



**HAL**  
open science

## Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité

Shéhérazade Nineb, Pierre Alart, David Dureisseix

► **To cite this version:**

Shéhérazade Nineb, Pierre Alart, David Dureisseix. Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité. Revue Européenne des Éléments Finis, 2006, 15 (1-3), pp.319-328. 10.3166/remn.15.319-328 . hal-00325929

**HAL Id: hal-00325929**

**<https://hal.science/hal-00325929>**

Submitted on 7 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité

Shéhérazade Nineb<sup>1</sup>, Pierre Alart<sup>1</sup>, and David Dureisseix<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique et Génie Civil UM2-CNRS CC048,  
Place Eugène Bataillon F-34095 Montpellier CEDEX 5

Une des particularités des problèmes multicontacts réside dans le très grand nombre de contacts ou d'interactions qui conduit à des problèmes de grande taille. Ces derniers, source de difficultés numériques, ont engendré l'élaboration de différentes approches, notamment la parallélisation d'algorithmes. Nous poursuivons donc dans ce sens en nous intéressant à une approche multiéchelle de type LATIN (Large Time INcrement) restreinte dans un premier temps à une problématique intermédiaire : celle des systèmes de tenségrité vus comme des milieux discrets modèles.

A specific feature of multicontact problems is the large number of contact or interaction conditions that leads to large scale problems. Several approaches, among them algorithm parallelization, have been designed to tackle the numerical difficulties arising from such problems. This work belongs to these algorithms, using the LATIN (LArge Time INcrement) multiscale approach. As a first step, the case of tensegrity systems is considered as a particular discrete medium.

This is a preprint of the article published by Taylor & Francis in *Revue Européenne des Éléments Finis / European Journal of Computational Mechanics* 15(1-3) :319-328, 2006, available online : [www.tandfonline.com/10.3166/remm.15.319-328](http://www.tandfonline.com/10.3166/remm.15.319-328).

**Keywords :** LATIN micro/macro, multiéchelle, systèmes discrets, non régulier, dcomposition de domaine

LATIN micro/macro, multiscale, discrete systems, nonsmooth, domain decomposition

# 1 Introduction

Les systèmes discrets non réguliers peuvent provenir de différentes modélisations mécaniques. Par exemple, les systèmes granulaires [7] où les interactions entre grains sont de type contact frottant, ou encore les systèmes de tensegrité [8] où un grand nombre de câbles peuvent se détendre, conduisent à des problèmes non réguliers de grande taille. Lorsque le nombre de grains, ou de câbles, devient important, une approche multiéchelle intégrant une technique d'homogénéisation peut être bien adaptée comme stratégie de résolution de ces problèmes en complément de techniques numériques avancées (parallélisation [14], gradient conjugué [13],...) On s'intéresse ici au cas des structures de tensegrité, notamment dans le cas où elles sont construites à partir de l'agencement de modules élémentaires. Dans cet article, l'approche LATIN micro-macro [5] initialement développée pour les milieux continus hétérogènes et testée sur des cas bidimensionnels [6, 11] est tendue au cas des milieux discrets et appliquée à une nappe de tensegrité tridimensionnelle.

La section suivante présente le problème de référence et sa formulation dans une approche de décomposition de domaine multichelle. La section 3 est consacrée à la stratégie de résolution et la section 4 présente la simulation réalisée d'une nappe de tensegrité.

## 2 Formulation du problème

Les systèmes de tensegrité sont des systèmes réticulés, spatiaux, constitués d'éléments rectilignes nommés "barres" ou "câbles", voir figure 1 [8, 12]. Les barres sont soumises à des sollicitations de compression et ne sont pas connectées entre elles, les câbles à des sollicitations de traction. Les liaisons entre ces éléments se font par l'intermédiaire de rotules parfaites portant le nom de "nœuds". Par la suite, les câbles et les barres seront qualifiés de "liens". Ces systèmes admettent des états d'autocontrainte c'est à dire des états de tension non nulle vérifiant l'équilibre sans chargement extérieur et assurant la rigidité de la structure. On se place sous les hypothèses de petites perturbations, dans le cas statique. La structure étudiée occupe un domaine  $\Omega$ . Elle est soumise à des déplacements imposés,  $U_d$ , sur une partie  $\Omega_1$  des nœuds, et à des charges imposées,  $F_d$ , sur la partie  $\Omega_2$  complémentaire. On considère qu'il n'y a pas de charge répartie pour simplifier la présentation. La configuration finale étant supposée confondue avec la configuration initiale, et comme seul cet état nous intéresse, le temps n'est pas un paramètre du problème. On définit la déformation dans chaque élément  $j$  (barre ou câble) par  $\epsilon_j = \frac{W_j}{l_j}$  où  $l_j$  est la longueur de l'élément et  $W_j$  la variation de cette longueur (analogue du champ de déformation en milieu continu). Le vecteur des valeurs de variation de longueurs,  $W$ , s'exprime linéairement en fonction du vecteur des déplacements des nœuds  $U$  sous la forme  $W = BU$ .

- Le problème à résoudre consiste donc trouver le couple  $(U, F)$  vérifiant :
- l’admissibilité cinématique :  $U|_{\Omega_1} = U_d$  et  $W = BU$ ,
  - l’équilibre écrit sous forme faible :

$$\forall U^*, U^*|_{\Omega_1} = 0, \quad \sum_{j \in \Omega} F_j \cdot W_j^* = \sum_{i \in \Omega_2} F_{d_i} \cdot U_i^*$$

avec  $W^* = BU^*$ , où  $F_j$  représente l’effort dans un lien  $j$  (analogue du champ de contrainte en milieu continu),

- le comportement des câbles et des barres, voir figure 2, où  $F_1$  est la précontrainte initiale installée dans les câbles suppose connue ici, et  $W_1 = kF_1$  où  $k$  est la raideur du câble.

La stratégie proposée pour résoudre ce type de problème est une extension des approches micro-macro développées pour les milieux continus [5] au cas des systèmes discrets.

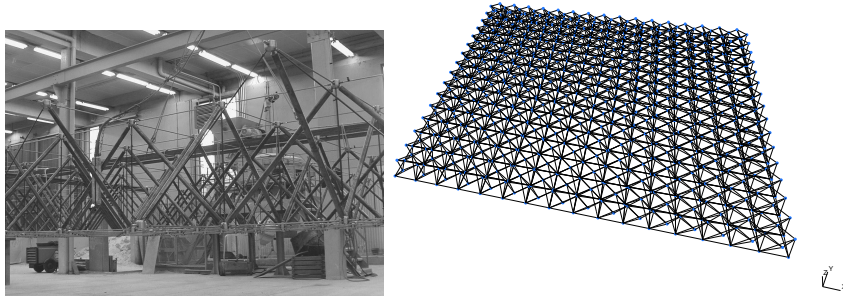


FIGURE 1: A gauche, structure de tensgrit du projet Tensarch (d’après R. Motro); droite, maillage d’une nappe bidimensionnelle.

## 2.1 Sous-structuration

Une première démarche vers une reformulation du problème, consiste en une décomposition de la structure en sous-structures et interfaces. On peut

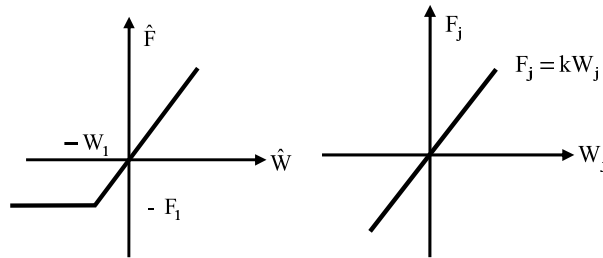


FIGURE 2: Graphes du comportement des câbles ( gauche) et des barres (à droite).

procéder de deux manières : soit on ventile les nœuds parmi les sous-structures, les interfaces sont alors les liens reliant une sous-structure à une autre ; soit on ventile les liens parmi les sous-structures, les interfaces sont alors les nœuds reliant une sous-structure à une autre. C'est ce dernier cas qui est envisagé ici, figure 3, le comportement des interfaces est alors parfait (équilibre des efforts et continuité des déplacements aux nœuds) et les non régularités sont localisées dans les sous-structures. Cette stratégie est en quelque sorte duale de celle proposée dans [11] où la non linéarité (contact dans les fissures) est isolé dans les interfaces ; en ce sens elle est plus proche de celle utilisée dans [1].

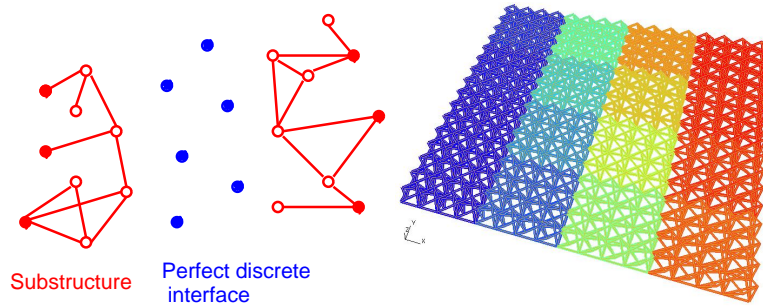


FIGURE 3: Interface discrète et sous-structuration d'une nappe de tenségrité (en  $4 \times 4$  sous-structures).

## 2.2 Description micro/macro

La définition des champs microscopiques et macroscopiques porte sur les quantités d'interface du problème sous-structuré. On suit ici la démarche utilisée dans [5, 3]. Par interface locale  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $\Omega_E$  et  $\Omega_{E'}$ , étant donné un champ discret de forces aux nœuds de l'interface  $F_{E\Gamma}$  agissant sur  $\Omega_E$  par exemple, on définit sa partie macro  $F_{E\Gamma}^M$  comme étant sa résultante et son moment résultant. D'autres choix pourraient être retenus en particulier la possibilité de retenir des moments généralisés d'ordre plus élevé, mais cela augmente rapidement la taille du problème macro et n'est intéressant que si la convergence est suffisamment améliorée pour compenser ce coût. Ici, nous nous restreignons au choix précédent de partie macro limite.

Avec une approche en effort, on choisit d'écrire  $F_{E\Gamma} = F_{E\Gamma}^M + F_{E\Gamma}^m$  où  $F_{E\Gamma}^m$  est le complément micro du champ d'effort. Les quantités micro  $V_{E\Gamma}^m$  et macro  $V_{E\Gamma}^M$  d'un champ de déplacement aux nœuds de l'interface  $V_{E\Gamma}$  sont obtenues par la dualité sur l'interface  $F_{E\Gamma} \cdot V_{E\Gamma} = F_{E\Gamma}^M \cdot V_{E\Gamma}^M + F_{E\Gamma}^m \cdot V_{E\Gamma}^m$ . On en déduit directement que  $V_{E\Gamma}^M$  contient alors les translations et rotations moyennes du champ discret de déplacement.

À la différence d'un partitionnement d'un milieu continu [5, 3], le cas d'un milieu discret conduit à une connectivité de la décomposition plus élevée

(grand nombre d’interfaces par rapport au nombre de sous-structures) mais aussi à quelques interfaces de petite taille (faible nombre de nœuds). De telles interfaces, qualifiées de “faibles”, peuvent avoir trop peu de nœuds pour décomposer leur espace de discrétisation en un sous espace macro et un sous espace micro (par exemple moins de quatre nœuds en 3D). On choisit alors de ne pas définir de parties macro sur ces interfaces faibles.

### 3 Stratégie de calcul

L’approche utilisée est de type LATIN identique à [3]. La stratégie est itérative, et chaque itération comporte une étape linéaire et une étape locale.

L’étape linéaire conduit à un problème de type élasticité linéaire, indépendant par sous-structure ainsi qu’à un problème global généralisé portant uniquement sur les quantités macro (résultantes et moments dans les interfaces). Il est très similaire à celui utilisé dans [3] et n’est pas détaillé ici. Le lecteur intéressé par le cas des systèmes discrets pourra trouver son expression détaillée dans [10].

Dans l’étape locale, on obtient :

- par interface, un problème explicite local en chaque nœud d’interface. Avec le choix de la définition des interfaces fait ici, ce problème reste de plus linéaire, le comportement des nœuds consistant à transférer déplacement et effort de part et d’autre de l’interface.

- par sous-structure : on s’intéresse au comportement des câbles et des barres, en cherchant à obtenir les efforts intérieurs  $\widehat{F}$  dans les éléments et leur allongement  $\widehat{W}$ .

Pour les barres, les inconnues  $(\widehat{F}, \widehat{W})$  doivent vérifier :

- le comportement des barres (figure 2) :  $\widehat{F} = k\widehat{W}$ ,
- une direction de recherche à partir de l’estimation de la solution  $(F, W)$  obtenue à l’étape linéaire précédente :  $(\widehat{F} - F) + l(\widehat{W} - W) = 0$  où  $l$  est un paramètre de la méthode, homogène à  $k$ . Il n’influe pas sur la solution à convergence, mais peut changer le taux de convergence de l’algorithme. Le problème obtenu est linéaire et explicite en  $(\widehat{F}, \widehat{W})$ .

Pour les câbles, les inconnues  $(\widehat{F}, \widehat{W})$  doivent vérifier :

- le comportement des câbles (figure 2),
- une direction de recherche, prise sous la même forme que pour les barres. Avec le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} \widehat{F}_T = \widehat{F} + F_1 \\ \widehat{R}_T = -(\widehat{W} + W_1) + k^{-1}(\widehat{F} + F_1) \end{cases} \quad (1)$$

où  $F_1$  est la précontrainte initiale installée dans les câbles et  $W_1 = kF_1$ , le problème obtenu est un problème de complémentarité (LCP)

scalaire [4] pour chaque cble :

$$\begin{cases} \widehat{R}_T - (l^{-1} + k^{-1})\widehat{F}_T = -[(W + W_1) + l^{-1}(F + F_1)] \\ 0 \leq \widehat{R}_T \perp \widehat{F}_T \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Sous la forme précédente, la stratégie utilisée fait partie de la famille des méthodes de décomposition de domaine multichelles, contenant, entre autres, pour les problèmes de contact, les approches développées dans [1, 11, 2]. Ici, nous ne sommes pas préoccupés par la parallélisation de l'approche proposée mais par son utilisation comme solveur séquentiel.

## 4 Exemple de résultat

On s'intéresse à des nappes de différentes tailles obtenues par duplication d'un module autocontraint [8, 12] constitué de 8 nœuds, 12 câbles et 4 barres (figure 4). Les nœuds de la partie inférieure sont bloqués sur deux bords uniquement et des efforts verticaux constants sont appliqués sur les nœuds complémentaires. En fonctionnement, le chargement (ou la surcharge) appliqué peut aller jusqu'à détendre une partie des câbles, jusqu'à une valeur critique où il y a perte de rigidité de la structure, analogue du flambement pour un milieu continu, pouvant aller jusqu'à l'apparition de mécanismes. On s'intéresse ici à ce type de chargement, et pour des structures de grande taille.

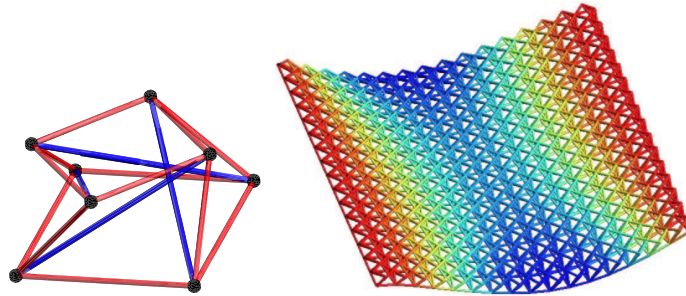


FIGURE 4: Demi-cuboctaèdre utilisé ( gauche) et résultats sur une structure de tensegrité de 16 sous-structures (champ de déplacement amplifié 10 fois droite).

Les nappes successives sont constituées de 4, 9, 16, 25 et 36 sous-structures (contenant chacune 16 modules) et respectivement 6, 20, 42, 72 et 110 interfaces (dont 4, 12, 24, 40 et 60 interfaces fortes).

On s'intéresse à l'évolution du taux de convergence en fonction du nombre de sous-structures (figure 5). Afin de comparer des problèmes dont le taux de non régularité est sensiblement équivalent, les efforts  $F_d$  appliqués aux nœuds de chacune des nappes sont ajustés pour obtenir une même fraction de câbles détendus lors de la mise en charge. Le type de problème posé ressemblant à une

plaque sur appuis simples charge uniformément, on peut s'attendre une dérive seconde de la flèche (liée à la déformation des modules constituant la plaque) qui varie proportionnellement à la charge (dans le cas linéaire) et au carré de la longueur d'un ct.

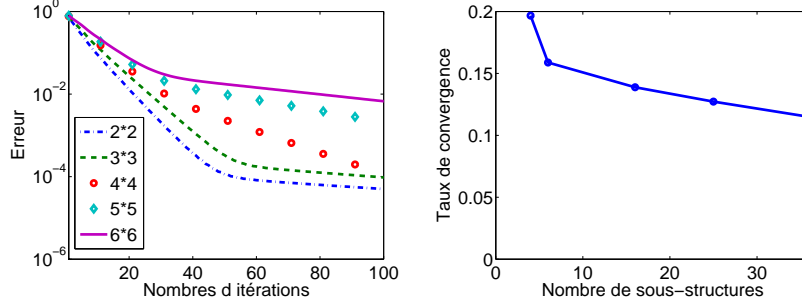


FIGURE 5: Erreur au cours des itérations et taux de convergence pour des grilles de différentes tailles.

Dans le cas des nappes de tenseurs étudiées, la charge est  $F_d$  et la longueur d'un ct varie comme la racine du nombre de sous-structures  $N_S$ . On choisit donc un chargement variant comme  $N_S^{-1/2}$ . Le tableau 1 précise les valeurs en question.

Les autres caractéristiques des structures sont données dans le tableau 2.

$N_S$	Nombre de câbles	$F_d$	Pourcentage de câbles tendus	Taux de convergence initial
$2 \times 2$	768	$4 \times F_0$	14.06%	0.1967
$3 \times 3$	1728	$1.8 \times F_0$	11.92%	0.1588
$4 \times 4$	3072	$F_0$	13.28%	0.1388
$5 \times 5$	4800	$0.64 \times F_0$	15.42%	0.1272
$6 \times 6$	6912	$0.44 \times F_0$	16.52%	0.1149

TABLE 1: Caractéristiques des simulations numériques

La figure 4 présente la déformée obtenue dans le cas d'une grille composée de  $4 \times 4$  sous-structures. Dans les cas présentés, on arrive à une détente de 14 % en moyenne des câbles (tableau 1). On reste encore avec un niveau de charge choisi dans le domaine de fonctionnement stable de la structure, pour lequel elle continue de présenter une réserve de rigidité. La figure 6 donne la répartition des tensions dans les câbles après chargement de chacune des nappes.

Pour tester la convergence de l'algorithme, une solution de référence est tout d'abord obtenue pour chaque nappe avec un algorithme différent ; il s'agit ici d'un gradient projet conjugué appliqué à une formulation LCP globale du



$H = 0.5$ m	Hauteur du module
$L = 1$ m	Longueur du module
$S_c = 0.5 \cdot 10^{-4}$ m <sup>2</sup>	Section des cbles
$E_c = 10^{11}$ Pa	Module d'Young des cbles
$S_b = 2.8 \cdot 10^{-4}$ m <sup>2</sup>	Section des barres
$E_b = 2 \cdot 10^{11}$ Pa	Module d'Young des barres
$F_{1b} = 2000$ N	Prcontrainte des cbles infrieurs
$F_{1c} = \sqrt{2} \times 2000$ N	Prcontrainte des cbles suprieurs
$F_{1c} = \sqrt{(1 + 4\frac{H^2}{L^2})} \times 2000$ N	Prcontrainte des cbles inclins
$F_{1b} = -\sqrt{(5 + 4\frac{H^2}{L^2})} \times 2000$ N	Prcontrainte des barres
$F_0 = 40$ N	Charge verticale en chaque nœud

TABLE 2: Paramtres caractristiques

problme, qu'on peut trouver dans [10]. À chaque itration de l'approche multichelle propose, une erreur en nergie entre la solution produite et la rfrence est calcule, et son volution est rporte sur la figure 5 ( gauche).

De manire gnrale, on peut observer deux taux de convergence diffrents : un taux initial lorsque la solution est corrige globalement lors des premires itrations, puis un deuxime, moins lev aprs 30 40 itrations lorsque les corrections apportees sont plus locales. Ceci peut tre dû l'utilisation d'une direction de recherche constante prise gale la "raideur" de chaque lien :  $l = k$ . Lorsque le statut des cbles est peu prs fig, il est clair que cette raideur est loigne de la raideur tangente des cbles dtendus. Une adaptation de la direction de recherche est l'une des premires tudes envisages dans la suite des dveloppements pour amliorer la convergence.

Ici, nous cherchons quantifier la convergence en relevant pour chaque simulation le taux de convergence initial, calcul de la faon suivante :  $\tau = -\frac{\log \frac{e(n)}{e(1)}}{n-1}$  o  $e(n)$  dsigne l'erreur obtenue l'itration  $n$ . Les valeurs trouves sont reportees sur la figure 5 ( droite) et dans le tableau 1.

Une mthode de dcomposition de domaine numriquement extensible exhibe un taux de convergence peu dpendant du nombre  $N_S$  de sous-structure utilis, lorsque la taille du problme local (par sous-structure) reste constant. On observe ici une lgre dpendance (si on excepte le cas  $N_S = 4$  o le nombre de sous-structures est trs faible) du taux de convergence initial vis vis de  $N_S$ . L'influence du choix de la direction de recherche sur cette extensibilit numrique devra aussi tre prcise.

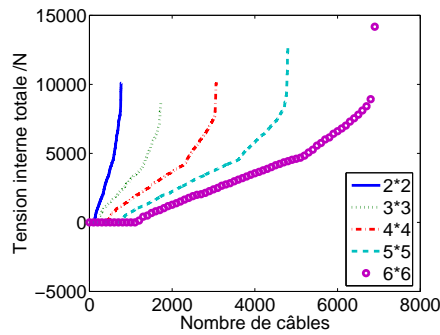


FIGURE 6: Tensions internes totales dans les cbles.

## 5 Conclusions et perspectives

La simulation des systèmes de tenségrité de grande taille, lorsque les charges appliquées conduisent à la détente de nombreux câbles, nécessite la résolution de grands systèmes non réguliers. L'adaptation d'une approche multiéchelle de décomposition de domaine a été réalisée pour traiter ces systèmes discrets lorsque la non régularité est présente à l'intérieur des sous-structures. L'influence du nombre de sous-structures sur le taux de convergence a t présent.

À court terme, il sera intéressant d'avoir une sélection automatique d'une direction de recherche optimale, vis vis du taux de convergence de l'algorithme; le critère d'arrêt de ce dernier devra être robuste. La direction de recherche, choisie ici locale par élément (câble ou barre), pourrait aussi être prise globale par sous-structure; auquel cas le problème LCP devient vectoriel et requiert une résolution adaptée [9, 13]. La méthode fournit aussi en sous produit une homogénéisation des sous-structures, c'est à dire d'un groupe de cellules autocontraintes, et une interprétation de ce comportement homogénéisé sera étudiée.

À plus long terme, l'utilisation de ce type d'approche pourra être étendu au cas de la dynamique des milieux granulaires, pour laquelle une difficulté supplémentaire est l'évolution importante de la configuration lors des écoulements éventuels des grains.

Cette tude a t partiellement supporte par le projet européen IST2001-37172 SICONOS (Simulation and Control of Non Smooth Dynamical Systems).

## Références

- [1] M. Barboteu, P. Alart, and M. Vidrascu. A domain decomposition strategy for nonclassical frictional multi-contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :4785–4803, 2001.
- [2] D. Dureisseix and C. Farhat. A numerically scalable domain decom-

- position method for the solution of frictionless contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, number 12 :2643–2666, 2001.
- [3] D. Dureisseix, P. Ladevèze, and O. Loiseau. A micro/macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :121–138, 2001.
- [4] M. Katta. *Principal pivoting methods for LCP*. Department of Industrial and Operations Engineering, University of Michigan, 1997.
- [5] P. Ladevèze and D. Dureisseix. A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *Int. J. for Comput. Civil and Struct. Engng.*, 1 :18–28, 2000.
- [6] O. Loiseau, P. Ladevèze, and D. Dureisseix. Sur une stratégie de calcul multichelle pour l’analyse des structures composites : discrétisation et performances. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 11, number 2-4 :349–362, 2002.
- [7] J. Moreau. Numerical aspects of sweeping process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :329–349, 1999.
- [8] R. Motro. *Tensegrity*. Hermes Science Publishing, London, 2003.
- [9] S. Nineb, P. Alart, F. Dubois, and D. Dureisseix. Solveurs de systèmes de complémentarité et application à la tensegrité. In *Actes du 17e Congrès Français de Mécanique*, Troyes, 2005.
- [10] S. Nineb, P. Alart, and D. Dureisseix. Domain decomposition approach for nonsmooth discrete problems - example of a tensegrity structure. *Computers and Structures*, à paraître.
- [11] A. Nouy, P. Ladevèze, and O. Loiseau. A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891, 2002.
- [12] J. Quirant, M. Kazi-Aoual, and R. Motro. Designing tensegrity systems : the case of a double layer grid. *Engineering Structures*, 25(9) :1121–1130, 2003.
- [13] M. Renouf and P. Alart. Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004.
- [14] M. Renouf, F. Dubois, and P. Alart. A parallel version of non smooth contact dynamics algorithm applied to simulation of granular medium. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168 :375–382, 2004.