



**HAL**  
open science

## Points, courbes et quelques fibrés associés

Jean Vallès

► **To cite this version:**

| Jean Vallès. Points, courbes et quelques fibrés associés. 2008. hal-00327657v1

**HAL Id: hal-00327657**

**<https://hal.science/hal-00327657v1>**

Preprint submitted on 9 Oct 2008 (v1), last revised 5 Jan 2010 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Points, courbes et quelques fibrés associés

Jean Vallès

## Résumé

On propose une généralisation des fibrés logarithmiques et des fibrés de Schwarzenberger sur  $\mathbb{P}^n$  en rang plus grand que  $n$ . Puis on donne un théorème, reliant ces deux familles de fibrés, qui généralise, sur  $\mathbb{P}^2$ , un théorème de Dolgachev et Kapranov (thm 7.2 [5] que les auteurs ont appelé “de type Torelli”).

## Abstract

We propose a generalization of logarithmic and Schwarzenberger bundles over  $\mathbb{P}^n$  when the rank is greater than  $n$ . Then we prove a theorem, linking these families of bundles, which generalizes, over  $\mathbb{P}^2$ , a theorem given by Dolgachev and Kapranov (thm 7.2 [5] called of “Torelli type” by the authors).

Mots clés : fibrés logarithmiques généralisés, hyperplans instables, variété d’incidence.

## 1 Introduction

Nous rappelons pour commencer la définition des fibrés de Schwarzenberger, des fibrés logarithmiques ainsi que le théorème “de type Torelli” (parce qu’il donne presque un plongement d’espace de modules), qui fait le lien entre les deux. Ce théorème a été énoncé et prouvé par Dolgachev et Kapranov dans [5]. Concernant des fibrés vectoriels de rang  $n$  sur  $\mathbb{P}^n$  associés à un groupe de points de  $\mathbb{P}^{n\vee}$ , il précise quand cette association est injective. Nous proposons ensuite deux constructions élémentaires de fibrés vectoriels de rang  $\geq n$  sur  $\mathbb{P}^n$ . La première construction fournit une famille de fibrés dont les logarithmiques sont un cas particulier, et la seconde, une famille dont les Schwarzenberger sont un cas particulier. Afin d’énoncer un théorème impliquant ces deux familles et généralisant celui de Dolgachev et Kapranov en tout rang et toute dimension, l’étude de leurs hyperplans instables est réalisée. Cependant, comme on s’en convaincra avec un ou deux exemples, il semble illusoire de prouver un théorème d’injectivité en toute dimension. Sur le plan projectif, par contre, nous y arrivons, ce qui constitue le résultat principal de ce papier.

### 1.1 Fibrés logarithmiques

Étant donné  $X$  une variété projective lisse et  $D$  un diviseur à croisement normaux sur  $X$  on définit le fibré  $\Omega_X(\log(D))$  des 1-formes différentielles à pôles au plus logarithmiques le long de  $D$ . Lorsque  $X$  est l’espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n$  et  $D = \cup H_i$  une union d’hyperplans en position linéaire générale, ces fibrés sont définis (par Deligne dans l’article [3]) comme l’extension particulière qui suit

$$0 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^n}(\log(D)) \xrightarrow{res} \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{H_i} \rightarrow 0$$

L'application *res* étant donnée localement par l'application résidu de Poincaré (pour une définition explicite voir prop. 2.3 [5]).

Lorsque  $m < n + 2$  ce fibré est scindé (voir prop. 2.10 [5]), lorsque  $m = n + 2$  c'est le fibré tangent  $T_{\mathbb{P}^n}(-1)$ .

Notons pour simplifier  $Z = \{H_i^\vee, i = 1, \dots, m\}$  les points de  $\mathbb{P}^{n\vee}$  duaux des hyperplans de  $D$  et  $E(Z)$  le fibré logarithmique associé à  $D$  (on dira maintenant qu'il est associé à  $Z$ ). La question naturelle est alors de reconstruire  $Z$  connaissant  $E(Z)$ .

## 1.2 Fibrés de Steiner et de Schwarzenberger

Soient  $n, m, k$  trois entiers avec  $n > 0, k \geq 0$  et  $m > 0$ . On note  $\mathcal{FS}_{n,n+k,m}$  (resp.  $\mathcal{S}_{n,n+k,m}$ ) l'ensemble des faisceaux cohérents (resp. des fibrés vectoriels)  $E$  admettant une résolution du type

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n}(-1)^m \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n}^{m+n+k} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

On les appellera *faisceaux de Steiner* (resp. *fibrés de Steiner*).

— Soit  $C_n \subset \mathbb{P}^{n\vee}$  une courbe rationnelle normale. On note  $S_i$  les espaces vectoriels des formes binaires de degré  $i$  sur  $C_n \simeq \mathbb{P}^1$  et  $E_{m-2}(C_n)$  le fibré (voir [7] et prop.6.3 [5]) donné par la multiplication

$$S_{m-n-2} \otimes S_n \rightarrow S_{m-2}$$

Ce fibré, appelé fibré de Schwarzenberger (associé à la courbe  $C_n$ ), possède une résolution simple (en tant que  $SL(2)$  module on identifie  $S_i$  avec son dual)

$$0 \longrightarrow S_{m-n-2} \otimes O_{\mathbb{P}(S_n)}(-1) \longrightarrow S_{m-2} \otimes O_{\mathbb{P}(S_n)} \longrightarrow E_{m-2}(C_n) \longrightarrow 0$$

— Lorsque le cardinal  $m$  d'un groupe de points  $Z \subset \mathbb{P}^{n\vee}$  en position linéaire générale vérifie  $m \geq n + 2$ , le fibré logarithmique  $E(Z)$  associé est un fibré de Steiner dont polynôme de Chern vaut  $c(t) = \frac{1}{(1-t)^{m-n-1}}$  (thm.3.5, [5]).

## 1.3 Théorème d'injectivité en rang = dimension

Énonçons maintenant le théorème "de type Torelli" démontré par Dolgachev et Kapranov (thm 7.2 [5] pour  $m \geq 2n + 3$  et [9] pour  $m \geq n + 2$ ).

**1 Théorème.** *Soient  $Z$  et  $Z'$  deux groupes de points de longueur  $m \geq n + 2$  en position linéaire générale dans  $\mathbb{P}^{n\vee}$  pour lesquels on a  $E(Z) \simeq E(Z')$ . Alors un des deux cas se produit :*

- 1)  $Z = Z'$  à permutation près.
- 2)  $Z$  et  $Z'$  sont sur une même courbe rationnelle normale  $C_n$  et  $E(Z) \simeq E_{m-2}(C_n)$

Les idées de la preuve de [9] étaient les suivantes. Considérer les restrictions de  $E(Z)$  aux hyperplans  $H$  de  $Z$  (que l'on appellera hyperplans instables) et se ramener au fibré noyau  $E(Z \setminus \{H^\vee\})$  de la surjection  $E(Z) \rightarrow O_H$  (voir prop. 2.1 dans [9]). Celui-ci est un fibré de Steiner dont la résolution provient de celle de  $E(Z)$ . Enfin si  $Z \neq Z'$ , comme il existe au moins un hyperplan instable de plus pour  $E(Z)$  on se ramène après le bon nombre de réductions à étudier un fibré  $E(Z \setminus \{H_i^\vee, H_{i+1}^\vee, \dots\})$ , qui, appartenant à  $\mathcal{S}_{n,n,2}$ , est un fait le fibré de Schwarzenberger  $E_{n+1}(C_n)$  pour une courbe rationnelle normale  $C_n$  (voir prop. 6.8, [5]). On prouvait alors que  $Z$  était contenue dans  $C_n$  et que  $E(Z) = E_{m-2}(C_n)$ .

## 1.4 Généralisation en rang $\geq$ dimension

Finalement la définition locale via l'application résidu de Poincaré, non seulement ne jouait aucun rôle mais suggérait, de plus, qu'il se produisait quelque chose de spécial pour une extension particulière sans rien dire des autres extensions. En réfléchissant à cette petite objection j'ai réalisé que toutes les extensions, pourvu qu'elles soient des fibrés vectoriels, sont isomorphes (voir prop. 3 de la partie 2) et que l'on peut alors donner une description globale de ces fibrés logarithmiques en fonction du groupe de points  $Z$ . De plus cette description globale apporte avec elle une généralisation naturelle des fibrés logarithmiques en rang plus grand que  $n$ . Dans un second temps il apparaît que ce qui importe, lorsque l'on applique les réductions via les hyperplans instables n'est pas la rationalité de la courbe associée au fibré de  $\mathcal{S}_{n,n,2}$  (ni le fait qu'elle soit munie d'une action de  $SL(2)$ ) mais son degré  $n$  sur  $\mathbb{P}^n$ , en particulier de degré 2 sur  $\mathbb{P}^2$ . On décrira alors dans la partie 3, des fibrés, généralisant les Schwarzenberger, de rang plus grand que  $n$  et associés à une courbe de degré plus grand que  $n$  sur  $\mathbb{P}^{n\vee}$ .

Compte tenu du rôle qu'ils jouent lorsque le rang égal  $n$  (voir [1] ou [8]) nous revenons sur la définition et caractérisation cohomologique des hyperplans instables d'un fibré de Steiner dans la partie 4. En particulier on donnera des inclusions évidentes pour les logarithmiques et Schwarzenberger généralisés et on verra sur un exemple qu'espérer plus qu'une inclusion sera délicat. Enfin, dans la partie 5, on démontrera une généralisation du théorème dit de type Torelli (thm 13).

Ce travail a été réalisé lors de mon séjour dans les locaux de l'université Ulisse Dini de Florence, que je remercie pour son accueil. Ce séjour fut partiellement financé par GNASAGA-INDAM (Italie) et principalement par le CNRS (France) qui m'accueillait en délégation.

## 2 Construction élémentaire I

Considérons la variété d'incidence points-hyperplans de  $\mathbb{P}^n$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{n\vee} \\ p \downarrow & & \\ & & \mathbb{P}^n \end{array}$$

On note  $d_n(k)$  la dimension de l'espace vectoriel  $H^0(O_{\mathbb{P}^n}(k))$ . On dira qu'un groupe de points est en position  $k$ -générale dans  $\mathbb{P}^n$  s'il n'est pas contenu dans une hypersurface de degré  $k$  (en particulier il est de longueur  $\geq d_n(k)$ ) et si chaque sous-groupe de longueur  $s \leq d_{n-1}(k)$  contenu dans un hyperplan  $H$  impose  $s$  conditions linéairement indépendantes sur les hypersurfaces sur  $H$  de degré  $k$ . En d'autres termes la dimension  $h^0(\mathcal{J}_{Z,H}(k)) := h^0(\mathcal{J}_Z(k) \otimes O_H)$  est constante pour tout  $H$ . Cette hypothèse ad hoc correspond à la condition de position linéaire générale requise pour les fibrés logarithmiques.

**2 Proposition.** *Soient  $Z = \{H_i^\vee, H_i \in \mathcal{H}\} \subset \mathbb{P}^{n\vee}$  un groupe de points en position  $k$ -générale et  $\mathcal{J}_Z$  son faisceau d'idéaux. Alors,  $[p_*q^*\mathcal{J}_Z(k)]^\vee(-1)$  est un fibré de Steiner de rang  $d_{n-1}(k)$  sur  $\mathbb{P}^n$ .*

*Démonstration.* On tensorise la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n}(k-1) \xrightarrow{H} O_{\mathbb{P}^n}(k) \longrightarrow O_H(k) \longrightarrow 0$$

par le faisceau d'idéaux  $\mathcal{J}_Z$  pour obtenir

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Z(k-1) \xrightarrow{H} \mathcal{J}_Z(k) \longrightarrow \mathcal{J}_{Z,H}(k) \longrightarrow 0$$

Comme  $h^0(\mathcal{J}_Z(k-1)) = h^0(\mathcal{J}_Z(k)) = 0$  la dimension de  $H^1(\mathcal{J}_{Z,H}(k))$  sera nulle si et seulement si  $h^0(\mathcal{J}_{Z,H}(k))$  est constant pour tout  $H$ .

Considérons la restriction du faisceau d'idéaux à un hyperplan  $H$ . On note  $|Z \cap H|$  le nombre de points de l'intersection.

$$\mathcal{J}_{Z,H}(k) = \sum_{x \in Z \cap H} k_x \oplus \mathcal{J}_{Z \cap H}(k)$$

Ceci implique directement

$$h^0(\mathcal{J}_{Z,H}(k)) = \mathbb{C}^{|Z \cap H|} + h^0(\mathcal{J}_{Z \cap H}(k))$$

Par hypothèse sur  $Z$  on a  $h^0(\mathcal{J}_{Z \cap H}(k)) = d_{n-1}(k) - |Z \cap H|$  et donc  $h^0(\mathcal{J}_{Z,H}(k)) = h^0(O_H(k))$  pour tout hyperplan  $H$ . Ceci donne immédiatement que  $h^1(\mathcal{J}_{Z,H}(k)) = 0$  pour tout  $H$ , ce qui prouve  $R^1 p_* q^* \mathcal{J}_Z(k) = 0$ . Considérons alors la résolution minimale de  $\mathbb{F}$  dans le produit  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n\vee}$

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n\vee}}(-1, -1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n\vee}} \longrightarrow O_{\mathbb{F}} \longrightarrow 0$$

que nous tensorisons par  $q^* \mathcal{J}_Z(k)$  puis que nous descendons sur  $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow p_* q^* \mathcal{J}_Z(k) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(k-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(k)) \otimes O_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

Ceci prouve la proposition.  $\square$

**3 Proposition.** (*généralisation des logarithmiques*) Soient  $Z = \{H_i^\vee, H_i \in \mathcal{H}\} \subset \mathbb{P}^{n\vee}$  un groupe de points en position  $k$ -générale, de longueur  $m \geq d_n(k)$ , et  $E$  un fibré vectoriel apparaissant dans une extension

$$0 \longrightarrow (S^k \Omega_{\mathbb{P}^n})(k-1) \longrightarrow E \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m O_{H_i} \longrightarrow 0$$

Alors  $E \simeq [p_* q^* \mathcal{J}_Z(k)]^\vee(-1)$

*Démonstration.* On dualise cette suite définissant  $E$  et on la décale de  $(-1)$ , pour obtenir

$$0 \longrightarrow E^\vee(-1) \longrightarrow S^k \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m O_{H_i} \longrightarrow 0$$

Pour tout  $1 \leq i \leq m$  la flèche surjective  $S^k \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \longrightarrow O_{H_i}$  se factorise par la restriction

$$S^k \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \longrightarrow S^k(\Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \otimes O_{H_i}) \longrightarrow O_{H_i}$$

Or ce fibré restreint est

$$S^k(\Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \otimes O_{H_i}) = O_{H_i} \bigoplus_{1 \leq j \leq k} S^j(\Omega_{H_i}^\vee(-1))$$

Comme  $Hom(S^j(\Omega_{H_i}^\vee(-1)), O_{H_i}) = 0$  on en déduit que

$$Hom(S^k \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1), \bigoplus_{i=1}^m O_{H_i}) = Hom(\bigoplus_{i=1}^m O_{H_i}, \bigoplus_{i=1}^m O_{H_i})$$

Donnons-nous deux extensions générales (i.e. deux fibrés vectoriels), elles correspondent à deux matrices diagonales  $M_\phi, M_\psi$  de rang maximal. On en déduit que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(\phi) & \longrightarrow & S^k \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) & \xrightarrow{\phi} & \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{H_i} & \longrightarrow & 0 \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & M_\psi M_\phi^{-1} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\psi) & \longrightarrow & S^k \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) & \xrightarrow{\psi} & \bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{H_i} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ce qui prouve l'unicité du noyau lorsqu'il est un fibré.

— Montrons maintenant que ce noyau unique est  $p_* q^* \mathcal{J}_Z(k)$ .

La suite exacte canonique de définition de  $Z$

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Z(k) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \vee}(k) \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0$$

envoyée sur  $\mathbb{P}^n$  par l'application remontée et descente via la variété d'incidence donne

$$0 \longrightarrow p_* q^* \mathcal{J}_Z(k) \longrightarrow S^k \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{H_i} \longrightarrow 0$$

□

En particulier lorsque  $k = 1$  ceci prouve que le fibré logarithmique  $E(Z)$  associé à  $Z$  est,

**4 Proposition.** *Sous les hypothèses de la proposition 3*

$$E(Z)^\vee(-1) = p_* q^* \mathcal{J}_Z(1)$$

Dans ce sens les fibrés  $p_* q^* \mathcal{J}_Z(k)$  pour  $k \geq 1$  sont bien une généralisation des fibrés logarithmiques et la question sur la biunivocité de la correspondance

$$Z \rightsquigarrow p_* q^* \mathcal{J}_Z(k)$$

reste légitime. On notera à partir de maintenant  $E_k(Z) := [p_* q^* \mathcal{J}_Z(k)]^\vee(-1)$ .

### 3 Construction élémentaire II

Soient  $X$  une courbe intègre non dégénérée de degré  $n + k$ , avec  $k > 0$  sur  $\mathbb{P}^{n \vee}$  et  $q^{-1}(X)$  son image inverse dans la variété d'incidence. Appelons  $\bar{q}$  le morphisme de projection de  $q^{-1}(X)$  sur  $X$  (restriction du morphisme  $q$ ) et  $\bar{p}$  celui de  $q^{-1}(X)$  sur  $\mathbb{P}^n$  (restriction du morphisme  $p$ ). Le morphisme  $\bar{p}$  est un recouvrement de degré  $(n + k)$  de  $\mathbb{P}^n$ .

**5 Proposition.** *(généralisation des Schwarzenberger) Soit  $\mathcal{L}$  un faisceau de rang 1 sur la courbe  $X$  tel que  $h^1(\mathcal{L}(-1)) = 0$ . Alors  $E(X, \mathcal{L}) := \bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L}$  est un faisceau de Steiner de rang égal au degré de  $X$ .*

*Remarque :* E. Arrondo propose une autre généralisation des fibrés de Schwarzenberger (voir sa définition page 6 de [2]) qui, aux détails près, englobe la nôtre.

*Démonstration.* La dimension relative étant nulle on a  $R^1 \bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L} = 0$  et par suite  $\bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L}$  est un faisceau de rang  $(n + k) = h^0(\mathcal{L}) - h^0(\mathcal{L}(-1)) = \deg(X)$  sur  $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{L}(-1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

□

Ces faisceaux sont des fibrés de Steiner lorsque  $h^0(\mathcal{L} \otimes O_{x^\vee})$  est constant. Ceci impose que le faisceau  $\mathcal{L}$  soit inversible mais la courbe peut-être singulière. Ces fibrés généralisent naturellement les fibrés de Schwarzenberger qui provenaient des images directes des faisceaux inversibles sur les courbes rationnelles normales. En considérant d'ailleurs la restriction des Schwarzenberger à des sous-espaces linéaires généraux on trouve de nouveaux fibrés du type précédent, associés à la courbe projetée de la courbe rationnelle normale, bien que cette dernière ne soit pas lisse (voir l'exemple 2 ci-dessous).

**Exemple 1 :** Considérons une cubique elliptique, notée  $C \subset \mathbb{P}^2$ , et posons  $\mathcal{L} = O_C(1)$ . Lorsque l'on calcule l'image directe du faisceau  $O_C(2)$  sur  $C$  par l'incidence

$$\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{\bar{q}} & q^{-1}(C) \subset \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{2\nu} \\ & & \bar{p} \downarrow p & & \\ & & \mathbb{P}^2 & & \end{array}$$

on trouve le fibré de rang 3 défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^3(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^6 \longrightarrow \bar{p}_* \bar{q}^* O_C(2) \longrightarrow 0$$

**Exemple 2 :** Soit (avec les mêmes notations que dans l'introduction)  $E_n(C_3)$  le fibré de Schwarzenberger sur  $\mathbb{P}(S_3)$  associé à un diviseur de degré 5 sur la cubique gauche  $C_3$

$$0 \longrightarrow S_2 \otimes O_{\mathbb{P}(S_3)}(-1) \longrightarrow S_5 \otimes O_{\mathbb{P}(S_3)} \longrightarrow E_5(C_3) \longrightarrow 0$$

Considérons une projection générale

$$\mathbb{C} \hookrightarrow S_3, \quad \pi : \mathbb{P}(S_3) \setminus \mathbb{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}(S_3/\mathbb{C})$$

La restriction de  $E_5(C_3)$  au plan  $\mathbb{P}(S_3/\mathbb{C})$  est un fibré de rang 3 image directe du faisceau structural  $\mathcal{L}_5 \simeq O_{\mathbb{P}^1}(5)$  sur le plan

$$0 \longrightarrow S_2 \otimes O_{\mathbb{P}(S_3/\mathbb{C})}(-1) \longrightarrow S_5 \otimes O_{\mathbb{P}(S_3/\mathbb{C})} \longrightarrow \bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L}_5 \longrightarrow 0$$

*Remarque.* Les fibrés des exemples ci-dessus, ainsi que le fibré  $S^2(\Omega_{\mathbb{P}^2}^\vee(-1))$  sont tous les trois dans  $\mathcal{S}_{2,6,3}$  mais ils ne sont pas isomorphes comme on le verra en considérant leurs restrictions aux droites du plan (voir la remarque suivant la proposition 9).

## 4 Hyperplans instables

Soient  $n, m$ , et  $k$  trois entiers tels que  $n > 0$ ,  $k \geq 0$  et  $m > 0$ . Soit  $E \in \mathcal{S}_{n,n+k,m}$  un fibré de Steiner. L'ensemble  $W(E)$  de ses hyperplans instables est (définition que l'on peut étendre aux faisceaux, voir [4])

$$W(E) := \{H \in \mathbb{P}^{n\nu}, H^0(E_H^\vee) \neq 0\}$$

Pour le déterminer explicitement on utilisera l'égalité

$$W(E) = \text{supp}(R^{n-1} q_* p^* E(-n))$$

qui provient de la dualité de Serre  $H^0(E_H^\vee) = (H^{n-1}(E_H(-n)))^*$ .

Lorsque  $E = O_{\mathbb{P}^n} \oplus F$  ou bien  $E = \Omega_{\mathbb{P}^n}^\vee(-1) \oplus F$  ou bien encore lorsque  $m + n + k > mn$  il est clair que  $H^0(E_H^\vee) \neq 0$  pour tout  $H \in \mathbb{P}^{n\vee}$ . On s'intéressera plutôt aux fibrés de Steiner pour lesquels l'hyperplan général n'est pas instable. Plus précisément la formule de Thom-Porteous appliquée à la résolution du faisceau  $R^{n-1}q_*p^*E(-n)$  permet d'avoir

**6 Proposition.** *Soit  $E \in \mathcal{S}_{n,n+k,m}$ ,  $\text{codim}_{\text{attendue}}(W(E), \mathbb{P}^{n\vee}) = mn - (m + n + k) + 1$ .*

Sur  $\mathbb{P}^n$ , lorsque le rang du Steiner vaut  $n$ , il existe un nombre maximal d'hyperplans instables. En effet lorsque  $E \in \mathcal{S}_{n,n,m}$  ce nombre maximal est égal à  $n + m + 1$  et il est réalisé par les fibrés logarithmiques. Au delà de ce nombre on trouve une courbe rationnelle normale (par réduction à un premier cas  $E_0 \in \mathcal{S}_{n,n,2}$ ) d'hyperplans instables et les fibrés de Schwarzenberger associés. Lorsque le rang augmente, c'est à dire pour les fibrés  $E \in \mathcal{S}_{n,n+k,m}$  avec  $k > 0$ , existe-t-il encore un nombre maximal attendu et réalisé? Peut-être mais la dimension du lieu des hyperplans instables des "premiers cas" (sur lequel nous retomberions par réduction) varie de 1 à  $n - 1$ , comme il apparait dans la proposition 6.

**Exemple 1** Considérons la situation sur  $\mathbb{P}^3$ . On a une codimension attendue qui est égale à  $2m - 2 - k$ . Les fibrés que l'on étudie sont de rang égal à  $k + 3$ .

— Pour les fibrés de rang 4 le "premier cas" est

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}^2(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}^6 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

et le lieu de ses hyperplans instables est une surface quadrique.

— Pour les fibrés de rang 5 le "premier cas" est

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}^3(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^3}^8 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

et le lieu de ses hyperplans instables est une courbe de degré 6.

— Pour les fibrés de rang pair le lieu des instables pour "le premier cas" sera une surface de degré  $m$  tandis que pour un rang impair le lieu des instables pour "le premier cas" sera une courbe de degré  $\binom{m}{2}$  (courbe déterminantale qui ne peut-être contenue dans une surface de degré plus petit ou égal que  $n - 2$ ).

**Exemple 2** Sur  $\mathbb{P}^2$  la codimension attendue est  $m - k - 1$ . Le "premier cas", celui qui possède une courbe d'instables, pour le rang  $k + 2$  est

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{k+2}(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{2k+4} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

En effet on peut supposer que  $h^0(E_l^\vee) = h^1(E_l(-2)) = 0$  pour  $l$  générale, on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1)^{k+2} \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}^{k+2} \longrightarrow R^1q_*p^*E(-2) \longrightarrow 0$$

Ceci prouve que  $W(E)$  est la courbe de degré  $k + 2$  définie par le déterminant de l'homomorphisme de fibrés ci-dessus.

Ainsi pour les fibrés de rang 2 on aura une conique de droites instables et pour les fibrés de rang  $k + 2$  une courbe de degré  $k + 2$ .

Retournons maintenant aux hyperplans instables de nos logarithmiques et Schwarzenberger généralisés.

**7 Proposition.** Soient  $Z$  un groupe de points de  $\mathbb{P}^{n\vee}$  en position  $k$  générale et  $E_k(Z)$  le logarithmique généralisé qui lui est associé. Alors  $Z \subset W(E_k(Z))$

*Démonstration.* Soit  $x \in Z$ . La suite exacte reliant les faisceaux d'idéaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_Z(k) \longrightarrow \mathcal{J}_{Z \setminus \{x\}}(k) \longrightarrow \mathcal{O}_x \longrightarrow 0$$

induit par image réciproque et image directe la suite exacte suivante de l'autre côté

$$0 \longrightarrow p_*q^*\mathcal{J}_Z(k) \longrightarrow p_*q^*\mathcal{J}_{Z \setminus \{x\}}(k) \longrightarrow \mathcal{O}_{x^\vee} \longrightarrow 0$$

et il suffit alors de dualiser cette suite (et de tensoriser par  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ ) pour vérifier que  $x^\vee \subset W(p_*q^*\mathcal{J}_Z(k))$ .  $\square$

On a le même résultat pour les fibrés de Steiner construits comme images directes de faisceaux inversibles sur une courbe.

**8 Proposition.** Soient  $X \subset \mathbb{P}^{n\vee}$  une courbe intègre non dégénérée de degré  $n+k$ , avec  $k \geq 0$  et  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible non spécial sur  $X$ . Alors  $X \subset W(E(X, \mathcal{L}(1)))$

*Démonstration.* Il est clair, en considérant l'application  $\bar{p}_*\bar{q}^*$  sur les suites

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(1-x) \longrightarrow \mathcal{L}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_x \longrightarrow 0$$

que tout point  $x$  de la courbe fournit un hyperplan instable  $x^\vee$  de  $\bar{p}_*\bar{q}^*\mathcal{L}(1)$ .  $\square$

Dans  $\mathbb{P}^n$  avec  $n \geq 3$  il semble difficile, comme l'a aussi remarqué E. Arrondo (remark 2.9 [2]) de prouver que les deux ensembles coïncident. En effet on peut avoir, par exemple, une surface d'hyperplans instables et considérer les fibrés provenant d'un faisceau inversible sur une courbe de cette surface, comme dans l'exemple ci-dessous :

**Exemple.** Soit le fibré de Steiner de rang 4 sur  $\mathbb{P}^3$  défini par

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^6 \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

Pour un fibré général dans  $\mathcal{S}_{3,4,2}$ , l'hyperplan général n'est pas instable et  $W(E)$  est supporté par une surface quadrique que l'on peut supposer lisse. D'après Thom-Porteous on peut supposer de plus que  $h^0(E_H^\vee) = 1$  pour tout  $H^\vee \in W(E)$ . Soit  $C$  une courbe elliptique (quartique lisse) contenue dans la surface des plans instables. En notant comme précédemment  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  les morphismes de projections restreints à  $q^{-1}(C)$  on obtient  $\bar{q}_*\bar{p}^*E^\vee = \mathcal{L}$  où  $\mathcal{L}$  est un faisceau inversible sur  $C$ . Comme  $h^0(E_H^\vee) = 1$  pour tout  $H^\vee \in C$  le conoyau du morphisme canonique

$$\bar{q}^*\mathcal{L} \longrightarrow \bar{p}^*E^\vee$$

est un faisceau qui n'a jamais de section globale non nulle sur les fibres. Par conséquent il n'a pas d'image directe sur  $\mathbb{P}^3$  et en particulier

$$\bar{p}_*\bar{q}^*\mathcal{L} = E^\vee$$

On constate donc qu'en général nous ne pourrions pas montrer l'égalité  $C = W(E(C, \mathcal{L}))$ . Par contre dans le plan projectif, une courbe étant un diviseur, la situation s'éclaircit.

**9 Proposition.** Soit  $E \in \mathcal{S}_{2,r,m}$  un fibré de Steiner de rang  $r$  sur  $\mathbb{P}^2$ . Supposons que  $W(E) \neq \mathbb{P}^2$ , que  $W(E)$  contienne une courbe intègre  $X$  de degré  $r$  et que  $h^0(E_l^\vee) = 1$  pour toute droite  $l$  telle que  $l^\vee \in X$ . Alors  $W(E) = X$  et il existe  $\mathcal{L}$  un faisceau inversible sur  $X$ , pour lequel  $E^\vee = \bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L}$ .

*Remarque.* Pour les trois fibrés de  $\mathcal{S}_{2,3,3}$  dont nous parlions précédemment on a  $W(E) = \mathbb{P}^{2^\vee}$  lorsque  $E = S^2 \Omega^\vee(-1)$ ,  $W(E)$  est la cubique elliptique pour le fibré de l'exemple 1 et la cubique à point double pour l'exemple 2.

*Démonstration.* Comme  $W(E)$  contient la courbe  $X$  il existe un faisceau de rang 1 sur  $X$ , noté  $\mathcal{L}$ , tel que  $\bar{q}_* \bar{p}^*(E^\vee) = \mathcal{L}$ . De plus ce faisceau de rang 1 est inversible car l'ordre de saut des droites instables est constant par hypothèse (ou par l'action du groupe  $\text{Aut}(X)$  lorsque  $X$  est elliptique ou rationnelle) On considère le morphisme canonique

$$q^* q_* p^* E^\vee = \bar{q}^* \mathcal{L} \longrightarrow p^* E^\vee$$

Son conoyau est un faisceau qui n'a jamais de section globale non nulle sur les fibres. Par conséquent il n'a pas d'image directe sur  $\mathbb{P}^2$ . C'est pourquoi, appliquant  $p$ , l'homomorphisme de fibrés vectoriels

$$\bar{p}_* \bar{q}^* \mathcal{L} \longrightarrow E^\vee$$

que l'on obtient est un isomorphisme.  $\square$

## 5 Sur le plan projectif

**10 Proposition.** (la condition  $k$ -générale dans le cas du plan projectif) Soit  $Z$  un groupe de points de  $\mathbb{P}^{2^\vee}$ . Le faisceau  $p_* q^* \mathcal{J}_Z(r)$  est un fibré de Steiner si et seulement si  $Z$  ne possède pas de droite  $r + 2$  sécante.

*Démonstration.* C'est un énoncé classique qui relève du théorème de changement de base. En effet on a

$$R^1 p_* q^* \mathcal{J}_Z(r) \otimes O_{l^\vee} \simeq H^1(\mathcal{J}_Z(r) \otimes O_l)$$

et ce dernier groupe de cohomologie est non nul si  $Z$  possède une droite  $(r + 2)$ -sécante ; sinon  $R^1 p_* q^* \mathcal{J}_Z(r) = 0$  et la résolution suivante de  $p_* q^* \mathcal{J}_Z(r)$  prouve qu'il est un fibré de Steiner

$$0 \longrightarrow p_* q^* \mathcal{J}_Z(k) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(k-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_Z(k)) \otimes O_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

Ainsi l'hypothèse de position  $k$ -générale que nous avons défini sur  $\mathbb{P}^n$  se traduit-elle en termes de droites multi-sécantes sur  $\mathbb{P}^2$ .  $\square$

Donnons maintenant la proposition clé qui faisant le lien entre droite instable  $l$  et courbe passant par  $Z \cup l^\vee$

**11 Proposition.** Soit  $l^\vee \notin Z$ . Alors  $l \in W(E_r(Z))$  si et seulement si

$$h^0(\mathcal{J}_{Z \cup l^\vee}(r+1)) \neq 0$$

*Remarque 1* Si le cardinal de  $Z$  est strictement plus petit que  $d_2(r+1) - 1$  il résulte de cette proposition que toute droite du plan est instable.

*Remarque 2* C'est la preuve du théorème dans le plan. En effet dans cette proposition nous affirmons que s'il existe pour le fibré  $p_* q^* \mathcal{J}_Z(r)$  une droite instable de plus que celles de  $Z$  alors elles étaient toutes dès le départ sur une courbe de degré  $(r+1)$ .

*Démonstration.* Considérons l'éclatement  $\widehat{\mathbb{P}}$  de  $\mathbb{P}^{2V}$  le long du point  $l^\vee$ . On note  $\widehat{p}$  et  $\widehat{q}$  les morphismes de projections  $p$  et  $q$  restreints. Alors comme  $Z$  n'a pas de  $r + 2$  sécante on a (on pourra se référer à [8] pour plus de détails et bien-sûr au livre [6])

$$p_*q^* \mathcal{J}_Z(r) \otimes O_l = \widehat{p}_*\widehat{q}^* \mathcal{J}_Z(r)$$

Ainsi la droite  $l$  est instable pour le fibré  $p_*q^* \mathcal{J}_Z(r)$  s'il existe un homomorphisme injectif

$$O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{p}_*\widehat{q}^* \mathcal{J}_Z(r)$$

Ceci équivaut à la donnée d'une application sur la variété d'incidence

$$\widehat{p}^*O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{q}^* \mathcal{J}_Z(r)$$

ou encore, si l'on note  $\mathfrak{m}_{l^\vee}$  l'idéal maximal du point  $l^\vee$ , à la donnée d'une section non nulle

$$O_{\mathbb{P}^2} \hookrightarrow \mathcal{J}_Z(r) \otimes \mathfrak{m}_{l^\vee}(1) = \mathcal{J}_{Z \cup l^\vee}(r+1)$$

□

On peut reformuler cette proposition clé en termes de fibrés vectoriels de rang deux.

**12 Proposition.** (Fibré de rang deux associés à  $E_r(Z)$ ) On considère un groupe de points  $Z$  ne possédant pas de  $(r + 2)$ -sécante et une extension générale

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2V}} \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{J}_Z(r+1) \longrightarrow 0$$

Alors  $E_r(Z)^\vee(-1) = p_*q^*(F(-1))$ . De plus  $l \in W(E_r(Z))$  si et seulement s'il existe une section non nulle de  $F$  qui s'annule au point  $l^\vee$ .

Si  $l^\vee \in Z$  c'est éventuellement la section correspondante à l'extension, sinon il s'agit d'une autre section et par conséquent  $h^0(\mathcal{J}_Z(r+1)) \neq 0$ .

*Démonstration.* Comme  $O_{\mathbb{P}^{2V}}(-1)$  n'a ni image directe ni image directe supérieure on a bien  $E_r(Z)^\vee(-1) = p_*q^*(F(-1))$ . L'existence d'une droite instable  $l$  fournit une application injective

$$O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{p}_*\widehat{q}^*F(-1)$$

Ceci équivaut à la donnée d'une application sur la variété d'incidence

$$\widehat{p}^*O_l(-1) \hookrightarrow \widehat{q}^*F(-1)$$

ou encore, si l'on note  $\mathfrak{m}_{l^\vee}$  l'idéal maximal du point  $l^\vee$ , à la donnée d'une section non nulle

$$O_{\mathbb{P}^2} \hookrightarrow F(-1) \otimes \mathfrak{m}_{l^\vee}(1)$$

Par la suite si  $h^0(\mathcal{J}_Z(r+1)) = 0$  on a obligatoirement  $l^\vee \in Z$ . □

**13 Théorème.** Soient  $Z$  et  $Z'$  deux groupes de points de  $\mathbb{P}^{2V}$  de longueur  $l(O_Z) \geq d_2(r) + (r + 1)$  (pour que les droites instables ne remplissent pas tout  $\mathbb{P}^{2V}$ ) ne possédant pas de droite  $(r + 2)$ -sécante et qui vérifient  $E_r(Z) \simeq E_r(Z')$ . Alors un des deux cas se produit :

- 1)  $Z = Z'$  à permutation près.
- 2)  $Z$  et  $Z'$  sont sur une même courbe  $X_{r+1}$  de degré  $r + 1$  et il existe un faisceau  $\mathcal{L}$  de rang 1 sur  $X_{r+1}$  tel que  $E(Z) \simeq E(X_{r+1}, \mathcal{L})$

*Démonstration.* Si  $Z \neq Z'$  il existe au moins une droite  $l$  telle que  $l^\vee \notin Z$  et pourtant  $l^\vee \in W(E_r(Z))$ . D'après la proposition 11 il existe une courbe de degré  $r+1$  contenant  $Z$ . Soit  $X_{r+1}$  une telle courbe et  $\{F=0\}$  son équation. Nous avons, dans  $\mathbb{P}^{2\vee}$ , la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1) \xrightarrow{F} \mathcal{J}_Z(r) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

où  $\mathcal{L}$  est donné par la restriction du faisceau d'idéaux  $\mathcal{J}_Z(r)$  à la courbe  $X_{r+1}$ . Comme le faisceau  $q^*O_{\mathbb{P}^{2\vee}}(-1)$  n'a ni image directe par  $p$  ni image directe supérieure on en déduit que

$$p_*q^*\mathcal{J}_Z(r) = \bar{p}_*\bar{q}^*\mathcal{L}$$

Ce qui prouve le théorème. □

## Références

- [1] V.Ancona, G.Ottaviani, *Unstable hyperplanes for Steiner bundles and multidimensional matrices*, Advances in Geometry, 1 (2001), 165-192
- [2] E. Arrondo, *Schwarzenberger bundles of arbitrary rank on the projective space*, arXiv :0807.1645
- [3] P.Deligne, Théorie de Hodge II, Publ.Math. IHES, **40** (1971), 5-58.
- [4] I.Dolgachev, *Logarithmic sheaves attached to arrangements of hyperplanes*, J.Math.Kyoto Univ. 47, (2007), 35-64
- [5] I.Dolgachev et M.Kapranov, *Arrangements of hyperplanes and vector bundles on  $\mathbf{P}_n$* , Duke Math.J. **71**, (1993), 633-664..
- [6] C. Okonek, M. Schneider et H. Spindler, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Progress in Mathematics, 3, Boston, Basel, Stuttgart, Birkhuser, 1980
- [7] R.L.E. Schwarzenberger, *Vector bundles on the projective plane*, Proc. London Math. Soc. 11 (1961), 623-640.
- [8] J. Vallès, *Fibrés logarithmiques sur le plan projectif*, Annales Mathématiques de Toulouse , (2006)
- [9] Vallès, J., *Nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner*, Math. Zeit., **233**, (2000), 507-514.

Laboratoire de Mathématiques appliquées de Pau et de Pays de l'Adour,  
Avenue de l'Université  
64000 Pau(France) ;  
email : jean.valles@univ-pau.fr