2}]}).\prod_{\ell=1}^{[\frac{k}{2}]}h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(2\ell+1)}\tilde{\omega}_{at'_{2\ell}})\prod_{\ell=1}^{[\frac{k-1}{2}]}\rho(|\ |^{s+\frac{1}{2}(2\ell+2)}\tilde{\omega}_{at'_{2\ell}})$$

donc par le 1) du lemme 3.6.8 et la définition 6.2.3 :

$$C(t,s)\alpha(1)^{\frac{k(k-1)}{2}} = \rho(\tilde{\omega}_a|\ |^{s+1})f_{[\frac{k+1}{2}]}(s)\ h(t)\ \prod_{\ell=1}^{[\frac{k}{2}]}\alpha(-t_{2\ell})\prod_{\ell=1}^{k}(t_\ell, a(-1)^{[\frac{\ell-1}{2}]}).g_k(t_1...t_k)$$

avec :

$$g_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } k \text{ est impair} \\ h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(k+1)}\tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k}{2}}x}) \text{ lorsque } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Dorénavant on remplace $\alpha(1)$ par sa valeur : $\alpha(1) = 1$ ainsi :

$$b'_u(\tilde{\omega}_a|\ |^s) = \rho(\tilde{\omega}_a|\ |^{s+1})f_{[\frac{k+1}{2}]}(s)c_u(s)$$

avec :

$$c_u(s) = \Big(\prod_{1\le i\le k}\alpha(u_i)^i\Big)\sum_{t=(t_1,...,t_k)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k} q(t_1,...,t_k)\Big(\prod_{\ell=1}^{k}\rho(s+\frac{1}{2}(r+\ell);t_\ell u_\ell)(t_\ell, U_{\ell-1})\Big)g_k(t_1...t_k)$$

en posant $U_\ell = a(-1)^{[\frac{\ell}{2}]}p(u)_\ell\delta'_0$ pour $\ell = 0,...,k$.
Remplaçant $h(t)$ par sa valeur, on a :

$$q(t_1,...,t_k) = h(t)\ \prod_{\ell=1}^{[\frac{k}{2}]}\alpha(-t_{2\ell})\prod_{\ell=1}^{k}\alpha(t_\ell)^{a_0} = \begin{cases} \prod_{\ell=1}^{\frac{[k+1}{2}]}\alpha(t_{2\ell-1})\alpha(-t_1...t_k) \text{ lorsque } a_0 = 0 \\ \\ \prod_{\ell=1}^{[\frac{k}{2}]}\alpha(-t_{2\ell})\alpha(t_1...t_k) \text{ lorsque } a_0 = 1. \end{cases}$$

Lorsque k est impair, $k = 2p+1$:

• lorsque $a_0 = 0$ on a $\alpha(t_{2p+1})\alpha(-t_1...t_k) = (t_{2p+1}, t_1...t_{2p})\alpha(-t_1...t_{2p})$, on somme d'abord sur t_{2p+1} ce qui donne après simplification :

$$c_u(s) = \Big(\prod_{1\le i\le 2p}\alpha(u_i)^i\Big)\sum_{t=(t_1,...,t_{2p})\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k}\prod_{\ell=1}^{p}\alpha(t_{2\ell-1})\Big(\prod_{\ell=1}^{2p}\rho(s+\frac{1}{2}(r+\ell);t_\ell u_\ell)(t_\ell, U_{\ell-1})\Big)g(t_1...t_{2p})$$

avec : $g(x) = \alpha(-xu_{2p+1})(u_{2p+1}, (-1)^{p+1}U_{2p})\rho(|\ |^{s+\frac{1}{2}(r+2p+1)}\tilde{\omega}_{xU_{2p}})$;

• lorsque $a_0 = 1$, on commence par sommer sur t_1 d'où :

$$c_u(s) = \Big(\prod_{2\le i\le 2p+1}\alpha(u_i)^i\Big)\sum_{t=(t_2,...,t_{2p+1})\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k}\prod_{\ell=1}^{p}\alpha(-t_{2\ell})\Big(\prod_{\ell=2}^{2p+1}\rho(s+\frac{1}{2}(r+\ell);t_\ell u_\ell)(t_\ell, U_{\ell-1})\Big)g(t_2...t_{2p+1})$$

avec : $g(x) = \alpha(u_1)\alpha(u_1x)(u_1, a\delta'_0)h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(r+1)}\tilde{\omega}_{xu_1a\delta'_0})$.

Lorsque k est pair, $k = 2p$, on a à évaluer les quantités :

• lorsque $a_0 = 0$:

$$c_u(s) = \Big(\prod_{1\le i\le 2p} \alpha(u_i)^i\Big) \sum_{t=(t_1,\dots,t_{2p})\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k} \prod_{\ell=1}^{p} \alpha(t_{2\ell-1})\Big(\prod_{\ell=1}^{2p} \rho(s+\frac{1}{2}(r+\ell); t_\ell u_\ell)(t_\ell, U_{\ell-1})\Big) g(t_1 \dots t_{2p})$$

avec : $g(x) = \alpha(-x)h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(k+1)}\tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k}{2}}x})$.

• lorsque $a_0 = 1$:

$$c_u(s) = \Big(\prod_{1\le i\le 2p} \alpha(u_i)^i\Big) \sum_{t=(t_1,\dots,t_{2p})\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^k} \prod_{\ell=1}^{p} \alpha(-t_{2\ell})\Big(\prod_{\ell=1}^{2p} \rho(s+\frac{1}{2}(r+\ell); t_\ell u_\ell)(t_\ell, U_{\ell-1})\Big) g(t_1 \dots t_{2p})$$

avec : $g(x) = \alpha(x)h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(k+1)}\tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k}{2}}x}) = \alpha((-1)^p x)((-1)^p, x)h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(k+1)}\tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k}{2}}x})$.

Lorsque $a_0 = 0$, on obtient en appliquant le lemme 7.3.13, 3.6.8,1) et la définition 6.2.3 :

$$c_u(s) = f_{p+1}(s + \frac{1}{2}r - 1)\ h(u)_{2p}\ (p(u)_{2p}, -a\delta_0')\ g(p(u)_{2p})$$

avec :

$$\delta_0' = \begin{cases} (-1)^{p-1} \text{ lorsque } k = 2p \text{ et } a_0 = 0, \\ (-1)^p\delta_0 \text{ lorsque } k = 2p+1 \text{ et } a_0 = 0. \end{cases}$$

Lorsque $a_0 = 1$, on obtient de même :

• $k = 2p+1$ donc $\delta = 1$ et $\delta_0' = (-1)^p$:

$$c_u(s) = f_{p+1}(s + \frac{1}{2}(r-1))\ h(u)_{2p+1}\ (u_2 \dots u_{2p+1}, a\delta_0')\ \prod_{i=2}^{2p+1} \alpha(u_i)\ g(u_2 \dots u_{2p+1})$$

• $k = 2p$ donc $\delta = 0$ et $\delta_0' = (-1)^p\delta_0$:

$$c_u(s) = f_p(s + \frac{1}{2}(r-1))\ h(u)\ (p(u), a\delta_0')\ \prod_{i=1}^{2p} \alpha(u_i) S(u)$$

avec :

$$S(u) = \sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} g((-1)^p x) S_1(x) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{z\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} (a\delta_0' z, (-1)^p p(u)x)\ \rho(|\ |^{s+\frac{1}{2}(r+1)}\tilde{\omega}_z)\ h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(r+2p)}\tilde{\omega}_{z(-1)^p p(u)}) \\ &= (a\delta_0', (-1)^p p(u)x)\ \alpha(-(-1)^p p(u)) A^1_{s+\frac{1}{2}(r+1), s+\frac{1}{2}(r+2p)}(x, (-1)^p p(u), 1) \end{aligned}$$

(lemme 3.6.4-B-6)) d'où en remplaçant g par sa valeur et en posant

$$c_u(s) = f_{[\frac{k+\delta+1}{2}]}(s + \frac{1}{2}r - \frac{1}{1+a_0})c_u'(s),$$

on a :

• Lorsque r est impair (i.e. $a_0 = 0$) :

$$c'_u(s) = h(u)\ \alpha(p(u))\ (p(u), a\delta'_0)\ .$$

$$\begin{cases} h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(k+1)}\tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k}{2}}p(u)}) \text{ lorsque } k \text{ est pair (donc } \delta = 1 \text{ et } \delta_0 = 1) \\ \\ \rho(|\ |^{s+\frac{1}{2}(r+k)}\tilde{\omega}_{a\delta_0}) \text{ lorsque } k \text{ est impair (donc } \delta = 0) \end{cases}$$

• Lorsque r est pair (i.e. $a_0 = 1$) :

i) Lorsque k est pair (donc $\delta = 0$) : $c'_u(s) = ((-1)^{\frac{k}{2}}, a\delta_0 p(u))$.

$$\sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(x)\ (x, a\delta_0) h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(k+1)}\tilde{\omega}_{ax})\ \ A^1_{s+\frac{1}{2}(r+1),s+\frac{1}{2}(r+k)}(x, (-1)^{\frac{k}{2}}p(u), 1).$$

ii) Lorsque k est impair (donc $\delta = 1$ et $\delta_0 = 1$)

$$c'_u(s) = (p(u), a(-1)^{\frac{k+1}{2}})\ h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(r+1)}\tilde{\omega}_{a(-1)^{\frac{k-1}{2}}p(u)}),$$

et on remplace $\prod_{1\le i\le k} \alpha(u_i)^{-k} = \begin{cases} (p(u), (-1)^{\frac{k}{2}}) \text{ lorsque } k \text{ est pair,} \\ h(u)\alpha(p(u))(p(u), (-1)^{\frac{k+1}{2}}) \text{ lorsque } k \text{ est impair.} \end{cases}$

□

Remarque : Les calculs effectués dans cette proposition sont également vrais sur $\mathbb{R}$ en conservant les facteurs $\alpha(1)$.

Lemme 7.3.13 *Soient $p \ge 1$, $F : \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} \to \mathbb{C}$ et pour $i = 1, ..., p$ soient $c_i, u_i, v_i, U_i, V_i \in \mathbb{F}^*$, $s_i, s'_i \in \mathbb{C}$ et*

$$S = \sum_{t_1,...,t_p,y_1,...,y_p\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} F(t_1...t_p y_1...y_p) \prod_{1\le i\le p} \alpha(c_i y_i)(y_i, V_i)(t_i, U_i)\rho(s_i; t_i u_i)\rho(s'_i; y_i v_i),$$

alors

$$S = K\ \frac{1}{f} \sum_{z,x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} (z, x)\ F(p(u)p(v)x) \prod_{1\le i\le p} [\ \rho(|\ |^{s_i}\tilde{\omega}_{zU_i})\ h(|\ |^{s'_i}\tilde{\omega}_{zc_i v_i V_i})\ ]$$

avec

$$K = \alpha(1)^{-p} \prod_{1\le i\le p} \alpha(c_i v_i) \prod_{1\le i\le p} (u_i, U_i) \prod_{1\le i\le p} (v_i, V_i)$$

$p(u) = \prod_{1\le i\le p} u_i, p(v) = \prod_{1\le i\le p} v_i$, *$f$ étant le cardinal de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$.*

Démonstration: On change la sommation en posant pour $i = 1, ..., p$: $x_i = t_1...t_i y_1...y_i$ donc $t_i = x_{i-1}x_i y_i$ d'où :

$$A = \sum_{x_1,..x_p,y_1,...,y_p \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} f(x_1, ..., x_p) \prod_{1\leq i\leq p} [\alpha(c_i y_i)\rho(s_i; x_{i-1}x_i y_i u_i)\rho(s_i'; y_i v_i)\ (y_i, U_i V_i)\ ]$$

avec

$$\begin{aligned} f(x_1, ..., x_p) &= F(x_p)\ \textstyle\prod_{1\leq i\leq p}(x_{i-1}x_i, U_i) \quad \text{et} \quad x_0 = 1, \\ &= F(x_p)\ \textstyle\prod_{1\leq i\leq p}(x_i, U_i U_{i+1}) \quad \text{avec} \quad U_{p+1} = 1 \end{aligned}$$

donc :

$$A = \sum_{x_1,..x_p \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} f(x_1, ..., x_p) g(x)$$

avec :

$$\begin{aligned} g(x) &= \textstyle\sum_{y_1,...,y_p \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \prod_{1\leq i\leq p}\ \alpha(c_i y_i)\rho(s_i; x_{i-1}x_i y_i u_i)\rho(s_i'; y_i v_i)\ (y_i, U_i V_i) \\ &= \textstyle\prod_{1\leq i\leq p}\ g_i(x) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \textstyle\sum_{y_i \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(c_i y_i)\rho(s_i; x_{i-1}x_i y_i u_i)\rho(s_i'; y_i v_i)\ (y_i, U_i V_i) \\ &= (c_i, U_i V_i) A^1_{s_i, s_i'}(x_{i-1}x_i c_i u_i, c_i v_i, U_i V_i) \\ &= (v_i, U_i V_i)\frac{\alpha(c_i v_i)}{\alpha(1)}\frac{1}{f} \sum_{z_i \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} (z_i, x_{i-1}x_i u_i v_i)\rho(|\ |^{s_i}\tilde{\omega}_{z_i})h(|\ |^{s_i'}\tilde{\omega}_{z_i c_i v_i U_i V_i}) \end{aligned}$$

(B-6) du lemme 3.6.4) donc :

$$g(x) = K(\frac{1}{f})^p \sum_{z_1,..z_p \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} H(z_1, ..., z_p) \prod_{1\leq i\leq p} (x_i, z_i z_{i+1}) \quad \text{et} \quad z_{p+1} = 1\ ,$$

avec

$$K = \prod_{1\leq i\leq p} [\ (v_i, U_i V_i)\frac{\alpha(c_i v_i)}{\alpha(1)}\ ]$$

$$H(z_1, ..., z_p) = \prod_{1\leq i\leq p} \rho(|\ |^{s_i}\tilde{\omega}_{z_i})h(|\ |^{s_i'}\tilde{\omega}_{z_i c_i v_i U_i V_i})(z_i, u_i v_i)$$

donc

$$A = K \sum_{z_1,..z_p \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} H(z_1, ..., z_p)(\frac{1}{f})^p \sum_{x_1,..x_p \in F} F(x_p)(x_p, z_p U_p) \prod_{1\leq i\leq p-1} (x_i, z_i z_{i+1} U_i U_{i+1})$$

$$= K \sum_{z_1,..z_p \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} H(z_1, ..., z_p) \prod_{1\leq i\leq p-1} [\ \frac{1}{f} \sum_{x_i \in F} (x_i, z_i z_{i+1} U_i U_{i+1})\ ](\frac{1}{f} \sum_{x_p \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} F(x_p)(x_p, z_p U_p)\ )$$

donc pour $i = 1, ..., p$ on a : $z_i = z_1 U_1 U_i$, on pose alors $z = z_1 U_1$ d'où $z_i = z U_i$ pour $i = 1, ..., p$ et on pose $x = p(u)p(v)x_p$. □

Remarque 7.3.14 *1. La proposition 7.3.12 est également vérifiée pour $k = 1$ (cf.th.3.6.5-2) et 3), ici $N = \frac{r+1}{2}$).*

2. Dans le cas $DI(n,k)$ (i.e. $\delta = 0$) avec $2n-3k \geq 3$,les coefficients $B_u(\tilde{\omega}_a|\ |^s)$ ne dépendent que de $p(u)$.

• Lorsque k est impair, on a une équation globale donnée par :

$$Z^*(\mathcal{F}f;\tilde{\omega}_a|\ |^s) = B(\tilde{\omega}_a|\ |^s)Z(f;\tilde{\omega}_{a\delta_0}|\ |^{-s-n+k}) \quad avec$$

$$B(\tilde{\omega}_a|\ |^s) = \gamma(Q_a)^k f_{\frac{k+1}{2}}(s)f_{\frac{k+1}{2}}(s+n-\frac{3}{2}k-1)\ \rho(\tilde{\omega}_a|\ |^{s+1})\rho(|\ |^{s+n-k}\tilde{\omega}_{a\delta_0}).$$

• Lorsque k est pair, on rappelle que pour $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ $Z_u(f;\pi) = Z(f1_{\{x\in\mathfrak{g}'_1\ |F(x)\in u\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\}};\pi)$ (resp.$Z^*_u(g;\pi) = Z(g1_{\{y\in\mathfrak{g}'_{-1}\ |F^*(x)\in u\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\}};\pi)$) alors classiquement (cf.§6 prop.6.2.4 et sa démonstration) on a pour tout $v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$:

$$Z^*_v(\mathcal{F}f;s) = \gamma(Q_a)^k f_{\frac{k}{2}}(s)f_{\frac{k}{2}}(s+n-\frac{3}{2}k-1)\sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A_{v,u}(s)Z_u(f;-s-n+k)$$

avec : $A_{v,u}(s) =$

$$\begin{aligned} &= \textstyle\sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{s+1,s+\frac{1}{2}(k+1)}((-1)^{\frac{k}{2}}v,x,1)((-1)^{\frac{k}{2}}x,\delta_0)A^1_{s+\frac{1}{2}(r+1),s+\frac{1}{2}(r+k)}(x,(-1)^{\frac{k}{2}}u,1),\\ &= \textstyle\sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{s+1,s+\frac{1}{2}(k+1)}(v,x,(-1)^{\frac{k}{2}})(x,\delta_0)A^1_{s+\frac{1}{2}(r+1),s+\frac{1}{2}(r+k)}(x,u,(-1)^{\frac{k}{2}}). \end{aligned}$$

$(r = 2n-3k)$)

Si on désigne, pour $s \in \mathbb{C}$, $A(s) := (A_{v,u}(s))_{v,u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}$ la matrice "normalisée" des coefficients et $A_s(x,m) := (A^{a\frac{m}{2}}_{s+1,s+\frac{m}{2}}(v,u,(-1)^{[\frac{m}{2}]}x))_{v,u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}$ la matrice "normalisée" des coefficients associés à l'équation fonctionnelle pour une forme quadratique de discriminant x sur un espace vectoriel de dimension m, on a :

$$A(s) = A_s(1,k+1)DA_{s+\frac{1}{2}(r-1)}(1,k+1),$$

D étant la matrice diagonale à 4 lignes et 4 colonnes de coefficients diagonaux $(x,\delta_0)_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}$.

3. Dans le cas $BI(n,k)$ (i.e. $\delta = 1$) avec $2n-3k \geq 3$ et $k \geq 3$, les orbites de G dans $\mathfrak{g}'_1$ sont indexées par $I = \{(u,\epsilon)|u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ et $\epsilon = \pm 1\}$, notons $Z_{u,\epsilon} = Z_{O_{u,\epsilon}}$ (resp. $Z^*_{(u,\epsilon)}$) alors

$$Z^*(\mathcal{F}f;s) = C(s)\rho(|\ |^{s+1})\gamma(Q_a)^k \sum_{(u,\epsilon)\in S} A_{(u,\epsilon)}(s)Z_{(u,\epsilon)}(f;-s-n+k-1) \quad avec$$

$$C(s) = f_{[\frac{k+1}{2}]}(s)f_{[\frac{k+2}{2}]}(s+n-\frac{3}{2}(k-1)-\frac{1}{1+a_0})\ ,$$

$$A_{(u,\epsilon)}(s) = \epsilon\alpha(u)(u,(-1)^{k-1})h(|\ |^{s+\frac{1}{2}(b_0+1)}\tilde{\omega}_{(-1)^{[\frac{k}{2}]}u})$$

et $b_0 = \begin{cases} k \text{ lorsque } k \text{ est pair,} \\ r \text{ lorsque } k \text{ est impair.} \end{cases}$

Il est facile d'établir comme dans 2) que pour $v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ *on a :*

$$Z^*_{(v,-1)}(\mathcal{F}f;s) + Z^*_{(v,1)}(\mathcal{F}f;s) = \gamma(Q_a)^k C(s).$$

$$\sum_{(u,\epsilon)\in S} \epsilon\ ((-1)^{[\frac{k-1}{2}]},u) A^1_{s+1,s+\frac{1}{2}(b_0+1)}(v,u,(-1)^{\frac{k}{2}}).Z_{(u,\epsilon)}(f;-s-n+k-1).$$

7.4 Le cas DIII

On rappelle que que $(\overline{\mathfrak{g}}_0,\overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (D_n,α_{2p}) avec $n \geq 4$ et $3p \leq n$, que $\mathfrak{g}$ est de type DIII donc en particulier on a $\text{rang}(\mathfrak{g}) = [\frac{n}{2}]$ (noté m) et $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ est de type (R_m,λ_p) avec $R = C$ lorsque n est pair et BC lorsque n est impair (cf.tableau 2).

On donne les résultats pour $n-3p \geq 2$ lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique et $n-3p \geq 4$ dans le cas réel, hypothèses techniques permettant la descente avec des préhomogènes de type DIII (cf. démonstration du lemme 7.4.3), plus restrictives que la condition pour que $2H_0$ soit 1-simple donnée par $n-3p \geq 0$; on suppose également **dans le cas $\mathfrak{p}$-adique que l'entier $n-p$ est impair**, hypothèse technique simplifiant les résultats, en effet dans le cas $n-p$ pair il apparait un caractère difficile à évaluer de manière intrinsèque (cf.remarque 7.4.2,1)).

Pour $k = 1,..,p$, $E_4(H_k) = \mathfrak{g}^{2\epsilon_k}$ est de dimension 1 et on note X_k et Y_k des générateurs de $E_4(H_k)$ et $E_{-4}(H_k)$ tels que $(X_k, \frac{1}{2}H_k, Y_k)$ soient des sl_2-triplets.

7.4.1 Le cas $p = 1$

On rappelle que l'invariant relatif fondamental du préhomogène $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ est donné par :

$$F(x) = \frac{2B(adx^4(Y_1),Y_1)}{B(H_1,H_1)}$$

et que $\chi(G) \subset \mathbb{F}^{*2}$ (lemme 2.3,[Mu 4]).

Comme F est de degré 4 et que l'on souhaite utiliser les résultats connus sur les formes quadratiques (théorème 3.6.5), l'étude du préhomogène : $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ se fait à travers l'étude du préhomogène : $(P',\mathfrak{g}_1)$, P' étant le sous-groupe parabolique défini par $H'_1 = h_\lambda$ et $H'_2 = h_\mu$, avec $\lambda = \epsilon_1 - \epsilon_2$ et $\mu = \epsilon_1 + \epsilon_2$ ($\dim(\mathfrak{g}^\lambda) = 4$), alors $H'_1 + H'_2 = H_1$.

On note F'_1 et $F'_2 = F$ les invariants relatifs fondamentaux associés à P'.

Lemme 7.4.1 *1)* $F(\mathfrak{g}_1) = \mathbb{F} - \mathbb{F}^{*2}$.

2) Les orbites de G dans $\mathfrak{g}'_1$ (resp.$\mathfrak{g}'_{-1}$) sont données par $O_u = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F(x)\mathbb{F}^{*2} = u\}$ (resp.$O^*_u = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid F^*(x)\mathbb{F}^{*2} = u\}$) avec $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1$.

3) Les orbites de P' dans $\mathfrak{g}"_1$ (resp.$\mathfrak{g}"_{-1}$) sont données par $O'_u = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F_1(x) \neq 0, F(x)\mathbb{F}^{*2} = u\}$ (resp.$O^*_u = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid \ F_1^*(x) \neq 0\ ,\ F^*(x)\mathbb{F}^{*2} = u\}$) avec $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1$.

4) Soient u et v dans $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1$,

i) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

$$a_{-1,-1}(s_1, s_2) = A_{\frac{3}{2}}(s_2)A_{\frac{3}{2}}(s_1 + s_2 + n - \frac{7}{2}) = 4(2\pi)^{-2s_1-4s_2-2n+2}.$$

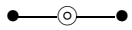
$$\Gamma(s_2+1)\Gamma(s_2+\frac{3}{2})\Gamma(s_1+s_2+n-2).\Gamma(s_1+s_2+n-\frac{5}{2})\ (-1)^n\ \sin(\pi s_2)\cos\pi(s_1+s_2).$$

ii) $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique, on suppose que n est pair alors $a_{v,u}(\omega_1, \omega_2; s_1, s_2) =$

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1} A^1_{\omega_2, s_2+1, s_2+\frac{3}{2}}(v, w, 1)A^1_{\omega_1\omega_2, s_1+s_2+n-\frac{5}{2}, s_1+s_2+n-2}(w, u, 1).$$

Démonstration: a) Soit x non nul dans $\mathfrak{g}_1$, si $s(x) = \{\epsilon_1\}$, à l'aide de $exp(ad(\mathfrak{g}^{-\epsilon_2}))$ on peut se ramener à $s(x) \cap \{\epsilon_1 \pm \epsilon_j, j \geq 2\} \neq \emptyset$ puis que $\epsilon_1 - \epsilon_2 \in s(x)$ donc finalement que $\epsilon_1 - \epsilon_2 \in s(x) \subset \{\epsilon_1 \pm \epsilon_2\}$ par le lemme 2.2.1.
Soit $x \in \mathfrak{g}'_1$ (resp.$\mathfrak{g}"_1$), il existe ainsi $g \in G$ (resp.$g \in P'$) tel que $x = x_\lambda + x_\mu$ avec $x_\lambda \in \mathfrak{g}^\lambda - \{0\}$ et $x_\mu \in \mathfrak{g}^\mu - \{0\}$ qui commutent d'où 2).

Le préhomogène commutatif associé à $\mathfrak{g}^\lambda$ est de rang 1 donc son invariant relatif fondamental est une forme quadratique anisotrope et le diagramme de Satake associé est de type :



$\{x \in g^\lambda \mid F_1(x) \neq 0\}$ est une seule orbite pour $G_{H'_1}$ (cf.§ 6) ainsi on peut supposer que $F_1(x_\lambda) = 1$ et on a $F(x_\lambda + x_\mu) = P_1(x_\mu)$. Le préhomogène associé à $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})$, avec $\mathfrak{s} = \mathbb{F}x_\lambda + \mathbb{F}h_\lambda + \mathbb{F}x_\lambda^{-1}$, est également commutatif de rang 1 et $\dim(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1) = 3$ donc l'invariant relatif fondamental est une forme quadratique anisotrope définie sur un espace de dimension 3 d'où $F(\mathfrak{g}_1) = \mathbb{F} - u\mathbb{F}^{*2}$, $-u$ étant le discriminant de la restriction de P_1 à $\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$ ([O'M]) et le diagramme de Satake associé à $(\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_0, \mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1)$ est de type :

d'où 3) (cf.§6 et 2).

b) Montrons que le discriminant de $P_1/\mathfrak{U}(\mathfrak{s})_1$ vaut -1 d'où 1).
Soit $E = \mathbb{F}[\sqrt{\epsilon}]$ une extension de dimension 2 de $\mathbb{F}$ sur laquelle $\mathfrak{g}$ se déploie ([Ve]), $(X_\alpha)_{\alpha \in \overline{\Delta}}$ une base de Chevalley de $\mathfrak{g}_E = \mathfrak{g} \otimes_E \mathbb{F}$ et σ l'antiautomorphisme de $\mathfrak{g}_E$ ayant $\mathfrak{g}$ comme points fixes.

On peut supposer que :

$$\begin{aligned} x_\lambda &= X_{\overline{\epsilon}_2 - \overline{\epsilon}_3} + \sigma(X_{\overline{\epsilon}_2 - \overline{\epsilon}_3}) = X_{\overline{\epsilon}_2 - \overline{\epsilon}_3} + pX_{\overline{\epsilon}_1 - \overline{\epsilon}_4} \\ x_\mu &= x\overline{X}_{\overline{\epsilon}_2 + \overline{\epsilon}_3} + \overline{x}\sigma(X_{\overline{\epsilon}_2 + \overline{\epsilon}_3}) + yX_{\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_3} + \overline{y}\sigma(X_{\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_3}) \\ &= xX_{\overline{\epsilon}_2 + \overline{\epsilon}_3} + \overline{x}qX_{\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_4} + yX_{\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_3} + \overline{y}rX_{\overline{\epsilon}_2 + \overline{\epsilon}_4}\ ,\ x, y \in E. \end{aligned}$$

Prenons (ce qui ne change rien pour F) $Y_1 = aX_{-\overline{\epsilon}_1-\overline{\epsilon}_2} \in \mathfrak{g}_2$, a étant un élément non nul de E vérifiant la relation :

$$\frac{\overline{a}}{a} = pr\frac{N_1}{N_2} \quad \text{avec} \quad N_1 = N_{\overline{\epsilon}_1-\overline{\epsilon}_4,\overline{\epsilon}_2+\overline{\epsilon}_4}\ ,\ N_2 = N_{\overline{\epsilon}_2-\overline{\epsilon}_3,\overline{\epsilon}_1+\overline{\epsilon}_3}.$$

La relation $[x_\lambda, x_\mu] = 0$ se traduit par $ay \in \sqrt{\epsilon}\mathbb{F}$.
En utilisant les propriétés des coefficients $N_{\alpha,\beta}$ ([Bou 2]), chap.VIII,§2,n°4, lemme 4 et prop.7 ainsi que l'ex. 4), on obtient :

$$\begin{aligned}
ad(x_\lambda)^2(Y_1) &= -2apN_1N_3X_{-\overline{\epsilon}_3-\overline{\epsilon}_4}\\
ad(x_\mu)^2(Y_1) &= 2arN_4N_5\ (x\overline{x}\ \tfrac{q}{r}\ N\ +\ y\overline{y})\ X_{\overline{\epsilon}_3+\overline{\epsilon}_4}\ \text{ avec } N = \pm 1,\\
N_3 &= N_{\overline{\epsilon}_2-\overline{\epsilon}_3,-\overline{\epsilon}_2-\overline{\epsilon}_4},\\
N_4 &= N_{\overline{\epsilon}_1+\overline{\epsilon}_3,-\overline{\epsilon}_1+\overline{\epsilon}_4},\\
N_5 &= N_{\overline{\epsilon}_2+\overline{\epsilon}_4,-\overline{\epsilon}_1-\overline{\epsilon}_2}\ ,\ \text{d'où}\\
F(x_\lambda + x_\mu) &= \tfrac{a}{\overline{a}}\ pr\ N_1N_3N_4N_5\ (x\overline{x}\ \tfrac{q}{r}\ N\ a\overline{a} +\ ay\ \overline{ay})\\
&= N_2N_3N_4N_5\ (x\overline{x}\ \tfrac{q}{r}\ N\ a\overline{a} +\ ay\ \overline{ay})\ ,
\end{aligned}$$

le discriminant de cette forme quadratique vaut $N_2N_3N_4N_5 = -(N_2N_5)^2 = -1$ car $N_i = \pm 1, 2 \le i \le 5$ et on applique l'ex.4 aux racines :

$$\alpha = \overline{\epsilon}_2 - \overline{\epsilon}_3\ ,\ \beta = -\overline{\epsilon}_2 - \overline{\epsilon}_4\ ,\ \gamma = \overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_3\ ,\ \delta = -\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_4$$

ce qui donne $N_3N_4 + N_{\gamma,\alpha}.N_{\beta,\delta} = 0$ or $N_{\gamma,\alpha} = -N_2$ et $N_{\beta,\delta} = -N_5$.

c) Il y a une seule classe de formes quadratiques anisotropes définies sur un espace vectoriel de dimension 3 qui ne représentent pas 1, elles ont pour discriminant -1 et pour invariant de Hasse -1 (dans le cas réel et dans le cas $\mathfrak{p}$-adique), soit G un représentant et $a^{(G)}_{v,u}$ le coefficient associé aux orbites $O_u = \{x | G(x)\mathbb{F}^{*2} = u\}$ et $O^*_v = \{x | G^*(x)\mathbb{F}^{*2} = v\}$ donné dans le théorème 3.6.5 (dans le cas réel et dans le cas $\mathfrak{p}$-adique) :

$$a^{(G)}_{v,u}(\omega, s) = -A^1_{\omega;s+1,s+\frac{3}{2}}(v, u, 1).$$

Pour calculer les coefficients de l'équation fonctionnelle associée au préhomogène $(P', \mathfrak{g}_1)$, $a_{v,u}(\pi_1, \pi_2)$ avec $u, v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1$, on applique la proposition 5.1.1 dont on reprend les notations.

Notons qu'ici $\tilde{B}(\frac{H'_1}{2}, \frac{H'_1}{2}) = \tilde{B}(\frac{H'_2}{2}, \frac{H'_2}{2}) = -1$.

Soient O'_u et O'^*_v deux orbites de P' resp. dans $\mathfrak{g}"_1$ et $\mathfrak{g}"_{-1}$, $z = z_0 + z_{-2}$ un représentant dans ${O'_v}^*$ tel que ${F'_1}^*(z_0) = 1$ et $P'^*_1(z_{-2}) = v$ alors :

$(E_{2,0})_{z_0}$ a pour invariant relatif fondamental la forme quadratique anisotrope $F(...+z_0^{-1})/(E_{2,0})_{z_0}$ qui ne représente pas 1, donc les coefficients correspondants sont donnés par $a^{(G)}_{v,w}(\pi_2)$ avec $w \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1$, soit $t_w \in (E_{2,0})_{z_0}$ tel que $F(t_w + z_0^{-1}) = w$ alors $(E_{0,2})_{t_w}$ a pour invariant relatif fondamental la forme quadratique anisotrope $F(t_w + ...)/(E_{0,2})_{t_w}$ qui ne représente pas 1, donc le coefficient correspondant est donné par $a^{(G)}_{w,u}(\pi_1\pi_2|\ |^{n-\frac{7}{2}})$ car :

- $p_{2,2} = 1$ et $p_{1,1} = \dim(\mathfrak{g}_1) - 8$

• $F(t_w + z_0^{-1}) = w$ et $F(t_w + t_w(O'_u) = u$,

d'où :

$$a_{v,u}(\pi_1, \pi_2) = \sum_{w \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1} \gamma(t_w, z_0^{-1}) a^{(G)}_{v,w}(\pi_2) a^{(G)}_{w,u}(\pi_1.\pi_2| \ |^{n-\frac{7}{2}})$$

d) Il reste à calculer $\gamma(t_w, z_0^{-1})$ c'est à dire à considérer la forme quadratique $Q(A) = \frac{1}{2}\tilde{B}([t_w, [z_0, A]], A)$ définie sur $E_{-1,1} = \oplus_{3 \leq j \leq m} \mathfrak{g}^{\epsilon_2 \pm \epsilon_j} \oplus E$ avec $E = \{0\}$ lorsque n est pair et $E = \mathfrak{g}^{\epsilon_2}$ lorsque n est impair.
Soit $A = \sum_{3 \leq j \leq m}(A_j + B_j) + C$ avec $A_j \in \mathfrak{g}^{\epsilon_2 - \epsilon_j}$, $B_j \in \mathfrak{g}^{\epsilon_2 + \epsilon_j}$ et $C \in E$.
En raison des relations d'orthogonalité de $\tilde{B}$ on a :

$$Q(A) = \sum_{3 \leq j \leq m} \tilde{B}([t_w, [z_0, A_j]], B_j) + Q(C) \ .$$

Comme $\tilde{B}([t_w, [z_0, \mathfrak{g}^{\epsilon_2 - \epsilon_j}]], \mathfrak{g}^{\epsilon_2 + \epsilon_j})$ est une forme bilinéaire non dégénérée, $\gamma(Q) = 1$ lorsque n est pair et sinon $\gamma(Q) = \gamma(Q_1)$, Q_1 étant la restriction de Q à E, espace vectoriel de dimension 4.
Soit $t \in \mathbb{F}^*$, comme $tt_w + z_0^{-1}$ et $t_w + z_0^{-1}$ sont dans la même $G_{H'_1}$ orbite par 3), tQ_1 et Q_1 sont équivalentes. Ainsi Q_1 est de type $(2,2)$ dans le cas réel et $\gamma(Q_1) = 1$; dans le cas $\mathfrak{p}$-adique Q_1 a pour discriminant 1 et $\gamma(Q_1) = 1$ si Q_1 représente 0 et -1 sinon. □

Remarque 7.4.2 *1. Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique, on reprend les notations du b) de la démonstration précédente avec la description de $\mathfrak{g}_E$ donnée dans [Bou 2] (chap.VIII,§ 13, n°4) et σ donné par $\sigma(X) = T\overline{X}T^{-1}$ avec*

$$T = \begin{pmatrix} I_\beta & 0 & 0...0 & 0 \\ 0 & I_\beta & 0...0 & 0 \\ . & ... & ... & . \\ 0 & 0 & ...0 & I_\beta \end{pmatrix} \quad , \quad I_\beta = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta \in \mathbb{F}^* \ \textit{tel que} \ (\epsilon, \beta) = -1$$

alors $a_{v,u}(\omega_1, \omega_2; s_1, s_2) =$

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1} (\epsilon, w)^n \ A^1_{\omega_2, s_2+1, s_2+\frac{3}{2}}(v, w, 1) A^1_{\omega_1\omega_2, s_1+s_2+n-\frac{5}{2}, s_1+s_2+n-2}(w, u, 1),$$

lorsque $n-1$ est impair, la matrice des coefficients est simplement le produit des 2 matrices des coefficients des invariants relatifs fondamentaux des centralisateurs :

$$(a_{v,u}(\omega_1, \omega_2; s_1, s_2)_{v,u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1} = A^{(G)}(\omega_2| \ |^{s_2}).A^{(G)}(\omega_1\omega_2| \ |^{s_1+s_2+n-\frac{7}{2}})$$

avec $A^{(G)}(\omega| \ |^s) = (a^{(G)}_{v,u}(\omega| \ |^s))_{v,u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1}$.

2. Dans le cas réel, les polynomes de Bernstein associés au préhomogène $(P', \mathfrak{g}_1)$ s'obtiennent à partir de la prop. 3.4.4 et de la remarque 3.6.6,1) ce qui donne en raison de la normalisation choisie :

$$b_1(s_1, s_2) = s_2(s_2 + \frac{1}{2}) \quad et \quad b_2(s_1, s_2) = s_2(s_2 + \frac{1}{2})(s_1 + s_2 + n - \frac{7}{2})(s_1 + s_2 + n - 3).$$

3. Les équations fonctionnelles associées au préhomogène $(G, \mathfrak{g}_{\pm 1})$ sont données par :

- *Dans le cas réel :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f); s) = a^{(n)}(s) Z(f; -s - n + 2)$$

avec

$$a^{(n)}(s) = 2(2\pi)^{-4s-2n+2}\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{3}{2})\Gamma(s+n-2)\Gamma(s+n-\frac{5}{2})(-1)^n \sin(2\pi s).$$

- *Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique , lorsque $n-1$ est impair, soit $v \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1$ alors :*

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f); s) = \sum_{u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1} a_{v,u}^{(n)}(s) Z_u(f; -s - n + 2)$$

avec

$$a_{v,u}^{(n)}(s) = \sum_{w \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1} A^1_{s+1,s+\frac{3}{2}}(v, w, 1) A^1_{s+n-\frac{5}{2},s+n-2}(w, u, 1).$$

7.4.2 Le cas $p \geq 2$

Pour $k = 1, ..., p$ soit :

$$G_k(x) = \frac{2B(adx^4(Y_k), Y_k)}{B(H_k, H_k)} \quad , \quad x \in E_2(H_k) \cap \mathfrak{g}_1 \ .$$

Les invariants $F_1, F_2, ..., F_p$ sont normalisés par la condition :

$$\text{pour} \quad x = \sum_{1 \leq i \leq p} x_i \in W_{\mathfrak{t}_0} \quad F_k(x) = \prod_{1 \leq i \leq k} G_i(x_i) \ ,$$

Il est alors aisé de vérifier que :

$$\text{pour} \quad y = \sum_{1 \leq i \leq p} y_i \in W^*_{\mathfrak{t}_0} \quad F_k^*(y) = \prod_{p-k+1 \leq i \leq p} G_i^*(y_i) \ .$$

On a $\chi_k(P_0) \subset \mathbb{F}^{*2}$ pour $k = 1, ..., p$.

Lemme 7.4.3 *On suppose que $n - 3p \geq 2$ lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique et que $n - 3p \geq 4$ dans le cas réel.*
Soit $X \in W_{\mathfrak{t}_0}$, $\mathfrak{s}$ l'algèbre engendrée par les projections de X sur $E_2(H_i) \cap \mathfrak{g}_1$ et de X^{-1} sur $E_{-2}(H_i) \cap \mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ alors $(\overline{\mathfrak{U}}_0, \overline{\mathfrak{U}}_1)$ est de type $(D_{n-3}, \alpha_{2(p-1)})$ et $\mathfrak{U}$ est de type DIII.

Démonstration: Il suffit de vérifier que $\mathfrak{U}$ est de type DIII (cf.démonstration du 1) du lemme 7.1.3) avec $p = 2$ puisque pour $p \geq 3$ on applique le lemme 7.1.3,3) et pour $i = 1$ car H_1 et H_2 sont dans a même orbite de G.
Comme $\mathfrak{U}(\mathbb{F}H_2)$ est de type DIII (cf.démonstration du lemme 7.1.3) on a $G_1(E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1) \subset \mathbb{F} - \mathbb{F}^{*2}$ (lemme 7.4.1) donc $G_1(\mathfrak{U}_1) \subset \mathbb{F} - \mathbb{F}^{*2}$.

Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, on a $n \geq 8$ par hypothèse donc si $\mathfrak{U}$ est de type DI alors $G_1(\mathfrak{U}_1) = \mathbb{F}$ par le lemme 7.3.8, 2) ce qui est absurde donc $\mathfrak{U}$ est de type DIII.

Dans le cas réel, par la démonstration du lemme 7.4.1, on peut supposer que $X \in \mathfrak{g}^{\epsilon_1-\epsilon_2} \oplus \mathfrak{g}^{\epsilon_1+\epsilon_2}$ donc $\oplus_{3 \leq i \leq [\frac{n}{2}]} \mathfrak{g}^{\epsilon_i} \subset \mathfrak{U}_0$ d'où $rg(\mathfrak{U}) \geq [\frac{n}{2}] - 2$ or par hypothèse $n \geq 10$ dans le cas réel d'où $rg(\mathfrak{U}) \geq 3$.
Supposons que $\mathfrak{U}$ soit de type DI et vérifions alors que $G_1(\mathfrak{U}_1) = \mathbb{F}$ ce qui est absurde .
Il existe une constante c telle que $cG_1/\mathfrak{U}_1$ soit de type (p_0, q_0) avec $q_0 \geq 1$ et $p_0 \geq 5$ (lemme 7.3.3) donc $O_{u_1,u_2} \neq \emptyset$ pour $0 \leq u_1 + u_2 \leq 2$ (lemme 7.3.8,1) d'où $cG_1(\mathfrak{U}_1) = \mathbb{F}$. □

Soit $u = (u_1, ..., u_p) \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1)^p$, on rappelle que :

$$O_u = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid F_1(x)\mathbb{F}^{*2} = u_1 \ , \ F_2(x)\mathbb{F}^{*2} = u_1u_2 \ \ , ..., F_p(x)\mathbb{F}^{*2} = u_1...u_p \ \}$$

$$O_u^* = \{x \in \mathfrak{g}_{-1} \mid F_1^*(x)\mathbb{F}^{*2} = u_p \ \ , \ F_2^*(x)\mathbb{F}^{*2} = u_{p-1}u_p \ \ , ..., F_p^*(x)\mathbb{F}^{*2} = u_p...u_1 \ \},$$

Les ouverts O_u (resp.O_u^*) sont non vides et forment une partition de $\mathfrak{g}"_1$ (resp.$\mathfrak{g}"_{-1}$).

Théorème 7.4.4 *On suppose que $\mathfrak{g}$ est de type DIII et que $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (D_n, α_{2p}).*

1. *Dans le cas réel, on suppose que $n - 3p \geq 4$, soit $f \in S(\mathfrak{g}_1)$, alors :*

$$Z^*(\hat{f}; s_1, ..., s_p) = \big(\prod_{0 \leq l \leq p-1} a^{(n-3p+3)}(s_{p-l} + ... + s_p + l) \big) \ Z(f; s^* - (n-2p)1_p).$$

2. *Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, on suppose que $n - 3p \geq 2$ et que $n - p$ est impair.*
   Soit $v \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} - 1)^p$, alors pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ on a :

$$Z_v^*(\hat{f}; \pi) = \sum_{u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}-1)^p} a_{v,u}(s) Z_u(f; s^* - (n-2p)1_p),$$

avec $a_{v,u}(s) = \prod_{1 \leq \ell \leq p} a_{v_\ell,u_\ell}^{(n-3p+3)}(s_{p-\ell+1} + ... + s_p + \ell - 1)$.

Démonstration: On procède par récurrence sur p, le cas $p = 1$ ayant été fait dans le lemme 7.4.1. On suppose le résultat vérifié lorsque $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type $(D_l, \alpha_{2(p-1)})$ avec $l - 3(p-1) \geq 4$ dans le cas réel (resp. $l - 3(p-1) \geq 2$ et $l - (p-1)$ impair dans le cas $\mathfrak{p}$-adique) avec $\mathfrak{g}$ de type DIII.

Lorsque $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (D_n, α_{2p}), avec $n - 3p \geq 4$ dans le cas réel (resp. $n - 3 \geq 2$ et $n - p$ impair dans le cas $\mathfrak{p}$-adique) avec $\mathfrak{g}$ de type DIII, on applique la proposition 5.3.1, dont on reprend les notations, avec $k = 1$.
Soient $z = z_0 + z_{-2} \in O_v^* \cap W_{t_0}^*$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{s})$ (resp.$\mathfrak{U}' = \mathfrak{U}(\mathfrak{s}')$), $\mathfrak{s}$ (resp.$\mathfrak{s}'$) étant l'algèbre engendrée par z_0 et z_0^{-1} (resp.z_2 et z_2^{-1}).
$(\overline{\mathfrak{U}'}_0, \overline{\mathfrak{U}'}_1)$ est de type $(D_{n-3}, \alpha_{2(p-1)})$ et $\mathfrak{U}'$ est de type DIII par le lemme 7.4.3, $(\overline{\mathfrak{U}}_0, \overline{\mathfrak{U}}_1)$ est de type (D_{n-3p+3}, α_2) et $\mathfrak{U} = \cap_{2 \leq i \leq p} \mathfrak{U}(\mathbb{F}y_i \oplus \mathbb{F}H_i \oplus \mathbb{F}y_i^{-1})$, en décomposant $z_0 = \sum_{2 \leq i \leq p} y_i$ et $y_i \in E_2(H_i) \cap \mathfrak{g}_1$, or $\mathfrak{U}(\mathbb{F}y_p \oplus \mathbb{F}H_p \oplus \mathbb{F}y_p^{-1})$ est de type DIII par le lemme 7.4.3 donc par récurrence $\mathfrak{U}$ est également de type DIII.

On applique la proposition 5.3.1 avec $H = \mathbb{R}^*$ dans le cas réel et $H = \mathbb{F}^{*2}$ dans le cas $\mathfrak{p}$-adique.
□

Remarque : Les sommes apparaissant dans le cas $\mathfrak{p}-$adique semblent peu simplifiables aussi on ne donne aucune autre relation concernant les coefficients de l'équation fonctionnelle associée à G (cas $s_1 = ... = s_{p-1} = 0$ et $s_p = s$).

8 Les cas exceptionnels

Dans ce paragraphe, on détermine les polynômes de Bernstein ainsi que les coefficients de l'équation fonctionnelle associée aux préhomogènes $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ pour lesquels $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type exceptionnel, $P(H_1, H_2)$ étant alors l'unique sous-groupe parabolique standard très spécial associé à cette situation (cf.§2.5 et tableau 3).

8.1 Le cas (E_7, α_6)

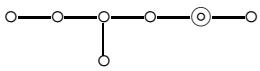
8.1.1 Généralités

Les préhomogènes considérés dans cette section sont des $\mathbb{F}-$formes de (E_7, α_6).

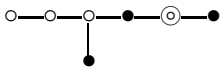
Ils sont particulièrement simples à étudier parce que les invariants relatifs fondamentaux des centralisateurs qui interviennent dans le calcul des coefficients de l'équation fonctionnelle sont des formes quadratiques sur un espace de dimension paire (8) et dont les caractéristiques (discriminant et coefficient γ) ne dépendent que du rang de $\mathfrak{g}$ (cf.prop.8.1.3).

Par classification ([Wa],[Ve]), ils sont de trois types au plus de diagrammes de Satake suivants :

1) Le cas déployé :

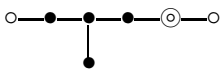


2) Le cas EVI :



Le diagramme de Dynkin du préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est alors de type (F_4, λ_4) :

3) Le cas EVII (alors $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) :



Le diagramme de Dynkin du préhomogène $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est alors de type (C_3, λ_2) :

Dans les 3 cas, le sous-groupe parabolique standard est donné par $P(H_1, H_2)$ avec $H_2 = 2h_{\widetilde{\alpha}}$ (cf.démonstration du lemme 1.3.1) et $H_1 = 2(H_0 - h\widetilde{\alpha}) = 2h_\beta$, $\widetilde{\alpha}$ étant la plus grande racine de Δ et

• $\beta = 012221$ dans le cas déployé,
1

• $\beta = 0122$ dans le cas EVI (c'est la restriction de la racine précédente),

• $\beta = 021$ dans le cas EVII (c'est la restriction de la racine du cas déployé).

On note (Δ, λ_0) le diagramme de Dynkin de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ et Σ un ensemble de racines simples de Δ :

• dans le cas déployé, $\Sigma = \{\alpha_i, 1 \leq i \leq 7\}$ (notation de la planche VI de [Bou 1]),

• dans le cas EVI, $\Sigma = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq 4\}$, λ_i est la restriction de $\alpha_i, i = 1, 2$, λ_3 est la restriction de α_4 et λ_4 est la restriction de α_6,

• dans le cas EVII, $\Sigma = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq 3\}$, λ_1 est la restriction de α_1, λ_2 est la restriction de α_6 et λ_3 est la restriction de α_7.

H_1 et H_2 sont dans la même orbite de G.

L'algèbre simple $E = \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_2)$ (resp.$F = \mathfrak{U}(\mathbb{F}H_1)$) est graduée par $\frac{1}{2}H_1$ (resp.$\frac{1}{2}H_2$) et

• le préhomogène (E_0, E_1) (resp.(F_0, F_1)) est de type (D_6, α_2) dans le cas déployé ,

• E (resp.F) est de type DIII dans le cas EVI,

• E (resp.F) est de type DI dans le cas EVII,

E (resp.F) admet comme sous-algèbre abélienne déployée maximale $\mathfrak{h}_0 = \oplus_{\lambda \in \Sigma | n(\widetilde{\alpha}, \lambda) = 0} \mathbb{F}h_\lambda$ (resp. $\mathfrak{h}'_0 = \oplus_{\lambda \in \Sigma | n(\beta, \lambda) = 0} \mathbb{F}h_\lambda$), de plus :

$$\mathfrak{g}_1 = E_1 \oplus F_1 \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}^{\widetilde{\alpha}} \oplus \mathfrak{g}^{\beta} \oplus E_2(H_1) \cap E_2(H_2)$$

$\mathfrak{g}^{\widetilde{\alpha}}$ et $\mathfrak{g}^{\beta}$ sont de dimension 1, $\dim(E_1) = \dim(F_1) = 2p_{2,2} = 16$.

8.1.2 Préliminaires

Lemme 8.1.1 *Soit $x \in E'_1$ (resp.$x \in F'_1$) et $\mathfrak{U}_x = \mathfrak{U}(\mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}H_1 \oplus \mathbb{F}x^{-1})$ (resp.$\mathfrak{U}_x = \mathfrak{U}(\mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}H_2 \oplus \mathbb{F}x^{-1})$) alors :*

1. *Dans le cas déployé, rang$(\mathfrak{U}_x) \geq 3$.*
2. *Dans les cas EVI ou VII, rang$(\mathfrak{U}_x) =$ rang$(\mathfrak{g}) - 2$.*

Démonstration: 1) On rappelle que rang$(\mathfrak{U}_x) \leq$rang$(\mathfrak{g}) - 2$ (proposition,appendice 1) ce qui termine le cas EVII et dans le cas EVI on a l'inégalité rang$(\mathfrak{U}_x) \leq 2$.

2) Dans le cas déployé, on effectue le calcul de $(\mathfrak{U}_x)$.
Comme (E_0, E_1) est de type (D_6, α_3) on peut supposer que $x = \sum_{1\leq i\leq 4} a_i X_{\mu_i}$, avec

$$a_1a_2a_3a_4 \neq 0 \quad \text{et}$$

$\mu_1 = \alpha_6$, $\mu_2 = \alpha_5+\alpha_6+\alpha_7$, $\mu_3 = \alpha_6+2\alpha_5+2\alpha_4+\alpha_2+\alpha_3$, $\mu_4 = \alpha_7+\alpha_6+\alpha_5+2\alpha_4+\alpha_2+\alpha_3$
donc $x^{-1} = \sum_{1\leq i\leq 4} a_i^{-1} X_{-\mu_i}$ (cf. par exemple prop.6.6 de [Mu 2] et th.1 et tableau II de [Mu 4]).

Soient :

$$\delta_1 = \alpha_1 + \beta \ , \ \delta_2 = \delta_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \ ,$$

$X_1 = a_2[X_{-\mu_1}, X_{\delta_1}] - a_1[X_{-\mu_2}, X_{\delta_1}]$, $h_1 = h_{\delta_1-\mu_1} + h_{\delta_1-\mu_2}$, $Y_1 = a_2^{-1}[X_{\mu_1}, X_{-\delta_1}] - a_1^{-1}[X_{\mu_2}, X_{-\delta_1}]$,
$X_2 = a_2[X_{-\mu_3}, X_{\delta_2}] - a_3[X_{-\mu_2}, X_{\delta_2}]$, $h_2 = h_{\delta_2-\mu_2} + h_{\delta_2-\mu_3}$, $Y_2 = a_2^{-1}[X_{\mu_3}, X_{-\delta_2}] - a_3^{-1}[X_{\mu_2}, X_{-\delta_2}]$,
comme les racines $\delta_1 - \mu_1$ et $\delta_1 - \mu_2$ (resp. $\delta_2 - \mu_2$ et $\delta_2 - \mu_3$) sont orthogonales, on vérifie facilement que $(X_i, h_i, Y_i), i = 1, 2$, sont 2 sl_2-triplets de l'algèbre $\mathfrak{U}_x$ donc $\mathbb{F}h_{\widetilde{\alpha}} \oplus \mathbb{F}h_1 \oplus \mathbb{F}h_2 = \mathbb{F}h_{\widetilde{\alpha}} \oplus \mathbb{F}h_{\alpha_2} \oplus \mathbb{F}h_{\alpha_3}$ est une sous-algèbre abélienne déployée de $\mathfrak{U}_x$.

3) Dans le cas EVI, dans une extension quadratique convenable de $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}' = \mathbb{F}\sqrt{a}$, $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}'$ est une algèbre déployée, notons σ la conjugaison "associée".

Comme $\sigma(\mu_1) = \mu_2$ et $\sigma(\mu_3) = \mu_4$,

$$\mathfrak{g}^{\lambda_4} = \{xX_{\mu_1} + \overline{x}k_1X_{\mu_2} \mid x \in \mathbb{F}'\} \ , \ \mathfrak{g}^{\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4} = \{yX_{\mu_3} + \overline{y}k_3X_{\mu_4} \mid y \in \mathbb{F}'\}$$

avec $\sigma(X_{\mu_1}) = k_1X_{\mu_2}$ et $\sigma(X_{\mu_3}) = k_3X_{\mu_4}$.
Notons également que $\sigma(\delta_1) = \delta_1$ donc $\sigma(X_{\delta_1}) = kX_{\delta_1}$ avec $k\overline{k} = 1$.

Comme le préhomogène (E_0, E_1) est de type (C_3, α_1), on peut supposer que $x \in E_1' \cap (\mathfrak{g}^{\lambda_4} \oplus \mathfrak{g}^{\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4})$ donc s'écrit sous la forme :

$$x = xX_{\mu_1} + \overline{x}k_1X_{\mu_2} + yX_{\mu_3} + \overline{y}k_3X_{\mu_4} \ , x, y \in \mathbb{F}' - \{0\}.$$

Soit $t \in \mathbb{F}' - \{0\}$ tel que $\dfrac{t}{\overline{t}} = -\dfrac{\overline{k}_1}{k_1}k$ et :

$$X_1 = t\overline{x}k_1[X_{-\mu_1}, X_{\delta_1}] - xt[X_{-\mu_2}, X_{\delta_1}] \ , \ Y_1 = \frac{1}{t\overline{x}k_1}[X_{\mu_1}, X_{-\delta_1}] - \frac{1}{tx}[X_{\mu_2}, X_{-\delta_1}] \ ,$$

alors $\sigma(X_1) = X_1, \sigma(Y_1) = Y_1$ et comme dans 2), $(X_1, h_1 = h_{\delta_1-\mu_1} + h_{\delta_1-\mu_2}, Y_1)$ est un sl_2-triplet-triplet qui commute à (x, H_1, x^{-1}) donc $\mathbb{F}h_{\widetilde{\alpha}} \oplus \mathbb{F}h_1$ est une sous-algèbre abélienne déployée de $\mathfrak{U}_x$ de dimension 2 or $\mathfrak{U}_x$ est de rang inférieur ou égal à 2 d'où $\mathfrak{U}_x$ est de rang 2.□

Proposition 8.1.2 *Soit $x = x_2 + x_0 \in W_{\mathfrak{t}}$ avec $x_i \in E_i(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$, alors les préhomogènes $((\mathfrak{U}_{x_i})_0, (\mathfrak{U}_{x_i})_1)$, $i = 0$ ou 2, sont des $\mathbb{F}$-formes de $(A_5, \{\alpha_1, \alpha_5\})$.*

Dans les 2 cas l'invariant relatif fondamental est une forme quadratique de discriminant 1 et d'invariant $\gamma = 1$ sauf dans le cas EVI où il vaut -1.

Démonstration: Les préhomogènes $((\mathfrak{U}_{x_i})_0, (\mathfrak{U}_{x_i})_1)$, $i = 0$ ou 2, sont des $\mathbb{F}$-formes de $(A_5, \{\alpha_1, \alpha_5\})$ d'après la démonstration du lemme 1.3.1 (2)). Mais alors le rang de $\mathfrak{U}_{x_i}$ peut prendre ces valeurs dans $\{1, 2, 3, 5\}$ par la proposition 8.1.3 donc par le lemme 8.1.1 :

• le rang de $\mathfrak{U}_{x_i}$ vaut 3 ou 5 dans le cas déployé d'où l'invariant $\gamma(F(\ +x_i)/(\mathfrak{U}_{x_i})_1)) = 1$ par la proposition 8.1.3,

• le rang de $\mathfrak{U}_{x_i}$ vaut 2 dans le cas EVI donc $\gamma(F(\ +x_i)/(\mathfrak{U}_{x_i})_1)) = -1$ par la proposition 8.1.3,

• le rang de $\mathfrak{U}_{x_i}$ vaut 1 dans le cas EVII réel donc $\gamma(F(\ +x_i)/(\mathfrak{U}_{x_i})_1)) = 1$ par la proposition 8.1.3. □

Proposition 8.1.3 *Soit $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ un préhomogène tel que $(\overline{\mathfrak{g}_0}, \overline{\mathfrak{g}_1})$ soit de type $(A_{2n+1}, \{\alpha_1, \alpha_{2n+1}\})$ et soit p le rang de $\mathfrak{g}$ alors $p = 2n+1$ ou bien $1 \leq p \leq n+1$ et l'invariant relatif fondamental est une forme quadratique F de discriminant 1 et d'invariant $\gamma(F) = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } p = 2n+1, \\ (-1)^{n+1-p} \text{ sinon .} \end{cases}$*

Démonstration: On effectue le calcul explicite de F dans chaque cas.

1) Le cas déployé

Dans les notations de la planche I de[Bou 1] et en prenant un système de Chevalley $(X_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$, il suffit de calculer $\widetilde{B}((adx)^2(X_{-\widetilde{\alpha}}, (adx)^2(X_{-\widetilde{\alpha}})$ pour $x \in \mathfrak{g}_1$, $\widetilde{\alpha}$ étant la plus grande racine de Δ. Notons que dans ce système de racines $N_{\alpha,\beta} \in \{0, \pm 1\}$ et rappelons que $\widetilde{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$.

Ecrivons $x = \sum_{i=2}^{2n+1} x_i X_{\epsilon_1-\epsilon_i} + y_i X_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}}$ alors :

$adx(X_{-\widetilde{\alpha}}) = \sum_{i=2}^{2n+1} x_i N_i X_{\epsilon_{2n+2}-\epsilon_i} + y_i N_i' X_{\epsilon_i-\epsilon_1}$ avec $N_i = N_{\epsilon_1-\epsilon_i,-\widetilde{\alpha}}$ et $N_i' = N_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+2},-\widetilde{\alpha}}$,

$(adx)^2(X_{-\widetilde{\alpha}}) = \sum_{2\leq i\neq j\leq 2n+1} x_i y_j A_{i,j} X_{\epsilon_j-\epsilon_i} + H$ avec :

$A_{i,j} = N_{\epsilon_1-\epsilon_i,\epsilon_j-\epsilon_1} N_j' + N_i N_{\epsilon_j-\epsilon_{2n+2},\epsilon_{2n+2}-\epsilon_i}$ et $H = -(\ \sum_{i=2}^{2n+1} x_i y_i (N_i' h_{\epsilon_1-\epsilon_i} + N_i h_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}})\ )$,

or :

$N_{\epsilon_1-\epsilon_i,\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}} = -N_{\epsilon_i-\epsilon_1,\widetilde{\alpha}} = -N_{\epsilon_1-\epsilon_i,-\widetilde{\alpha}} = -N_i$ et $N_i' = -N_{\widetilde{\alpha},\epsilon_{2n+2}-\epsilon_i} = N_{-\widetilde{\alpha},\epsilon_1-\epsilon_i} = -N_i$ (lemme 4(3), chap.VIII,§2, $n°4$ [Bou 2]) donc

$H = \ \sum_{i=2}^{2n+1} x_i y_i N_i (h_{\epsilon_1-\epsilon_i} - h_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}}\ )$ et $A_{i,j} = -N_{\epsilon_1-\epsilon_i,\epsilon_j-\epsilon_1} N_j + N_i N_{\epsilon_j-\epsilon_{2n+2},\epsilon_{2n+2}-\epsilon_i}$.

Pour $i \neq j$, posons : $\alpha = \epsilon_1-\epsilon_i, \beta = \epsilon_j-\epsilon_1, \gamma = \epsilon_{2n+2}-\epsilon_j, \delta = \epsilon_i-\epsilon_{2n+2}$, alors $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$ d'où :

$N_{\epsilon_1-\epsilon_i,\epsilon_j-\epsilon_1}N_{\epsilon_{2n+2}-\epsilon_j,\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}}+N_{\epsilon_j-\epsilon_1,\epsilon_{2n+2}-\epsilon_j}N_{\epsilon_1-\epsilon_i,\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}}=0$ (exercice 4 p. 221, chap.VIII,§2 [Bou 2]) donc $N_{\epsilon_{2n+2}-\epsilon_j,\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}}=-N_{\epsilon_1-\epsilon_i,\epsilon_j-\epsilon_1}N_jN_i$.

Ainsi $A_{i,j}=-2N_jN_{\epsilon_1-\epsilon_i,\epsilon_j-\epsilon_1}$ et

$$\widetilde{B}((adx)^2(X_{-\widetilde{\alpha}}),(adx)^2(X_{-\widetilde{\alpha}}))=\sum_{2\leq i\neq j\leq 2n+1}x_iy_jx_jy_iA_{i,j}A_{j,i}+\widetilde{B}(H,H)$$

$$=-4\sum_{2\leq i\neq j\leq 2n+1}x_iy_jx_jy_iN_iN_j+\sum_{i=2}^{2n+1}x_iy_iN_i((\epsilon_i-\epsilon_{2n+2})(H)-(\epsilon_1-\epsilon_i)(H)\ )$$

$$=-6\big(\sum_{i=2}^{2n+1}x_i^2y_i^2+\sum_{2\leq i\neq j\leq 2n+1}x_iy_jx_jy_iN_iN_j\big)=-6(\sum_{i=2}^{2n+1}x_iy_iN_i)^2\ ,$$

et finalement l'invariant relatif fondamental est une forme quadratique $F(x)=c\sum_{i=2}^{2n+1}x_iy_iN_i$, $c\in\mathbb{F}^*$, par conséquent $\gamma(F)=1$ et $\mathrm{discr}(F)=1$.

2) Le cas de rang p avec $\mathfrak{g}$ non déployéee.

Par classification, on ne peut avoir que le type AIII (tables de [Wa] et de [Ve]) par conséquent $p\leq n+1$ et sur une extension quadratique convenable $\mathbb{F}'=\mathbb{F}\sqrt{a}$, $\mathfrak{g}$ est déployée, notons σ la "conjugaison associée" alors pour $i=1,...,p-1$ on a $\sigma(\alpha_i)=\alpha_{2n+2-i}$, $\sigma(\alpha_i)=-\alpha_i$ pour $i=p+1,...,2n+1-p$ lorsque $p\leq n$ et $\sigma(\alpha_p)=\sum_{p+1\leq j\leq 2n+2-p}\alpha_j$ d'où :

$\sigma(X_{\epsilon_1-\epsilon_i})=k_iX_{\epsilon_{2n+3-i}-\epsilon_{2n+2}}$ pour $i=1,...,p,2n+3-p,...,2n+1$ et $\sigma(X_{\epsilon_1-\epsilon_i})=k_iX_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}}$ pour $i=p+1,...,\ 2n+2-p$.

Comme $\sigma(\widetilde{\alpha})=\widetilde{\alpha}$ on a $\sigma(X_{\widetilde{\alpha}})=kX_{\widetilde{\alpha}}$ avec $k\overline{k}=1$ donc pour $i=2,...,p$:

$$\sigma([X_{\epsilon_1-\epsilon_i},X_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+2}}])=\frac{k_i}{\overline{k_{2n+3-i}}}N_{2n+3-i}X_{\widetilde{\alpha}}=-N_ikX_{\widetilde{\alpha}}\Rightarrow k_i=-\overline{k_{2n+3-i}}kN_{2n+3-i}N_i.$$

Soit $x\in\mathfrak{g}_1$ décomposé comme dans 1) et vérifiant $\sigma(x)=x$, alors $y_{2n+3-i}=k_i\overline{x_i}$ pour $i=2,...,p,2n+3-p,...,2n+1$ et $y_i=k_i\overline{x_i}$ pour $i=p+1,...,\ 2n+2-p$ donc il existe $c\in\mathbb{F}'$ tel que $\dfrac{\overline{c}}{c}=-k$ et :

$$\begin{aligned}F(x)&=c(\textstyle\sum_{2\leq i\leq p,2n+3-p\leq i\leq 2n+1}(\overline{x_i}x_{2n+3-i}k_iN_{2n+3-i}))+F_a(x')\\&=\textstyle\sum_{i=2}^{p}(c\overline{x_i}x_{2n+3-i}k_iN_{2n+3-i}+cx_i\overline{x_{2n+3-i}}k_{2n+3-i}N_i)+F_a(x')\\&=\textstyle\sum_{i=2}^{p}(x_i\overline{z_i}+z_i\overline{x_i})+F_a(x')\quad\text{avec } z_i=ck_iN_{2n+3-i}x_{2n+3-i}\end{aligned}$$

$F_a(x')=0$ lorsque $p=n+1$ et lorsque $p\leq n$ on a :

$F_a(x')=\sum_{p+1\leq i\leq 2n+2-p}x_i\overline{x_i}ck_iN_i$ et $x'=\sum_{p+1\leq i\leq 2n+2-p}x_iX_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+1}}+\overline{x_i}\sigma(X_{\epsilon_i-\epsilon_{2n+1}})$,

donc $\mathrm{disc}(F) = 1$ et $\gamma(F) = 1$ lorsque $p = n+1$ (pas de racines compactes) et sinon $\gamma(F) = \gamma(F_a)$.

Soit $\mathfrak{b}'$ la $\mathbb{F}'$-algèbre engendrée par $X_{\pm(\epsilon_1-\epsilon_{p+1})}$, $X_{\pm(\epsilon_{2n+1-p}-\epsilon_{2n+1})}$, $X_{\pm(\epsilon_i-\epsilon_{i+1})}$ pour $i = p+1, 2n+1-p$. Elle est graduée par $h_{\tilde{\alpha}}$ qui appartient à $\mathfrak{b}'$ et le préhomogène $(\mathfrak{b}'_0, \mathfrak{b}'_1)$ est de type $(A_{2(n+1-p)+1}, \{\alpha_1, \alpha_{2(n+1-p)+1}\})$.
Elle est σ-stable et la $\mathbb{F}$-algèbre correspondante, $\mathfrak{b} = \{x \in \mathfrak{b}' | \sigma(x) = x\}$, est alors de $\mathbb{F}-$rang 1 et F_a est l'invariant relatif fondamental du préhomogène $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_1)$ donc F_a est une forme quadratique anisotrope sur un espace vectoriel de dimension $4(n+1-p)$ d'où $\gamma(F_a) = (-1)^{n+1-p}$ dans le cas réel et dans le cas $\mathfrak{p}-$adique on a nécessairement $p = n$ et $\gamma(F_a) = -1$ par classification des formes quadratiques. □

8.1.3 Le résultat

Théorème 8.1.4 *Soient* $(\pi_1, \pi_2) \in \widehat{(\mathbb{F}^*)^2}$, $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ *alors :*

$$\begin{aligned} Z^*(\mathcal{F}f; (\pi_1, \pi_2)) &= A(\pi_1, \pi_2) Z(f; (\pi_1, \pi_1^{-2}\pi_2^{-1}| \ |^{-8}) \quad \textit{avec} \\ A(\pi_1, \pi_2) &= \rho(\pi_2| \ |)\rho(\pi_2| \ |^4)\rho(\pi_1^2\pi_2| \ |^5)\rho(\pi_1^2\pi_2| \ |^8). \end{aligned}$$

Démonstration: On reprend le calcul de la proposition 5.1.1 avec les mêmes hypothèses et notations.

On a :

$$Z^*(\mathcal{F}f; (\pi_1, \pi_2)) = \int_{E_{0,-2}} \pi_1(F_1^*(y)) Z^*(\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(h_f(\ , y')); \pi_2) dy' \ .$$

La décomposition de la mesure est donnée relativement à la restriction de P_1^* à $(E_{-2,0})_{y'}$ et à F_1^* (cf.th.4.3.3 et 4.3.5) cependant dans le préhomogène $((\mathfrak{U}_{y'^{-1}})_0, (\mathfrak{U}_{y'^{-1}})_1)$ il est plus commode de prendre comme invariants relatifs fondamentaux :

$$G(x) = F(x + y'^{-1}) \text{ alors } G^*(x) = \frac{1}{G(x'^{-1})} = \frac{1}{F(x+y'^{-1})} = F^*(x'+y') \ ,$$

rappelons que G est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension 8, de discriminant 1 et d'invariant $\gamma = \pm 1$ suivant le type de $\mathfrak{g}$ (indépendant de y') (proposition 8.1.2).

Notons Z', Z'^* les fonctions Zétas correspondantes, $\hat{f}$ la transformation de Fourier associée alors :

$$\begin{aligned} Z^*(\mathcal{F}_{(E_{2,0})_{y'}}(h_f(\ , y')); \pi_2) &= Z'^*(\widehat{h_f(\ , y')}; \pi_2) \\ &= \gamma\rho(\pi_2| \ |)\rho(\pi_2| \ |^4) Z'(h_f(\ , y'); \pi_2^{-1}| \ |^{-4}) \quad \text{(2)théorème 3.6.5)} \\ &= c|F_1^*(y')|^{-2} Z(h_f(\ , y'); \pi_2^{-1}| \ |^{-4}) \ \text{ en posant } c = \gamma\rho(\pi_2| \ |)\rho(\pi_2| \ |^4) \end{aligned}$$

d'où en permutant dans l'intégrale : :

$$Z^*(\mathcal{F}f; (\pi_1, \pi_2)) = c \int_{E_{2,0}} |F_1(x)|^{-2} \int_{(E_{0,-2})_x} h_f(x, y')) \pi_1(F_1^*(y')) \pi_2'(F(x + y'^{-1})) dy'$$

avec $\pi_2' = {\pi_2'}^{-1}|\ |^{-4}$, la décomposition de la mesure est donnée relativement à P_1^*.

Comme avant, dans le préhomogène $((\mathfrak{U}_x)_0, (\mathfrak{U}_x)_1)$ il est plus commode de prendre comme invariants relatifs fondamentaux :

$$H(y) = F(x+y) \text{ alors } H^*(y') = \frac{1}{H(y'^{-1})} = \frac{1}{F(x+y'^{-1})} = F^*(x^{-1}+y') \ ,$$

H est une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension 8, de discriminant 1 et d'invariant γ le même que le précédent (proposition 8.1.2) d'où avec les mêmes notations qu'avant :

$$\int_{(E_{0,-2})_x} h_f(x,y'))\pi_1(F_1^*(y'))\pi_2'(F(x+y'^{-1}))dy' = \pi_1(F_1(x))Z'^*(\widehat{S_f(x+\ )};{\pi_1}^2{\pi_2'}^{-1})$$

$$= \gamma\rho(\pi_1^2\pi_2|\ |^5)\rho(\pi_1^2\pi_2|\ |^8)\pi_1(F_1(x))Z'(S_f(x+\ );\pi_1^{-2}\pi_2^{-1}|\ |^{-8}) \quad (2)\text{théorème 3.6.5)}$$

$$= d\pi_1(F_1(x))|F_1(x)|^2 Z(S_f(x+\ );\pi_1^{-2}\pi_2^{-1}|\ |^{-8}) \text{ en posant } d = \gamma\rho(\pi_1^2\pi_2|\ |^5)\rho(\pi_1^2\pi_2|\ |^8) \ ,$$

la décomposition dans Z est donnée relativement à la restriction de P_1 à $(\mathfrak{U}_x)_1$.

Ceci nous donne :

$$Z^*(\mathcal{F}f;(\pi_1,\pi_2)) = cd\int_{E_{2,0}} \pi_1(F_1(x))(\int_{(E_{2,0})_x} S_f(x+y)\pi'(F(x+y))dy)dx = cd\ Z(f;(\pi_1,\pi'))$$

(th.4.3.3) avec $\pi' = (\pi_1^2\pi_2)^{-1}|\ |^{-8}$. □

Corollaire 8.1.5 *Dans le cas réel, les polynomes de Bernstein sont donnés par :*

$$b_1(s_1,s_2) = s_2(s_2+3) \ , \ b_2(s_1,s_2) = s_2(s_2+3)(2s_1+s_2+4)(2s_1+s_2+7).$$

Démonstration: Comme l'invariant relatif fondamental du préhomogène $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ est de degré 4, par normalisation $\widetilde{B}(H_0,H_0) = -2$ donc $\widetilde{B}(\frac{H_i}{2},\frac{H_i}{2}) = -1$ pour $i = 1,2$ d'où b_1 (1) remarque 3.6.6) et $b_2 = \pm s_2(s_2+3)(2s_1+s_2+4)(2s_1+s_2+7)$ (cf.prop 3.7.3), il reste à déterminer le signe ce qui se fait à l'aide de la relation

$$b_2(s_1,s_2) = (2\pi)^4 \frac{A((\omega_1,s_1),(\omega_1,s_2))}{A((\omega_1,s_1),(\omega_{-1},s_2-1))}$$

(2) du lemme 3.7.1 pour $k=2$). □

8.2 $\mathfrak{g}_2$ de dimension 1

8.2.1 Structure

Leur diagramme de Dynkin sont donnés par : (F_4, α_1), (E_6, α_2), (E_7, α_1), et (E_8, α_8).
Ils ont tous une structure commune que l'on rappelle.

$\Delta_2 = \{\tilde{\alpha}\}$, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 4 racines orthogonales de Δ_1 alors $P = P(H_1, H_2)$ avec $H_1 = h_{\lambda_1} + h_{\lambda_2}$. Lorsque $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ est l'ensemble canonique de racines orthogonales de Δ_1 obtenues par orthogonalisations successives, $P(H_1, H_2)$ est un sous-groupe parabolique standard lorsque $H_1 = h_{\lambda_1} + h_{\lambda_2}$.
Rappelons que $2H_0 = \sum_{1 \leq i \leq 4} h_{\lambda_i}$ et qu'il existe une algèbre déployée, notée $\tilde{\mathfrak{g}}$, admettant $\mathfrak{a} = \oplus_{1 \leq i \leq 4} \mathbb{F} h_{\lambda_i}$ comme sous-algèbre de Cartan et le système de racines correspondant, qui est donné par :

$$R = \{ \frac{\pm\lambda_i \pm \lambda_j}{2} \ , \ 1 \leq i \ \neq j \leq 4 \ \ , \ \frac{\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \lambda_3 \pm \lambda_4}{2} \ , \ \pm\lambda_i \ , \ 1 \leq i \leq 4 \ \}$$

est de type F_4.

On rappelle que $\tilde{B} = -\frac{2B}{B(H_0, H_0)} (= -\frac{2B}{B(h_{\lambda_i}, h_{\lambda_i})})$, ainsi $\tilde{B}(\frac{H_1}{2}, \frac{H_1}{2}) = -1$ et pour toute racine longue α de Δ on a $\tilde{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$.

Pour $i \neq j$ soit $E^{i,j}_{u,v} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h_{\lambda_i}, x] = ux \ , \ [h_{\lambda_j}, x] = vx \ , \ [h_{\lambda_k}, x] = 0 \ \text{ pour } 1 \leq k \neq i, j \leq 4\}$; la dimension commune des sous-espaces $E^{i,j}_{\pm 1, \pm 1}$ est notée d, on a $d \in \{1, 2, 4, 8\}$, $\dim(\mathfrak{g}_1) = 8 + 6d$ et $r_1 = d + \frac{1}{2}$.

On rappelle que ([Mu 3] , prop.4.1.1) :

Proposition 8.2.1 *Il existe un système de Chevalley , $(X_\mu, h_\mu, X_{-\mu})_{\mu \in R}$, de $\tilde{\mathfrak{g}}$ tel que :*

1. *Pour $1 \leq i \ \neq j \leq 4$, toutes les formes quadratiques $f_{\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}}$ définies sur $E^{i,j}_{-1,1}$ par $f_{\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2}}(A) = \frac{1}{2}\tilde{B}(ad(A)^2(X_{\lambda_i}), X_{-\lambda_j})$ sont équivalentes et représentent 1.*
2. *$[X_{-\lambda_1}, [X_{-\lambda_2}, [X_{-\lambda_3}, [X_{-\lambda_4}, X_{\tilde{\alpha}},]]]] = X_{-\tilde{\alpha}}$.*

On note $f = f_{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}}$ alors :

Lemme 8.2.2 *1. f représente 1.*

2. Soit $a \in \mathbb{F}^*$, f et af sont équivalentes $\Leftrightarrow$ a est un élément de $f(E^{1,1}_{-1,1})^*$.

3. $\mathfrak{g}$ est de rang 4 $\Leftrightarrow$ f est anisotrope.

4. $f(E^{1,1}_{-1,1})^* \subset \chi_1(P)$.

5. $\chi(G) = \mathbb{F}^{*2}$.

Démonstration: Pour 1), 2), 3) cf. le lemme 4.1.3 de [Mu 3] et pour 5) la proposition 3.2 de [Mu 3].

Pour 4) on rappelle que $\forall x \in f(E^{1,1}_{-1,1})^*$ et $1 \leq i < j \leq 4$, il existe une involution $g_{i,j}(x) \in G_e$ telle que pour $1 \leq k \leq 4$, on a :

$$g_{i,j}(x)(h_k) = h_{\tau(k)} \ , \ g_{i,j}(x)(X_{\lambda_k}) = f_{i,j,k}(x) X_{\lambda_{\tau(k)}} \ ,$$

avec $f_{i,j,i}(x) = x = f_{i,j,j}(x)^{-1}$ et $f_{i,j,k}(x) = 1$ sinon, τ désignant la transposition (i,j), (démonstration du lemme 2.2.2 de [Mu 3]) d'où $g'_{i,j}(x) := g_{i,j}(x) g_{i,j}(1) \in \cap_{1 \leq i \leq 4} G_{h_{\lambda_i}}$ vérifie $g'_{i,j}(x)(X_{\lambda_k}) = f_{i,j,k}(x) X_{\lambda_k}$ et $\chi_1(g'_{2,3}(x)) = x$ (cf. la proposition suivante pour une formule explicite de F_1). □

Remarque 8.2.3 *$disc(f) \in \mathbb{F}^{*2}$ lorsque $d = 1, 4$ ou 8 (cf.1) et 2) du lemme 8.2.2)*

Pour $x \in \mathfrak{g}_1$, soient : $F(x) = \frac{1}{4!} \tilde{B}(ad(x)^4(X_{-\tilde{\alpha}}), X_{-\tilde{\alpha}})$ et $F_1(x) = \frac{1}{2} \tilde{B}(ad(x)^2(X_{-\tilde{\alpha}}), X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_1-\lambda_2})$, avec $X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_i-\lambda_j} = [X_{-\lambda_i}, [X_{-\lambda_j}, X_{\tilde{\alpha}}]]$ avec $1 \leq i \neq j \leq 4$.

Proposition 8.2.4 *1. F et F_1 sont les invariants relatifs fondamentaux du préhomogène : $(P, \mathfrak{g}_1)$ vérifiant : $F(\sum_{1 \leq i \leq 4} X_{\lambda_i}) = F_1(\sum_{1 \leq i \leq 4} X_{\lambda_i}) = 1$.*

2. $\chi_1(P) = f(E^{1,1}_{-1,1})^*$.

3. Soit $x \in W_{\mathfrak{t}}$, $x = x_2 + x_0$ avec $x_i \in E_i(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ alors :

- $F_1/_{(E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1)_{x_0}} \sim -P_1(x_0) X^2 \oplus -f \oplus Y^2 - Z^2$,
- $P_1/_{(E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_1)_{x_2}} \sim -F_1(x_2) X^2 \oplus -f \oplus Y^2 - Z^2$,
- $\gamma_1(x_2, x_0) = (-F(x), -F_1(x))^d$.

Démonstration: Pour tout $x \in W_{\mathfrak{t}}$, il existe $g \in G_{H_1}$ et $(a_1, ..., a_4) \in (\mathbb{F}^*)^4$ tels que $gx = \sum_{1 \leq i \leq 4} a_i X_{\lambda_i}$ (lemme 7.3 de [Mu 4]) donc on démontre la proposition pour $x = \sum_{1 \leq i \leq 4} a_i X_{\lambda_i}$.

1. En raison des différentes relations de commutation, on a :

$$ad(x)^4(X_{-\tilde{\alpha}}) = 4! \ (\prod_{1 \leq i \leq 4} a_i) \ X_{\tilde{\alpha}} \ \text{ et } \ ad(x)^2(X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_1-\lambda_2}) = 2 a_1 a_2 \ X_{\tilde{\alpha}}$$

   d'où 1.

2. De même on a :

$$ad(x)^2(X_{\tilde{\alpha}-\lambda_3-\lambda_4}) = 2 a_3 a_4 \ X_{\tilde{\alpha}}$$

   donc $P_1(x) = \frac{1}{2} \tilde{B}(ad(x)^2(X_{-\tilde{\alpha}}), X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_3-\lambda_4})$

3. On a $E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1=\mathbb{F}X_{\lambda_1}\oplus\mathbb{F}X_{\lambda_2}\oplus\mathbb{F}X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_3}\oplus\mathbb{F}X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_4}\oplus E^{1,2}_{1,1}$, avec $X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_i}=[X_{-\lambda_i},X_{\tilde{\alpha}}]$ pour $i=1,...,4$, donc :

$F_1(X)=F_1(A)+t_1t_2+z_1z_2$ lorsque $X=t_1X_{\lambda_1}+t_2X_{\lambda_2}+z_1X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_3}+z_2X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_4}+A$.

Soit $\theta=\theta_{X_{\lambda_1},h_{\lambda_1}}(-1)$ et $u\in E^{1,2}_{-1,1}$, alors :

$$F_1(\theta^{-1}(u))=\frac{1}{2}\tilde{B}(ad(u)^2(\theta X_{-\tilde{\alpha}}),\theta X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_1-\lambda_2)})=-\frac{1}{2}\tilde{B}([u,\theta X_{-\tilde{\alpha}}],v)\ \text{ avec}$$

$$v=[u,[X_{\lambda_1},[X_{-\lambda_2},\theta X_{\tilde{\alpha}}]]]=[[[u,X_{\lambda_1}],X_{-\lambda_2}],\theta(X_{\tilde{\alpha}})]$$

en raison des relations de commutation donc :

$$\begin{aligned}F_1(\theta^{-1}(u)) &= \frac{1}{2}\tilde{B}([[u,\theta(X_{-\tilde{\alpha}})],\theta(X_{\tilde{\alpha}})],[[u,X_{\lambda_1}],X_{-\lambda_2}])\\ &= -\frac{1}{2}\tilde{B}(u,[[u,X_{\lambda_1}],X_{-\lambda_2}])\\ &= -f(u).\end{aligned}$$

Comme $\chi_1(P)F_1\sim F_1$ et que $F_1\sim -f\oplus X^2-Y^2+Z^2-T^2$, on vérifie, dans le cas réel et le cas $\mathfrak{p}$-adique, que $\chi_1(P)\subset f(E^{1,1}_{-1,1})^*$ lorsque $f(E^{1,1}_{-1,1})^*\neq\mathbb{F}^*$ d'où $\chi_1(P)=f(E^{1,1}_{-1,1})^*$ en appliquant le lemme précédent.

4. On peut supposer que $x_0=a_3X_{\lambda_3}+a_4X_{\lambda_4}$ et que $x_2=a_1X_{\lambda_1}+a_2X_{\lambda_2}$, un calcul immédiat donne :

$$(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0}=\mathbb{F}X_{\lambda_1}\oplus\mathbb{F}X_{\lambda_2}\oplus\mathbb{F}(a_3X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_4}-a_4X'_{\tilde{\alpha}-\lambda_3})\oplus E^{1,2}_{1,1},$$

de même pour x_2 d'où le résultat du 3).

5. On a :
$$E_{-1}(H_1)\cap E_1(H_2)=E^{1,3}_{-1,1}\oplus E^{1,4}_{-1,1}\oplus E^{2,3}_{-1,1}\oplus E^{2,3}_{-1,1}\ .$$

Prenons comme précédemment $x_2=a_1X_{\lambda_1}+a_2X_{\lambda_2}$ et $x_0=a_3X_{\lambda_3}+a_4X_{\lambda_4}$, alors :

$$\begin{aligned}Q_{x_2,x_0}(\textstyle\sum_{i=1,2;j=3,4}A_{i,j}) &= \tfrac{1}{2}\tilde{B}([x_2,[x_0^{-1},\textstyle\sum_{i=1,2;j=3,4}A_{i,j}]],\textstyle\sum_{i=1,2;j=3,4}A_{i,j})\\ &= \textstyle\sum_{i=1,2;j=3,4}\frac{a_i}{a_j}f_{\frac{\lambda_i-\lambda_j}{2}}(A_{i,j})\ ,\ \text{avec } A_{i,j}\in E^{i,j}_{-1,1}\ ,\end{aligned}$$

d'où $\gamma_1(x_2,x_0)=\begin{cases}\gamma(f)^4 \text{ si } \ d \text{ est pair,}\\ (-F(x),-F_1(x)) \text{ si } \ d=1.\end{cases}$

Pour $d=4$ ou 8 on a $\gamma(f)=\pm1$; pour $d=2$ on a $\gamma(f)=\alpha(disc(f))\alpha(1)$ d'où $\gamma(f)^2=(-1,-disc(f))$ (cf.2) lemme 8.2.2) □

Lorsque $\mathbb{F}$ est archimédien, les 2 polynomes de Bernstein s'obtiennent immédiatement en appliquant les propositions 3.4.4 et 3.7.3 puisque F_1 et P_1 sont des formes quadratiques (cf.remarque 3.6.6) d'où :

Proposition 8.2.5

$b_1(s_1,s_2) = s_2(s_2+\frac{d+1}{2})$ *et* $b_2(s_1,s_2) = s_2(s_2+\frac{d+1}{2})(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})(s_1+s_2+\frac{3d}{2}+1)$.

8.2.2 Une première équation fonctionnelle

On rappelle que pour $u=(u_1,u_2)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$ on définit les ouverts (tous non vides) :

$$O_u = O_{(u_1,u_2)} = \{x\in\mathfrak{g}_1 \mid F_1(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1 \ , \ F_2(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1u_2\}$$

$$O_u^* = O^*_{(u_1,u_2)} = \{x\in\mathfrak{g}_{-1} \mid F_1^*(x)\mathbb{F}^{*2}=u_2 \ , \ F_2^*(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1u_2\}$$

ainsi que les fonctions Zétas correspondantes :

$$Z_u(f;\omega) = Z(f\mathbf{1}_{O_u};\omega) \text{ pour } f\in S(\mathfrak{g}_1) \text{ et } Z_u^*(h;\omega) = Z^*(h\mathbf{1}_{O_u^*};\omega) \text{ pour } h\in S(\mathfrak{g}_{-1}).$$

Soit $(-1)^{[\frac{d+3}{2}]}c(f)$ le discriminant de la forme quadratique $-f\oplus X^2-Y^2-Z^2$, alors $c(f)=-1$ sauf lorsque $d=2$ avec f anisotrope.
Notons que pour d pair on a $\gamma(f)^2=(-1,-c(f))$.
(cf.lemme 8.2.2 et démonstration de la proposition 8.2.4).

Alors :

Proposition 8.2.6 *1. Lorsque $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ pour $f\in S(\mathfrak{g}_1)$, on a :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f);\omega,s) = a_d(\omega,s)Z\Big(f;(\omega_1,(\omega_1\omega_2)^{-1});s_1,-(s_1+s_2+\frac{3}{2}d+2)\Big)$$

avec :

$$a_d(\omega,s) = \rho'(\omega_2;s_2+1)\rho'(\omega_2;s_2+\frac{d+3}{2})\rho'(\omega_1\omega_2;s_1+s_2+d+\frac{3}{2})\rho'(\omega_1\omega_2;s_1+s_2+\frac{3d}{2}+2).$$

2. Dans les autres cas, pour tout $v=(v_1,v_2)$ dans $(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$ et $f\in S(\mathfrak{g}_1)$, on a :

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\ \omega,s) = \sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2} d_{v,u}(\omega,s)Z_u(f;(\omega_1,(\omega_1\omega_2)^{-1});s_1,-(s_1+s_2+\frac{3}{2}d+2)\ ) \quad \textit{avec}$$

- *lorsque d est pair et $u=(u_1,u_2)$: $d_{v,u}(\omega,s) = (-1,c(f)).(u_1v_2,-c(f))$*

$$A^1_{\omega_2,s_2+1,s_2+\frac{d+3}{2}}(v_1v_2,u_1v_2,c(f))A^1_{\omega_1\omega_2,s_1+s_2+d+\frac{3}{2},s_1+s_2+\frac{3d}{2}+2}(u_1v_2,u_1u_2,c(f)).$$

- *Pour $d=1$: $d_{v,u}(\chi,s) =$*

$$\alpha(-1)\ \alpha(u_1v_2)A^0_{\omega_2,s_2+1,s_2+2}(v_1,u_1,-v_2)A^0_{\omega_1\omega_2,s_1+s_2+\frac{5}{2},s_1+s_2+\frac{7}{2}}(v_2,u_2,-u_1).$$

Démonstration: On applique la proposition 5.3.1 dont toutes les hypothèses sont vérifiées par le 3) de la proposition 8.2.4 ainsi que le théorème 3.6.5,5). □

Remarque 8.2.7 *Dans le cas réel, soient :*

$$\begin{aligned} C_d(s) &= 2.(2\pi)^{-(2s+\frac{d+5}{2})}\Gamma(s+1)\Gamma(s+\tfrac{d+3}{2}) \quad , \quad s\in\mathbb{C}\ , \\ C_d(s_1,s_2) &= C_d(s_2).C_d(s_1+s_2+d+\tfrac{1}{2}) \quad , \quad s_1,s_2\in\mathbb{C}\ , \\ &= 4(2\pi)^{-(2s_1+4s_2+3d+6)}\Gamma(s_2+1)\Gamma(s_2+\tfrac{d+3}{2})\Gamma(s_1+s_2+d+\tfrac{3}{2})\Gamma(s_1+s_2+\tfrac{3d}{2}+2)\ , \end{aligned}$$

et pour a,b,c réels :

$$\phi_s^{(f)}(a,b,c)=\frac{\pi}{2}\big((a+b)s+\frac{d+1}{2}a-c\frac{c(f)}{2}\big)$$

alors pour $u,v\in\{-1,1\}^2$ et $\omega=Id$ on a :

$$\frac{d_{v,u}(s_1,s_2)}{C_d(s_1,s_2)}=\begin{cases}(-1)^{\frac{1+u_1}{2}\frac{1+v_2}{2}}\cos\phi^{(f)}_{s_2+1}(u_1,v_1,1+v_2).\cos\phi^{(f)}_{s_1+s_2+\frac{5}{2}}(u_2,v_2,1+u_1) & \textit{pour}\ \ d=1,\\ (u_1v_2,-c(f))\cos\phi^{(f)}_{s_2+1}(u_1,v_1,v_2).\cos\phi^{(f)}_{s_1+s_2+d+\frac{3}{2}}(u_2,v_2,u_1) & \textit{pour}\ \ d\ \textit{pair.}\end{cases}$$

Indexons $\{-1,1\}\times\{-1,1\}:=\{a_1=(-1,-1),a_2=(-1,1),a_3=(1,-1),a_4=(1,1)\}$ et soit $M(d,c(f))$ la matrice à 4 lignes et 4 colonnes et à coefficients réels dont le $(i,j)-$ème coefficient, noté $M_{i,j}(d,c(f))$, est donné par :

$$M_{i,j}(d,c(f))=\frac{d_{a_i,a_j}(s_1,s_2)}{C_d(s_1,s_2)}\ ,$$

alors on a :

- $\mathbf{M(1,-1)}=$

$$\begin{pmatrix} -\sin\pi s_2\cos\pi(s_1+s_2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\pi s_2\cos\pi(s_1+s_2) & 1 & \sin\pi(s_1+s_2)\\ 0 & 0 & -\sin\pi s_2\sin\pi(s_1+s_2) & -\sin\pi s_2\\ 0 & -\cos\pi(s_1+s_2) & -\cos\pi s_2 & -\cos\pi s_2\sin\pi(s_1+s_2)\end{pmatrix}$$

- *Pour $d=4$ ou 8,* $\mathbf{M(d,-1)}=$

$$\begin{pmatrix} \sin\pi s_2\cos\pi(s_1+s_2) & \sin\pi s_2 & \sin\pi(s_1+s_2) & 0\\ 0 & -\cos\pi s_2\sin\pi(s_1+s_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\cos\pi s_2\sin\pi(s_1+s_2) & 0\\ 0 & \sin\pi(s_1+s_2) & \sin\pi s_2 & \sin\pi s_2\cos\pi(s_1+s_2)\end{pmatrix}$$

• $\mathbf{M(2,-1)} =$

$$\begin{pmatrix} -\cos\pi s_2 \sin\pi(s_1+s_2) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\pi s_2 & \sin\pi s_2 \cos\pi(s_1+s_2) & 0 & \sin\pi(s_1+s_2) \\ \sin\pi(s_1+s_2) & 0 & \sin\pi s_2 \cos\pi(s_1+s_2) & -\sin\pi s_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\pi s_2 \sin\pi(s_1+s_2) \end{pmatrix}$$

• $\mathbf{M(2,1)} =$

$$\begin{pmatrix} \sin\pi s_2 \cos\pi(s_1+s_2) & -\sin\pi s_2 & -\sin\pi(s_1+s_2) & 0 \\ 0 & \cos\pi s_2 \sin\pi(s_1+s_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\pi s_2 \sin\pi(s_1+s_2) & 0 \\ 0 & -\sin\pi(s_1+s_2) & -\sin\pi s_2 & \sin\pi s_2 \cos\pi(s_1+s_2) \end{pmatrix}.$$

Dans les cas réels et $\mathfrak{p}-$adique, indexons les éléments de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$: $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2} = \{u_1, ..., u_\ell\}$, et soit $A(\omega, s)$ la matrice à ℓ lignes et ℓ colonnes des coefficients de l'équation fonctionnelle "normalisée" relative à la forme quadratique $Q_f = -f \oplus X^2 - Y^2 - Z^2$ lorsque d est **pair** c'est à dire :

$$\begin{aligned} A(\omega,s) &= \left(a^{(Q_f)}_{u_i,u_j}(\omega,s) \right)_{1\le i,j\le \ell} \\ &= \epsilon_1 \left(A^1_{\omega, s+1, s+\frac{d+3}{2}}(u_i, u_j, c(f)) \right)_{1\le i,j\le \ell} \\ &= \epsilon_2 \left(A^1_{\omega, s+1, s+\frac{d+3}{2}}(c(f)u_i, c(f)u_j, 1) \right)_{1\le i,j\le \ell} \end{aligned}$$

avec $\epsilon_1 := \alpha(1)^2(c(f), -1)\gamma(f)$ et $\epsilon_2 = \begin{cases} (-1, -c(f)) & \text{lorsque } d = 2 \\ \gamma(f) & \text{lorsque } d \in \{4, 8\} \end{cases}$,
(démonstration de la proposition 8.2.4), on a $\epsilon_1^2 = (-1, c(f))$ et $\epsilon_2^2 = 1$,
alors :

Proposition 8.2.8 *On suppose que d est pair.*

Pour $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, et $\pi \in \hat{(\mathbb{F}^*)^2}$ tel que $\Re(\pi) > 0$, on pose :
• $O_u = \{x \in \mathfrak{g}_1$ *tel que* $F_2(x)(\mathbb{F}^*)^2 = u\}$ *et pour* $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1) : Z_u(f;\pi) := Z(1_{O_u} f; \pi)$,
• $O_u^* = \{x \in \mathfrak{g}_{-1}$ *tel que* $F_2^*(x)(\mathbb{F}^*)^2 = v\}$ *et pour* $g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1}) : Z_u^*(g;\pi) := Z^*(1_{O_u^*} g; \pi)$,
alors $Z_u(f;\pi)$ et $Z_u^*(g;\pi)$ admettent un prolongement méromorphe sur $\hat{(\mathbb{F}^*)^2}$ et on a :

$$\begin{pmatrix} Z^*_{u_1}(\mathcal{F}(f);\omega,s) \\ \dots \dots \\ Z^*_{u_\ell}(\mathcal{F}(f);\omega,s) \end{pmatrix} = B(\omega,s) \begin{pmatrix} Z_{u_1}(f;\omega^*|\ |^{-(\frac{3d}{2}+2)1_2}) \\ \dots \dots \\ Z_{u_\ell}(f;\omega^*|\ |^{-(\frac{3d}{2}+2)1_2}) \end{pmatrix}$$

avec

$$B(\omega,s)=A(\omega_2,s_2).D.A(\omega_1\omega_2,s_1+s_2+d+\frac{1}{2}),$$

D étant la matrice diagonale : $D=((u_i,-c(f)).\delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq \ell}$.

Démonstration: Pour $f\in\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_1)$, $g\in\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{-1})$ et $\pi\in(\hat{\mathbb{F}^*})^2$ tel que $\Re(\pi)>0$, on a les égalités :

$$Z_u(f;\pi)=\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} Z_{w(1,u)}(f;\pi)\ ,\ Z_u^*(g;\pi)=\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} Z^*_{w(1,u)}(g;\pi)\ ,$$

ce qui donne un prolongement méromorphe de Z_u et Z_u^* sur $(\hat{\mathbb{F}^*})^2$.
On a clairement la relation :

$$u,v\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2\ ,\ w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}: d_{v,w.u}=d_{w.v,u}\ \text{ donc :}$$

$$\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{w(1,v),u_1(1,u)}=\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{(1,v),wu_1(1,u)}=\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{(1,v),w(1,u)}=\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{w(1,v),(1,u)},$$

d'où

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\pi)=\sum_{v\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} a_{v,u}(\pi)Z_u(f;\pi^*|\ |^{-(\frac{3d}{2}+2)1_2})\quad\text{avec}$$

$$a_{v,u}=(-1,c(f))\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{\omega_2,s_2+1,s_2+\frac{d+3}{2}}(v,w,c(f))(w,-c(f))A^1_{\omega_1\omega_2,s_1+s_2+d+\frac{3}{2},s_1+s_2+\frac{3d}{2}+2}(w,u,c(f)),$$

d'où le résultat.

Notons que l'on a également :

$$\begin{aligned} a_{v,u} &= \textstyle\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{\omega_2,s_2+1,s_2+\frac{d+3}{2}}(c(f)v,c(f)w,1)(w,-c(f))A^1_{\omega_1\omega_2,s_1+s_2+d+\frac{3}{2},s_1+s_2+\frac{3d}{2}+2}(c(f)w,c(f)u,1)\\ &= \textstyle\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{\omega_2,s_2+1,s_2+\frac{d+3}{2}}(c(f)v,w,1)(w,-c(f))A^1_{\omega_1\omega_2,s_1+s_2+d+\frac{3}{2},s_1+s_2+\frac{3d}{2}+2}(w,c(f)u,1).\end{aligned}$$

□

Remarque 8.2.9 *:*

Soit $\tilde{A}(\omega,s)$ (resp.$\tilde{A}(s)$) la matrice à ℓ lignes et ℓ colonnes ayant comme coefficient $A^1_{\omega,s+1,s+\frac{d+3}{2}}(u_i,u_j,1)$ (resp.$A^1_{Id,s+1,s+\frac{d+3}{2}}(u_i,u_j,1)$) sur la $i-$ème ligne et $j-$ ème colonne, alors :

$$\begin{pmatrix} Z^*_{c(f)u_1}(\mathcal{F}(f);\omega,s)\\ \dots\ \dots\\ Z^*_{c(f)u_\ell}\ (\mathcal{F}(f);\omega,s)\end{pmatrix}=\tilde{B}(\omega,s)\begin{pmatrix} Z_{c(f)u_1}(f;\omega^*|\ |^{-(\frac{3d}{2}+2)1_2})\\ \dots\ \dots\\ Z_{c(f)u_\ell}\ (f;\omega^*|\ |^{-(\frac{3d}{2}+2)1_2})\end{pmatrix}.$$

avec

$$\tilde{B}(\omega,s)=\tilde{A}(\omega_2,s_2).D.\tilde{A}(\omega_1\omega_2,s_1+s_2+d+\frac{1}{2}).$$

• Dans le cas réel :
On prend $\frac{\mathbb{R}^*}{\mathbb{R}^{*+}} = \{u_1 = -1, u_2 = 1\}$, pour $\omega = Id$ on a :

$$\tilde{A}(s) = C_d(s) \begin{pmatrix} \sin(\pi s + \pi\frac{d}{4}) & \cos\pi\frac{d}{4} \\ -\sin\pi\frac{d}{4} & -\cos(\pi s + \pi\frac{d}{4}) \end{pmatrix}.$$

On pose $B(s_1, s_2) := B(Id, (s_1, s_2))$, alors :

Lorsque $d = 2$ et $c(f) = -1$ (c'est à dire f isotrope) :

$$B(s_1, s_2) = C_2(s_1, s_2) \begin{pmatrix} \sin\pi s_2 \cos\pi(s_1 + s_2) & \sin\pi(s_1 + s_2) - \sin\pi s_2 \\ 0 & -\cos\pi s_2 \sin\pi(s_1 + s_2) \end{pmatrix},$$

et dans tous les autres cas ($d = 2$ avec f anisotrope ou $d = 4$ ou $d = 8$) :

$$B(s_1, s_2) = C_d(s_1, s_2) \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{d}{2}+1} \cos\pi s_2 \sin\pi(s_1 + s_2) & 0 \\ (-1)^{\frac{d}{2}}(\sin\pi s_2 + \sin\pi(s_1 + s_2)) & \sin\pi s_2 \cos\pi(s_1 + s_2) \end{pmatrix}.$$

• Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, de caractéristique résiduelle différente de 2, la matrice $\tilde{A}$ est donnée dans le lemme 3.6.7,B.

Contrairement au cas d pair, lorsque $d = 1$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, on constate que $\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{w(1,v),u_1(1,u)}(s_1, s_2)$ dépend également de u_1 lorsque (s_1, s_2) décrit $(\mathbb{C})^2$, cependant lorsque $s_1 = 0$ on a :

Lemme 8.2.10 *Cas $d = 1$.*
Dans le cas réel ou $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2, on a pour $s \in \mathbb{C}, u$ et v dans $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$:

$$\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{w(1,v),u_1(1,u)}(0, s) = \alpha(-1)^2|2|_{\mathbb{F}}^{-2s-\frac{7}{2}}\rho(|\ |^{2s+4})A^1_{s+1,s+\frac{7}{2}}(v, u, -1).$$

Démonstration: On exprime

$$\begin{aligned} f(u_1) \quad &= \alpha(-1)\textstyle\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{w(1,v),u_1(1,u)}(0, s) \\ &= \alpha(-1)\ \textstyle\sum_{w,t,y\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(u_1vw)\ (-vw, t)\ (-u_1, y). \\ &\quad \rho(s + 1; tw)\ \rho(s + 2; tu_1)\ \rho(s + \tfrac{5}{2}; yvw)\ \rho(s + \tfrac{7}{2}; yuu_1) \end{aligned}$$

On change les sommations : y en yu_1, t en tu_1 et w en wu_1v ce qui donne :

$$f(u_1) = \alpha(-1) \sum_{w,t,y\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(w)(-u_1w, tu_1)(-u_1, yu_1)\rho(s+1; tvw)\ \rho(s+2; t)\rho(s+\frac{5}{2}; yw)\ \rho(s+\frac{7}{2}; yu)$$

ensuite on somme sur $x = tyw, y, w$ d'où : $\alpha(1)\ f(u_1) =$

$$\sum_{x\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} (-u_1, x)\Bigg(\sum_{y\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \rho(s+1; xyv)\rho(s+\frac{7}{2}; yu)\Bigg(\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(w)(w, xy)\rho(s+2; xyw)\rho(s+\frac{5}{2}; yw)\Bigg)\Bigg)$$

or

$$\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(w)(w,xy)\rho(s+2;xyw)\rho(s+\frac{5}{2};yw) = A^1_{s+2,s+\frac{5}{2}}(xy,y,xy)$$

$$= \alpha(-xy)\alpha(1)A^1_{s+2,s+\frac{5}{2}}(1,x,1) = \begin{cases} 0 \text{ si } x\neq 1, \\ \alpha(-y)\alpha(1)A^1_{s+2,s+\frac{5}{2}}(1,1,1) \text{ si } x=1 \end{cases}$$

(lemme 3.6.8,C)) d'où :

$$f(u_1) = \ A^1_{s+2,s+\frac{5}{2}}(1,1,1)\sum_{y\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(-y)\rho(s+1;yv)\rho(s+\frac{7}{2};yu)$$

$$= A^1_{s+2,s+\frac{5}{2}}(1,1,1)A^1_{s+1,s+\frac{7}{2}}(-v,-u,1) = \alpha(-1)^2\ |2|_{\mathbb{F}}{}^{-2s-\frac{7}{2}}\rho(|\ |^{2s+4})A^1_{s+1,s+\frac{7}{2}}(v,u,-1).$$

(lemmes 3.6.4,B,3),3.6.8,1)) □

Rappelons que pour $u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$:

- $O'_u = \{x\in\mathfrak{g}_1 | F(x)\mathbb{F}^{*2} = u\}$ et $Z_u(f;\pi) = Z(f1_{O'_u};\pi)$,
- $O'*_u = \{x\in\mathfrak{g}_{-1} | F^*(x)\mathbb{F}^{*2} = u\}$, et $Z^*_u(f;\pi) = Z(f1_{O'^*_u};\pi)$,

alors la proposition 8.2.8 et le lemme 8.2.10 impliquent :

Proposition 8.2.11 *On suppose que $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou bien que $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2, alors*

Pour tout $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$, $s\in\mathbb{C}$ et $v\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a :

$$Z^*_v(\mathcal{F}(f);s) = \sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} a_{v,u}(s)Z_u(f;-s-2-\frac{3}{2}d)$$

avec

$$a_{v,u}(s) \ = \ \alpha(-1)^2|2|_{\mathbb{F}}{}^{-2s-\frac{7}{2}}\rho(|\ |^{2s+4})A^1_{s+1,s+\frac{7}{2}}(v,u,-1) \ \ \textit{lorsque} \ \ d=1,$$

$$a_{v,u}(s) \ = \ \textstyle\sum_{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{s+1,s+\frac{d+3}{2}}(c(f)v,w,1)(w,-c(f))A^1_{s+d+\frac{3}{2},s+\frac{3d}{2}+2}(w,c(f)u,1)$$

lorsque d est pair.

Remarque : Les coefficients $a_{v,u}(s), v$ et $u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, de la proposition sont les coefficients des équations fonctionnelles associées à un invariant relatif fondamental de la forme :

$$F_X(x) = \tilde{B}(adx^4(X),X), \ \ \text{avec} \ \ X\in\mathfrak{g}_{-2}\setminus\{0\}.$$

Lorsque d est pair, la constante $c(f)$ associée vaut toujours -1 sauf lorsque $d=2$ mais alors celle-ci est égale au discriminant de l'une (quelconque) des formes quadratiques $A\in E^{i,j}_{-1,1}\to\tilde{B}(ad(A)^2(x),y)$, avec $x\in E_2(h_i)\cap\mathfrak{g}_1\setminus\{0\}, y\in E_{-2}(h_j)\cap\mathfrak{g}_1\setminus\{0\}$, ou bien $B\in E^{i,j}_{1,1}\to\tilde{B}(ad(B)^2(z),y)$, avec $z\in E_{-2}(h_i)\cap\mathfrak{g}_{-1}\setminus\{0\}, y\in E_{-2}(h_j)\cap\mathfrak{g}_{-1}\setminus\{0\}$; $c(f)\neq -1$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}$ est de rang 4.
Les résultats explicites se déduisent de la remarque 8.2.9 en prenant $(s_1,s_2)=(0,s)$.

8.2.3 Orbites

Dans ce paragraphe, on note D un ensemble de représentants dans $\mathbb{F}^*$ de $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, $D = \{-1, 1\}$ dans le cas réel. On confond D et $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ c'est à dire qu'un élément $u \in D$ représente soit u dans $\mathbb{F}^*$ soit $u\mathbb{F}^{*2}$ dans $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ suivant le contexte mais il est noté u dans les 2 cas.

Proposition 8.2.12 *1. Lorsque f est isotrope, les orbites de G (resp.P) dans $\mathfrak{g}_1'$ (resp.$\mathfrak{g}_1$") sont en bijection avec $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$; un ensemble de représentants est donnés dans les 2 cas par $X_u = \sum_{1\leq i\leq 3} X_{\lambda_i} + uX_{\lambda_4}$ pour $u \in D$ et $P.X_u = \cup_{(a_1,a_2)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2 | a_1a_2=u\mathbb{F}^2} O_{a_1,a_2}$.*

2. Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et f est anisotrope :

i) Il y a 3 orbites de G dans $\mathfrak{g}_1'$ de représentants :

$$X_0 = \sum_{1\leq i\leq 4} X_{\lambda_i} \ , \ X_1 = -X_{\lambda_1} + \sum_{2\leq i\leq 4} X_{\lambda_i} \ , \ X_2 = -X_{\lambda_1} - X_{\lambda_2} + X_{\lambda_3} + X_{\lambda_4}.$$

ii) Il y a 5 orbites de P dans $\mathfrak{g}_1''$ de représentants :

$$X_0 \ , \ X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 = X_{\lambda_1} + X_{\lambda_2} - X_{\lambda_3} + X_{\lambda_4} \ , \ X_4 = -X_{\lambda_1} + X_{\lambda_2} - X_{\lambda_3} + X_{\lambda_4}.$$

3. Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique et f est anisotrope :

i) Les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1'$ sont en bijection avec $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$; un ensemble de représentants est donnés par $X_u = \sum_{1\leq i\leq 3} X_{\lambda_i} + uX_{\lambda_4}$ pour $u \in D$.

ii) $d = 2$

Il y a $2||\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}||$ P-orbites données pour $u \in D$ par :

$$P.X_{u,\pm 1} = \{x \in \mathfrak{g}_1'' \mid F(x) \equiv u \ (\mathbb{F}^{*2}) \ , (F_1(x), -c(f)) = \pm 1\}$$

avec $X_{u,1} = X_u$ et $X_{u,-1} = v_0X_{\lambda_1} + X_{\lambda_2} + X_{\lambda_3} + \frac{u}{v_0}X_{\lambda_4}$, $v_0 \in D$ vérifiant $(v_0, -c(f)) = -1$.

4. Les résultats sont analogues dans $\mathfrak{g}_{-1}'$ (resp. $\mathfrak{g}$"$_{-1}$).

Démonstration: On utilise les résultats de [Mu 3] où figurent les G-orbites dans $\mathfrak{g}_1'$ (corollaire 4.3.3, corollaire 4.3.4 i)) d'où 3)i) et 1) avec f isotrope ; dans le cas réel on rappelle que $X = \sum_{1\leq i\leq 4} a_iX_{\lambda_i} \in \mathfrak{g}_1'$ et $Y = \sum_{1\leq i\leq 4} b_iX_{\lambda_i} \in \mathfrak{g}_1'$ sont dans la même $G-$orbite $\Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}^*$ tel que les formes quadratiques $t(\oplus_{1\leq i\leq 4}a_if)$ et $\oplus_{1\leq i\leq 4}b_if$ soient équivalentes d'où 2)i).

On rappelle également que $\chi(G) = \mathbb{F}^{*2}$ et que $\chi_1(P) = f(E)^*$.

De plus, pour $X = \sum_{1\leq i\leq 4} a_iX_{\lambda_i}$ tel que $\prod_{1\leq i\leq 4} a_i \neq 0$ et pour tout t non nul représenté par la forme quadratique $a_1f \oplus a_2f$ (resp.$a_3f \oplus a_4f$) il existe un automorphisme élémentaire g_t (resp.g_t') qui centralise H_1 tel que :

$$\begin{aligned} g_t(\textstyle\sum_{1\leq i\leq 4} a_iX_{\lambda_i}) &= tX_{\lambda_1} + \frac{a_1a_2}{t}X_{\lambda_2} + a_3X_{\lambda_3} + a_4X_{\lambda_4} \\ (\text{resp. } g_t'(\textstyle\sum_{1\leq i\leq 4} a_iX_{\lambda_i}) &= a_1X_{\lambda_1} + a_2X_{\lambda_2} + tX_{\lambda_3} + \frac{a_3a_4}{t}X_{\lambda_4} \ ) \end{aligned}$$

(cf.démonstration 0) de la proposition 4.1.5 de [Mu 3]).

Lorsque $a_1f \oplus a_2f$ (resp.$a_3f \oplus a_4f$) représente 1, on peut donc toujours supposer que le coefficient de X_{λ_1} ou bien X_{λ_2} vaut 1 en utilisant $g_{1,2}(1)$ (resp. le coefficient de X_{λ_3} ou bien X_{λ_4} vaut 1 en utilisant $g_{3,4}(1)$) (*).

1. Lorsque f est isotrope, on vérifie que $\cup_{(a_1,a_2)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2|\ a_1a_2=u\mathbb{F}^{*2}} O_{a_1,a_2} = P.X_u$ en utilisant les éléments $g'_{i,j}(x)$ définis dans la démonstration du 4) du lemme 8.2.2 ainsi que $h_{\lambda_i}(t), i = 1, ..., 4$ et $t \in \mathbb{F}^*$, ce qui termine la démonstration de 1).
2. Comme $\chi_1(P) = \mathbb{R}^{*+}$ dans le cas réel, les éléments énumérés dans 2)ii) ne sont pas dans la même $P-$orbite et tout élément de $\oplus_{1\leq i\leq 4}\mathbb{R}^* X_{\lambda_i}$ est dans la $P-$orbite de l'un des élément énumérés dans 2)ii) par le résultat (*) et la multiplication par $\mathbb{R}^*$.
3. Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique anisotrope avec $d = 2$.
   Comme $\chi_1(P) = f(E)^* = \{x \in \mathbb{F}^* | (x, -c(f)) = 1\}$ et $\chi(G) = \mathbb{F}^{*2}$, 2 éléments quelconques de $\{X_{u,1}, X_{u,-1}, u \in D\}$ ne sont pas dans la même $P-$orbite.
   Pour $xy \in \mathbb{F}^*$ la forme quadratique $xf \oplus yf$ représente $\mathbb{F}^*$ donc par (*) toute $P-$orbite dans $\mathfrak{g}"_1$ a un représentant de la forme $X = aX_{\lambda_1} + X_{\lambda_2} + X_{\lambda_3} + bX_{\lambda_4}$, soit $x \in \{1, v_0\}$ tel que $(xa, -c(f)) = 1$ alors $g'_{1,4}(\frac{x}{a})X = xX_{\lambda_1} + X_{\lambda_2} + X_{\lambda_3} + \frac{ab}{x}X_{\lambda_4}$ d'où 3iii).

□

Remarques :

1) Lorsque f est isotrope (donc d est pair et $c(f) = -1$), les coefficients de l'équation fonctionnelle de la fonction Zéta associée à l'action de P sont ceux de la proposition 8.2.8 :

$$\begin{pmatrix} Z^*_{u_1}(\mathcal{F}(f);\omega,s) \\ \dots\ \dots \\ Z^*_{u_\ell}\ (\mathcal{F}(f);\omega,s) \end{pmatrix} = B(\omega,s) \begin{pmatrix} Z_{u_1}(f;\omega^*|\ |^{-(\frac{3d}{2}+2)1_2}) \\ \dots\ \dots \\ Z_{u_\ell}\ (f;\omega^*|\ |^{-(\frac{3d}{2}+2)1_2}) \end{pmatrix}$$

et $B\Big((id,\omega),(0,s)\Big)$ est la matrice des coefficients de l'équation fonctionnelle de la fonction Zéta associée à l'action de G, ce qui donne dans le cas réel :

$$B(0,s) = \frac{C_d(0,s)}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{\frac{d}{2}+1}\sin 2\pi s & 0 \\ 2(1+i^d)\sin \pi s & (-1)^{\frac{d}{2}}\sin 2\pi s \end{pmatrix}\ ,\ (c(f) = -1)\ ,$$

ce qui n'est pas en accord avec le résultat obtenu par M.Muro pour le coefficient de la 2ème ligne et 2ème colonne ([Muro 2] : M.Muro obtient la moitié de notre coefficient).

2) Lorsque $d = 1$ dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, $\chi_1(P) = \chi(G) = \mathbb{F}^{*2}$, on peut montrer que chaque $O_u, u \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$, est exactement une P-orbite dans $\mathfrak{g}''_1$ lorsque $u = (u_1, u_2)$ avec $u_1 \neq u_2$ ou bien $u_1 = u_2 = -1$, en utilisant la multiplication par $\mathbb{F}^*$ et la propriété (*) de la démonstration de 8.2.12 puisque $\mathrm{Ker}\tilde{\omega}_{-u_1} \cup \mathrm{Ker}\tilde{\omega}_{-u_2} = \mathbb{F}^*$. De la même manière, on montre que pour $u \in D$ tel que $-u \notin \mathbb{F}^{*2}$, on a :

$$O_{(u,u)} = P(X_{\lambda_1} + uX_{\lambda_2} + X_{\lambda_3} + uX_{\lambda_4}) \cup P(vX_{\lambda_1} + uvX_{\lambda_2} + X_{\lambda_3} + uX_{\lambda_4})$$

avec $v \in D$ fixé tel que $(v, -u) = -1$, mais je ne sais pas si $O_{(u,u)}$ est une seule $P-$orbite ou bien la réunion de 2 $P-$orbites.

3) Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, lorsque $d = 2$ et f est anisotrope, on a pour $u \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$

$$P.X_{u,\pm 1} = \cup_{\{u_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\ |\ (u_1,-c(f))=\pm 1\}} O_{\{(u_1,u_1u)}\ ,\ P.Y_{u,\pm 1} = \cup_{\{u_2\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\ |\ (u_2,-c(f))=\pm 1\}} O^*_{(u_2u,u_2)}$$

avec $Y_{u,1} = uX_{-\lambda_1} + \sum_{1\leq i\leq 4} X_{-\lambda_i}$ et $Y_{u,-1} = \frac{u}{v_0}X_{-\lambda_1} + \sum_{i=2,3} X_{-\lambda_i} + v_0 X_{-\lambda_4}$.

Il résulte de la proposition 8.2.6 que les coefficients de l'équation fonctionnelle de la fonction Zéta associée à l'action de P sont donnés par :

$$a_{P.Y_{v,\epsilon'},P.X_{u,\epsilon}} = \sum_{\{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}|(w,-c(f))=\epsilon\epsilon'\}} d_{(v,1),(w,wu)}.$$

4) Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, pour u et v dans $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ on a donc :

$$a_{v,u}(\pi) := a_{G.X_v^{-1},G.X_u}(\pi) = \sum_{\{w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}\}} d_{(w,wv),(1,u)}(Id,\pi).$$

Pour d pair, $B(id,\pi)$ est la matrice des coefficients de l'équation fonctionnelle de la fonction Zéta associée à l'action de G, les résultats obtenus ne semblent pas simples.

Pour $d = 1$, en caractéristique résiduelle différente de 2, on a simplement pour $a \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ et $s \in \mathbb{C}$:

$$a_{v,u}(\tilde{\omega}_a|\ |^s) = (a,uv)\ \frac{1-q^{2s+3}}{1-q^{-2s-4}}\ A^1_{s+1,s+\frac{7}{2}}(-v,-u,1),$$

(lemme 8.2.10) les coefficients sont proportionnels à ceux associés à une forme quadratique de discriminant 1.

8.2.4 Le cas réel de rang 4 ($\Delta = F_4$ et f est anisotrope)

On applique la proposition 5.1.1 dans laquelle apparait les coefficients associés aux fonctions Zéta d'une forme quadratique qui est soit de signature $(2, d+1)$, soit de signature $(1, d+2)$ (3) de la proposition 8.2.4), cette forme quadratique, notée Q dans ce rappel, étant l'invariant relatif fondamental d'un préhomogène absolument irréductible régulier de type commutatif.

On rappelle les résultats bien connus suivants (cf.par exemple [Bo-Ru 2]), $G_{\mathbb{R}}$ étant la composante connexe réelle de G :

• Lorsque la signature est $(2, d+1)$, on fait opérer $G = \mathbb{R}^* \times G_{\mathbb{R}}$, il y a donc 2 orbites de G dans $\mathfrak{g}'_{\pm 1}$: $\Omega_1 = \{x \in \mathfrak{g}_1 | Q(x) > 0\}$ et $\Omega_{-1} = \{x \in \mathfrak{g}_1 | Q(x) < 0\}$ (idem $\Omega^*{}_{\pm 1}$), les coefficients correspondants sont notés $C(s)a_{\pm 1,\pm 1}(s)$, le premier indice correspond à $\Omega^*_{\pm 1}$ et le second à $\Omega_{\pm 1}$, avec :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}(s) & a_{1,-1}(s) \\ a_{-1,1}(s) & a_{-1,-1}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \cos\pi(s+\frac{d}{2}) & 0 \\ & \cos\pi\frac{d}{2} & \sin\pi s \end{pmatrix}.$$

(th.3.6.5,5)

• Lorsque la signature est $(1, d+2)$, on fait opérer $G_{\mathbb{R}}$, il y a donc 3 orbites de $G_{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{g}'_1$ notées Ω_i (idem dans $\mathfrak{g}'_{-1} : \Omega_i{}^*$) avec $i = 0, 1, 2$ et :
$\{x \in \mathfrak{g}_1 | Q(x) > 0\} = \Omega_0 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 = \{x \in \mathfrak{g}_1 | Q(x) < 0\}$ (idem pour $\Omega_i{}^*$),

les coefficients correspondants sont notés $C(s)\epsilon_{i,j}(s)$, le premier indice correspond à ${\Omega_i}^*$ et le second à Ω_j, avec :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{0,0}(s) & \epsilon_{0,1}(s) & \epsilon_{0,2}(s) \\ \epsilon_{1,0}(s) & \epsilon_{1,1}(s) & \epsilon_{1,2}(s) \\ \epsilon_{2,0}(s) & \epsilon_{2,1}(s) & \epsilon_{2,2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon(s+\frac{d+3}{2}) & \frac{1}{2} & \epsilon(-s-\frac{d+3}{2}) \\ -\sin\pi\frac{d}{2} & -\cos\pi s & -\sin\pi\frac{d}{2} \\ \epsilon(-s-\frac{d+3}{2}) & \frac{1}{2} & \epsilon(s+\frac{d+3}{2}) \end{pmatrix},\ \epsilon(s)=\frac{1}{2}e^{i\pi s}\ .$$

(cf.par exemple la remarque 5.42 p.134 avec $k+1=2$ de [Bo-Ru 2])

Motivées par la description des orbites ci-dessus et le mode de calcul des coefficients donné dans la proposition 5.1.1, on note les orbites de P dans $\mathfrak{g}"_1$ et $\mathfrak{g}"_{-1}$ de la manière suivante : $\Omega_{i,j}$ et $\Omega^*_{i,j}$ avec $j\in\{0,1,2\}$ pour $i=0$ et $j\in\{0,1\}$ pour $i=1$. Plus précisément dans $\mathfrak{g}"_1$:

$$\Omega_{0,1}=P.X_3=O_{(1,-1)}\ ,\ \Omega_{1,0}=P.X_1=O_{(-1,1)}\ ,\ \Omega_{1,1}=P.X_4=O_{(-1,-1)}.$$

$$\Omega_{0,0}=P.X_0\ ,\ \Omega_{0,2}=P.X_2\ ,\ O_{(1,1)}=\Omega_{0,0}\cup\Omega_{0,2}.$$

Pour $\mathfrak{g}"_{-1}$, soient :

$Y_0=\sum_{1\le i\le 4}X_{-\lambda_i}$, $Y_1=-X_{-\lambda_1}+\sum_{2\le i\le 4}X_{-\lambda_i}$, $Y_2=-X_{-\lambda_1}-X_{-\lambda_2}+X_{-\lambda_3}+X_{-\lambda_4}$, $Y_3=X_{-\lambda_1}+X_{-\lambda_2}-X_{-\lambda_3}+X_{-\lambda_4}$ et $Y_4=-X_{-\lambda_1}+X_{-\lambda_2}-X_{-\lambda_3}+X_{-\lambda_4}$,

alors :

$$\Omega^*_{0,1}=P.Y_1=O^*_{(-1,1)}\ \ ,\ \ \Omega^*_{1,0}=P.Y_3=O^*_{(1,-1)}\ \ ,\ \ \Omega^*_{1,1}=P.Y_4=O^*_{(-1,-1)}\ ,$$
$$\Omega^*_{0,0}=P.Y_0\ \ ,\ \ \Omega^*_{0,2}=P.Y_2\ \ ,\ \ O^*_{(1,1)}=\Omega^*_{0,0}\cup\Omega^*_{0,2},$$

c'est à dire que $\Omega_{i,j}\subset O_{((-1)^i,(-1)^j)}$ et $\Omega^*_{i,j}\subset O^*_{((-1)^j,(-1)^i)}$.

Proposition 8.2.13

$$a_{\Omega^*_{j,k},\Omega_{q,\ell}}(s_1,s_2)=C_d(s_1,s_2)A^{\Omega^*_{j,k}}_{\Omega^*_{q,\ell}}(s_1,s_2)\ ,$$

$A^{\Omega^*_{j,k}}_{\Omega^*_{q,\ell}}(s_1,s_2)$ *ayant les valeurs suivantes :*

$$A^{\Omega^*_{j,k}}_{\Omega^*_{1,1}}(s_1,s_2)\ =\begin{cases}(-1)^d\sin\pi s_2\cos\pi(s_1+s_2) & \textit{pour } k=j=1\\ 0 & \textit{sinon}\end{cases}$$

$$A^{\Omega^*_{1,1}}_{\Omega^*_{q,\ell}}(s_1,s_2)=\begin{cases}\cos\pi\frac{d}{2}\sin\pi(s_1+s_2) & \textit{pour } (q,l)=(0,1)\\ \cos\pi\frac{d}{2}\sin\pi s_2 & \textit{pour } (q,l)=(1,0)\\ 0 & \textit{pour } (q,l)=(0,0)\ \textit{ou } (q,l)=(0,2).\end{cases}$$

Pour les autres valeurs :

$A^{\Omega^*_{k,l}}_{\Omega_{i,j}}$	$\Omega^*_{0,0}$	$\Omega^*_{0,2}$	$\Omega^*_{0,1}$	$\Omega^*_{1,0}$
$\Omega_{0,0}$	$\frac{(-1)^d}{2}\sin\pi(s_1+2s_2)$	$-\frac{1}{2}\sin\pi s_1$	$\frac{1-(-1)^d}{2}\sin\pi(s_1+s_2)$	$\frac{(-1)^d-1}{2}\sin\pi s_2$
$\Omega_{0,2}$	$-\frac{1}{2}\sin\pi s_1$	$\frac{(-1)^d}{2}\sin\pi(s_1+2s_2)$	$\frac{1-(-1)^d}{2}\sin\pi(s_1+s_2)$	$\frac{(-1)^d-1}{2}\sin\pi s_2$
$\Omega_{0,1}$	$\frac{(-1)^d}{2}\sin\pi(s_2+\frac{d}{2})$	$\frac{(-1)^d}{2}\sin\pi(s_2+\frac{d}{2})$	$\frac{1-(-1)^d}{2}$	$(-1)^{d+1}\cos\pi(s_2+\frac{d}{2})$. $\sin\pi(s_1+s_2)$
$\Omega_{1,0}$	$\frac{(-1)^d}{2}$. $\sin\pi(s_1+s_2+\frac{d}{2})$	$\frac{(-1)^d}{2}\sin\pi(s_1+s_2+\frac{d}{2})$	$(-1)^{d+1}\cos\pi s_2$. $\sin\pi(s_1+s_2+\frac{d}{2})$	0

Démonstration: On reprend les notations de la proposition 5.1.1 pour calculer le coefficient $a_{\Omega_{q,\ell},\Omega^*_{j,k}}$ avec $\ell,k\in\{0,1,2\}$ lorsque $q,j=0$ et $\ell,k\in\{0,1\}$ lorsque $q,j=1$.

Notons :

$$t_0=X_{\lambda_1}+X_{\lambda_2}\ ,\ t_1=-X_{-\lambda_1}+X_{\lambda_2}\ ,\ t_2=-X_{\lambda_1}-X_{\lambda_2}\ ,$$
$$u_0=X_{\lambda_3}+X_{\lambda_4}\ ,\ u_1=-X_{\lambda_3}+X_{\lambda_4}\ ,\ u_2=-X_{\lambda_3}-X_{\lambda_4}.$$

Soit $z=z_{-2}+z_0\in\Omega^*_{j,k}\cap\{Y_i,i=0,...,3\}$, alors $z_{-2}=t_k^{-1}$ et $z_0=u_j^{-1}$. On a 2 cas :

• $j=1$ donc $F_1^*(z_0)<0$, alors $\gamma_1(t_i,u_1)=1$ et $(G_{H_1})_{u_1}=\mathbb{R}^*\times((G_{H_1})_{u_1})_{\mathbb{R}}$ (puisque $c(-1)g_{3,4}(1)\in(G_{H_1})_{u_1}$) donc :

$$a^{(u_1)}_{z_{-2},t_i}(s_2)=C_d(s_2)a_{(-1)^k,(-1)^q}(s_2)\ .$$

$I_{O,O^*}=\{q\}$ et $t_q(\Omega_{q,\ell})=u_\ell$.

• Soit $j=0$ donc $F_1^*(z_0)>0$, $z_0=u_0^{-1}$ et $(G_{H_1})_{z_0}=((G_{H_1})_{z_0})_{\mathbb{R}}$ (puisque t_0+u_0 et t_2+u_0 ne sont pas dans la même orbite de G) d'où

$$a^{(u_0)}_{z_{-2},t_i}(s_2)=C_d(s_2)\epsilon_{k,i}(s_2).$$

Lorsque $q=1$, on a $I_{O,O^*}=\{1\}$, $t_1(\Omega_{1,\ell})=u_\ell$ et $\gamma_1(t_1,z_0)=1$.
Lorsque $q=0$ on a $\gamma_1(t_0,z_0)=\gamma_1(t_2,z_0)=(-1)^d$ et $I_{O,O^*}=\{0,2\}$; $t_0(\Omega_{0,\ell})=u_\ell$ et

$$t_2(\Omega_{0,\ell})=\begin{cases}u_2 \text{ lorsque } \ell=0\\ u_0 \text{ lorsque } \ell=2\\ u_1 \text{ lorsque } \ell=1\end{cases}\quad=\quad u_{2-\ell}.$$

Les résultats sont analogues pour le calcul du coefficient $a^{(t_i)}_{z_0,t_i(\Omega_{q,\ell})}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})$ suivant que :

• $q=1$ alors il vaut $C_d(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})a_{(-1)^j,(-1)^\ell}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})$

ou que

• $q=0$ alors le coefficient vaut $C_d(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})\epsilon_{j,\ell'}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})$, avec $\ell'=\ell$ si $i=0,1$ et $\ell'=2-\ell$ si $i=2$,

D'où $a_{\Omega^*_{j,k},\Omega_{q,\ell}}(s_1,s_2)=C_d(s_1,s_2)A^{\Omega^*_{j,k}}_{\Omega_{q,\ell}}(s_1,s_2)$ avec :

$A^{\Omega^*_{1,k}}_{\Omega_{1,\ell}}(s_1,s_2)=a_{(-1)^k,-1}(s_2)a_{-1,(-1)^\ell}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})$,

$A^{\Omega^*_{1,k}}_{\Omega_{0,\ell}}(s_1,s_2)=a_{(-1)^k,1}(s_2)\epsilon_{1,\ell}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})$,

$A^{\Omega^*_{0,k}}_{\Omega_{1,\ell}}(s_1,s_2)=\epsilon_{k,1}(s_2)a_{1,(-1)^\ell}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})$,

$A^{\Omega^*_{0,k}}_{\Omega_{0,\ell}}(s_1,s_2)=(-1)^d\Big(\epsilon_{k,0}(s_2)\epsilon_{0,\ell}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})+\epsilon_{k,2}(s_2)\epsilon_{0,2-\ell}(s_1+s_2+d+\frac{1}{2})\Big)$. □

Remarque : Notons : $O_i=G.X_i$ et $O^*_i=G.Y_i$ pour $i=0,1,2$, les orbites de G dans $\mathfrak{g}'_1$ et $\mathfrak{g}'_{-1}$ alors :

$\Omega_{0,0}=O_0\cap\mathfrak{g}"_1$, $\Omega^*_{0,0}=O^*_0\cap\mathfrak{g}"_{-1}$,
$O_2\cap\mathfrak{g}"_1=\Omega_{0,2}\cup\Omega_{1,1}$, $O^*_2\cap\mathfrak{g}"_{-1}=\Omega^*_{0,2}\cup\Omega^*_{1,1}$,
$O_1\cap\mathfrak{g}"_1=\Omega_{0,1}\cup\Omega_{1,0}$, $O^*_1\cap\mathfrak{g}"_{-1}=\Omega^*_{0,1}\cup\Omega^*_{1,0}$,

donc $a_{O^*_i,O_j}(s)=C_d(0,s)A_{i,j}(s)$, $i,j=0,1,2$, avec :

$A_{0,i}(s)=A^{\Omega^*_{0,0}}_{\Omega_{0,i}}(0,s)$ $(=A^{\Omega^*_{0,0}}_{\Omega_{1,i-1}}(0,s)$ si $i\geq 1)$

$A_{1,i}(s)=A^{\Omega^*_{1,0}}_{\Omega_{0,i}}(0,s)+A^{\Omega^*_{0,1}}_{\Omega_{0,i}}(0,s)$ $(=A^{\Omega^*_{1,0}}_{\Omega_{1,i-1}}(0,s)+A^{\Omega^*_{0,1}}_{\Omega_{1,i-1}}(0,s)$ si $i\geq 1)$

$A_{2,i}(s)=A^{\Omega^*_{0,2}}_{\Omega_{0,i}}(0,s)+A^{\Omega^*_{1,1}}_{\Omega_{0,i}}(0,s)$ $(=A^{\Omega^*_{0,2}}_{\Omega_{1,i-1}}(0,s)+A^{\Omega^*_{1,1}}_{\Omega_{1,i-1}}(0,s)$ si $i\geq 1)$

d'où :

$$\begin{pmatrix} A_{2,2}(s) & A_{1,2}(s) & A_{0,2}(s)\\ A_{2,1}(s) & A_{1,1}(s) & A_{0,1}(s)\\ A_{2,0}(s) & A_{1,0}(s) & A_{0,0}(s)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(-1)^d}{2}\sin 2\pi s & 0 & 0\\ \frac{(-1)^d}{2}\sin\pi(s+\frac{d}{2})+\cos\frac{\pi d}{2}\sin\pi s & (-1)^{d+1}\cos\pi s\sin\pi(s+\frac{d}{2}) & \frac{(-1)^d}{2}\sin\pi(s+\frac{d}{2})\\ 0 & 0 & \frac{(-1)^d}{2}\sin 2\pi s\end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas en accord avec les résultats obtenu par M.Muro pour $A_{2,1}(s)$ et $A_{0,1}(s)$ (de signe opposé dans ([Muro 2]).

Comme $A_{1,0}(s) = A_{1,2}(s) = 0$ et que $A_{0,0}(s)+A_{2,0}(s) = A_{0,2}(s)+A_{2,2}(s)$, les fonctions Zétas :

- $Z_u(f;\pi) = Z(f1_{\{x\in\mathfrak{g}_1|uF(x)>0\}};\pi)$ pour $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$,
- $Z_u^*(g;\pi) = Z^*(g1_{\{x\in\mathfrak{g}_{-1}|uF^*(x)>0\}};\pi)$ pour $g \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$,

avec $u = \pm 1$, vérifient l'équation fonctionnelle suivante pour $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$:

$$\begin{pmatrix} Z_{-1}^*(\mathcal{F}(f);s) \\ Z_1^*(\mathcal{F}(f);s) \end{pmatrix} = C_d(0,s) \begin{pmatrix} (-1)^{d+1}\cos\pi s \sin\pi(s+\frac{d}{2}) & 0 \\ (-1)^d \sin\pi(s+\frac{d}{2}) + \cos\frac{\pi d}{2}\sin\pi s & \frac{(-1)^d}{2}\sin 2\pi s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_{-1}(f;-s-2-\frac{3d}{2}) \\ Z_1(f;-s-2-\frac{3d}{2}) \end{pmatrix}$$

ce qui est en accord dans le cas d pair avec la proposition 8.2.8 lorsque $s_1 = 0$ et $s_2 = s$ (cf.remarque 8.2.9) et avec le lemme 8.2.10 pour $d = 1$.

Dans les cas exceptionnels restants, on se contentera de donner les résultats minimaux sans entrer dans le détail des P-orbites.

8.3 $(\mathbf{E_7}, \alpha_\mathbf{2})$

On note $\{\lambda_1, ..., \lambda_7\}$ les 7 racines orthogonales obtenues canoniquement par orthogonalisations successives à partir de $\lambda_1 = \alpha_2$ (cf.[Mu 4], tableau II pour une liste explicite et tableau III pour une description de Δ_2), soient $H_1 := \sum_{1\le i\le 3} h_{\lambda_i}$ et $H_2 = 2H_0 - H_1$, on a :

$$\sum_{1\le i\le 7} h_{\lambda_i} = 2H_0 \ , H_2 = 2h_{\widetilde{\alpha}} \ , \ \widetilde{\alpha} \ \text{ étant la plus grande racine de } \Delta.$$

$P = P(H_1, H_2)$ est alors l'unique sous-groupe parabolique standard très spécial du préhomogène et il est associé à la partie $\Sigma_0 - \{\alpha_1\}$ de Δ_0 qui est de type A_5.

On fixe dorénavant un système de Chevalley : $(X_\alpha, h_\alpha, X_{-\alpha})_{\alpha\in\Delta}$, de $\mathfrak{g}$ tel que pour toute racine $\omega \in \Delta_2$ on ait :

$$[X_{-\lambda_i}, [X_{-\lambda_j}, [X_{-\lambda_k}, [X_{-\lambda_l}, X_\omega]]]] = X_{-\omega} \ , \text{ avec } \omega = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l) \ ,$$

dont l'existence est assurée par le corollaire 4.3 de [Mu 4].

F est l'invariant relatif fondamental du préhomogène normalisé par la condition :

$$F(\sum_{1\le i\le 7} X_{\lambda_i}) = 1 \text{ et on a pour } a_1, ..., a_7 \in \mathbb{F}^* \ : \quad F(\sum_{1\le i\le 7} a_i X_{\lambda_i}) = \prod_{1\le i\le 8} a_i.$$

On normalise B en posant $\tilde{B} = -\dfrac{7B}{2B(H_0,H_0)} (= -\dfrac{2B}{B(h_{\lambda_i},h_{\lambda_i})})$, ainsi $\tilde{B}(\frac{H_1}{2},\frac{H_1}{2}) = -\dfrac{3}{2}$, $\tilde{B}(\frac{H_2}{2},\frac{H_2}{2}) = -2$ et pour toute racine longue α de Δ on a $\tilde{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$.

Rappelons que $E_1(H_1)\cap\mathfrak{g}_1=\{0\}$, que $\mathfrak{g}_2$ est de dimension 7 et que $E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_2$ est de dimension 6 (cf.tableau III de [Mu 4]).

Proposition 8.3.1 *1. Le préhomogène $(E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_0, E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)$ est commutatif de type (D_6,α_6) et d'invariant relatif fondamental F_1 normalisé par la condition $F_1(\sum_{1\leq i\leq 3}a_iX_{\lambda_i})=a_1a_2a_3$.*

2. Pour $x\in\mathfrak{g}_1$ on a alors $P_1(x)=\frac{1}{4!}\tilde{B}(adx^4(X_{-\omega},X_{-\omega})$ avec $\omega=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{4\leq i\leq 7}\lambda_i$.

3. Soit $x\in W_{\mathfrak{t}}$, $x=x_2+x_0$ avec $x_i\in E_i(H_1)\cap\mathfrak{g}_1$ alors :

a) Le préhomogène $((E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_0)_{x_0},(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0})$ est commutatif presque déployé de type :

$$(\Delta,\lambda_0)=\begin{cases}(A_5,\alpha_3)\ \textit{lorsque}\ -P_1(x_0)\in\mathbb{F}^{*2}\\ (C_3,\alpha_3)\ \textit{sinon}\ ,\end{cases}$$

et $f\sim X^2\oplus P_1(x_0)Y^2$.

b) Le préhomogène $((E_0(H_2)\cap\mathfrak{g}_0)_{x_2},(E_2(H_2)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_2})$ est de type (F_4,α_1).

Démonstration: 1) Cela résulte du diagramme de Dynkin complété de E_7.

2) Résulte des valeurs :

$$F(\sum_{1\leq i\leq 7}a_iX_{\lambda_i})=\prod_{1\leq i\leq 8}a_i, F_1(\sum_{1\leq i\leq 3}a_iX_{\lambda_i})=\prod_{1\leq i\leq 3}a_i, P_1(\sum_{4\leq i\leq 7}a_iX_{\lambda_i})=\prod_{4\leq i\leq 8}a_i.$$

3) Pour tout $x\in W_{\mathfrak{t}}$, il existe $g\in G_{H_1}$ et $(a_1,...,a_7)\in\mathbb{F}^*$ tels que $gx=\sum_{1\leq i\leq 7}a_iX_{\lambda_i}$ (lemme 7.3 de [Mu 4]) donc on fait la démonstration pour $x_2=\sum_{1\leq i\leq 3}a_iX_{\lambda_i}$ et $x_0=\sum_{4\leq i\leq 7}a_iX_{\lambda_i}$.

a) Le préhomogène $((E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_0)_{x_0},(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0})$ est un préhomogène absolument irréductible régulier commutatif.

Posons :

$$\omega_{1,2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4+\lambda_7)\ ,\ \omega'_{1,2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_5+\lambda_6),$$
$$\omega_{1,3}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_6)\ ,\ \omega'_{1,3}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_5+\lambda_7),$$
$$\omega_{2,3}=\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5)\ ,\omega'_{2,3}=\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_6+\lambda_7).$$

Soient :

$$X_{1,2}=a_7[X_{-\lambda_4},X_{\omega_{1,2}}]-a_4[X_{-\lambda_7},X_{\omega_{1,2}}]\ ,\ X'_{1,2}=a_6[X_{-\lambda_5},X_{\omega'_{1,2}}]-a_5[X_{-\lambda_6},X_{\omega'_{1,2}}]\ ,$$

$$X_{1,3}=a_6[X_{-\lambda_4},X_{\omega_{1,3}}]-a_4[X_{-\lambda_6},X_{\omega_{1,3}}]\ ,\ X'_{1,3}=a_7[X_{-\lambda_5},X_{\omega'_{1,3}}]-a_5[X_{-\lambda_7},X_{\omega'_{1,3}}]\ ,$$
$$X_{2,3}=a_5[X_{-\lambda_4},X_{\omega_{2,3}}]-a_4[X_{-\lambda_5},X_{\omega_{2,3}}]\ ,\ X'_{2,3}=a_7[X_{-\lambda_6},X_{\omega'_{2,3}}]-a_6[X_{-\lambda_7},X_{\omega'_{2,3}}]\ ,$$

alors $(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0}=\oplus_{1\leq i\leq 3}\mathfrak{g}^{\lambda_i}\oplus_{1\leq i<j\leq 3}(\mathbb{F}X_{i,j}\oplus\mathbb{F}X'_{i,j})$ donc le préhomogène est presque déployé (i.e. $d_1=1$) avec $d=2$ d'où par classification, ce préhomogène est de type (A_5,α_3) lorsque la forme quadratique f' ci-dessous est isotrope et sinon il est de type (C_3,α_3) (cf.tableau 1).
Soit f' la forme quadratique :

$$\begin{aligned} f'(u,v) &= \tfrac{1}{2}\tilde{B}(ad(uX_{1,2}+vX'_{1,2})^2(X_{-\lambda_1}),X_{-\lambda_2}) \\ &= -\tfrac{1}{2}\tilde{B}([uX_{1,2}+vX'_{1,2},X_{-\lambda_1}],[uX_{1,2}+vX'_{1,2},X_{-\lambda_2}]) \\ &= u^2a_4a_7+v^2a_5a_6\ , \end{aligned}$$

f' est isotrope $\Leftrightarrow P_1(x_0)\equiv -1 \pmod{\mathbb{F}^{*2}}$.

b) Comme dans a) on obtient :

$$(E_4(H_2)\cap\mathfrak{g}_2)_{x_2}=\mathfrak{g}^{\widetilde{\alpha}}\ ,\ (E_2(H_2)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_2}=\oplus_{4\leq i\leq 7}\mathfrak{g}^{\lambda_i}\oplus_{1\leq i<j\leq 3}(\mathbb{F}Y_{i,j}\oplus\mathbb{F}Y'_{i,j})\oplus_{4\leq i\leq 7}\mathbb{F}[X_{-\lambda_i},X_{\widetilde{\alpha}}]$$

avec

$$Y_{i,j}=a_j[X_{-\lambda_i},X_{\omega_{i,j}}]-a_i[X_{-\lambda_j},X_{\omega_{i,j}}]\ ,\ Y'_{i,j}=a_j[X_{-\lambda_i},X_{\omega'_{i,j}}]-a_i[X_{-\lambda_j},X_{\omega'_{i,j}}]\ .$$

En raison des dimensions de $(E_4(H_2)\cap\mathfrak{g}_2)_{x_2}$ et de $(E_2(H_2)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_2}$, le préhomogène $((E_0(H_2)\cap\mathfrak{g}_0)_{x_2},(E_2(H_2)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_2})$ est de type (F_4,α_1) (cf. §7.1 et 8.2) et l'invariant associé est la restriction de P_1 à $E_2(H_2)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_2}$. □

Lorsque $\mathbb{F}$ est archimédien, les 2 polynomes de Bernstein s'obtiennent immédiatement en appliquant les propositions 3.4.4 et 3.7.3 (ainsi que le lemme 6.1.5 et la proposition 8.2.5) d'où :

Proposition 8.3.2 *Les polynomes de Bernstein du préhomogène de type (E_7,α_2) sont donnés par :*

$$\begin{aligned} b_1(s_1,s_2) &= s_2(s_2+1)(s_2+2)\ \textit{et} \\ b_2(s_1,s_2) &= s_2(s_2+1)(s_2+2)(s_1+s_2+\tfrac{3}{2})(s_1+s_2+\tfrac{5}{2})(s_1+s_2+3)(s_1+s_2+4). \end{aligned}$$

Remarque : $b_2(0,s)$ est le polynome de Bernstein usuel.

On rappelle que pour $u=(u_1,u_2)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$ on définit les ouverts (tous non vides) :

$$O_u=O_{(u_1,u_2)}=\{x\in\mathfrak{g}_1\mid F_1(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1\ \ ,\ F_2(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1u_2)\}$$

$$O^*_u=O^*_{(u_1,u_2)}=\{x\in\mathfrak{g}_{-1}\mid F^*_1(x)\mathbb{F}^{*2}=u_2\ ,\ F^*_2(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1u_2\}$$

ainsi que les fonctions Zétas correspondantes :

$$Z_u(f;\omega)=Z(f\mathbf{1}_{O_u};\omega)\text{ pour }f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)\text{ et }Z^*_u(h;\omega)=Z^*(h\mathbf{1}_{O^*_u};\omega)\text{ pour }h\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1}).$$

Proposition 8.3.3 *1. Lorsque $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ pour $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$, on a :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f);(\omega_1,\omega_2),(s_1,s_2))=A(\omega_2,s_2)B(\omega_1\omega_2,s_1+s_2+\frac{3}{2})Z\Big(f;(\omega_1,(\omega_1\omega_2)^{-1});s_1,-(s_1+s_2+5)\Big)$$

avec :

$$A(\omega,s)=\rho'(\omega;s+1)\rho'(\omega;s+2)\rho'(\omega;s+3)$$

$$B(\omega,s)=\rho'(\omega;s+1)\rho'(\omega;s+2)\rho'(\omega;s+\frac{5}{2})\rho'(\omega;s+\frac{7}{2}).$$

2. Dans le cas réel ou bien lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}-$adique de caractéristique résiduelle différente de 2, on a pour tout $v=(v_1,v_2)$ dans $(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$ et $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$:

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);(s_1,s_2))=|2|_{\mathbb{F}}^{-2(s_1+s_2)-\frac{13}{2}}\rho(|\ |^{2(s_1+s_2)+7})\sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2}d_{v,u}(s)Z_u(f;(s_1,-(s_1+s_2+5)\ )$$

avec $u=(u_1,u_2)$ et $v=(v_1,v_2)$ et :
$d_{v,u}(s)=A^1_{s_1+s_2+\frac{5}{2},s_1+s_2+5}(1,v_2u_2,-v_2)\frac{1}{f}\sum_{a\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(a,-u_1v_1)\prod_{\ell=1}^3\rho(\tilde{\omega}_a(\tilde{\omega}_{-v_2})^{\ell-1}|\ |^{s_2+\ell})$.

Démonstration: On applique la proposition 5.3.1 dont toutes les hypothèses sont vérifiées. En effet et dans les notations de la proposition 5.3.1, pour $z=z_0+z_{-2}\in O^*_{v_1,v_2}$ on a

$$b^{(v_2)}_{v_1,u_1}(s)=\Big(\alpha(1)\alpha(v_2)\Big)^3(-v_2,-1)\frac{1}{f}\sum_{a\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(a,-u_1v_1)\prod_{\ell=1}^3\rho(\tilde{\omega}_a(\tilde{\omega}_{-v_2})^{\ell-1}|\ |^{s+\ell})$$

en appliquant la proposition 8.3.1, le 2) des théorèmes 6.2.2 et 6.1.2.1 ainsi que le lemme 3.5.3,ii)b) et

$$c^{(w_1)}_{v_2,u_2}(s)=\alpha(-1)^2|2|_{\mathbb{F}}^{-2s-\frac{7}{2}}\rho(|\ |^{2s+4})A^1_{s+1,s+\frac{7}{2}}(v_2,u_2,-1)$$

(prop.8.2.11 avec $d=1$).
On termine en notant que : $\alpha(1)\alpha(v_2)^3(-v_2,-1)=\alpha(-1)\alpha(v_2)$ puis que

$$\alpha(-1)\alpha(v_2)(v_2,u_2,-1)=A^1_{s+1,s+\frac{7}{2}}(1,v_2u_2,-v_2)$$

(relation 3), lemme 3.6.4,B)). □

Proposition 8.3.4 *Dans le cas réel ou le cas $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2 on a :*

1. Soit $v\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, alors :

$$Z^*_{F_1^*F_2^*\mathbb{F}^{*2}=v}(\mathcal{F}(f);(s_1,s_2))=K(s_1,s_2)\sum_{u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}D_{v,u}(s_1,s_2)Z_{F_1F_2\mathbb{F}^{*2}=u}(f;(s_1,-(s_1+s_2+5)\ )$$

avec :

$$K(s_1,s_2)\ =\ |2|_{\mathbb{F}}^{-2(s_1+s_2)-\frac{13}{2}}\rho(|\ |^{2(s_1+s_2)+7})\rho(|\ |^{s_2+1})\rho(|\ |^{s_2+3})\ ,$$

$$D_{v,u}(s_1,s_2)=A^1_{s_1+s_2+\frac{5}{2},s_1+s_2+5}(1,vu,-v)\rho(\tilde{\omega}_{-v}|\ |^{s_2+2}).$$

2. Soit $b \in \mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$ et $s \in \mathbb{C}$, dans le préhomogène $(G, \mathfrak{g}_{\pm 1})$ on a l'équation fonctionnelle :

$$Z^*(\mathcal{F}(f);(\tilde{\omega}_b, s)) = C(s)B(\tilde{\omega}_b, s)Z(f;(\tilde{\omega}_b, -s-5)\ )$$

avec :

$$C(s) = |2|_{\mathbb{F}}^{-4s-10}\rho(|\ |^{2s+4})\rho(|\ |^{2s+7})\ ,$$
$$B(\tilde{\omega}_b, s) = \rho'(\tilde{\omega}_b|\ |^{s+1})\rho'(\tilde{\omega}_b|\ |^{s+3})\rho'(\tilde{\omega}_b|\ |^{s+5}).$$

Démonstration: 1) Résulte d'un simple calcul.

2) Calculons :

$$B_{u_1,u_2}(s) = (b, u_1u_2) \sum_{(v_1,v_2)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2} d_{(v_1,v_2),(u_1,u_2)}(0,s)\ (b, v_1v_2).$$

En sommant selon v_1 on obtient :

$$B_{u_1,u_2}(s) = \rho(\tilde{\omega}_b|\ |^{s+1})\rho(\tilde{\omega}_b|\ |^{s+3})B'_{u_1,u_2}(s)$$

avec :

$$B'_{u_1,u_2}(s) = (b, -u_2) \sum_{v_2\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A^1_{s+\frac{5}{2},s+5}(1, u_2v_2, -v_2)\rho(\tilde{\omega}_{-bv_2}|\ |^{s+2})(b, v_2)$$

d'où :

$$\begin{aligned} B'_{u_1,u_2}(s) &= \textstyle\sum_{v_2,t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(b, -u_2v_2)\alpha(t)\rho(|\ |^{s+\frac{5}{2}};t)\rho(|\ |^{s+5};tu_2v_2)(t, -v_2)\rho(\tilde{\omega}_{-bv_2}|\ |^{s+2}) \\ &= \tfrac{1}{f}\textstyle\sum_{z,v_2,t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(z, tu_2v_2)\rho(\tilde{\omega}_z|\ |^{s+5})(b, -u_2v_2)\alpha(t)(t, -v_2)\rho(|\ |^{s+\frac{5}{2}};t)\rho(\tilde{\omega}_{-bv_2}|\ |^{s+2}) \end{aligned}$$

or :

$$\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} \alpha(t)(t, -zv_2)\rho(|\ |^{s+\frac{5}{2}};t) = h(|\ |^{s+\frac{5}{2}}\tilde{\omega}_{-zv_2})$$

(lemme 3.6.4,A) puis :

$$\begin{aligned} f(z) &= \tfrac{1}{f}\textstyle\sum_{v_2\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} h(|\ |^{s+\frac{5}{2}}\tilde{\omega}_{-zv_2})(v_2, bz)\rho(\tilde{\omega}_{-bv_2}|\ |^{s+2}) \\ &= \tfrac{1}{f}\textstyle\sum_{v_2\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} h(|\ |^{s+\frac{5}{2}}\tilde{\omega}_{bzv_2})(-bv_2, bz)\rho(\tilde{\omega}_{v_2}|\ |^{s+2}) \\ &= (-b, z)\frac{\alpha(1)}{\alpha(zb)}A^1_{s+2,s+\frac{5}{2}}(1, zb, 1) \end{aligned}$$

(lemme 3.6.4,B)6) donc $f(z) = 0$ pour $z \neq b$ (lemme 3.6.7,C) et finalement :

$$B'_{u_1,u_2}(s) = A^1_{s+2,s+\frac{5}{2}}(1, 1, 1)\rho(\tilde{\omega}_b|\ |^{s+5})(b, -1)$$

On termine à l'aide du lemme 3.6.8. □

Remarque 8.3.5

1) Dans le cas réel, en n'utilisant pas la formule de duplication de Legendre,on a également : $C(s)B(\tilde{\omega}_b, s) = D(s).D(b, s)$ avec

$$D(s) = 8.2\pi^{-(7s+21)}\Gamma(s+1)\Gamma(s+2)\Gamma(s+\frac{5}{2})\Gamma(s+3)\Gamma(s+\frac{7}{2})\Gamma(s+4)\Gamma(s+5)\sin(2\pi s)$$

$$D(b,s) = \begin{cases} \left(\sin(\frac{\pi s}{2})\right)^3 \text{ lorsque } b = 1, \\ \\ \sqrt{-1}\left(\cos(\frac{\pi s}{2})\right)^3 \text{ lorsque } b = -1, \end{cases}$$

ainsi on retrouve bien (à une constante et une puissance de 2π près) un des résultats de M.Muro ([Muro 1]), on rappelle que les calculs explicites des coefficients associés à l'équation fonctionnelle du préhomogène $(G, \mathfrak{g}_{\pm 1})$ ont été faits par M.Muro (calcul micro-local).

Notons que les ouverts $O_{\pm 1,\pm 1}$ ne correspondent pas du tout à la description de $\mathfrak{g}_1''$ en $P-$orbites et pas plus à la description de $\mathfrak{g}_1'$ en G-orbites, par exemple $\sum_{1\leq i\leq 7} X_{\lambda_i}$ n'appartient pas à $G(\sum_{1\leq i\leq 6} X_{\lambda_i} - X_{\lambda_7}) = G(\sum_{1\leq i\leq 3} X_{\lambda_i} - X_{\lambda_4} - X_{\lambda_5} + X_{\lambda_6} + X_{\lambda_7})$ ([Mu 4]).

2) Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, G a une seule orbite dans $\mathfrak{g}_1'$.
Lorsque la caractéristique résiduelle est différente de 2, ce cas a été étudié par I.J.Igusa, il a notamment calculé explicitement la fonction Zéta associée à l'indicatrice d'un réseau L "convenable" de $\mathfrak{g}_1$ ([Ig 7]) alors on vérifie que $\dfrac{Z(1_L; s)}{Z(1_L; -s-5)} = C(s)B(Id, s)$.

8.4 $(\mathbf{E_8}, \alpha_\mathbf{1})$

8.4.1 Le cas déployé

Ce cas est tout à fait semblable au cas précédent : (E_7, α_2).

On note $\{\lambda_1, ..., \lambda_8\}$ les 8 racines orthogonales obtenues canoniquement par orthogonalisations successives à partir de $\lambda_1 = \alpha_1$ (cf.[Mu 4] pour une liste explicite) alors :

$$\sum_{1\leq i\leq 8} h_{\lambda_i} = 2H_0 \ ,$$

les racines de Δ_2 sont de la forme $\frac{1}{2}(\lambda_i+\lambda_j+\lambda_k+\lambda_l)$, avec $1 \leq i < j \leq 4$ et $k = i+4, l = j+4$, notée $\omega_{i,j}$, ou bien $k = i'+4, l = j'+4$, et notée $\omega'_{i,j}$, avec $\{i, i', j, j'\} = \{1, 2, 3, 4\}$ ainsi que $\omega = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq 4} \lambda_i$ et $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{2}\sum_{5\leq i\leq 8} \lambda_i$ qui est la plus grande racine de Δ.

$P = P(H_1, H_2)$, avec $H_2 = 2h_{\widetilde{\alpha}} = \sum_{5\leq i\leq 8} h_{\lambda_i}$ et $H_1 = 2h_\omega = \sum_{1\leq i\leq 4} h_{\lambda_i}$ est l'unique sous-groupe parabolique standard très spécial du préhomogène, ce sous-groupe parabolique est associé à la partie $\Sigma_0 - \{\alpha_8\}$ de Δ_0 qui est de type D_7.

Dans cette situation on a simplement $E_1(H_1) \cap \mathfrak{g}_1 = \{0\}$.

On fixe dorénavant un système de Chevalley : $(X_\alpha, h_\alpha, X_{-\alpha})_{\alpha\in\Delta}$, de $\mathfrak{g}$ tel que pour toute racine $\omega \in \Delta_2$ on ait :

$$[X_{-\lambda_i}, [X_{-\lambda_j}, [X_{-\lambda_k}, [X_{-\lambda_l}, X_\omega]]]] = X_{-\omega} \ , \text{ avec } \omega = \frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l) \ ,$$

dont l'existence est assurée par le corollaire 4.3 de [Mu 4].

On rappelle que l'invariant relatif fondamental, F, est de degré 8, on le normalise par la condition :

$$F(\sum_{1\le i\le 8} X_{\lambda_i}) = 1 \text{ et on a pour } a_1, ..., a_8 \in \mathbb{F}^* \ : \quad F(\sum_{1\le i\le 8} a_i X_{\lambda_i}) = \prod_{1\le i\le 8} a_i \ ,$$

et que $\tilde{B} = -\dfrac{4B}{B(H_0, H_0)} (= -\dfrac{2B}{B(h_{\lambda_i}, h_{\lambda_i})})$, ainsi $\tilde{B}(\frac{H_1}{2}, \frac{H_1}{2}) = -2$ et pour toute racine α de Δ on a $\tilde{B}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$.

Proposition 8.4.1 *1. Le préhomogène $(E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_0, E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1)$ est de type (E_7, α_1) et d'invariant relatif fondamental $F_1(x) = \frac{1}{4!}\tilde{B}(adx^4(X_{-\omega}, X_{-\omega})$.*

2. Pour $x \in \mathfrak{g}_1$ on a $P_1(x) = \frac{1}{4!}\tilde{B}(adx^4(X_{-\widetilde{\alpha}}, X_{-\widetilde{\alpha}})$.

3. Soit $x \in W_{\mathfrak{t}}$, $x = x_2 + x_0$ avec $x_i \in E_i(H_1) \cap \mathfrak{g}_1$ alors :

a) Le préhomogène $((E_0(H_1) \cap \mathfrak{g}_0)_{x_0}, (E_2(H_1) \cap \mathfrak{g}_1)_{x_0})$ est de type :

$$(\Delta, \lambda_0) = \begin{cases} (E_6, \alpha_2) \text{ lorsque } -P_1(x_0) \in \mathbb{F}^{*2} \\ (F_4, \alpha_1) \text{ sinon} \ , \end{cases}$$

et $c(f) \equiv P_1(x_0) \pmod{\mathbb{F}^{*2}}$.

b) Le préhomogène $((E_0(H_2) \cap \mathfrak{g}_0)_{x_2}, (E_2(H_2) \cap \mathfrak{g}_1)_{x_2})$ est de type :

$$(\Delta, \lambda_0) = \begin{cases} (E_6, \alpha_2) \text{ lorsque } -F_1(x_2) \in \mathbb{F}^{*2} \\ (F_4, \alpha_1) \text{ sinon} \ , \end{cases}$$

et $c(f) \equiv F_1(x_2) \pmod{\mathbb{F}^{*2}}$.

Démonstration: 1) Cela résulte du diagramme de Dynkin complété de E_8.

2) H_1 et H_2 sont dans la même orbite de G, il suffit d'appliquer le 1) de la proposition 8.2.4.

3) Pour tout $x \in W_{\mathfrak{t}}$, il existe $g \in G_{H_1}$ et $(a_1, ..., a_8) \in \mathbb{F}^*$ tels que $gx = \sum_{1\le i\le 8} a_i X_{\lambda_i}$ (lemme 7.3 de [Mu 4]) donc on fait la démonstration pour $x_2 = \sum_{1\le i\le 4} a_i X_{\lambda_i}$ et $x_0 = \sum_{5\le i\le 8} a_i X_{\lambda_i}$.

a) Le préhomogène $((E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_0)_{x_0},(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0})$ est un préhomogène absolument irréductible régulier quasi-commutatif presque déployé pour lequel $(E_4(H_1)\cap\mathfrak{g}_2)_{x_0}$ est de dimension 1 or on a :

$$\begin{aligned}(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0} &= \oplus_{1\le i\le 4}\mathfrak{g}^{\lambda_i}\oplus_{1\le i<j\le 4}(\mathbb{F}X_{i,j}\oplus\mathbb{F}X'_{i,j})\oplus_{1\le i\le 4}[X_{-\lambda_i},X_\omega] \text{ avec}\\ X_{i,j} &= a_{4+j}[X_{-\lambda_{4+i}},X_{\omega_{i,j}}]-a_{4+i}[X_{-\lambda_{4+j}},X_{\omega_{i,j}}]\ ,\\ X'_{i,j} &= a_{4+j'}[X_{-\lambda_{4+i'}},X_{\omega'_{i,j}}]-a_{4+i'}[X_{-\lambda_{4+j'}},X_{\omega'_{i,j}}]\ ,\ \{i,i',j,j'\}=\{1,...,4\},\end{aligned}$$

donc, par classification, ce préhomogène est de type $(R,\lambda_0)=(F_4,\alpha_1)$ avec $d=2$ donc de type $(\Delta,\lambda_0)=(E_6,\alpha_2)$ lorsque f est isotrope et (F_4,α_1) sinon (cf.3),lemme 8.2.2) ainsi il suffit de considérer la forme quadratique :

$$\begin{aligned}f'(u,v) &= \tfrac{1}{2}\tilde{B}(ad(uX_{1,2}+vX'_{1,2})^2(X_{-\lambda_1}),X_{-\lambda_2})\\ &= -\tfrac{1}{2}\tilde{B}([uX_{1,2}+vX'_{1,2},X_{-\lambda_1}],[uX_{1,2}+vX'_{1,2},X_{-\lambda_2}])\\ &= c(u^2a_5a_6+v^2a_7a_8)\ ,\end{aligned}$$

c étant une constante non nulle, f' est isotrope $\Leftrightarrow P_1(x_0)\equiv -1 \pmod{\mathbb{F}^{*2}}$.

b) Idem que pour a) □

Lorsque $\mathbb{F}$ est archimédien, les 2 polynomes de Bernstein s'obtiennent immédiatement en appliquant les propositions 3.4.4 et 3.7.3 (ainsi que 8.2.5) d'où :

Proposition 8.4.2 *Soit $B(s)=s(s+\frac{3}{2})(s+\frac{5}{2})(s+4)$ le polynome de Bernstein du préhomogène de type (E_6,α_2) alors :*

$$b_1(s_1,s_2)=B(s_2)\ \textit{et}\ \ b_2(s_1,s_2)=B(s_2)B(s_1+s_2+3).$$

On rappelle que pour $u=(u_1,u_2)\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$ on définit les ouverts (tous non vides) :

$$O_u=O_{(u_1,u_2)}=\{x\in\mathfrak{g}_1\mid F_1(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1\ \ ,\ F_2(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1u_2)\}$$

$$O^*_u=O^*_{(u_1,u_2)}=\{x\in\mathfrak{g}_{-1}\mid F^*_1(x)\mathbb{F}^{*2}=u_2\ ,\ F^*_2(x)\mathbb{F}^{*2}=u_1u_2\}$$

ainsi que les fonctions Zétas correspondantes :

$$Z_u(f;\omega)=Z(f\mathbf{1}_{O_u};\omega)\text{ pour }f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)\text{ et }Z^*_u(h;\omega)=Z^*(h\mathbf{1}_{O^*_u};\omega)\text{ pour }h\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1}).$$

Pour $u,v,w\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, $\omega\in\hat{\mathbb{F}}^*$ et $s\in\mathbb{C}$ posons :

$$B_{v,u,w}(\omega,s)=\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}A^1_{\omega,s+1,s+\frac{5}{2}}(wv,t,1)(t,-w)A^1_{\omega,s+\frac{7}{2},s+5}(t,wu,1)\ ,$$

(cf. 8.2.8 et sa démonstration ainsi que la prop.8.4.1). Alors :

Proposition 8.4.3 *1. Lorsque $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ pour $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$, on a :*

$$Z^*(\mathcal{F}(f);(\omega_1,\omega_2),(s_1,s_2))=a_2(\omega_2,s_2)a_2(\omega_1\omega_2,s_1+s_2+3)Z\Big(f;(\omega_1,(\omega_1\omega_2)^{-1});s_1,-(s_1+s_2+8)\Big)$$

avec :

$$a_2(\omega,s)=\rho'(\omega;s+1)\rho'(\omega;s+\frac{5}{2})\rho'(\omega;s+\frac{7}{2})\rho'(\omega;s+5).$$

2. Lorsque $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique de caractéristique résiduelle différente de 2, pour tout $v=(v_1,v_2)$ dans $(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2$ et $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$, on a :

$$Z_v^*(\mathcal{F}(f);\ (\omega_1,\omega_2),(s_1,s_2))=\sum_{u\in(\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^2}d_{v,u}(\omega,s)Z_u(f;(\omega_1,(\omega_1\omega_2)^{-1});s_1,-(s_1+s_2+8)\ )\quad avec$$

$u=(u_1,u_2)$ *:* $d_{v,u}(\omega,s)=B_{v_1,u_1,v_2}(\omega_2,s_2)B_{v_2,u_2,u_1}(\omega_1.\omega_2,s_1+s_2+3)$.

Démonstration: On applique la proposition 5.3.1 dont toutes les hypothèses sont vérifiées par les propositions 8.2.11 et 8.4.1, puisque $c(f)\equiv P_1(x_0)$ (resp. $c(f)\equiv F_1(x_2)$) dans le préhomogène $((E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_0)_{x_0},(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0})$ (resp.$((E_0(H_1)\cap\mathfrak{g}_0)_{x_0},(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0})$) et que $r_1=3$. On notera que la restriction de F_1 (resp. P_1) à $(E_2(H_1)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_0})$ (resp. $(E_2(H_2)\cap\mathfrak{g}_1)_{x_2}$) est l'invariant relatif fondamental utilisé dans le paragraphe 8.2 (cf. 1) de la proposition 8.2.4) à un coefficient multiplicatif près appartenant à $\mathbb{F}^{*2}$ ce qui est sans incidence (cf.lemme 3.5.3). □

Remarque 8.4.4

1) Dans le cas réel, posons :
$u_1=-1$ et $u_2=1$ alors pour $u=\pm1$, $B_{u_i,u_j,u}(s)=B_{i,j}(u,s)$, $B_{i,j}(u,s)$, étant le $i,j-$ème coefficient de la matrice :

$$\frac{1}{2}C_2(0,s)\begin{pmatrix}\sin 2\pi s & 0\\ -2(1+u)\sin\pi s & u\sin 2\pi s\end{pmatrix}\ \text{(prop.8.2.11)}$$

Soient $a_1=(-1,-1),a_2=(-1,1),a_3=(1,-1),a_4=(1,1)$ et soit $D(s_1,s_2)=\Big(D_{i,j}(s_1,s_2)\Big)_{1\le i\le j\le 4}$ la matrice :

$$\begin{pmatrix}\sin 2\pi s_2\sin 2\pi(s_1+s_2) & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin 2\pi s_2\sin 2\pi(s_1+s_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sin 2\pi s_2\sin 2\pi(s_1+s_2) & 0\\ 0 & 4\sin\pi s_2\sin 2\pi(s_1+s_2) & 4\sin 2\pi s_2\sin\pi(s_1+s_2) & \sin 2\pi s_2\sin 2\pi(s_1+s_2)\end{pmatrix}$$

alors :

$$d_{a_i,a_j}(s_1,s_2)=\frac{1}{4}C_2(0,s_2)C_2(0,s_1+s_2+3)D_{i,j}(s_1,s_2).$$

On a :

$d_{a_1,a_1}(s_1,s_2)+d_{a_4,a_1}(s_1,s_2)=d_{a_1,a_4}(s_1,s_2)+d_{a_4,a_4}(s_1,s_2)$

$d_{a_2,a_1}(s_1,s_2)+d_{a_3,a_1}(s_1,s_2)=d_{a_2,a_4}(s_1,s_2)+d_{a_3,a_4}(s_1,s_2)=0$

$d_{a_2,a_2}(s_1,s_2)+d_{a_3,a_2}(s_1,s_2)=d_{a_2,a_3}(s_1,s_2)+d_{a_3,a_3}(s_1,s_2)$

mais $d_{a_1,a_2}(s_1,s_2)+d_{a_4,a_2}(s_1,s_2)\neq d_{a_1,a_3}(s_1,s_2)+d_{a_4,a_3}(s_1,s_2)$ pour $s_1\neq 0$ donc on n'a pas l'analogue de la proposition 8.2.8 pour $(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2$.

Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique, les expressions analogues semblent compliquées.

Cependant lorsque $s_1=0$, on a encore les équations fonctionnelles habituelles. Pour $u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, et $s\in\mathbb{C}$ tel que $\Re(s)>0$, on pose :

- $O_u=\{x\in\mathfrak{g}_1 \text{ tel que } F_2(x)\mathbb{F}^{*2}=u\}$ et pour $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$: $Z_u(f;s):=Z(1_{O_u}f;s)$,
- $O_u^*=\{x\in\mathfrak{g}_{-1} \text{ tel que } F_2^*(x)\mathbb{F}^{*2}=u\}$ et pour $g\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_{-1})$: $Z_u^*(g;s):=Z^*(1_{O_u^*}g;s)$,

alors $Z_u(f;s)$ et $Z_u^*(g;s)$ admettent un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ et si $\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}=\{u_1,...,u_\ell\}$, on a :

Proposition 8.4.5 *Dans le cas réel ou bien dans le cas $\mathfrak{p}$-adique avec caractéristique résiduelle différente de 2, pour tout $f\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ et $s\in\mathbb{C}$ on a :*

$$\begin{pmatrix} Z^*_{u_1}(\mathcal{F}(f);s)\\ ....\\ Z^*_{u_\ell}(\mathcal{F}(f);s)\end{pmatrix}=f(s)A'(s).A'(s+\frac{11}{2})\begin{pmatrix} Z_{u_1}(f;-s-8)\\ ....\\ Z_{u_\ell}(f;-s-8)\end{pmatrix}.$$

avec

$$f(s)=|2|_{\mathbb{F}}^{-4s-16}\rho(|\ |^{2s+7})\rho(|\ |^{2s+10}),$$

et

$$A'(s)=\left(A^1_{s+1,s+\frac{5}{2}}(u_i,u_j,1)\right)_{1\leq i,j\leq\ell}\qquad s\in\mathbb{C}$$

est la matrice des coefficients associés à une forme quadratique de discriminant 1 sur un espace de dimension 5.

Démonstration: Les coefficients, $a_{v,u}(s)$, pour $u,v\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$, sont donnés par (prop.8.4.3,2)) :

$$\begin{aligned} a_{v,u}(s) &= \textstyle\sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} d_{(v_1,vv_1),(u_1,u_1u)}(0,s) \quad \text{avec}\ \ u_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2},\\ &= \textstyle\sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} B_{v_1,u_1,vv_1}(s)B_{vv_1,uu_1,u_1}(s+3)\\ &= \textstyle\sum_{t_1,t_2\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A(t_1,t_2)\end{aligned}$$

avec $A(t_1,t_2)=\sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}$

$A^1_{s+1,s+\frac{5}{2}}(v,t_1,1)(t_1,-vv_1)A^1_{s+\frac{7}{2},s+5}(t_1,vv_1u_1,1)A^1_{s+4,s+\frac{11}{2}}(u_1vv_1,t_2,1)(t_2,-u_1)A^1_{s+\frac{13}{2},s+8}(t_2,u,1)$

$$= (t_1,-v)(t_2,-u_1)A^1_{s+1,s+\frac{5}{2}}(v,t_1,1)A^1_{s+\frac{13}{2},s+8}(t_2,u,1).A'(t_1,t_2)$$

avec $A'(t_1,t_2) = \sum_{w_1,w_2\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}} A(t_1,t_2,w_1,w_2)\alpha(w_1)\alpha(w_2)\rho(s+\frac{7}{2};t_1w_1)\rho(s+\frac{11}{2};t_2w_2)$ et

$A(t_1,t_2,w_1,w_2) = \sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(v_1,t_1)\rho(s+5;w_1vv_1u_1)\rho(s+4;w_2u_1v_1v)$

$= \sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(v_1w_1w_2u_1v,t_1)\rho(s+5;w_2v_1)\rho(s+4;w_1v_1)$

donc :

$$A'(t_1,t_2) = (u_1v,t_1)\sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(v_1,t_1)\ (\sum_{w_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(w_1)(w_1,t_1)\rho(s+\frac{7}{2};t_1w_1)\rho(s+4;w_1v_1).$$

$$(\sum_{w_2\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}\alpha(w_2)(w_2,t_1)\rho(s+5;w_2v_1)\rho(s+\frac{11}{2};t_2w_2)$$

$$= (u_1v,t_1)\sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(v_1,t_1)\ A^1_{s+\frac{7}{2},s+4}(t_1,v_1,t_1)A^1_{s+5,s+\frac{11}{2}}(v_1,t_2,t_1)$$

$$= (u_1v,t_1)\sum_{v_1\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}(v_1,t_1)\alpha(1)^2\alpha(-t_1)^2A^1_{s+\frac{7}{2},s+4}(1,t_1v_1,1)A^1_{s+5,s+\frac{11}{2}}(t_1v_1,t_1t_2,1)$$

$$A'(t_1,t_2) = \begin{cases}(u_1v,t_1)A^1_{s+\frac{7}{2},s+4}(1,1,1)A^1_{s+5,s+\frac{11}{2}}(1,1,1)\text{ pour } t_1=t_2\\ 0\quad\text{pour } t_1\neq t_2\end{cases}$$

(lemme 3.6.8,1)), d'où :

$$a_{v,u}(s) = \sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}A(t,t) = f(s)\sum_{t\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}}A^1_{s+1,s+\frac{5}{2}}(v,t,1)A^1_{s+\frac{13}{2},s+8}(t,u,1)$$

avec :

$$f(s) = A^1_{s+\frac{7}{2},s+4}(1,1,1)A^1_{s+5,s+\frac{11}{2}}(1,1,1) = |2|_{\mathbb{F}}{}^{-4s-16}\rho(|\ |^{2s+7})\rho(|\ |^{2s+10}).\qquad\square$$

Remarque 8.4.6 *1) Les orbites de G dans $\mathfrak{g}_{\pm1}$ sont données dans le théorème 2 de [Mu 4].*

2) Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique.

Les orbites de G dans $\mathfrak{g}'_1$ (resp.$\mathfrak{g}'_{-1}$) sont données par O'_u (resp. $O'*_u$) pour $u\in\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2}$.

Lorsque la caractéristique résiduelle est différente de 2, $\ell=4$ et la proposition 8.3.5 donne les coefficients de l'équation fonctionnelle associée au préhomogène $(G,\mathfrak{g}_{\pm1})$.
On a alors :

$$f(s) = \frac{(1-q^{2s+6})(1-q^{2s+9})}{(1-q^{-2s-7})(1-q^{-2s-10})}.$$

3) Dans le cas réel, la proposition précédente donne :

$$\begin{pmatrix} Z^*_{-1}(\mathcal{F}(f);s)\\ Z^*_1\ (\mathcal{F}(f);s)\end{pmatrix} = \frac{1}{4}C_2(0,s)C_2(0,s+3)E(s)\begin{pmatrix} Z_{-1}(f;-s-8)\\ Z_1\ (f;-s-8)\end{pmatrix}$$

avec

$$E(s) = \begin{pmatrix} -\sin^2 2\pi s & 0 \\ 4\sin\pi s \sin 2\pi s & \sin^2 2\pi s \end{pmatrix}$$

ce qui n'est pas en accord avec les résultats obtenus par Muro ([Muro 1]).

(Pour mémoire : $\frac{1}{4}C_2(0,s)C_2(0,s+3) =$
$4(2\pi)^{-8(s+\frac{9}{2})}\Gamma(s+1)\Gamma(s+\frac{5}{2})\Gamma(s+\frac{7}{2})\Gamma(s+5)\ \Gamma(s+4)\Gamma(s+\frac{11}{2})\Gamma(s+\frac{13}{2})\Gamma(s+8)$*)*

G a 3 orbites dans $\mathfrak{g}_1'$ *(resp.*$\mathfrak{g}_{-1}'$*) :*

$$O_1 = G.(\sum_{1\leq i\leq 8} X_{\lambda_i}) \cup G.(\sum_{1\leq i\leq 6} X_{\lambda_i} - X_{\lambda_7} - X_{\lambda_8})\ ,\ O_{-1} = G.(\sum_{1\leq i\leq 7} X_{\lambda_i} - X_{\lambda_7}).$$

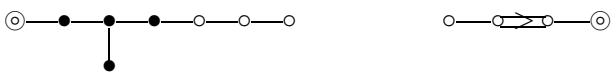
Si l'on veut déterminer les coefficients de l'équation fonctionnelle associée aux orbites, il faut procéder de manière analogue au paragraphe 8.2.4 ce que ne sera pas fait ici.

8.4.2 Le cas réel non déployé

Dans ce paragraphe, on considère la forme EIX de E_8 plus précisément $\overline{g}$ est de type E_8 et $\mathfrak{g}$ est de de type F_4, les préhomogènes correspondants sont les suivants :

- $(\overline{\mathfrak{g}}_0, \overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (E_8, α_1),
- $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est de type (F_4, λ_4),

et les diagrammes de Satake et de Dynkin sont :



(λ_1 est la restriction de α_8, λ_2 est la restriction de α_7, λ_3 est la restriction de α_6, λ_4 est la restriction de α_1)

Comme ω et $\widetilde{\alpha}$ sont des racines réelles, le sous-groupe parabolique standard est le même que dans le cas déployé, il est donné par $P(H_1, H_2)$ avec $H_1 = 2h_\omega$ et $H_2 = 2h_{\widetilde{\alpha}}$ qui sont dans la même orbite de G.

L'algèbre simple $E = \mathfrak{U}(\mathbb{R}H_2)$ (resp. $F = \mathfrak{U}(\mathbb{R}H_1)$) est graduée par $\frac{1}{2}H_1$ (resp.$\frac{1}{2}H_2$) et son diagramme de Satake est de type EVII, le diagramme de Dynkin du préhomogène (E_0, E_1) (resp. (F_0, F_1)) est de type (C_3, λ_1), il est obtenu en prenant simplement $\Delta \cap (\oplus_{i=2,3,4}\mathbb{Z}\lambda_i)$.

Ceci donne une situation très simple car :

Lemme 8.4.7 *Soit* $x \in E_1'$ *(resp.*$x \in F_1'$*) et* $\mathfrak{U}_x = \mathfrak{U}(\mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}H_2 \oplus \mathbb{F}x^{-1})$ *(resp.*$\mathfrak{U}_x = \mathfrak{U}(\mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}H_1 \oplus \mathbb{F}x^{-1})$*) alors* $\mathfrak{U}_x$ *est de rang 2 et de type EIII et le préhomogène* $((\mathfrak{U}_x)_0, (\mathfrak{U}_x)_1)$ *est de type* (BC_2, λ_1).

Démonstration: Par la proposition 8.4.1, le complexifié de $((\mathfrak{U}_x)_0, (\mathfrak{U}_x)_1)$ est de type (E_6, α_2) et par la proposition de l'appendice 1, $\mathfrak{U}_x$ est de rang inférieur ou égal à 2 donc $\mathfrak{U}_x$ est de type EIII par classification (tables de [Wa]) d'où le préhomogène $((\mathfrak{U}_x)_0, (\mathfrak{U}_x)_1)$ est de type (BC_2, λ_1).

□

On en déduit :

Proposition 8.4.8 *1. P a une seule orbite dans $\mathfrak{g}"_1$.*

2. Soient $(s_1, s_2) \in \widehat{(\mathbb{C})^2}$, $f \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}_1)$ alors :

$$Z^*(\mathcal{F}f; (s_1, s_2)) = C(s_1, s_2)\sin(2\pi s_2)\sin(2\pi(s_1+s_2))Z(f; (s_1, -s_1-s_2-8)) \quad \textit{avec}$$

$$\begin{aligned} C(s_1, s_2) &= 4(2\pi)^{-(4s_1+8s_2+36)}\Gamma(s_2+1)\Gamma(s_2+\frac{5}{2}).\Gamma(s_2+\frac{7}{2})\Gamma(s_2+5)\Gamma(s_1+s_2+4) \\ &\quad .\Gamma(s_1+s_2+\frac{11}{2})\Gamma(s_1+s_2+\frac{13}{2})\Gamma(s_1+s_2+8). \end{aligned}$$

Démonstration: On procède comme dans la démonstration de la proposition 5.3.3 que l'on applique avec $s_1 = 0$ (cas $d = 2$) ainsi que la proposition 5.3.1 avec $\mathbb{H} = \mathbb{R}^*$. □

Remarque : Cette proposition est bien connue lorsque $s_1 = 0$ ([Muro 1]).

Appendice 1

On indique un résultat sur le rang du centralisateur associé à un sl_2-triplet dont l'élément simple est donné par $2h_\alpha$, h_α étant la co-racine de la racine longue α dans un système de racines irréductible et réduit.
Ce résultat permet de simplifier les calculs en "petit rang".

On commence par un premier lemme :

Lemme 1 *Soit Δ un système de racines irréductible et réduit , on note :*

- Σ *une base de* Δ,
- $\widetilde{\alpha}$ *la plus grande racine de* Δ *pour l'ordre induit par* Σ,
- $\Sigma' = \{\alpha \in \Sigma \mid n(\alpha, \widetilde{\alpha}) = 0\}$.

Soit γ une racine de Δ vérifiant $n(\gamma, \widetilde{\alpha}) = 1$ alors il existe au moins une racine α de Σ' (qui est non vide) telle que la quantité $n(\gamma, \alpha)$ soit non nulle.

Démonstration: Comme $\widetilde{\alpha} - \gamma$ est une racine, γ est positive.

1) Dans le cas A_n et dans les notations de la planche 1 de [Bou 1] :

$\widetilde{\alpha} = \epsilon_1 - \epsilon_{n+1}$, $\Sigma' = \{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, i = 2, .., n-1\}$ et :

$\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_{i+1}$, avec $i = 1, ..., n-1$ ou bien $\gamma = \epsilon_i - \epsilon_{n+1}$, avec $i = 2, ..., n$ et dans les 2 cas $n(\gamma, \alpha_i) \neq 0$ pour $1 = 2, ..., n-1$; $n(\epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2) \neq 0$ et $n(\epsilon_n - \epsilon_{n+1}, \alpha_{n-1}) \neq 0$.

2) Dans les cas restants, $\Sigma - \Sigma' = \{\alpha_0\}$ et $\gamma - \alpha_0$ est une combinaison linéaire (à coefficients positifs ou nuls) d'éléments de Σ'.

Procédons par l'absurde et supposons que γ soit orthogonale aux racines de Σ' alors $(\gamma, \gamma) = (\gamma, \alpha_0)$ donc $n(\alpha_0, \gamma) = 2$ d'où γ est une racine courte positive orthogonale à Σ' et Δ n'est pas simplement lacé.

Il est facile de vérifier cas par cas (dans les notations des planches de [Bou 1]) que c'est absurde, en effet :

a) $\Delta = G_2$: alors $\gamma = \epsilon_i - \epsilon_3$ avec $i = 1$ ou 2 et $\Sigma' = \{\alpha_1\} = \{\epsilon_1 - \epsilon_2\}$.

b) $\Delta = F_4$: alors $\gamma = \epsilon_i, i = 1, 2, 3, 4$, ou bien $\gamma = \frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)$ et
$\Sigma' = \{\epsilon_3 - \epsilon_4, \epsilon_4, \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)\}$.

c) $\Delta = B_n$: alors $\widetilde{\alpha} = \epsilon_1 + \epsilon_2$, $\gamma = \epsilon_i, i = 1, 2$ et $\Sigma' = \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_i, 3 \leq i \leq n\}$.

d) $\Delta = C_n$: alors $\widetilde{\alpha} = 2\epsilon_1$, $\gamma = \epsilon_1 \pm \epsilon_i, i = 2, ..., n$ et
$\Sigma' = \{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, 2 \leq i \leq n-1, \alpha_n = 2\epsilon_n\}$. □

Lemme 2 *Soit Δ un système de racines irréductible et réduit, α et γ 2 racines de Δ telles que :*
i) $n(\gamma, \alpha) = 1$,
ii) α est une racine longue
alors il existe au moins une racine δ telle que $n(\gamma, \delta) \neq 0$ et $n(\delta, \alpha) = 0$.

Démonstration: Soit Σ une base de Δ et $\widetilde{\alpha}$ la plus grande racine de Δ pour l'ordre induit par Σ, alors α et $\widetilde{\alpha}$ ont même longueur donc sont dans la même orbite du groupe de Weyl W et il suffit d'appliquer le lemme précédent. □

Proposition *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple, $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{g}$, α une racine longue de Δ, le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ que l'on suppose réduit.*

$(x, 2h_\alpha, y)$ étant un sl_2-triplet, on appelle $\mathfrak{U}_x$ l'algèbre dérivée du centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de l'algèbre $\mathbb{F}x \oplus \mathbb{F}h_\alpha \oplus \mathbb{F}y$, alors :

$$\textit{rang de}(\mathfrak{U}_x) \leq \textit{rang de } (\mathfrak{g}) - 2 \ .$$

Démonstration: Soit E le centralisateur de h_α dans $\mathfrak{g}$ alors :

$$E = c \oplus E' \ ,$$

c étant le centre de E et contenant h_α et E' étant l'algèbre dérivée de E.
Soit $\Delta' = \{\beta \in \Delta \mid n(\alpha, \beta) = 0\}$ alors $\mathfrak{a}' = \sum_{\beta \in \Delta'} \mathbb{F}h_\beta$ est une sous-algèbre abélienne déployée maximale de E', comme $\mathfrak{U}_x \subset E'$ on a rang$(\mathfrak{U}_x) \leq$rang$(E') =$dim$(\mathfrak{a}') \leq$rang$(\mathfrak{g}) - 1$.
Si rang$(\mathfrak{U}_x) \leq$rang$(\mathfrak{g}) - 2$, la démonstration est terminée.

Dans le cas contraire on a rang$(\mathfrak{U}_x) =$rang$(\mathfrak{g}) - 1 =$dim$(\mathfrak{a}')$.
Alors, soit $\mathfrak{a}_x$ une sous-algèbre abélienne déployée maximale de $\mathfrak{U}_x$, $\mathfrak{a}_x \oplus \mathbb{F}h_\alpha$ et $\mathfrak{a}$ sont 2 sous-algèbres abéliennes déployées maximales de $\mathfrak{g}$ contenant h_α donc il existe un élément g dans $Aut(\mathfrak{g})_{h_\alpha}$ tel que $g(\mathfrak{a}_x \oplus \mathbb{F}h_\alpha) = \mathfrak{a}$ d'où $(g(x), 2h_\alpha, g(y))$ est encore un sl_2-triplet (d'où $g(x) \in \oplus_{\{\gamma | n(\gamma,\alpha)=1\}} \mathfrak{g}^\gamma$) et l'algèbre $g(\mathfrak{U}_x) = \mathfrak{U}_{g(x)}$, admet $g(\mathfrak{a}_x)$ comme sous-algèbre abélienne déployée maximale mais $g(\mathfrak{a}_x) \subset \mathfrak{a} \cap E' = \mathfrak{a}'$ donc $g(\mathfrak{a}_x) = \mathfrak{a}'$ d'où $[g(x), \mathfrak{a}'] = 0$ ce qui est absurde par le lemme précédent □

Appendice 2

Remarques sur les mesures relativement invariantes sur les orbites singulières

1. Conditions suffisantes

Dans ce paragraphe, on donne des conditions suffisantes d'existence des mesures relativement invariantes sur le lieu singulier et tempérées.
Les hypothèses de ce paragraphe sont les suivantes : $\mathbb{F}$ est un corps local de caractéritique 0 et on suppose que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ est un préhomogène tel que :

(1) $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0$-module absolument simple,

(2) $2H_0$ est 1-simple.

On considère un sl_2-triplet 1-adapté : (x_0, h, y_0) non générique, c'est à dire que $h \neq 2H_0$, et on suppose que les propriétés supplémentaires suivantes sont vérifiées :

(3) le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h')_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h')_1, \frac{h}{2})$ admet un unique invariant relatif fondamental avec $h' = 2H_0 - h$,

(4) h' est 1-simple et le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h)_1)$ admet un unique invariant relatif fondamental.

Par les hypothèses (1),(2),(3),(4) les préhomogènes $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$, $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h')_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h')_1)$ et $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}h)_0, \mathfrak{U}(\mathbb{F}h)_1)$ admettent des invariants relatifs fondamentaux non constants que l'on note respectivement : $F, F_h, F_{h'}$ et $\chi, \chi_h, \chi_{h'}$ seront les caractères associés ; on note $m, m_h, m_{h'}$ les degrés respectifs des polynômes.

Pour $(i,j) \in \mathbb{Z}$, on désigne par $E_{i,j}$ le sous-espace vectoriel :

$$E_{i,j} = E_i(h) \cap E_j(h') = \{x \in \mathfrak{g} \ \mid \ [h,x] = ix \text{ et } [h',x] = jx \ \}$$

et $p_{i,j}$ est sa dimension (notons que : $p_{\pm i,\pm j} = p_{i,j}$).
Soit $p_0 = sup\{i \geq 0 \ / \ \mathfrak{g}_i \neq \{0\}\}$.

H est la composante connexe du noyau de χ, H_h (resp.H_{x_0}) est le centralisateur de h (resp.x_0) dans H, N_h est le sous groupe $exp(ad(\oplus_{i\geq 1} E_i(h) \cap \mathfrak{g}_0))$, P_h est le sous-groupe parabolique $H_h.N_h$ et il est bien connu que

$$H_{x_0} = (H_h)_{x_0}.N_{x_0} \subset P_h \subset H.$$

Δ_{P_h} désigne le module du sous-goupe P_h lorsqu'il est muni d'une mesure de Haar invariante à gauche et notée dp.

Lemme 1 $\Delta_{P_h}^{-1} = |\chi_h|^r$ *avec* $r = \dfrac{\sum_{i=0}^{p_0} i p_{i,i}}{m_h}.\dfrac{p dim(\mathfrak{g}_p)}{trace(ad(h')/\mathfrak{g}_p)}$ *avec* $1 \leq p \leq p_0$.

2) H_{x_0} *est unimodulaire.*

Démonstration: 1) Montrons que pour tout couple $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (i,j) \neq (0,0)$ et $g \in G_h$ on a :

$$(a) \quad det(g/_{E_{i,j}})^2 = \chi_h(g)^{\frac{ip_{i,j}}{m_h}} \chi_{h'}(g)^{\frac{jp_{i,j}}{m_{h'}}}.$$

La démonstration est standard (cf.lemme 1.4.7) et repose sur les hypothèses (3) et (4). Supposons $i \geq 1$, pour $x \in E_{2,0}$ l'application définie par :

$$(adx)^i \quad E_{-i,j} \to E_{i,j}$$

est bijective en x_0, à l'invariant relatif $\det(ad(x)^i/_{E_{-i,j}})$ est associé le caractère : $det(g/_{E_{i,j}}).det(g^{-1}/_{E_{-i,j}})$ donc par l'hypothèse (3), celui-ci est une puissance de $\chi_h(g)$. Le coefficient se calcule simplement à l'aide de l'élément $h_h(t)$ qui opère sur chaque $E_{i,j}$ par l'homothétie de rapport t^i ce qui donne :

$$(b) \quad det(g/_{E_{i,j}}).det(g^{-1}/_{E_{-i,j}}) = \chi_h(g)^{\frac{ip_{i,j}}{m_h}}.$$

Si $i \leq -1$, par dualité donnée par B on a :

$$det(g/_{E_{i,j}}) = det(g^{-1}/_{E_{-i,-j}})$$

ainsi la relation (b) est vérifiée pour $i \neq 0$.
On procède de même avec l'hypothèse (4) d'où

$$(c) \quad \text{pour} \quad j \neq 0 \quad det(g/_{E_{i,j}}).det(g^{-1}/_{E_{i,-j}}) = \chi_{h'}(g)^{\frac{jp_{i,j}}{m_{h'}}},$$

ainsi de (b) et (c) on déduit la relation (a).
Exactement de manière analogue, en raison des hypothèses (1) et (2), on a pour $1 \leq p \leq p_0$:

$$(d) \quad \text{pour} \quad g \in G \quad (det(g/_{\mathfrak{g}_p})^2 = \chi(g)^P \quad \text{avec} \quad P = \frac{2p\dim(\mathfrak{g}_p)}{m}$$

D'après (a) on a pour $g \in G_h$:

$$\chi_h(g)^{M_h}\chi_{h'}(g)^{M_{h'}} = \chi(g)^P \quad \text{avec} \quad M_h = \frac{\text{trace}(ad(h)/\mathfrak{g}_p)}{m_h} \quad M_{h'} = \frac{\text{trace}(ad(h')/\mathfrak{g}_p)}{m_{h'}}$$

d'où $M_h \neq 0, M_{h'} \neq 0$ et la relation :

$$(e) \quad \text{pour} \quad i \neq 0 \quad \text{et} \quad g \in G_h \quad (det(g/_{E_{i,j}}))^{2M_{h'}} = \chi_h(g)^{M_{i,j}}\chi(g)^{\frac{jp_{i,j}}{m_{h'}}P}$$

$$\text{avec} \quad M_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{m_h m_{h'}}(iM_{h'}m_{h'} - jM_h m_h).$$

2) On a $\Delta_{P_h}(N_h) = 1$ et pour $g \in H_h$:

$$\begin{aligned} {\Delta_{P_h}}^{-1}(g) &= \mid \textstyle\prod_{i=1}^{p_0} det(g/_{E_{i,-i}}) \mid \\ &= \mid \chi_h(g) \mid^r \quad \text{en utilisant la relation (e) et le fait que } \chi(H) = 1. \end{aligned}$$

3) Vérifions que H_{x_0} est unimodulaire. Pour ceci il suffit (comme pour P_h) de calculer pour $g \in H_{h,x_0}$ la quantité :

$$\prod_{i=1}^{p_0} \mid det(g/_{(E_{i,-i})_{x_0}} \mid .$$

Comme $g \in H_{h,x_0}$ on a $\chi_h(g) = 1$ donc pour tout $i \neq 0$ on a

$$\mid det(g/_{E_{i,j}}) \mid = 1.$$

Or pour $i \geq 1$ on a $[x_0, E_{i,-i}] = E_{2+i,-i}$ et $gx_0 = x_0$ donc

$$1 = \mid det(g/_{E_{i,-i}}) \mid = \mid det(g/_{(E_{i,-i})_{x_0}}) \mid . \mid det(g/_{E_{2+i,-i}}) \mid = \mid det(g/_{(E_{i,-i})_{x_0}}) \mid . \qquad \square$$

Ainsi il existe sur l'espace homogène P_h/H_{x_0} une mesure non nulle, relativement invariante à gauche par P_h, de multiplicateur $\Delta_{P_h}^{-1}$ et unique à une constante multiplicative près ([Bou 3], chap.7, théorème 3,§2,n°6), notée $d\dot{p}$.

Lemme 2 *On suppose que :*

$$l'(h) = \sum_{i=1}^{p_0} i p_{i,i} - (\sum_{i \geq 2} i p_{i,2-i}) + (\sum_{i \geq 2} p_{i,2-i}).\frac{trace(ad(h)/_{\mathfrak{g}_{p_0}})}{p_0 dim(\mathfrak{g}_{p_0})} \geq 0,$$

alors pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ *et* $g \in G$

$$\psi_f(g) = \int_{P_h/H_{x_0}} f(gg'x_0)\Delta_{P_h}^{-1}(g')d\dot{g'}$$

converge absolument et vérifie pour tout $p \in P_h$ *et* $g \in G$

$$\psi_f(gp) = \Delta_{P_h}(p)\psi_f(g).$$

Démonstration: Il suffit de montrer la convergence absolue, la relation d'invariance étant évidente.
On considère l'action du groupe P_h sur l'espace vectoriel :

$$E = E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1 \oplus E' \quad \text{avec} \quad E' = \oplus_{i \geq 3} E_i(h) \cap \mathfrak{g}_1$$

Un calcul facile montre que :

$$P_h.x_0 = H_h.x_0 \oplus E'$$

Ainsi pour la topologie induite par $\mathbb{F}$ sur E, $P_h.x_0$ est une orbite ouverte de E, de même P_h est un sous-groupe fermé du groupe des automorphismes d'espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, muni de la topologie naturelle induite par $\mathbb{F}$. Pour cette topologie P_h opère continuement, est un groupe localement compact, dénombrable à l'infini donc P_h/H_{x_0} est homéomorphe à l'orbite $P_h.x_0$ ([Bou 4], chapitre IX, prop.6,§5, $n°3$).
On considère sur E la mesure P_h-invariante donnée par

$$\int_E f(x) \mid F_h(projection(x)/_{E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1} \mid^{-\delta} dx$$

dx étant la mesure sur E invariante par translation, "projection$(x)/_{E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1}$" représentant la composante de x suivant $E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1$. En effet le changement de variable fait apparaitre la quantité

$$\prod_{i \geq 2} \mid det(g)/_{E_{i,2-i}} \mid^{-1} = \mid \chi_h(g) \mid^{-\delta}$$

avec pour $1 \leq p \leq p_0$:

$$\delta = \frac{pdim(\mathfrak{g}_p)}{m_h(trace(ad(h')/_{\mathfrak{g}_p})}.[trace(ad(h)/_E) - \frac{dim(E)}{pdim(\mathfrak{g}_p)}trace(ad(h)/_{\mathfrak{g}_p})]$$

(relation (e) de la démonstration du lemme 1).
En raison de l'homéomorphisme et de l'unicité (à une constante multiplicative près) de la mesure P_h invariante sur $P_h/_{P_{hx_0}}$ on a :

$$\psi_f(g) = \int_{P_h.x_0} f(x) \mid F_h(projection(x)/_{E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1}) \mid^{r-\delta} dx$$

d'où cette dernière intégrale converge pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ lorsque $r - \delta \geq 0$ d'où la condition puisque trace$(ad(h')/\mathfrak{g}_{p_0} > 0$. □

On procède comme dans [Ra-Sc]. H est un groupe semi-simple, connexe pour la topologie de Zariski donc H est unimodulaire. Sur l'espace $C_K(H)$ des fonctions à support compact, on considère la mesure de Haar μ; par la proposition 3 de [Bou 3] (chap.VII,§2, $n°1$) il existe une forme linéaire positive, non nulle, H-invariante à gauche, relativement bornée, notée ν, définie sur l'ensemble C des fonctions continues définies sur H à valeur dans $\mathbb{C}$ telles que

$$\forall g \in H \ , \ \forall p \in P_h \quad f(gp) = \Delta_{P_h}(p)f(g)$$

(rappelons que $H/_{P_h}$ est compact pour la topologie induite par $\mathbb{F}$)

Lemme 3 *On suppose que $l'(h) \geq 0$ et pour $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ on pose :*

$$\nu_{x_0}(f) = \nu(\psi_f) \quad alors$$

1) ν_{x_0} est une mesure positive, tempérée sur $\mathfrak{g}_1$, invariante par H et de support $H.x_0$ que l'on peut écrire sous la forme

$$\nu_{x_0}(f) = \int \int_{V_h \times P_h.x_0} f(v.w) \mid F_h(projection(w)/_{E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1}) \mid^{l(h)} dvdw$$

avec $V_h = exp(\oplus_{i\geq 1}E_{-i}(h) \cap \mathfrak{g}_0$, V_h est muni d'une mesure de Haar dv et :

$$l(h) = \frac{p_0 dim(\mathfrak{g}_{p_0})}{m_h trace(adh'/_{\mathfrak{g}_{p_0}})}. \ l'(h).$$

2) Lorsque $H.x_0 = G'.x_0$, G' étant un sous-groupe ouvert de G contenant $Ker\chi$, ν_{x_0} est relativement invariante par G' de caractère $\mid \chi \mid^{-\alpha}$ avec

$$\alpha = \frac{p_0 dim(\mathfrak{g}_{p_0})}{m(trace(ad(h')/_{\mathfrak{g}_{p_0}})}.[\sum_{i\geq 1} ip_{i,i} - \sum_{i\geq 1} ip_{2+i,-i}] \quad (1 \leq p \leq p_0) \ .$$

Démonstration: 1) Comme :

$$[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]=(\oplus_{i\geq 1}E_{-i}(h)\cap\mathfrak{g}_0)\oplus([\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]\cap E_0(h))\oplus(\oplus_{i\geq 1}E_i(h)\cap\mathfrak{g}_0)$$

et que $\oplus_{i\geq 1}E_{-i}(h)\cap\mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie du groupe algébrique connexe V_h et $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]\cap E_0(h)\oplus_{i\geq 1}E_i(h)\cap\mathfrak{g}_0$ celle du groupe algébrique connexe P_h, par la proposition 4 du chapitre VI, §2 p.373 de [Ch] on a $H=V_h.P_h$ à un ensemble de mesure nulle près et on peut donc écrire pour toute fonction $f:H\mapsto\mathbb{C}$ continue à support compact :

$$\int_H f(h)dh=\int\int_{V\times P_h}f(v.p)\Delta_{P_h}^{-1}(p)dvdp=\nu(\int_{P_h}f(g.p)\Delta_{P_h}^{-1}(p)dp)$$

([Bou 4], §2, $n°9$,prop.3, $n°2$, prop.3) d'où la forme donnée pour ν_{x_0}.

2) Soit g_0 appartenant à G', on pose $\nu'(f)=\nu_{x_0}(f(g_0.))$ alors ν' est encore une mesure positive H invariante de même support que ν_{x_0}, elle lui est donc proportionnelle. En raison des hypothèses (1) et (2), on peut supposer que $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_{-1}$ engendrent $\mathfrak{g}$, ainsi le centre de $\mathfrak{g}_0$ est de dimension un. Il suffit donc de calculer le caractère sur les homothéties $c(t),t\in\mathbb{F}^*$. □

Lorsque h est 1-simple très spécial, (3) et (4) sont alors vérifiés, cependant $l'(h)<0$ en général sauf dans des cas orthogonaux très particuliers ou bien :

Lemme 4 *Soit h un élément 1-simple très spécial alors $l'(h)\geq 0$ lorsque :*
- $\mathfrak{g}_2=\{0\}$,
- *Lorsque l'invariant relatif fondamental est de degré 4 et $\overline{\mathfrak{g}}$ est de type exceptionnel.*

Démonstration: Comme la condition porte sur des dimensions, il suffit de faire la vérification lorsque $\mathfrak{g}$ est déployée.

1) Lorsque $\mathfrak{g}_2=\{0\}$, on reprend les notations du §6.1.1. On peut supposer que $h=\sum_{1\leq i\leq p}h_{\lambda_i}$ avec $1\leq p\leq n-1$ d'où :

$$d_1=1\ ,\ p_{2,2}=0\ ,\ p_{1,1}=p(n-p)\overline{d}\ ,\ p_{2,0}=p+p(p-1)\frac{\overline{d}}{2}\ ,\ \dim(\mathfrak{g}_1)=n+n(n-1)\frac{\overline{d}}{2}$$

donc $l'(h)=\dfrac{2p(n-p)}{n}((n-p+1)\dfrac{\overline{d}}{2}-1)\geq\dfrac{2p(n-p)}{n}(\overline{d}-1)\geq 0$.

2) Lorsque l'invariant relatif fondamental est de degré 4 et $\overline{\mathfrak{g}}$ est de type exceptionnel (donc distinct de G_2 par le choix de h), par classification on a soit $\mathfrak{g}_2$ de dimension 1 et ce cas sera fait dans la proposition suivante, soit $(\overline{\mathfrak{g}}_0,\overline{\mathfrak{g}}_1)$ est de type (E_7,α_6) (cf.tableau 3) mais alors :

$p_{1,1}=0\ ,\ p_{2,0}=\dfrac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{2}=2p_{2,2}=16\ ,\ p_{4,0}=p_{0,4}=1$ (cf.§8.1.1)) d'où $l'(h)=0$. □

Proposition 1 *Soit $(\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_1)$ un préhomogène tel que :*
1) $\mathfrak{g}_1$ est un $\mathfrak{g}_0-$module absolument simple,
2) $2H_0$ est 1-simple et

soit
5) $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$,
soit
6) $\overline{g}$ *est de type exceptionnel distinct de* G_2 *et* $\overline{\mathfrak{g}}_2$ *est de dimension* 1,

alors pour tout sl_2*-triplet 1-adapté,* (x_0, h, y_0) *avec* $h \neq 2H_0$, *il existe une mesure positive, tempérée, invariante par* H *et de support* $H.x_0$ *(resp.* $H.y_0$*).*
Pour tout $f \in S(\mathfrak{g}_1)$ *(resp.* $f \in S(\mathfrak{g}_{-1})$*), on peut l'écrire :*

$$\nu_{x_0}(f) = \int_{V_h} [\int_{H_h.x_0} f(v.z) \mid F_h(z) \mid^{l(h)} dz] dv$$

$$(\quad resp. \quad \nu^*_{y_0}(f) = \int_{N_h} [\int_{H_h.y} f(n.z) \mid F^*_h(z) \mid^{l(h)} dz] dn \quad)$$

avec $V_h = exp(\oplus_{i\geq 1} E_{-i}(h) \cap \mathfrak{g}_0)$ *(resp.* $N_h = exp(\oplus_{i\geq 1} E_i(h) \cap \mathfrak{g}_0)$*) muni d'une mesure de Haar* dv *(resp.* dn*)*
H_h *étant le centralisateur de* h *dans* H *et* F_h *(resp.* F^*_h*) étant le polynome défini par* F_h *(projection de* x *sur* $E_2(h) \cap \mathfrak{g}_1$*) (resp.* F^*_h *(projection de* y *sur* $E_{-2}(h) \cap \mathfrak{g}_{-1}$*) et :*

$l(h) = (1 - \widetilde{B}(2H_0 - h, H_0))\frac{\overline{d}}{2} - 1$ *dans le cas commutatif,*

$$l(h) = (1 - \widetilde{B}(2H_0 - h, H_0))\tfrac{d}{2} + \begin{cases} 1 \text{ lorsque } \widetilde{B}(h, H_0) = -1, \\ -1 \text{ lorsque } \widetilde{B}(h, H_0) = -2, \\ 0 \text{ lorsque } \widetilde{B}(h, H_0) = -3 \end{cases} \quad lorsque\ dim(\mathfrak{g}_2) = 1.$$

Démonstration: Il suffit de faire le calcul dans le cas où $\mathfrak{g}$ est déployée.
1) Dans le cas commutatif (i.e. 1)2)5)), tout h 1-simple distinct de $2H_0$ est 1-simple très spécial (remarque 1.1.3) et on applique le lemme précédent en notant que pour $h = \sum_{1\leq i\leq p} h_{\lambda_i}$ on a $l(h) = (n - p + 1)\frac{\overline{d}}{2} - 1$ et $\widetilde{B}(h, H_0) = -p$.

2) Dans les cas vérifiant 1)2)6), ce qui correspond à la description donnée au §8.2.1 que l'on reprend ici, on peut supposer que $h = \sum_{1\leq i\leq p} h_{\lambda_i}$ avec $1 \leq p \leq 3$.
On rappelle que $2H_0 = \sum_{1\leq i\leq 4} h_{\lambda_i}$ et que pour tout i, j distincts et compris entre 1 et 4, il existe un élément du groupe de Weyl de Δ_0 qui permute les racines λ_i et λ_j donc les propriétés 3) et 4) sont automatiquement vérifiées puisque les préhomogènes sont absolument irréductibles et on a $p = -\widetilde{B}(h, H_0)$.
Il reste à vérifier que la quantité $l(h)$ est positive ce qui se fait à l'aide des décompositions données en 8.2.1 □

Remarques : 1) Lorsque le préhomogène est de type (G_2, α_2) déployé, on a $l(h) < 0$ pour tout h 1-simple distinct de $2H_0$ donc la mesure relativement invariante dont le support est inclus dans $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}'_1$ ne prend pas cette forme simple (cf. la distribution Σ_1 de [Sh 1]).

2) Lorsque les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites, on peut vérifier que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 & \mapsto & \mathbb{Q} \\ x & \to & \begin{cases} B(h, H_0), \ (x, h, y) \text{ étant un } sl_2\text{-triplet 1-adapté,} \\ 0 \text{ lorsque } x = 0, \end{cases} \end{array}$$

est semi-continue inférieurement.

De plus on peut montrer que pour tout $x_0 \in \mathfrak{g}_1$ on a :

$$\overline{G.x_0} = \{0\} \cup G.x_0 \cup_{u\in\mathfrak{I}} G.u \ , \ \overline{H.x_0} = \{0\} \cup H.x_0 \cup_{u\in\mathfrak{I}'} H.u \ ,$$

avec $\mathfrak{I} = \{u \in \mathfrak{g}_1 \mid$ pour lesquels il existe 2 sl_2-triplets 1-adaptés qui commutent (u,h,v) et (u',h',v') tels que $u+u' \in G.x_0\}$ et pour $\mathfrak{I}'$ on a la même définition mais avec $u+u'$ et x_0 dans la même orbite de H.
Dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, on peut vérifier classiquement (cf.théorème 2.3 de [Ru 1]) que les mesures ν_x, x décrivant un ensemble de représentants des orbites de H dans $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1'$ est une base des distributions H- invariantes de support inclus dans $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_1'$ lorsqu'on pose $\nu_0(f) = f(0)$.

3) Soit $G' = \begin{cases} \{g \in G \mid \chi(g) \in f(E)^*\} \text{ dans le cas commutatif de type I} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{ cf. remarque §6.1.6) pour la définition}), \\ G \quad \text{dans tous las autres cas,} \end{cases}$

alors $H.x_0 = G'.x_0$ (th.4.3.2 et remarque 2) du th.4.2.3 de [Mu 3] et §6.1.2 pour le type III commutatif) donc les mesures ν_{x_0} et $\nu^*_{x_0}$ sont relativement invariantes par G' de caractère associé respectivement $|\chi|^\alpha$ et $|\chi|^{-\alpha}$ avec $\alpha = -\widetilde{B}(h,H_0)\frac{\overline{d}}{2}$ dans le cas commutatif et
$\alpha = -\widetilde{B}(h,H_0)\frac{d}{2} + \begin{cases} 1 \text{ lorsque } \widetilde{B}(h,H_0) = -3, \\ \frac{1}{2} \text{ sinon} \end{cases}$.

2 Une application aux mesures singulières dans le cas commutatif avec $\overline{d}$ pair

On reprend toutes les notations du §6 et on donne la définition suivante de rang :

Définition *Soit (x,h,y) un sl_2-triplet 1-adapté, on appelle "rang de x ", "rang de h "et "rang de y " la quantité* $r(h) = -\dfrac{\widetilde{B}(h,H_0)}{d_1}$.
On pose $r(0) = 0$.

Soit (x_0,h,y_0) un sl_2-triplet 1-adapté associé à une orbite de rang p avec $1 \le p \le n-1$, alors on a (à l'action de G près) :

$$2H_0 = \sum_{1\le i\le n} h_{\lambda_i} \ , \ 2H_0 - h = \sum_{i=1}^{n-p} h_i \ \ , \ h = \sum_{i=n-p+1}^{n} h_i \ ,$$

la proposition 1 permet d'écrire les mesures sur les orbites singulières de la manière suivante :

$$\forall f \in S(\mathfrak{g}_1) \quad \nu_{x_0}(f) = Z_O^{(p)}(T_f^h(\ .+0), \frac{\overline{d}}{2} - 1)$$

$$\forall f \in S(\mathfrak{g}_{-1}) \quad \nu^*_{y_0}(f) = Z_{O^*}^{*(n-p)}(T_f^{*(2H_0-h)}(0+\ .), \frac{\overline{d}}{2} - 1)$$

où T_f^h désigne la transformation introduite dans le §4.3 sur $S(\mathfrak{g}_1)$ pour le couple d'éléments 1-simples : $(h, 2H_0 - h)$, et $T^{*(2H_0-h)}$ est la transformation introduite dans le §4.3 sur $S(\mathfrak{g}_{-1})$ pour le couple d'éléments 1-simples : $(2H_0 - h, h)$

$Z^{(p)}$ (resp. $Z^{*(n-p)}$) étant les fonctions Zéta du préhomogène $(H_h, E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1)$ (resp.$(H_h, E_{-2}(h)\cap \mathfrak{g}_{-1})$), $O = H_h.x_0$ et $O^* = H_h.y_0$, les normalisations des mesures étant choisies en concordance avec le §4.
Le théorème 4.3.5 et les théorèmes 6.2.1 et 6.2.2 permettent d'établir une généralisation du lemme 4.2 de [Sa-Sh] lorsque $\frac{\overline{d}}{2} \geq 0$.

Proposition 2 *On suppose $\overline{d}$ pair.*
Soit f une fonction de Schwartz de support inclus dans $\mathfrak{g}_1' = \{x \in \mathfrak{g}_1 \quad F(x) \neq 0\}$ alors :

$$\nu_{y_0}^*(\hat{f}) = K.C_p\tilde{\omega}_{\delta^{n-p+1}}(F_h^*(y_0)) \int_{\mathfrak{g}_1} f(x)\tilde{\omega}_{\delta^p}(F(x))|F(x)|^{-\frac{\overline{d}}{2}pd_1}dx \quad \textit{avec}$$

$$C_p = \gamma(f)^{np+\frac{p(p-1)}{2}} \prod_{j=0}^{p-1} b(\tilde{\omega}_{\delta^{j+1}}|\ |^{\frac{\overline{d}}{2}(1+jd_1)})$$

$b(\pi)$ étant défini par

a) Lorsque le rang sépare les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1$ (alors $\delta = 1$) ou bien lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{P}$-adique ou bien lorsque $n = 2$:

$$b(\omega|\ |^s) = a^{(1)}(\omega|\ |^s) \quad \textit{(def.th.6.2.1)}$$

b) Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et f est anisotrope ($\delta = (-1)^{d/2}$, $\gamma(f) = (\sqrt{-1})^{d/2}$) :

$$b(\tilde{\omega}_{\pm 1}|\ |s) = \rho(|\ |^s; -1) = (\frac{\sqrt{-1}}{2\pi})^s.\ \Gamma(s)$$

K étant la constante définie par

i) Lorsque le rang sépare les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1$: K=1

ii) Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et f est anisotrope :

$$K = 2^{\frac{1+(-1)^n}{2}} C_p^r$$

r désignant le nombre de composantes positives d'un représentant de $H_h.y_0 \cap \oplus_{n-p+1\leq j\leq n}\mathfrak{g}^{-\lambda_j}$.

iii) Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps p-adique et f est anisotrope (cas $d = \overline{d} = 2$) on a

$$K = \begin{cases} 1 \textit{ lorsque } n \textit{ est pair et } p \textit{ impair} \\ \frac{1}{2} \textit{ sinon.} \end{cases}$$

Démonstration: 1) Soit f une fonction de Schwartz de support inclus dans $\mathfrak{g}_1' = \{x \in \mathfrak{g}_1 \quad F(x) \neq 0\}$, montrons que :

$$\nu_{y_0}^*(\hat{f}) = \sum_{\{O \textit{ orbites de } G' \textit{ dans } \mathfrak{g}_1'\}} a_O \int_O f(x) \mid F(x) \mid^{-\frac{\overline{d}}{2}pk} dx \quad \text{avec}$$

$G' = \{g \in G \mid \chi(g) \in f(E)^*\}$ et

$$a_O = a_{H_h.y_0,O'}(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}}; \frac{\overline{d}}{2} - 1)\gamma(f)^{p(n-p)}(\delta^p, F(x)).(\delta^n, F_h(x)),$$

x étant un élément de $O \cap \oplus_{1\leq i\leq n}\mathfrak{g}^{\lambda_i}$, O' étant une orbite de H_h dans $E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1$ contenant la projection de x sur $E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1$.

Soit f_g la fonction définie par $f_g(x) = f(gx)$, comme :

$$\nu^*_{y_0}(\hat{f_g}) = \nu^*_{y_0}(\hat{f_g}) \mid \chi(g) \mid^{-N} = \nu^*_{y_0}(\hat{f}) \mid \chi(g) \mid^{-N+\frac{\overline{d}}{2}pd_1} \text{ avec } N = \frac{\dim(\mathfrak{g}_1)}{\text{degré}(F)} = \frac{\overline{d}}{2}(nd_1 - 1) + 1,$$

si f est une fonction à support dans l'orbite ouverte O de G' dans $\mathfrak{g}_1$, on a pour une constante convenable :

$$\nu^*_{y_0}(\hat{f}) = a_O \int_O f(x) \mid F(x) \mid^{-\frac{\overline{d}}{2}pd_1} dx$$

Il suffit de calculer la constante a_O. Or par définition de $\nu^*_{y_0}$ et par le 2) du théorème 4.3.5 on a pour $z \in E_{-2}(h)\cap\mathfrak{g}_{-1}$:

$$\nu^*_{y_0}(\hat{f}) = \int_{H_h.y_0} \mid F^*_h(z) \mid^{\frac{\overline{d}}{2}-1} [\int_{E_0(h)\cap\mathfrak{g}_1} \gamma(x,z)\mathfrak{F}_2(T_f^{(2H_0-h)}(x+\ ))(z)dx] \ \ dz$$

et :

$$\gamma(x,z) = \gamma(f)^{p(n-p)}(\delta^p, F_{2H_0-h}(x))(\delta^{n-p}, F^*_h(z))$$

(lemme 6.1.10 car $\overline{d}$ est pair).
Pour simplifier les calculs, prenons f à support dans un ouvert O_u, $u = (u_1, ..., u_n) \in (\mathbb{F}^*/\mathbb{F}^{*2})^n$, tel que $O_u \subset O$; comme on a supposé $\overline{d} \geq 2$, on peut appliquer le théorème de Fubini ainsi :

$$\nu^*_{y_0}(\hat{f}) = \int_{E_0(h)\cap\mathfrak{g}_1} [\int_{H_h.y_0} \gamma(x,z) \mid F^*_h(z) \mid^{\frac{\overline{d}}{2}-1} \mathfrak{F}_2(T_f^{(2H_0-h)}(x+\ ))(z)dz] \ \ dx$$

$$= \gamma(f)^{p(n-p)}.\int_{E_0(h)\cap\mathfrak{g}_1} \tilde{\omega}_{\delta^p}(F_{2H_0-h}(x)).\left(\int_{H_h.y_0} \mid F^*_h(z) \mid^{\frac{\overline{d}}{2}-1} \tilde{\omega}_{\delta^{n-p}}(F^*_h(z))\mathfrak{F}_2(T_f^{(2H_0-h)}((x+\ ))(z)dz\right)dx.$$

On applique ensuite l'équation fonctionnelle au préhomogène $(H_h, E_{-2}(h)\cap\mathfrak{g}_{-1})$ avec les sl_2-triplets $h_{p+1}, ..., h_n$ ce qui donne :

$$\nu^*_{y_0}(\hat{f}) = \gamma(f)^{p(n-p)} \sum_{O'} a_{H_h.y_0,O'}(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}}; \frac{\overline{d}}{2} - 1).$$

$$\int_{E_0(h)\cap\mathfrak{g}_1}\int_{O'} T_f^{(2H_0-h)}(x,y)\tilde{\omega}_{\delta^p}(F_{2H_0-h}(x))\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}}(F_h(y)) \mid F_h(y) \mid^{-\frac{\overline{d}}{2}pd_1} dxdy.$$

En raison du support choisi pour f, cette somme se simplifie et donne :

$$\nu^*_{y_0}(\hat{f}) = a_O \int_{O_u} f(x) \mid F(x) \mid^{-\frac{\overline{d}}{2}pd_1} dx \text{ avec}$$

$$a_O = \gamma(f)^{p(n-p)}.\ \tilde{\omega}_{\delta^p}(\prod_{1\leq i\leq n} u_i).\ \tilde{\omega}_{\delta^n}(u_{n-p+1}...u_n).a_{H_h.y_0,O'}(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}}; \frac{\overline{d}}{2} - 1),$$

O' étant l'orbite de H_h dans $E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1$ contenant $O_{u"}$, avec $u" = (u_{n-p+1}, ..., u_n)$, d'où le résultat.

2) Il ne reste plus qu'à évaluer le coefficient $a_{H_h.y_0,O'}(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}};\frac{\overline{d}}{2}-1)$ ce qui conduit à des résultats simples en raison de la valeur très particulière de $\frac{\overline{d}}{2}-1$.
a) Dans le cas transitif pour G, alors le rang sépare les orbites de G dans $\mathfrak{g}_1$, ce qui correspond aux types II avec $e=0$, III réel, III A_n en $\mathfrak{p}$-adique et I ($d=4$ en $\mathfrak{p}$-adique), $G=G'$ et H_h a également une seule orbite ouverte dans $E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1$, (resp. dans $E_{-2}(h)\cap\mathfrak{g}_{-1}$) on applique alors le théorème 6.2.1. Notons que dans ce cas $\gamma=\pm 1$ et $\delta=1$ (1) du lemme 6.1.10).

b) Il reste le cas de type I et II avec $e>0$ (alors $d_1=1$ et $n=2$).

Notons que pour :
i) n pair, on a $G=G'$ et les orbites de H_h dans $E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1$ (resp.dans $E_{-2}(h)\cap\mathfrak{g}_{-1}$) sont celles du préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0-h)_0,\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0-h)_1)$, ce qui termine le cas II car alors H_h a une seule orbite ouverte dans $E_2(h)\cap\mathfrak{g}_1$, (resp. dans $E_{-2}(h)\cap\mathfrak{g}_{-1}$) donc :

$$a_{H_h.y_0,O'}(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}};\frac{\overline{d}}{2}-1)=\rho'(\tilde{\omega}_\delta|\ |^{\frac{\overline{d}}{2}}) \text{ d'où } a_O=\gamma(f).\ \tilde{\omega}_\delta(u_1u_2).\rho'(\tilde{\omega}_\delta|\ |^{\frac{\overline{d}}{2}}).$$

ii) n impair, on a $G'\neq G$, $\sum_{1\leq i\leq n}a_ix_i$ et $\sum_{1\leq i\leq n}b_ix_i$ sont dans la même orbite de G' si et seulement si les formes quadratiques $f^a=\oplus_{1\leq i\leq n}a_if$ et $f^b=\oplus_{1\leq i\leq n}b_if$ sont équivalentes ainsi que l'analogue pour le préhomogène $(\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0-h)_0,\mathfrak{U}(\mathbb{F}(2H_0-h)_1)$.

Il reste deux situations possibles :

α) Le cas $\mathfrak{p}$-adique restant qui correspond à $d=\overline{d}=2$ et $\delta\neq 1$ (f est anisotrope).

Lorsque n est pair et p est impair, il y a également une seule orbite ouverte de H_h dans $\mathfrak{U}(\mathbb{F}h')_{\pm 1}$ et $a_{H_h.y_0,O'}(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}};0)=\gamma(f)^{p(n-p)+\frac{p(p-1)}{2}}\prod_{1\leq j\leq p}\rho'(\tilde{\omega}_{\delta^j}|\ |^j)$ (2) du th.6.2.2).
Dans les cas restants :

$$\begin{aligned}
a_{\epsilon',\epsilon}(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}}) &= (\epsilon'.\epsilon)^{n-p}a_{\epsilon',\epsilon}(Id)\\
&= \tfrac{1}{2}\gamma(f)^{\frac{p(p-1)}{2}}(\epsilon'.\epsilon)^{n-p}\ .\ \epsilon^{p-1}\Big(\prod_{1\leq j\leq p}\rho'(\tilde{\omega}_{\delta^{j-1}}|\ |^j)+\epsilon'.\epsilon\prod_{1\leq j\leq p}\rho'(\tilde{\omega}_{\delta^j}|\ |^j)\Big)\\
&= \tfrac{1}{2}\gamma(f)^{\frac{p(p-1)}{2}}(\epsilon')^{n-p+1}.\epsilon^n\prod_{1\leq j\leq p}\rho'(\tilde{\omega}_{\delta^j}|\ |^j),
\end{aligned}$$

puisque $\rho'(|\ |)=0$ (cf. §6.2.2, remarque), d'où en remplaçant $\epsilon=\tilde{\omega}_\delta(u_{n-p+1}...u_n)$ et $\epsilon'=(\delta,F_h^*(y_0))$ on a :

$$a_O=\frac{1}{2}\gamma(f)^{p(n-p)+\frac{p(p-1)}{2}}\tilde{\omega}_{\delta^p}(F(x))\tilde{\omega}_{\delta^{n-p+1}}(F_h^*(y_0))\prod_{1\leq j\leq p}\rho'(\tilde{\omega}_{\delta^j}|\ |^j) \text{ pour } x\in O_u.$$

β) Le cas réel alors f est définie positive, $\delta=(-1)^{d/2}$ et $\gamma(f)=(\sqrt{-1})^{d/2}$.
Par le 1) du théorème 6.2.2, on doit évaluer la quantité $a_O=\gamma(f)^{p(n-p)+\frac{p(p-1)}{2}}\tilde{\omega}_{\delta^p}(\prod_{1\leq i\leq n}u_i).b$ avec :

$$b=\sum_{\{w\in\{-1,1\}^p\ |\ O_w^*\subset H_h.y_0\}}(\delta,\prod_{1\leq j\leq p}u_{n-p+j}^{n-p+j}\ .\ w_{n-p+j}^{j-1})\prod_{1\leq j\leq p}\rho'(\tilde{\omega}_{\delta^{n-p}}|\ |^{j\frac{d}{2}};-u_{n-p+j}w_{n-p+j}).$$

Or pour $s \in \mathbb{C}$, $\rho'(\tilde{\omega}_{\pm 1}|\ |^s; x) = \tilde{\omega}_{\pm 1}(-x)\rho(|\ |^s; x)$ (cf.formule donnée en 3) de la remarque 3.6.6) donc :

$$b = (\delta^{n-p+1}, F_h^*(y_0)) \sum_{\{w \in \{-1,1\}^p \ |\ O_w^* \subset H_h.y_0\}} \prod_{1 \leq j \leq p} ((-1)^{j\frac{d}{2}}, u_{n-p+j}.\, w_{n-p+j})\ \rho(|\ |^{j\frac{d}{2}}; -u_{n-p+j}w_{n-p+j}),$$

De plus pour $n \in \mathbb{N}^*$, il est immédiat que $\rho(|\ |^n; x) = ((-1)^n, -x)\rho(|\ |^n; -1)$ (vérification sur la formule explicite) d'où (on rappelle que d est pair) :

$$b = (\delta^{n-p+1}, F_h^*(y_0)) \prod_{1 \leq j \leq p} \rho(|\ |^{j\frac{d}{2}}; -1)|\{w \in \{-1,1\}^p \ |\ O_w^* \subset H_h.y_0\}|.$$

Soit $(p-r, r), 0 \leq r \leq p$, la signature de la forme quadratique associée à un représentant de l'orbite de y_0 alors :

• si n est impair, l'orbite de $H_h.y_0$ est caractérisée par la signature donc $\{w \in \{-1,1\}^p \mid O_w^* \subset H_h.y_0\} = \{w \in \{-1,1\}^p$ ayant r coordonnées -1 et $p-r$ coordonnées $1\}$ donc $|\{w \in \{-1,1\}^p \mid O_w^* \subset H_h.y_0\}| = C_p^r$.

• si n est pair, H_h contient l'homothétie de rapport -1 donc l'orbite de $H_h.y_0$ est caractérisée par la signature $(p-r, r)$ ou bien $(r, p-r)$ donc $|\{w \in \{-1,1\}^p \mid O_w^* \subset H_h.y_0\}| = 2C_p^r$.
□

Remarques :
Lorsque le rang sépare les orbites de G dans $\mathfrak{g}_{\pm 1}$, on convient de poser pour $1 \leq p \leq n-1$: $\nu_p := \nu_x$ pour $x \in \mathfrak{g}_1$ de rang p et $\nu_p^* := \nu_y^*$ pour $y \in \mathfrak{g}_{-1}$ de rang p.

1) Lorsque $\overline{d} = d$ et $f(E)^* = \mathbb{F}^*$ on a $C_p = \prod_{j=1}^p \rho(|\ |^{\frac{jd}{2}})$ ce qui donne :

$$C_p = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } d = 2, \\ \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{p} \left(\frac{1 - q^{\frac{d}{2}j-1}}{1 - q^{-\frac{d}{2}j}}\right) \text{ dans le cas } \mathfrak{p}-\text{adique avec } d = 4 \text{ ou } 8, \\ \\ 2^p(-1)^{\frac{d}{8}p(p+1)}(2\pi)^{-\frac{d}{4}p(p+1)}.\prod_{j=1}^p \Gamma(j.\frac{d}{2}) \text{ dans le cas réel avec } d = 4 \text{ ou } 8. \end{cases}$$

Lorsque $d = 2$, H.Rubenthaler a montré que $\widehat{\nu_p^*}$ est proportionnelle à ν_{n-p} ([Ru 1]).

2) Lorsque $\overline{d} = d$ et $f(E)^* \neq \mathbb{F}^*$ on a :
i) dans le cas $\mathfrak{P}-$adique :

$$KC_p = K.(\delta, (-1)^{p(p+1)/2}).\gamma(f)^{np+\frac{p(p-1)}{2}}.\prod_{j=1}^{[\frac{p}{2}]} \frac{1 - q^{2j-1}}{1 - q^{-2j}} \prod_{j=1}^{[\frac{p+1}{2}]} \rho(\tilde{\omega}_\delta|\ |^{2j-1})\ .$$

ii) dans le cas réel lorsque f est définie positive :

$$KC_p = 2^{1+(-1)^n}.(2\pi)^{-\frac{d}{4}p(p+1)}.(\sqrt{-1})^{\frac{d}{2}np}.(\prod_{j=1}^{p} \Gamma(j.\frac{d}{2})\ ).C_p^r$$

lorsque $d = 2$, au coefficient $2^{1+(-1)^n}.2^{np-\frac{p(p+1)}{2}}$ près, on retrouve le résultat du lemme 4.2 de [Sa-Sh].

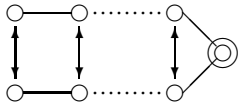
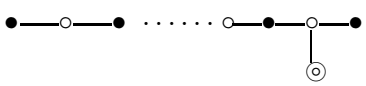
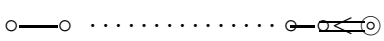
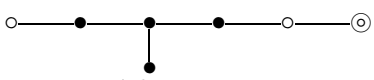
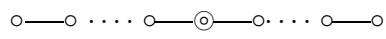
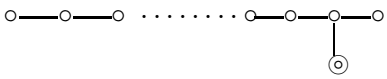
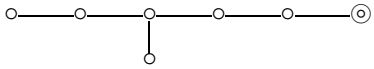
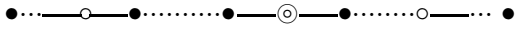
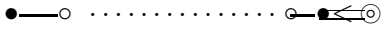
3) Lorsque $\mathbb{F}$ est un corps $\mathfrak{p}$-adique, on peut montrer que $\widehat{\nu_p^*}$ est proportionnelle à $Z(\ ;|\ |^{-\frac{d}{2}p})$ pour $p = 1, ..., n-1$ lorsque $d = 4$ ou $d = 8$.

4) Lorsque $\overline{d} = 2$ et $d_1 \geq 2$, on a encore $C_p = 0$ dans le cas réel (il apparait le coefficient $\sin(\pi\overline{d}) = 0$) et dans le cas $\mathfrak{p}$-adique puisqu'il apparait le facteur $a^{(1)}(|\ |) = (-1)^{d_1-1}\prod_{1\leq j\leq d_1}\rho(|\ |^j) = 0$.
La proportionalité entre $\widehat{\nu_p^*}$ et ν_{n-p} est encore vraie dans le cas réel (corollaire à la proposition IV-15 de [Ra]).

Tableau 1

Liste des préhomogènes de type parabolique absolument irréductibles, réguliers et commutatifs à laquelle il convient d'ajouter les cas BI(n,1) et DI(n,1) du tableau 2.

Le numéro indiqué entre parenthèse est celui qui lui correspond dans la classification de Sato-Kimura ([Sa-Ki],§7, table I p.144).

(Δ, λ_0)	Diagramme de Satake de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{F}$	$\overline{d}$	d_1	n	e	Type
(C_n, α_n)		2	1	n	2	I
(C_n, α_n)		4	1	n	4	I
(C_n, α_n) (2)		1	1	n	1	I
(C_3, α_3)	 cas réel uniquement	8	1	3	8	I
(A_{2n-1}, α_n) $\subset$ (1)		2	1	n	0	II
(D_{2n}, α_{2n}) (3)		4	1	n	0	II
(E_7, α_7) (27)		8	1	3	0	II
(A_{2n-1}, α_n)	 $(\overline{\Delta}, \alpha_0) = (A_{2nm-1}, \alpha_{nm})$ et $m = 2$ dans le cas réel	2	m	n	0	III
(C_n, α_n)		1	2	n	4	III

$d = \overline{d}.d_1^2$ et $d_n = nd_1$

Tableau 2

Liste des préhomogènes de type parabolique absolument irréductibles, réguliers de type classique de la section 7.
Le numéro indiqué entre parenthèse est celui qui lui correspond dans la classification de Sato-Kimura ([Sa-Ki],§7, table I p.144).

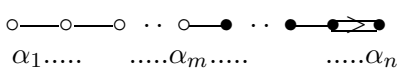
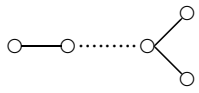
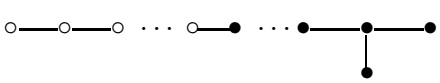
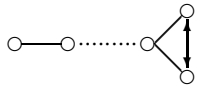
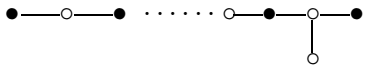
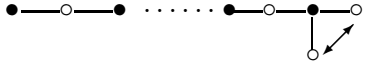
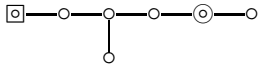
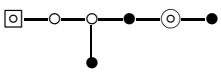
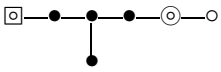
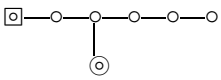
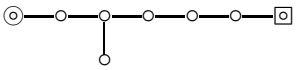
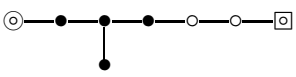
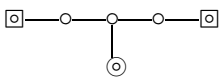
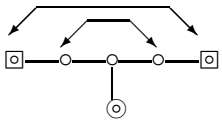
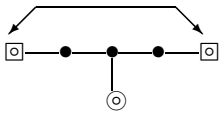
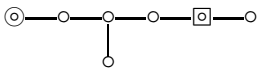
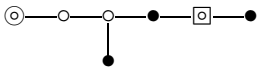
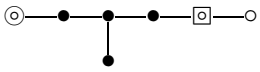
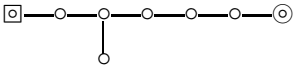
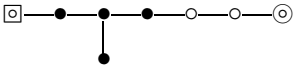
Type	$(\overline{\Delta}, \alpha_0)$	(Δ, λ_0)	Diagramme de Satake de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{F}$	Conditions
BI(n,k)	(B_n, α_k) (15)	(B_m, λ_k)		$k \leq m \leq n$ $1 \leq 3k \leq 2n-1$
DI(n,k)	(D_n, α_k) (15)	(D_n, α_k)		$1 \leq 3k \leq 2n-2$
		(B_m, λ_k)		$k \leq m \leq n$
		(B_{n-1}, λ_k)		$k \leq n-2$
CI	(C_n, α_{2p}) (13)	(C_n, α_{2p})		$1 \leq 3p \leq n-1$
CII	(C_n, α_{2p})	$(C_{\frac{n}{2}}, \alpha_p)$		$1 \leq 3p \leq n-1$
		(BC_m, λ_p)		$p \leq m$ cas réel
DIII	(D_n, α_{2p})	(C_m, λ_p)		n pair
		(BC_m, λ_p)		n impair
		$m = [\frac{n}{2}]$	$\mathbb{R} : n - 3p \geq 4$ $\mathfrak{p}$-adique : $n - 3p \geq 2$ et $n - p$ impair	

Tableau 3

Liste des préhomogènes de type parabolique absolument irréductibles, réguliers de type exceptionnels, i.e.$\overline{\mathfrak{g}}$ est de type exceptionnel, de la section 8 et les 2 exemples réels du §5.3.2. Le numéro indiqué entre parenthèse est celui qui lui correspond dans la classification de Sato-Kimura ([Sa-Ki],§7, table I p.144).

$\Sigma_P = \{\mu \in \Sigma_0 \mid \mu/\mathfrak{t} \neq 0\}$, le "degré" désigne le degré de l'invariant relatif fondamental.

$(\overline{\Delta}, \alpha_0)$	(Δ, λ_0)	Diagramme de Satake $\circledcirc \leftrightarrow \alpha_0$, $\boxdot \leftrightarrow \Sigma_P$	Conditions	type de $\mathfrak{g}$	$\dim(\mathfrak{g}_2)$	degré	Σ_P
(E_7, α_6)	(E_7, α_6) (20)				10	4	α_1
(E_7, α_6)	(F_4, λ_4)			EVI	10	4	λ_1
(E_7, α_6)	(C_3, λ_2)		$\mathbb{F} = \mathbb{R}$	EVII	10	4	λ_1
(E_7, α_2)	(E_7, α_2) (6)				7	7	α_1
(E_8, α_1)	(E_8, α_1) (24)				14	8	α_8
(E_8, α_1)	(F_4, λ_4)		$\mathbb{F} = \mathbb{R}$	EIX	14	8	λ_1

$(\overline{\Delta}, \alpha_0)$	(Δ, λ_0)	Diagramme de Satake $\circledcirc \leftrightarrow \alpha_0$, $\boxdot \leftrightarrow \Sigma_P$	Conditions	type de $\mathfrak{g}$	$\dim(\mathfrak{g}_2)$	degré	Σ_P
(F_4, α_1)	(F_4, α_1) (14)				1 (d=1)	4	α_4
(E_6, α_2)	(E_6, α_2) (5)				1 (d=2)	4	α_1, α_6
(E_6, α_2)	(F_4, λ_1)			EII	1 (d=2)	4	λ_4
(E_6, α_2)	(BC_2, λ_1)		$\mathbb{F} = \mathbb{R}$	EIII	1 (§5.3)	4	λ_2
(E_7, α_1)	(E_7, α_1) (23)				1 (d=4)	4	α_6
(E_7, α_1)	(F_4, λ_1)			EVI	1(d=4)	4	λ_4
(E_7, α_1)	(C_3, λ_1)		$\mathbb{F} = \mathbb{R}$	EVII	1 (§5.3)	4	λ_2
(E_8, α_8)	(E_8, α_8) (29)				1 (d=8)	4	α_1
(E_8, α_8)	(F_4, λ_1)		$\mathbb{F} = \mathbb{R}$	EIX	1 (d=8)	4	λ_4

Références

[Bo-Ru 1] N.BOPP–R.RUBENTHALER(1993). — *Fonction zêta associée à la série principale sphérique de certains espaces symétriques réels*, Ann. Sci. École Norm. Sup.26, 701-745.

[Bo-Ru 2] N.BOPP–R.RUBENTHALER(2005). — *Local Zeta Functions Attached to the Minimal Spherical Series for a Class of Symmetric Spaces*, Memoirs A.M.S.,Vol **174** , n°**821**.

[B-T] A.BOREL–J.TITS(1965). — *Groupes réductifs*, Publ.Math.I.H.E.S.27, 55-150.

[Bou 1] N.BOURBAKI (1968). — Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6,*Hermann, Paris.*

[Bou 2] N.BOURBAKI (1975). — Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8,*Hermann, Paris.*

[Bou 3] N.BOURBAKI (1963). — Intégration, Chapitres 7 et 8, *Hermann, Paris.*

[Bou 4] N.BOURBAKI (1974). — Topologie générale,Chapitres 5 à 10, *Hermann, Paris.*

[Ch] C.CHEVALLEY (1968). —Théorie des groupes de Lie, *Hermann, Paris.*

[Cl] J-L.CLERC(2002). —*Zeta distributions associated to a representation of a Jordan algebra*, Math.Z., Vol.**239**, 263-276.

[Da-Wr] B.DATSKOVSKY – D.WRIGHT (1986) —*The adelic zeta function associated to the space of binary cubic forms II : local theory*,J.Reine Angew Math. **367**, 111-114.

[Fa-Ko] J.FARAUT – A.KORANYI (1994). —Analysis on Symmetric Cones,*Oxford Sciences Publ.*

[Go-Ja] R.GODEMENT – H.JACQUET (1972). —-Zeta functions of simple algebras, *Springer Notes in Math.*, n°**260**.

[Hi-Ro] L.HILLE–G.ROHRLE (1999). —*A classification of parabolic subgroups of classical groups with a finite number of orbits on the unipotent radical*,Transform. Groups 4,n°1,35-52.

[H 1] Y.HIRONAKA (1998). —*Local zeta functions on Hermitian forms and its application to local densities*, J.Number Theory **71**, 40-64.

[H 2] Y.HIRONAKA (2006). — *Spherical functions on p-adic homogeneous spaces*, Number Theory , *Dev.Math.* **15**, *Springer, New-York*, 81-95.

[IG 1] J.I.IGUSA (1972). —*On the arithmetic of Pfaffians*, Nagoya.Math. **47**,169-198.

[Ig 2] J.I.IGUSA (1977). —*Exponential sums associated with a Freudenthal quartic*, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo Sect.IA Math. **24**, 231-245.

[Ig 3] J.I.IGUSA (1978). — *Lectures on forms of higher degree*, Tata Institute of fundamental research **59**,*Bombay.*

[Ig 4] J.I.IGUSA (1984). —*Some results on p- adic complex powers*, Amer.J.Math. **106**,1013-1032.

[Ig 5] J.I.IGUSA (1986). — *On functional equations of complex powers*, Invent.Math. **85**,1-29.

[Ig 6] J.I.IGUSA (1987). —*Zeta distributions associated with some invariants*, Amer.J.Math. **109**,1-34.

[Ig 7] J.I.IGUSA (1988). — *On the arithmetic of a singular invariant*, Amer.J.Math. **110**,197-233.

[Ig 8] J.I.IGUSA (1988). —*b-functions and p-adic integrals*, Algebraic Analysis, Vol.1, 231-241, *Academic Press.*

[Ig 9] J.I.IGUSA (1989). —*Universal p-adic zeta functions and their functional equations*, Amer.J.Math. **111**, 671-716.

[Ig 10] J.I.IGUSA (1992). —*Local zeta functions of certain prehomogeneous vector spaces*, Amer.J.Math.**114**, 251-296.

[Ig 11] J.I.IGUSA (1994). —*On local zeta functions*, Amer.Math.Soc.Transl.Vol.**172**, 1-20.

[Ig 12] J.I.IGUSA (2000). —*An introduction to the theory of local zeta functions*, AMS, **14**, *International Press.*

[K-K] T.KIMURA–T.KOGISO (1992) —*On Adelic Zeta Functions of Prehomogeneous Vector Spaces with Finitely Many Adelic Open Orbits*, Advanced Stud. in Pure Math., vol.**21**, 21-31.

[K-M] T.KIMURA–M.MURO (1979).—*On some series of regular irreducible prehomogeneous vector spaces*, Proc.Japan.Acad.Ser.A Math.Sci.**55**, 384-389.

[K-S-Z] T.KIMURA–F.SATO–X.W.ZHU (1990). —*On the poles of p-adic complex powers and the b-functions of prehomogeneous vector spaces*, Amer.J. of Math.**112**, 423-437.

[Mars] J.G.M.MARS (1966) .— *Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels*, Bull.Soc.math. France **94**, 97-140.

[Mo] A.L.MORTAJINE (1999) .—$\mathbb{Z}-$*Graduations de type parabolique et polynomes harmoniques*, Nagoya Math. J. Vol.**153**, 31-51.

[Mu 1] I.MULLER (1986).— *Décomposition orbitale des espaces préhomogènes réguliers de type parabolique commutatif et application*, C.R.A.S. Paris Ser.I Math. **312**, 319-322.

[Mu 2] I.MULLER (1997).—*Racines orthogonales et orbites d'algèbres de Lie semi-simple graduées*, Journal of Algebra, Vol.**193** ,41-74.

[Mu 3] I.MULLER (1998).—*Classification d'orbites pour une classe d'espaces préhomogènes*, Nagoya Math. J. Vol.**151**, 161-197.

[Mu 4] I.MULLER (2002).—*Racines orthogonales, formes quadratiques et orbites d'algèbres de Lie simples graduées*, Journal of Algebra, Vol.**250** ,288-334.

[Mu 5] I.MULLER (1998).—*An example of Adelic Zeta function associated to Prehomogeneous vector Spaces of Parabolic Type : Case* (F_4, α_1),R.I.MS.,Kokyuroku **1052**, 81-98.

[M-R-S] I.MULLER – H.RUBENTHALER – G.SCHIFFMANN (1986).—*Structure des espaces préhomogènes associés à certaines algèbres de Lie graduées*, Math.Ann. **274** , 95-123.

[Muro 1] M.MURO (1979).—*On the prehomogeneous vector spaces* $(GL(7), \Lambda_3)$ *and* $(Spin(14) \times GL(1)), (half - spin\ rep.) \times \Lambda_1$ *and the formulas of the Fourier transforms of the relative invariants*, preprint RIMS n°291.

[Muro 2] M.MURO (1980).—*Some prehomogeneous vector spaces with relative invariants of degree four and the formula of the Fourier transforms*, Proc.Japan.Acad.Ser.A Math.Sci.**56**, 70-74.

[Muro 3] M.MURO (1989).— *On zeta functions associated with the exceptional Lie group of type* E_6, Adv.Studies in pure Math. **15**, 429-463.

[O'M] O.T.O'MEARA (1973). — Introduction to Quadratic Forms, *Springer, New-York*.

[Ra] M.RAIS (1972). —*Distributions homogènes sur des espaces de matrices*, Bull.Soc.Math. France, Mémoire **30**.

[Ra-Sc] S.RALLIS – G.SCHIFFMANN (1975) . —*Distributions invariantes par le groupe othogonal*, Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Lecture Notes in Math. **497**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 494-642.

[Ro] M.ROBINSON (1996). —*The Igusa local function associated with the singular cases of the determinant and the Pfaffian*, Journal of number theory, n°**57**, 385-408.

[Ru 1] H.RUBENTHALER (1975). —*Distributions invariantes par* $Sl_n(k)$, Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Lecture Notes in Math. **497**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 383-493.

[Ru 2] H.RUBENTHALER (1982). —*Espaces préhomogènes de type parabolique*, Thèse D'Etat, Strasbourg.

[Ru 3] H.RUBENTHALER (1992). — Algèbres de Lie et Espaces préhomogènes, *Travaux en cours, Hermann,Paris.*

[R-S] H.RUBENTHALER – G.SCHIFFMANN (1987). —*Opérateurs différentiels de Shimura et espaces préhomogènes*, Invent.Math.,**90**, 409-442.

[Sai 1] H.SAITO (1997). —*Explicit Formula of Orbital p-adic Zeta Functions Associated to Symmetric and Hermitian Matrices*, Comment. Math.St.Pauli **46**, 175-216.

[Sai 2] H.SAITO (1999). —*Explicit form of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces*, Math.Ann. **315**, 587-615.

[Sai 3] H.SAITO (2003). — *Convergence of the zeta functions of prehomogeneous vector spaces*, Nagoya Math. J. **170**, 1-31.

[Sa-Ta] P.J.SALLY–M.H.TAIBLESON(1966). — *Special functions on locally compact fields*, Acta Math.**116**,279-309.

[Sa-Fa] I.SATAKE–J.FARAUT (1984). — *The functional equation of Zeta distributions associated with formally real Jordan algebras*, Tôhoku Math. Journal, vol **36**, n°**3**, 469-482.

[Sa 1] F.SATO (1982). —*Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I :functional equations*, Tohoku.Math.J. **34**,437-483.

[Sa 2] F.SATO (1983). — *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II : a convergence criterion*, Tohoku.Math.J. **35**, 77-99.

[Sa 3] F.SATO (1989). — *On functional equations of zeta distributions*, Automorphic forms and geometry of arithmetic varieties,Adv.Stud.Pure Math.**15**,*Academic Press,Boston*,

465-508.

[Sa 4] F.SATO (1998). — *Eisenstein series on weakly spherical homogeneous spaces of* $GL(n)$, Tohoku Math.J.(2) **50**, 23-69.

[Sa 5] F.SATO (2006). —*Functional equations of prehomogeneous zeta functions and intertwining operators*, J.Math.Soc.Japan, **58**, 995-1008.

[Sa 6] F.SATO (2007). —*Quadratic maps and non-prehomogeneous local functional equations*, Comment.Math.Univ.St.Pauli), **56**, 163-184.

[Sa] M.SATO (1990).—*Theory of prehomogeneous vector spaces, Notes by* T.SHINTANI *translated by* M.MURO, Nagoya. Math.J. **120**, 1-34.

[Sa-Ki] M.SATO – T.KIMURA (1977). —*A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math.J.**65**, 1-155.

[Sa-Sh] M.SATO – T.SHINTANI (1974).— *On Zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces*, Ann. of Math.**100**, 131-170.

[Sel] G.B.SELIGMAN (1976).— Rational methods in Lie algebras, *Dekker*.

[Serre] J-P. SERRE (1964).— Cohomologie Galoisienne, *Lecture Notes in Math.,Springer*.

[Sh 1] T.SHINTANI (1972). —*On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms*, J. of Math. Soc. Japan, **24**, 132-188.

[Sh 2] T.SHINTANI (1975). —*On Zeta functions associated with the vector space of quadratic forms*, J.Fac.Sci., Univ.Tokyo, **22** , 25-65.

[Ta] J.TATE (1967). —*Fourier Analysis in number field theory and Hecke's Zeta function*, in Algebraic Number Theory (J.Cassels and A.Frolich editors), *Academic Press, New-York*, 305-347.

[Ve] B.Ju. VEISFEILER (1964). — *Classification of semi-simple Lie algebras over a* $\mathfrak{P}-$*adic field*, Soviet. Math. Dokl.**5**,1206-1208.

[Vi] E.B.VINBERG (1975). —*On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras*, Soviet Math.Dokl. **16**, 1517-1520.

[Wa] G.WARNER (1972). —Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups, *Springer-Verlag, Berlin*.

[We] A.WEIL (1964). —*Sur certains groupes d'opérateurs unitaires* , Acta Math.**111**, 143-211.

[Wr] D.J.WRIGHT (1985) —*The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms I : Global theory*, Math.Ann. **270**, 503-534.