HAL open science

Fiabilité imprécise par les réseaux de fonctions de croyance

Christophe Simon, Philippe Weber, Jean-François Aubry

To cite this version:

Christophe Simon, Philippe Weber, Jean-François Aubry. Fiabilité imprécise par les réseaux de fonctions de croyance. 16e Congrès de Maîtrise des Risques et de Sûreté de Fonctionnement, Lambda Mu 16, Oct 2008, Avignon, France. pp.CDROM. hal-00329303

HAL Id: hal-00329303

https://hal.science/hal-00329303v1

Submitted on 16 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

FIABILITÉ IMPRÉCISE PAR LES RÉSEAUX DE FONCTIONS DE CROYANCE
IMPRECISE RELIABILITY BY EVIDENTIAL NETWORKS

SIMON Ch. et WEBER Ph.
CRAN, Nancy Université, CNRS
ESSTIN, 2 Rue Jean Lamour
54519 Vandœuvre

AUBRY J-F.
CRAN, Nancy Université, CNRS
ENSEM, 2 Av. de la Foret de Haye
54506 Vandœuvre

Résumé
Dans cet article, nous mettons en œuvre quelques éléments de la théorie de Dempster-Shafer dans un outil de réseaux bayésiens pour former ce que nous appelons un réseau de fonctions de croyance afin de traiter conjointement les problèmes d'incertitude et d'imprécision dans l'analyse de la fiabilité des systèmes. Sur un espace fini discret, le modèle proposé par Dempster et Shafer peut-être interprété comme une généralisation de la théorie des probabilités où les probabilités sont assignées aux ensembles par opposition aux singletons mutuellement exclusifs. L'idée centrale du processus d'allocation de masses de croyance associé consiste à affecter une mesure dans [0,1] aux ensembles et peut être directement lié aux taux de défaillance imprécis des composants. Une étude de cas est menée.

Summary
This article deals with the implementation of some elements of the Dempster-Shafer theory in a Bayesian network tool to develop our concept of evidential network whose goal is to jointly deal with imprecision and uncertainty in reliability analysis. On a discrete finite space, the Dempster-Shafer model can be interpreted as a generalization of the probability theory where probabilities are assigned to sets in opposition to mutually exclusive singletons. The main idea of the allocation process of beliefs consists to assign a measure in [0,1] to these sets and can be directly related to the imprecise failure rate of the components. A case study is undertaken.

Introduction

L'étude de la fiabilité des systèmes est une composante majeure de la maîtrise des processus en entreprise. De nombreuses méthodes d'analyse quantitative existent et sont parfaitement référencées. Chaque outil présente des intérêts en termes de pouvoir de modélisation et de capacité de formalisation des processus dysfonctionnels avec plus ou moins de simplicité et d'ergonomie. Les réseaux bayésiens constituent, à notre avis, un outil innovant pour l'étude des paramètres de sûreté de fonctionnement des systèmes. Ils permettent une approche graphique du fonctionnement et dysfonctionnement des systèmes étudiés et autorisent le calcul de la fiabilité ainsi que d'autres paramètres. Ils offrent une approche compacte, modulaire, instanciable [1] leur donnant un pouvoir d'analyse intéressant. En outre, certains auteurs ont démontré des équivalences avec des outils de référence comme les arbres de défaillance sous certaines hypothèses [2]. Ces différentes caractéristiques ont fait des réseaux bayésiens un outil d'actualité d'autant que son développement et ses applications sont importantes dans de nombreux domaines [3].

Dans les études de fiabilité des systèmes, les probabilités en présence sont souvent considérées comme précises et parfaitement déterminables. Il est également supposé que toute l'information sur le comportement de la fiabilité du système et de ses composants est disponible. Cette complétude suppose deux conditions essentielles [4] :

- Toutes les probabilités ou les distributions de probabilités sont parfaitement connues.
- Les composants du système sont indépendants, c'est-à-dire que toutes les variables aléatoires décrivant la fiabilité des composants sont indépendantes ou, à défaut, leur dépendance est connue avec précision.

Utkin [4] précise que la première condition est rarement remplie et préconise de traiter ce problème par les intervalles de probabilités [5]. Toutefois, il faut considérer que l'utilisation des probabilités imprécises sous forme d'intervalles n'est qu'une des multiples façons de traiter le problème d'imprécision dans la connaissance des probabilités. En effet, d'autres auteurs ont considéré le problème de précision à l'aide de densités de probabilités [6], d'enveloppes de probabilités [7], de probabilités imprécises [8], de nombres flous [9,10,11,12], de densité de possibilités [13] ou de fonctions de croyance [14]. A notre avis, il ne s'agit pas d'opposer ces différentes méthodes mais plutôt de bien choisir le cadre d'étude dans lequel elles ont les meilleurs atouts [15].

Lorsque la fiabilité des composants est calculée à partir de bases de données, le problème d'imprécision est effectivement crucial et peut être facilement appréhendé par une distribution de probabilités si le nombre de données est suffisant. Toutefois, le problème d'incohérence et d'incomplétude des données ne peut plus être vu comme un problème d'incertitude sur la valeur d'une probabilité mais comme un problème d'incertitude sur l'affectation des probabilités sur les hypothèses représentant l'état des composants. Il s'agit donc d'une incertitude dite épistémique. La théorie de l'évidence propose un formalisme intéressant et approprié afin de manipuler ce type d'incertitude.

La théorie de l'évidence, encore appelée la théorie des fonctions de croyance, est assez proche de la théorie des probabilités sur un certain nombre de points. En revanche, elle souffre d'un défaut majeur quant à son utilisation dans des contextes compliqués. En effet, la fonction d'allocation des masses de croyance élémentaires, qui peuvent être comparées aux probabilités élémentaires sur les sous ensembles des valeurs que peut prendre une variable aléatoire, nécessite d'affecter toutes les masses de croyance à chaque combinaison des états, 1 à 1, 2 à 2 etc. Dès lors que le nombre d'état est important, l'opération devient fastidieuse. Toutefois, cette opération peut-être singulièrement réduite dans le cas de l'analyse de la fiabilité.

L'objet de cet article est de proposer un réseau de fonctions de croyance pour l'étude de la fiabilité des systèmes s'appuyant sur les algorithmes d'inférence des réseaux bayésiens comme il a été proposé par Simon et Weber [17]. De nombreux travaux existent autour de la notion de réseaux crédeaux appliqués à l'analyse de la fiabilité ou d'autres problèmes de traitement des connaissances en tenant compte de l'incertitude épistémique. Shenoy *et al*. ont développé les 'Valuable Networks' [18]. Ce sont des outils puissants et parfaitement adaptés à la modélisation des connaissances. Par ailleurs, les équivalences avec les réseaux bayésiens sous certaines conditions ont été prouvées [19]. Smets [20] a également proposé un formalisme graphique semblable pour la manipulation de connaissances incertaines au sens épistémique. Cozman [21,22] propose une forme de réseaux crédeaux pour la modélisation des probabilités imprécises. Yaghlane [23] a proposé des réseaux évidentiels basé sur les arbres de jonctions binaires et les règles de combinaison de Dempster.

Pour montrer la manipulation de l'incertitude épistémique par une approche réseau, nous avons structuré notre article ainsi. Dans la première section, nous donnons les bases utiles de la théorie des fonctions de croyance. La deuxième section est dédiée à la formalisation

des réseaux de fonctions de croyance pour la manipulation des probabilités imprécises. La troisième section concerne l'évaluation de la fiabilité. La dernière section est consacrée à une étude de cas afin de montrer l'intérêt de notre approche.

Eléments de la théorie de l'évidence

La théorie des fonctions de croyance a été initiée par Dempster [24] avec ses travaux sur les bornes supérieures et inférieures d'une famille de distributions de probabilités puis renforcée par Shafer [25]. Sur un espace fini discret, le modèle proposé par Dempster et Shafer peut-être interprété comme une généralisation de la théorie des probabilités où les probabilités sont assignées aux ensembles par opposition aux singletons mutuellement exclusifs [26]. Lorsque les informations disponibles permettent l'affectation des mesures à des évènements uniques (*i.e.* connaissance spécifique), le modèle de Dempster-Shafer se confond avec la formulation traditionnelle des probabilités et il s'agit d'évidences dites bayésiennes [27]. La relation étroite entre ces deux modèles renforce l'intérêt de la théorie de Dempster-Shafer pour des applications initialement traitées par la théorie des probabilités.

Allocation de masses de croyance

L'idée centrale du processus d'allocation de masse de croyance est d'allouer une mesure entre 0 et 1 afin d'indiquer le degré de croyance sur un ensemble d'évènements ou d'hypothèses [25]. Cette mesure peut avoir une interprétation subjective ou objective [28]. Ici, nous traitons de données exprimées sous forme de mesure de probabilités connues avec imprécision. Si nous considérons un ensemble de q éléments mutuellement exclusifs et exhaustifs appelé le cadre de discernement symbolisé par :

$$\Omega = \{H_1, H_2, \ldots, H_q\} \qquad [1]$$

Ω définit l'espace de raisonnement où chaque proposition H_i peut supporter l'information provenant d'une ou plusieurs sources. Les sources d'information peuvent distribuer des masses sur les sous-ensembles du cadre de discernement :

$$A_i \in 2^{\Omega} : \{\varnothing, A_1 = \{H_1\}, \ldots, A_q = \{H_q\}, A_{q+1} = \{H_1, H_2\}, \ldots, A_{2^q-1} = \{H_1, \ldots, H_q\}\} \qquad [2]$$

Une source d'information assigne une masse de croyance uniquement sur les hypothèses ou combinaison d'hypothèses A_i de sous-ensembles de Ω pour lesquelles elle dispose d'une information directe, *i.e.* qu'elle n'attribue de masse de croyance à aucun sous-ensemble des A_i [29] :

$$0 \leq m(A_i) \leq 1 \qquad [3]$$

Ce processus appelé allocation de masses est représenté par une fonction m définie par :

$$m : 2^{\Omega} \rightarrow [0,1] \qquad [4]$$

tel que :

$$m(\varnothing) = 0 \qquad [5]$$

et

$$\sum_{A_i \in 2^{\Omega}} m(A_i) = 1$$

Chaque A_i supportant $m(A_i) > 0$ est appelé un élément focal. La contrainte indiquée sur $\varnothing$ par l'équation 5 n'est pas obligatoire. Elle suppose que toutes les hypothèses H_i sont connues c'est-à-dire que nous sommes dans le contexte d'un monde fermé. Le rôle dévolu à $\varnothing$ est de formaliser le fait que toutes les hypothèses ne soient pas connues. Dans ce cas, $m(\varnothing) \neq 0$ matérialisera cette considération [30].

Mesures de croyance et de plausibilité

A partir de la distribution des masses de croyance, les bornes supérieure et inférieure d'un intervalle de probabilités peuvent être définies. Cet intervalle contient la probabilité d'un ensemble d'hypothèses ou éléments focaux et, est borné par deux mesures non-additives appelées croyance (Bel) et plausibilité (Pls) [32].

La mesure de croyance $Bel(A_i)$ est la borne inférieure pour l'ensemble focal A_i . Elle est définie comme la somme de toutes les masses de croyance des sous-ensembles B contribuant à la réalisation de A_i tel que $B \subseteq A_i$. La borne supérieure $Pls(A_i)$ est

la somme de toutes les masses de croyance des sous-ensembles B tel que $B \cap A_i \neq \emptyset$. $Bel(A_i)$ et $Pls(A_i)$ sont définies par les équations suivantes :

$$Pls(A_i) = \sum_{B \mid A_i \cap B \neq \emptyset} m(B) \qquad [6]$$

$$Bel(A_i) = \sum_{B \mid B \subseteq A_i} m(B) \qquad [7]$$

Il en résulte la propriété d'encadrement définie par l'équation suivante :

$$Bel(A_i) \leq P(A_i) \leq Pls(A_i) \qquad [8]$$

Où $P(A_i)$ exprime la probabilité que A_i se réalise mais qui reste inconnue et peut prendre toute valeur dans $[Bel(A_i), Pls(A_i)]$. La propriété d'encadrement [8] est bien connue et a été énoncée dans les travaux de Shafer [25]. De nombreux auteurs l'ont utilisée pour mettre en relation l'intervalle formé par $[Bel(A_i), Pls(A_i)]$ et la distribution de masses de croyance [33].

Les mesures de plausibilité et de croyance ne sont pas duales car elles ne sont pas additives au sens de la théorie des probabilités $Bel(A_i) \neq Pls(A_i^c)$ où A_i^c est le complément de A_i par rapport à Ω. Toutefois, les relations ci-dessous peuvent être établies entre A_i et A_i^c :

$$Bel(A_i) = 1 - Pls(A_i^c) \qquad [9]$$

et

$$Pls(A_i) = 1 - Bel(A_i^c) \qquad [10]$$

La différence $(Bel(A_i) - Pls(A_i))$ décrit l'incertitude concernant l'hypothèse A_i représentée par l'intervalle $[Bel(A_i), Pls(A_i)]$ (cf. figure 1).

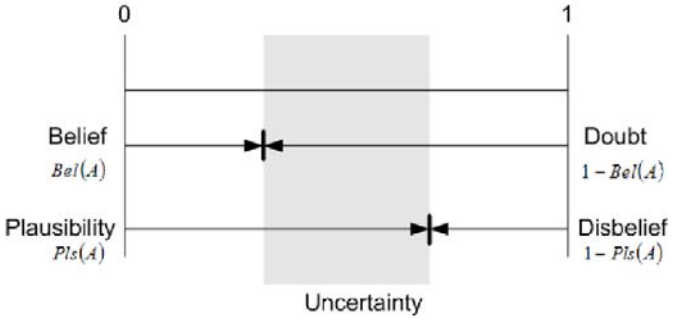

Figure 1 : Incertitude

A partir des mesures de plausibilité et de croyance, il est possible d'obtenir la distribution de masses de croyance par la relation suivante [34]:

$$m(A_i) = \sum_{B \mid B \subseteq A_i} (-1)^{|A_i| - |B|} Bel(B) \qquad [11]$$

où $|A_i|$ est le cardinal de l'ensemble A_i .

Intervalle de probabilités et distribution de masses de croyance

Ferson *et al.* [15] précisent que chaque cadre de discernement ou structure de Dempster-Shafer spécifie un intervalle de probabilités unique et que chaque intervalle spécifie une classe d'équivalence de structure de Dempster-Shafer [35]. Ferson [15] décrit la relation entre ces deux généralisations des distributions de probabilités. Si l'imprécision sur une probabilité est décrite par un intervalle de probabilités, la relation avec une distribution de masses de croyance est immédiate par une simple identification :

$$\left[\underline{P}(H_i),\overline{P}(H_i)\right]=\left[Bel(H_i),Pls(H_i)\right] \qquad [12]$$

où $\underline{P}(H_i)$ est la probabilité inférieure de l'hypothèse H_i , $\overline{P}(H_i)$ en est la probabilité supérieure.

La transformation d'une distribution d'intervalles de probabilités $[P]$ vers une distribution de masses de croyance M est aisément réalisée par l'intermédiaire des équations [6], [7] et [10].

Si : $[P_X]=\left[\left[\underline{P}(H_1),\overline{P}(H_1)\right]\cdots\left[\underline{P}(H_q),\overline{P}(H_q)\right]\right]$

$$M_X \quad \left[m(\varnothing)\, m(A_1)\cdots m(A_{2^q-1})\right]$$

Alors $$\left[0 \;\; \underline{P}(A_1)\cdots \sum_{B\,|\,B\subseteq A_i}(-1)^{|A_i|-|B|}\,\underline{P}(B)\cdots\right]$$

avec $A_i \in 2^{\Omega_X}$.

Réseaux de fonctions de croyance

A l'instar des réseaux bayésiens, les réseaux de fonctions de croyance proposés ici, sont des graphes orientés sans circuit qui représentent une connaissance incertaine vue sous une forme aléatoire et épistémique [17]. Un réseau de fonctions de croyance est défini comme un couple : $G=((V,E),M)$, où (V,E) représente le graphe avec V l'ensemble des nœuds et E l'ensemble des arcs et, M représente l'ensemble des masses de croyance associé à chaque nœud. Lorsqu'un nœud n'est pas un nœud racine, sa distribution de masses de croyance est définie par une table de masses de croyance conditionnelles quantifiant la relation entre ce nœud et ses parents. Lorsqu'un nœud est racine, une distribution de masses de croyance *a priori* est définie.

Une variable aléatoire discrète X est représentée par un nœud $X\in V$ avec son cadre de discernement Ω_X constitué de q hypothèses mutuellement exclusives et exhaustives (eq.[1]). Lorsqu'un nœud représentant la variable X est un nœud enfant, la distribution de masse de croyance *a priori* est définie par M_X . Lorsque le nœud n'est pas un nœud enfant, une table de masse de croyance conditionnelle est établie entre les hypothèses des cadres de discernement de chacune des variables parentes (nœuds parents).

Pour calculer les distributions de masses de croyance marginales de chaque nœud, nous utilisons l'algorithme d'inférence exacte proposé par Jensen reposant sur la construction d'un arbre de jonctions [35]. Cet algorithme permet de réactualiser les distributions de masses de croyance marginales sur chaque nœud en fonction des évidences représentant les connaissances introduites dans le réseau de fonctions de croyance. Le mécanisme de calcul est basé sur le théorème de Bayes qui dans notre cas est étendu à la représentation de l'information incertaine selon le cadre de Dempster-Shafer.

Mesures de croyance et plausibilité

Pour calculer les mesures de croyance et de plausibilité dans un réseau de fonctions de croyance, il faut appliquer les équations [6] et [7]. Mais, lorsque ce réseau est implémenté dans un outil vérifiant l'axiome d'additivité, l'algorithme d'inférence exacte ne permet le calcul de ces mesures que sous la condition de le séparer dans deux nœuds distincts [17].

Le nœud destiné au calcul d'une mesure $Bel\left(A_j^X\right)$ sur l'ensemble focal A_j de la variable X est décrit par les deux hypothèses $Believ$ et $Doubt$ selon la table de masses de croyance conditionnelles proposée ci-dessous.

$A_i^X \in 2^{\Omega_X}$	A_j^X	
	$Believ$	$Doubt$
A_i	$\begin{cases}1 \text{ si } A_j \subseteq A_i \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$	$\begin{cases}0 \text{ si } A_j \subseteq A_i \\ 1 \text{ sinon}\end{cases}$

Tableau 1: Table de masses de croyance conditionnelles du nœud $Bel\left(A_j^X\right)$

Le nœud destiné au calcul de $Pls\left(A_j^X\right)$ est décrit par les hypothèses $Plausibility$ et $Disbelief$ selon la table ci-dessous.

$A_i^X \in 2^{\Omega X}$	A_j^X	
	Plausibility	Disbelief
A_i	$\begin{cases} 1 \text{ si } A_j \cap A_i \neq \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \text{ si } A_j \cap A_i \neq \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

Tableau 2 : Table de masses de croyance conditionnelles du nœud $Pls\left(A_j^X\right)$

Lorsque l'on calcule les mesures de croyance et de plausibilité sur les hypothèses spécifiques d'une variable (*i.e.* H_i), on obtient la distribution d'intervalles de probabilités de la variable étudiée.

Modélisation de la fiabilité

La théorie de Dempster-Shafer a été appliquée par Guth [33] pour évaluer la fiabilité d'un système à l'aide d'un arbre de défaillance. En réalité, comme le précise Simon et Weber [18], Guth étend le cadre de discernement correspondant aux hypothèses de la fiabilité probist au cadre de discernement de la théorie de Dempster-Shafer :

- hypothèse probabiliste : le fonctionnement du système est complètement caractérisé par des mesures de probabilités.
- hypothèse d'état binaire : le système ne peut avoir que deux états de fonctionnement, l'état de défaillance $\{Down\}$ et l'état de fonctionnement normal $\{Up\}$.

Ainsi, le cadre de discernement ($\Omega = \{\{Up\},\{Down\}\}$) support du raisonnement fiabiliste devient la structure de Dempster-Shafer ($2^{\Omega} = \{\varnothing,\{Up\},\{Down\},\{Up, Down\}\}$) qui peut être réduit aux trois hypothèses :

- $m(\{Up\})$: masse de croyance d'être en état de fonctionnement,
- $m(\{Down\})$: masse de croyance d'être en état défaillant,
- $m(\{Up,Down\})$: masse de croyance d'être exclusivement dans un des deux états précédents sans discerner exactement lequel.

Sous les hypothèses de la fiabilité probist les composants comme le système étudiés ne peuvent être que dans un des deux états de fonctionnement. Il s'agit d'un problème de monde fermé [30] et l'hypothèse $\varnothing$ ne porte pas de masse de croyance. Dans l'analyse de fiabilité ou de risque intégrant le facteur humain, il peut être intéressant d'affecter une masse de croyance à $\varnothing$ pour caractériser l'incomplétude des hypothèses (monde ouvert) sur lesquelles porte l'analyse plutôt que d'introduire un coefficient de sécurité ou une marge de probabilité sur le résultat global afin de tenir compte des scénarios non pris en compte dans l'analyse. Dans cette étude, nous considérons le problème de l'analyse de la fiabilité ou de la performance des systèmes comme un problème de monde fermé ($m(\varnothing)=0$).

Pour modéliser la fiabilité des systèmes par les réseaux de fonctions de croyance, nous transposons l'approche proposée par Bobbio *et al*. [37] avec les réseaux bayésiens aux réseaux de fonctions de croyance. Il s'agit de convertir un arbre de défaillance en un réseau équivalent avec les hypothèses proposées dans Guth [33]. Un arbre de défaillance décrit le processus de propagation d'une défaillance au sein de la structure fonctionnelle d'un système. La fiabilité du système modélisé répond aux hypothèses d'indépendance des évènements, de cohérence des systèmes [31]. Elle est décrite majoritairement par des portes 'ET', 'OU', 'k parmi n' combinant les évènements élémentaires.

Afin d'intégrer le cadre de discernement de la théorie de Dempster-Shafer, le réseau de fonctions de croyance doit modéliser les tables de vérité des portes 'ET' (cf. tableau3) et 'OU' (cf. table 4) [33] par des tables de masses de croyance conditionnelles appropriées [17].

ET	$\{Up\}$	$\{Down\}$	$\{Up,Dow$
$\{Up\}$	$\{Up\}$	$\{Down\}$	$\{Up,Dow$
$\{Down\}$	$\{Down\}$	$\{Down\}$	$\{Down\}$

$\{Up,Down\}$	$\{Up,Down\}$	$\{Down\}$	$\{Up,Down\}$

Tableau 3 : Table de vérité d'une porte 'ET'

OU	$\{Up\}$	$\{Down\}$	$\{Up,Down\}$
$\{Up\}$	$\{Up\}$	$\{Up\}$	$\{Up\}$
$\{Down\}$	$\{Up\}$	$\{Down\}$	$\{Up,Down\}$
$\{Up,Down\}$	$\{Up\}$	$\{Up,Down\}$	$\{Up,Down\}$

Tableau 4 : Table de vérité d'une porte 'OU'

La table de masses de croyance conditionnelles représentant une porte 'ET' (resp. 'OU') est définie par les colonnes 3 à5 de la table 5 (resp. 6 à 8). E_X correspond à l'état du composant X, E_Y à celui du composant Y, et E_X, E_Y sont les entrées de la porte. E_Z correspond à la sortie de la porte.

E_X	E_Y	$E_Z=E_X.E_Y$			$E_Z=E_X+E_Y$		
$\{Up\}$	$\{Up\}$	1	0	0	1	0	0
$\{Up\}$	$\{Down\}$	0	1	0	1	0	0
$\{Up\}$	$\{Up,Down\}$	0	0	1	1	0	0
$\{Down\}$	$\{Up\}$	0	1	0	1	0	0
$\{Down\}$	$\{Down\}$	0	1	0	0	1	0
$\{Down\}$	$\{Up,Down\}$	0	1	0	0	0	1
$\{Up,Down\}$	$\{Up\}$	0	0	1	1	0	0
$\{Up,Down\}$	$\{Down\}$	0	1	0	0	0	1
$\{Up,Down\}$	$\{Up,Down\}$	0	0	1	0	0	1

Tableau 5 : Tables de masses de croyance conditionnelles d'une porte 'ET' et d'une porte 'OU'

La table de masses de croyance conditionnelles peut évidemment s'adapter à des portes comportant plus de deux entrées mais également à des portes de type k parmi n. Par ailleurs, les coefficients de la table de masses de croyance conditionnelles prennent leur valeur dans $\{0,1\}$ puisqu'il s'agit d'une traduction des tables de vérité des portes logiques. Ces coefficients peuvent prendre des valeurs différentes de $\{0,1\}$ si la modélisation de comportements différents est souhaitée notamment dans le cas d'une incertitude sur la propagation des masses de croyances dans le réseau des fonctions de croyance. Les tables de masses de croyance conditionnelles se basent sur le cadre de discernement des occurrences d'évènements sur les composants. Aussi, la taille de ces tables augmente de façon importante et il peut paraître difficile de les élaborer. Le problème posé par la fiabilité apporte une simplification par l'utilisation des lois de De Morgan. En effet, la fiabilité probist $(\{Up\},\{Down\})$ signifie que le composant est soit dans l'état $\{Up\}$, soit dans l'état $\{Down\}$. En aucun cas un composant ne peut être dans les deux états simultanément. Ainsi, $\{Up,Down\}$ s'interprète comme $\{Up\}\oplus\{Down\}$ où $\oplus$ est l'opérateur logique 'ou exclusif'. Ainsi, à titre d'exemple, l'équation de la 3ème ligne de la table 5 pour la porte ET s'écrit :

$$\{Up,\ Down\}.\{Up\} = \{Up\}.\{Up\} \oplus .\{Up\}.\{Down\}$$
$$= \{Up\} \oplus \{Down\}$$
$$= \{Up,\ Down\}$$
[13]

En conséquence, pour une porte 'ET' à 2 entrées, seules les 12 masses de croyance conditionnelles correspondant aux combinaisons d'états spécifiques ($\{Up\}$, $\{Down\}$) d'une porte 'ET' usuelle sont à définir parmi les 27 que comporte la table. Les autres masses de croyance conditionnelles sont automatiquement déduites par les lois de De Morgan.

Lorsque l'on veut modéliser la fiabilité d'un système par un réseau de fonctions de croyance mimant un arbre de défaillance, les taux de défaillance des composants sont considérés constants, et les occurrences des évènements sont indépendantes. Les nœuds des réseaux représentent les évènements sur les composants et les distributions de masses de croyance a priori sont obtenues à partir des taux de défaillance. Ainsi, lorsque les taux de défaillance des composants sont connus avec imprécision sous la forme d'intervalles, il est aisé de déterminer l'intervalle de probabilité d'occurrence de l'évènement indésirable sur un composant avec l'équation suivante :

$$\left[\underline{P}, \overline{P}\right] = e^{-\left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] T_i}$$
[14]

Où T_i est le temps de mission du système et $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ les bornes inférieure et supérieure du taux de fiabilité.

A partir des équations [6], [7] et [10], la distribution de masse de croyance suivante est trouvée :

$$M = \left[\underline{P} \quad 1-\overline{P} \quad \overline{P}-\underline{P}\right]$$
[15]

Le réseau de fonctions de croyance assure le calcul des masses de croyance de l'état du système. A partir de la distribution des masses de croyance exprimant l'état du système, les bornes supérieure et inférieure de la probabilité que le système soit dans l'état de fonctionnement peuvent être calculés.

$$\left[Bel(S=\{Up\}), Pls(S=\{Up\})\right] = \left[\underline{P}(S=\{Up\}), \overline{P}(S=\{Up\})\right]$$

Etude de cas

Cette section est dédiée à l'analyse de la méthode proposée pour le calcul de la fiabilité imprécise des systèmes. Nous étudions l'exemple classique d'un système en pont (cf. figure 2) car c'est un système complexe au sens de la fiabilité comme le précise Villemeur [31] mais regroupant peu de composants pour en faciliter la compréhension. Deux cas seront distingués selon que les probabilités sont précises ou non. L'inférence dans le cas des réseaux de fonctions de croyance est faite par l'algorithme d'inférence exacte programmée dans Bayesialab©. Les réseaux de fonctions de croyance sont donc directement modélisés par cet outil en utilisant son interface graphique.

Le système est constitué de 5 composants et chaque composant a deux états disjoints ($\{Up\}, \{Down\}$) pour un problème de fiabilité probist. Les évènements élémentaires sur ces composants sont supposés indépendants. Le système est homogène et aucune réparation n'est considérée.

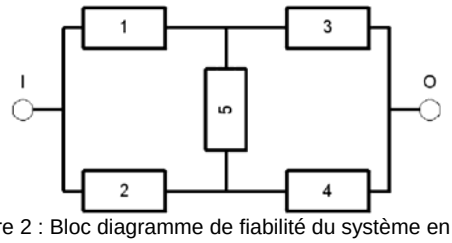

Figure 2 : Bloc diagramme de fiabilité du système en pont

Par énumération des coupes minimales ou encore des chemins de succès minimaux, le réseau de fonctions de croyance de la figure 3 est obtenu pour évaluer la fiabilité du système en pont. Ce modèle a été étudié dans [17].

Probabilités précises

Pour étudier la fiabilité de ce système, nous considérons dans un premier temps, des taux de défaillance précis $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 5.10^{-3} h^{-1}$; $\lambda_3 = \lambda_4 = 2.10^{-3} h^{-1}$ et un temps de mission $T_i = 200h$. Les probabilités que chacun des composants soit dans l'état $\{Up\}$ sont $P_{C_i | i \in \{1,2,5\}} = 0.8187$ et $P_{C_j | j \in \{3,4\}} = 0.6703$. En utilisant les équations [6], [7] et [10], les distributions de masses de croyances a priori suivantes sont obtenues : $M_{C_i} = [0.81873 \ \ 0.18127 \ \ 0]$ et $M_{C_j} = [0.67032 \ \ 0.32968 \ \ 0]$

La fiabilité du système est la probabilité que le système soit en état de fonctionnement à l'instant $T_i = 200h$. Ainsi, à partir des masses de croyance a priori propagée dans le réseau, la fiabilité vaut $R = 0.8501$ comme le confirme la figure 3.

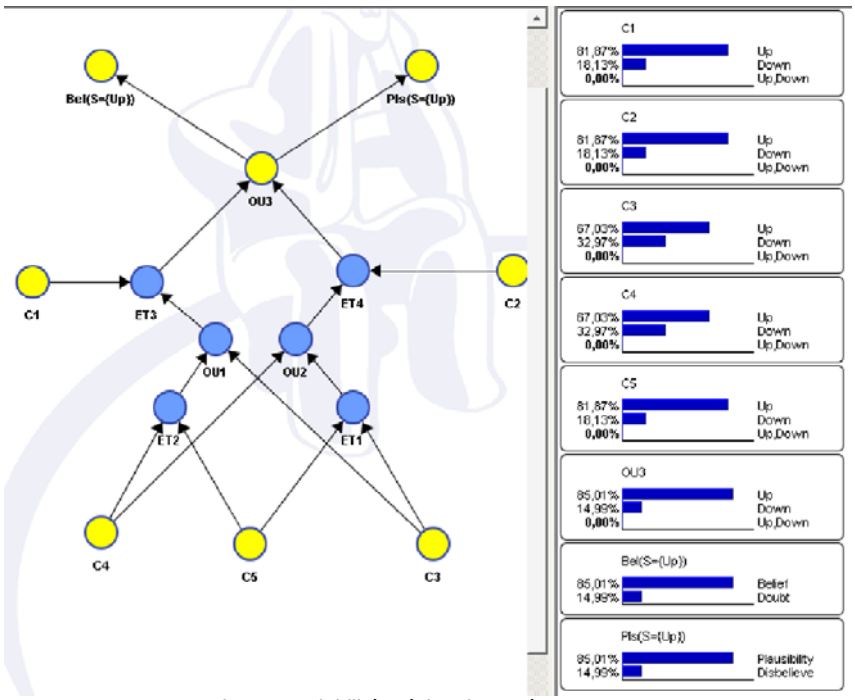

Figure 3 : Fiabilité précise du système en pont

Probabilités imprécises

Considérons maintenant le même problème avec des taux de défaillance imprécis exprimés sous la forme d'intervalles ; $[\underline{\lambda_i}, \overline{\lambda_i}] = [0.9 \cdot 10^{-3}, 1.1 \cdot 10^{-3}]h^{-1}$ et $[\underline{\lambda_j}, \overline{\lambda_j}] = [1.9 \cdot 10^{-3}, 2.1 \cdot 10^{-3}]h^{-1}$. La distribution de masse de croyance a priori explicitant l'état incertain de chaque composant au temps de mission $T_i = 200h$ est obtenue par les équations [6], [7] et [10] :

$$M_{C_i} = [0.80252 \quad 0.16473 \quad 0.03275]$$

$$M_{C_j} = [0.65705 \quad 0.31614 \quad 0.02681]$$

La figure 4 montre le résultat obtenu par le réseau de fonction de croyance.

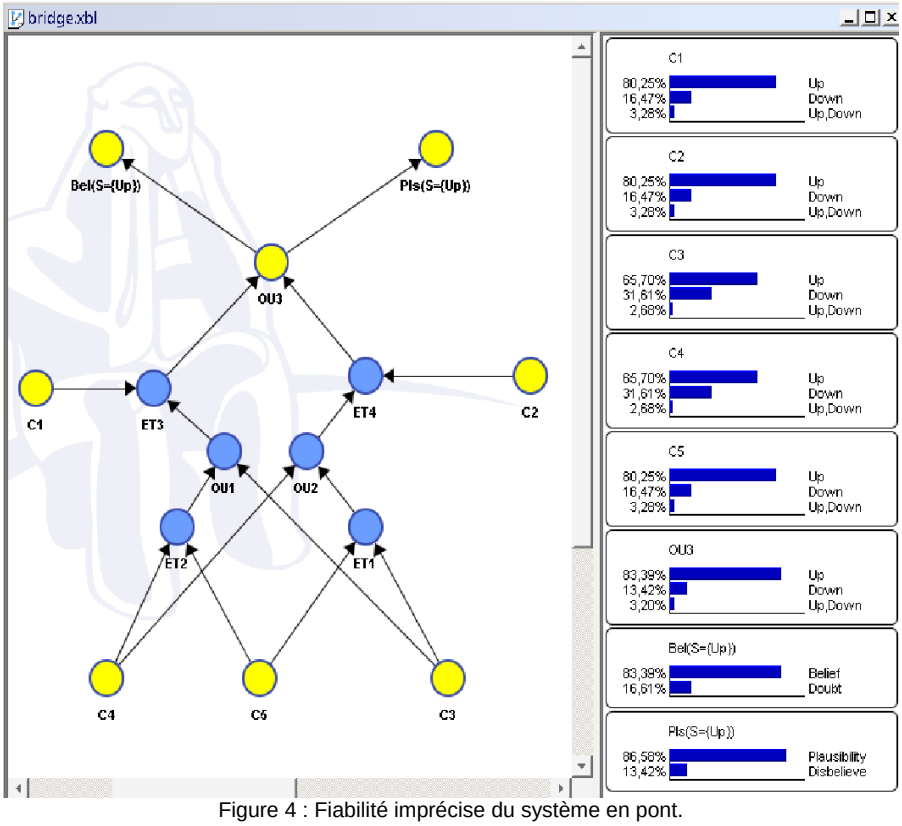

Figure 4 : Fiabilité imprécise du système en pont.

A partir de l'équation 12, on détermine la fiabilité du système à l'instant $T_i = 200h$ comme étant comprise entre $\left[\underline{R}(T_i), \overline{R}(T_i)\right] = [0.8339, 0.8658]$. En comparant au résultat précédent, nous constatons que la propriété d'encadrement (eq. 8) est vérifiée pour la fiabilité du système sachant qu'elle était vérifiée pour les composants. Nous pouvons constater que la fiabilité précise obtenue précédemment n'est pas le centre de l'intervalle déterminée ici. Ceci dépend de la fonction de structure modélisée par le réseau de fonctions de croyance. En effet, si nous considérons des taux de défaillances imprécis suivants : $\left[\underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i\right] = \left[0.9 \cdot 10^{-3}, 1.2 \cdot 10^{-3}\right] h^{-1}$ et $\left[\underline{\lambda}_j, \overline{\lambda}_j\right] = \left[1.8 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}\right] h^{-1}$, A l'instant $T_i = 200h$, les distributions de probabilités des composants sur les cadres de discernements sont alors :

$$M_{C_i} = [0.78663 \;\; 0.16473 \;\; 0.04864] \quad M_{C_j} = [0.67032 \;\; 0.30232 \;\; 0.02735]$$

En comparant à la situation précise de la section précédente, il n'y a plus de symétrie de l'intervalle autour des probabilités précises correspondantes. Le réseau de fonctions de croyance modélisant la fiabilité du système fourni à la figure 5 donne la fiabilité du système : $R \in [0.8349, 0.8744]$

Conclusion

Les réseaux de fonctions de croyance présentent plusieurs intérêts. D'une part, ils permettent d'appréhender facilement la logique causale d'un système, *i.e.* la fonction de structure exprimant la logique de propagation des défaillances au sein d'un système comme les réseaux bayésiens et les arbres de défaillances. D'autre part, la même modélisation permet l'étude de la propagation de l'imprécision (incertitude épistémique) et de l'incertitude (aléatoire) au sein du même modèle en une seule étape. En outre, l'inférence bayésienne généralisée permet d'étudier les relations entre variables à travers le réseau de fonctions de croyance. Cette caractéristique des réseaux de fonctions de croyance ouvre des possibilités significatives dans les problèmes de modélisation de paramètres de sûreté de fonctionnement et l'analyse de la sensibilité des résultats aux variations des paramètres de sureté de fonctionnement.

L'incertitude aléatoire est classiquement utilisée pour appréhender le risque inhérent à l'utilisation d'un système complexe. L'incertitude sur les valeurs des probabilités en jeu est parfois prise en compte sous la forme de coefficient de sécurité sur les valeurs obtenues. Les réseaux de fonctions de croyance permettent la prise en compte de l'imprécision sur les valeurs de probabilités et permettent au décideur d'en tenir compte selon le compromis coût/risque acceptable de l'utilisation du dispositif étudié.

Références

[1] Ph. Weber, L. Jouffe, Complex system reliability modelling with Dynamic Object Oriented Bayesian Networks (DOOBN). Reliability Engineering and System Safety (91), 149-162, 2006,
[2] H. Langseth et L. Portinal, Bayesian networks in reliability, Reliability Engineering and System Safety (92), 92-108, 2007.
[3] A. Mittal et A. Kassim, Bayesian Network Technologies: Applications and Graphical Models, Tele Tan Ankush Mittal et Ashraf Kassim (ed.), IGI publishing, 2007

[4] New metaheuristics, neural & fuzzy techniques in reliability, G. Levitin (Eds), 2007, Chapitre 10 : Imprecise reliability: An introductory overview, Lev Utkin et Frank Coolen, p. 261-306.
[5] I. Kozine et L. Utkin, Interval valued Finite Markov Chains, Reliable computing, 8, 97-113, 2002.
[6] D. Coit, T. Jin et N. Wattanapongsakorn, System optimization with Component Reliability estimation uncertainty : A multicriteria Approach, IEEE Transactions on Reliability, 53(3), p. 369-380, 2004.
[7] D. Berleant et J. Zhang, Bounding the times to failure of 2-component systems, IEEE Transactions on Reliability, 53(4), p. 542-550, 2004.
[8] F. Coolen et L. Utkin, Imprecise reliability: A concise overview, in Risk, Reliability and Societal Safety, ESREL07, 2007, p. 1959-1966.
[9] K. Cai, System failure engineering and fuzzy methodology: An introductory overview, Fuzzy Sets and Systems, 83, 113-133, 1996.
[10] H. Tanaka, L. Fan, F. Lai et K. Toguchi, Fault tree analysis by fuzzy probability, IEEE Transactions on Reliability, 32, p.453-457, 1983.
[11] D. Singer A fuzzy set approach to fault tree and reliability analysis Fuzzy Sets and Systems, 34, 145-155, 1990.
[12] M. Sallak, C. Simon et J-F. Aubry, A Fuzzy Probabilistic Approach for Determining Safety Integrity Level, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 16(1), p.239-248, 2008.
[13] A. Brini, M. Boughanem, D. Dubois, Réseaux possibilistes pour un modèle de recherche d'information, dans Conférence francophone en Recherche d'Information et Applications, Lyon, 15/03/2006-17/03/2006, 2006, p. 143-154.
[14] L. Guo, Software Quality and Reliability Prediction Using Dempster-Shafer Theory, PhD in computer and information science, College of Engineering and Mineral Resources at West Virginia University, Lane Department of Computer Science and Electrical Engineering, Morgantown, West Virginia, 2004.
[15] S. Ferson, C. Joslyn, J. Helton, W. Oberkampf et K. Sentz, Summary from the epistemic uncertainty workshop: consensus amid diversity, Reliability Engineering & System Safety, 85, 355-369, 2004.
[16] C. Simon, P. Weber et E. Levrat, Bayesian Networks and Evidence Theory to Model Complex Systems Reliability, Journal of Computers, 2, 33-43, 2007.
[17] C. Simon, P. Weber et A. Evsukoff, Bayesian networks inference algorithm to implement Dempster Shafer theory in reliability analysis, Reliability Engineering and System Safety, 93, 950-963, 2008.
[18] R. Demirer et P. Shenoy, Sequential valuation networks: A new graphical technique for asymmetric decision problem, Lecture Notes in Computer Science, p.252-265, 2001.
[19] B.R. Cobb et P.P. Shenoy, A comparison of Bayesian and Belief Function Reasoning University of Kansas, School of Business, 2002
[20] Ph. Smets, TBMLAB, 2004.
[21] F. Cozman Credal Networks Artificial Intelligence Journal, 120, 199-233, 2000.
[22] F. Cozman, Graphical Models for Imprecise Probabilities, International Journal of Approximate Reasoning, 39, 167-184, 2005.
[23] B. Ben Yaghlane et K. Mellouli, Inference in directed evidential networks based on the transferable belief model, International Journal of Approximate Reasoning, à paraitre, 2008
[24] A. Dempster, Upper and Lower probabilities induced by a multivalued mapping, Annals of Mathematical Statistics, 38, p. 325-339, 1967.
[25] A Mathematical Theory of Evidence, G. Shafer, Princeton University Press, 1976.
[26] K. Sentz et S. Ferson, Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory, Sandia National Laboratory, 2002
[27] E. Ouzounova Incertitude et mesure de performance: Une nouvelle approche à travers la théorie mathématique des indications, Doctorat de la Faculté des sciences économiques et sociales, 2005
[28] Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence, R. Yager; J. Kacprzyk et M. Fedrizzi, B. Chokr et V. Kreinovich, How far are we from the complete knowledge? Complexity of knowledge acquisition in the Dempster-Shafer approach, p.555-576, 1994.
[29] Uncertainty-based information. G.J. Klir & M.J. Wierman , Elements of generalized information theory Studies in Fuzziness and Soft-Computing, Physica-Verlag, 1998.
[30] P. Smets et R. Kennes, The transferable Belief Model, Artificial Intelligence, 66, p.191-243, 1994.
[31] Reliability, availability, maintainability and safety assessment: methods and techniques, A. Villemeur, 1992.
[32] Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications, Klir G. et Yuan B., 1995.
[33] M.A. Guth, A probability foundation for vagueness and imprecision in fault tree analysis, IEEE Transactions on Reliability, 40(5), p. 563-570, 1991
[34] Smets, P. The application of the matrix calculus to belief functions, Int. J. Approximate Reasoning, 31, p.1-30, 2002.
[35] C. Joslyn et S. Ferson, Approximate representations of random intervals for hybrid uncertainty quantification in engineering modelling, dans les actes de 'the Fourth International Conference on Sensitivity Analysis of Model Output', 2004
[36] 1996, An Introduction to Bayesian Networks, F.V. Jensen.
[37] A. Bobbio; L. Portinale; M. Minichino & E. Ciancamerla, Improving the analysis of dependable systems by mapping fault trees into Bayesian networks, Reliability Engineering and System Safety, 71, p.249-260, 2001.

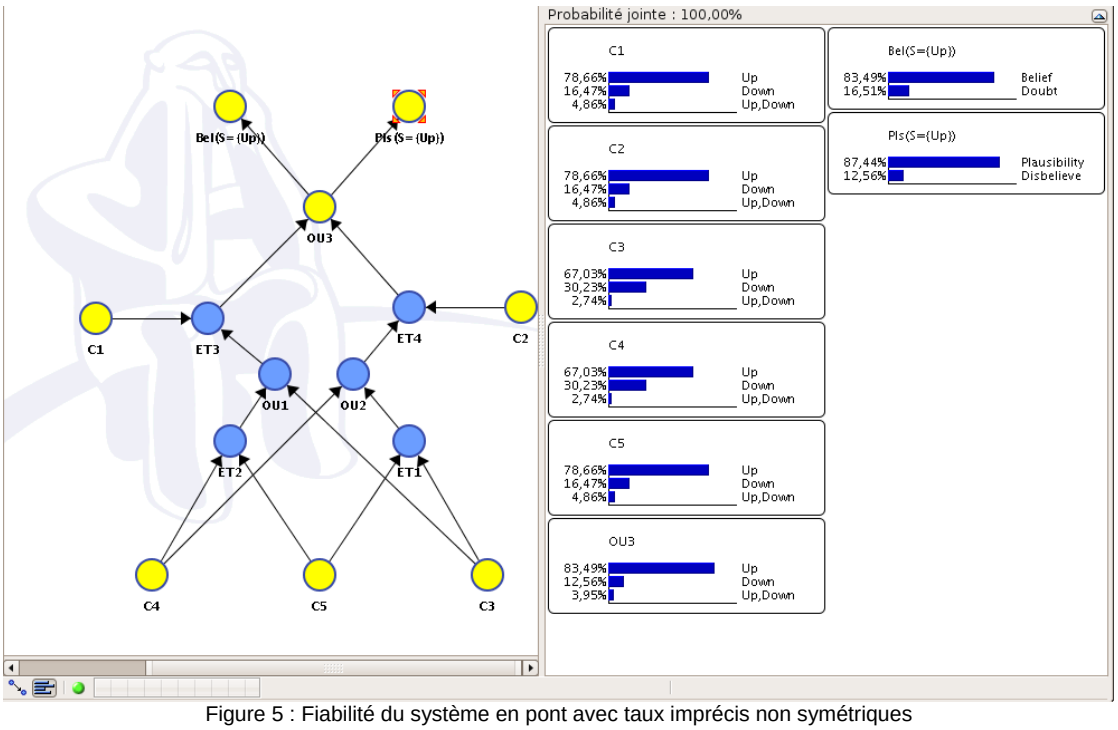

Figure 5 : Fiabilité du système en pont avec taux imprécis non symétriques