



**HAL**  
open science

## Une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques prenant en compte les aspects multiéchelles : application à la poroélasticité

David Néron, Pierre Ladevèze, David Dureisseix, Bernard A. Schrefler

### ► To cite this version:

David Néron, Pierre Ladevèze, David Dureisseix, Bernard A. Schrefler. Une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques prenant en compte les aspects multiéchelles : application à la poroélasticité. 6e Colloque National en Calcul des Structures, May 2003, Giens, France. pp.1-8. hal-00325924

**HAL Id: hal-00325924**

**<https://hal.science/hal-00325924v1>**

Submitted on 10 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques prenant en compte les aspects multiéchelles : application à la poroélasticité

D. Néron<sup>a</sup>, P. Ladevèze<sup>a</sup>, D. Dureisseix<sup>b</sup>, B. A. Schrefler<sup>c</sup>

<sup>a</sup> LMT Cachan (ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)

61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX, France

{ladeveze,neron}@lmt.ens-cachan.fr

<sup>b</sup> LMGC (Université Montpellier 2)

CC 048, place Eugène Bataillon, F-34095 MONTPELLIER CEDEX 5, France

dureisse@lmgc.univ-montp2.fr

<sup>c</sup> Department of Structural and Transportation Engineering (Université de Padoue)

Via Marzolo 9, I-35131 PADOUE, Italie

bas@caronte.dic.unipd.it

## Résumé

Une nouvelle stratégie, basée sur la méthode LATIN, a été développée pour résoudre les problèmes multiphysiques et appliquée avec succès à la consolidation d'un milieu poreux saturé. Une version multiéchelle en temps a ensuite été présentée afin de prendre en compte les échelles introduites par les différentes physiques. Ici, on propose une approximation de toutes les inconnues sous la forme d'une superposition de champs radiaux.

## 1 Introduction

Pour simuler les problèmes multiphysiques comme ceux d'interaction fluide-structure, on préfère souvent l'efficacité des méthodes de partitionnement et des techniques *staggered* [3, 10, 12, 2] au calcul direct, plus coûteux. Ces stratégies permettent en outre d'effectuer la résolution en couplant des codes de calcul dédiés à chacune des physiques.

Récemment, une nouvelle stratégie, basée sur la méthode à grand incrément de temps (LATIN [5]) a été développée pour résoudre les problèmes multiphysiques et appliquée avec succès à la consolidation d'un milieu poreux saturé (problème fluide-structure fortement couplé). Les principes généraux et des exemples de faisabilité ont été présentés dans [1]. La méthode avait été comparée à l'ISPP (*Iterative Staggered Partitioned Procedure* [11]), un des schémas classiques de partitionnement.

L'utilisation de codes dédiés conduit naturellement à essayer de modéliser et discrétiser indépendamment les différentes physiques. En effet, lorsqu'on simule des phénomènes multiphysiques, les échelles de temps et d'espace qui doivent être prises en compte peuvent être très différentes. C'est pourquoi un aspect multiéchelle en temps a été ajouté à la méthode pour améliorer les performances.

Dans de nombreux cas, le coût pour atteindre la convergence est lié à la complexité en temps du chargement. Il est donc intéressant d'étudier le comportement de l'algorithme vis-à-vis de cette complexité.

Enfin, on a introduit dans [1] l'utilisation d'une approximation des quantités cinématiques par une somme des chargements radiaux. Cette approximation est étendue ici aux quantités statiques afin d'accroître la modularité de l'approche et de réduire le coup de stockage.

## 2 Problème de référence

Décrivons brièvement un problème typique de consolidation. Un volume élémentaire représentatif est constitué d'un squelette solide connecté et d'un fluide saturant remplissant toute la porosité connectée.

L'état de ce VER homogénéisé est entièrement donné par  $\mathbf{s} = (\boldsymbol{\varepsilon}, p, \underline{Z}, \boldsymbol{\sigma}, q, \underline{W})$ , définie sur l'ensemble de la structure  $\Omega$  et sur tout l'intervalle de temps  $[0, T]$  considérés. Pour les quantités solides,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  désigne la déformation et  $\boldsymbol{\sigma}$  la contrainte. Pour les quantités fluides,  $p$  désigne la pression interstitielle du fluide saturant,  $\underline{Z}$  son gradient,  $\underline{W}$  l'opposé de la vitesse de Darcy et, finalement,  $q$  le taux d'accumulation de fluide dans le VER.

Dans le cas linéaire, les *relations de comportement* sont :

- la loi de Hooke :  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - bp\mathbf{1}$  où  $\mathbf{D}$  est l'opérateur de Hooke du squelette drainé, et  $b$  le coefficient de Biot ;
- la loi de Darcy :  $\underline{W} = \mathbf{H}\underline{Z}$  où  $\mathbf{H}$  est le quotient entre la perméabilité et la viscosité dynamique du milieu homogénéisé ;
- l'influence de la compressibilité :  $q = \frac{1}{Q}\dot{p} + b\text{Tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  où  $Q$  est le module de Biot.

Enfin, les *équations de conservation* sont découplées (au moins dans le volume) : équilibre des contraintes et compatibilité des déformations pour la partie solide, conservation de la masse fluide et compatibilité pour la partie fluide.

Le problème consiste donc à trouver  $\mathbf{s}$  dans l'espace correspondant  $\mathbf{S}^{[0,T]}$  qui vérifie à chaque pas de temps les conditions précédentes.

## 3 La méthode LATIN pour les problèmes multiphysiques

La méthode LATIN est une stratégie itérative non incrémentale qui a été initialement proposée pour résoudre les problèmes non-linéaires d'évolution [5]. Elle a depuis été implantée avec succès pour traiter les problèmes de dynamique, de flambage, de décomposition de domaine, etc. [9, 7, 8]. Pour les problèmes multiphysiques, la méthode complète a été décrite dans [1]. Dans la suite, on ne rappelle que les idées principales.

À chaque itération, la stratégie génère une approximation de la solution sur le domaine tout entier et sur l'ensemble de l'intervalle de temps étudié. Elle repose sur trois principes :

- Le premier principe consiste à séparer les difficultés. Afin d'éviter d'avoir à traiter simultanément un problème global et un problème couplé, on forme un premier groupe  $\mathbf{A}_d$  contenant les équations d'admissibilité (linéaires découplées, éventuellement globales) et un second groupe  $\mathbf{\Gamma}$  contenant les relations de comportement (locales, éventuellement couplées). On choisit d'inclure les conditions initiales dans  $\mathbf{\Gamma}$ . La solution  $\mathbf{s}_{ex}$  du problème de référence est donc  $\mathbf{s}_{ex} = \mathbf{A}_d \cap \mathbf{\Gamma}$ .

- Le deuxième principe consiste à chercher  $\mathbf{s}_{ex}$  en construisant alternativement une solution approchée de  $\mathbf{A}_d$  et de  $\mathbf{\Gamma}$ . Chaque itération comporte deux étapes :
  - connaissant un élément  $\mathbf{s}_n \in \mathbf{A}_d$ , l'étape locale à l'itération  $n + 1$  construit un élément  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$  en utilisant une première direction de recherche ;
  - connaissant un élément  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \mathbf{\Gamma}$ , l'étape linéaire à l'itération  $n + 1$  construit un élément  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$  en utilisant une seconde direction de recherche, conjuguée de la précédente afin que les deux physiques restent découplées.

La convergence de l'approche est assurée par une condition (peu restrictive) sur le choix des directions de recherche [5].

- Le troisième principe consiste à tenir compte du fait que les approximations successives sont définies sur le domaine et sur l'intervalle d'étude tout entiers pour représenter la solution sur une base de chargements radiaux. Ce dernier point a été détaillé dans [5] et sera développé pour notre cas particulier dans la suite.

Brièvement, cette approximation permet d'accroître l'efficacité et la modularité de la stratégie en réduisant le nombre de résolutions globales à effectuer.

Dans les sections qui suivent, la méthode LATIN sans ce troisième principe sera notée « sans P3 » ; avec une approximation des quantités cinématiques uniquement « 1/2P3 » ; avec une approximation de tous les champs « P3 ».

## 4 Cas test

Le cas test proposé est le problème de consolidation d'un sol en grès de Béréa. Les chargements imposés sont : un déplacement  $\underline{U}_d$  sur une partie de la frontière, une force  $\underline{F}_d$  sur la partie complémentaire, un flux de fluide  $w_d$  sur une autre partie de la frontière et une pression de pore  $p_d$  sur la partie complémentaire. On suppose qu'il n'y a pas de forces volumiques.

Pour comparer les résultats avec la stratégie ISPP, on introduit les notations suivantes :  $\eta_S$  et  $\eta_F$  sont respectivement les contributions solide et fluide à l'erreur totale  $\eta$  (de telle sorte que  $\eta^2 = \eta_S^2 + \eta_F^2$ ). Cette erreur est calculée vis-à-vis d'une solution de référence  $\mathbf{s}_{ex}$  obtenue grâce à l'approche monolithique [1]. On décide que la convergence est atteinte lorsque l'erreur  $\eta$  est suffisamment faible (moins de 1 %).  $n_T$  est le nombre de pas de temps dans l'intervalle étudié ;  $n_S$  et  $n_F$  sont les nombres de résolutions globales découplées pour le solide et le fluide (*i. e.* les parties coûteuses de l'algorithme).

Lorsqu'on les applique à des couplages forts (comme le transfert de fluide en milieux poreux) plutôt qu'à des couplages faibles [3], certaines méthodes *staggered* souffrent d'une perte de cohérence [13, 14]. L'approche ISPP retrouve cette cohérence grâce à des sous-itérations à chaque pas de temps entre les solveurs solide et fluide. Le nombre de résolutions globales pour chaque solveur est alors  $n_{sub} \times n_T$ .

Dans la méthode LATIN sans P3, deux problèmes globaux découplés sont résolus à chaque itération et à chaque pas de temps. Si  $n_{it}$  est le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence, le nombre de résolutions globales dans chaque solveur est  $n_{it} \times n_T$ . Avec l'approximation 1/2P3 introduite dans [1], seuls un champ pour le solide et un pour le fluide sont combinés afin de générer une base pour la solution. Une procédure automatique peut être mise en place pour ne construire ces champs que lorsque c'est nécessaire à l'amélioration de la solution.

Le cas test est le problème bi-dimensionnel de la Figure 1 dans lequel le flux du fluide est imposé. Trois cas de chargement différents ont été simulés et les résultats sont présentés dans le Tableau 1.

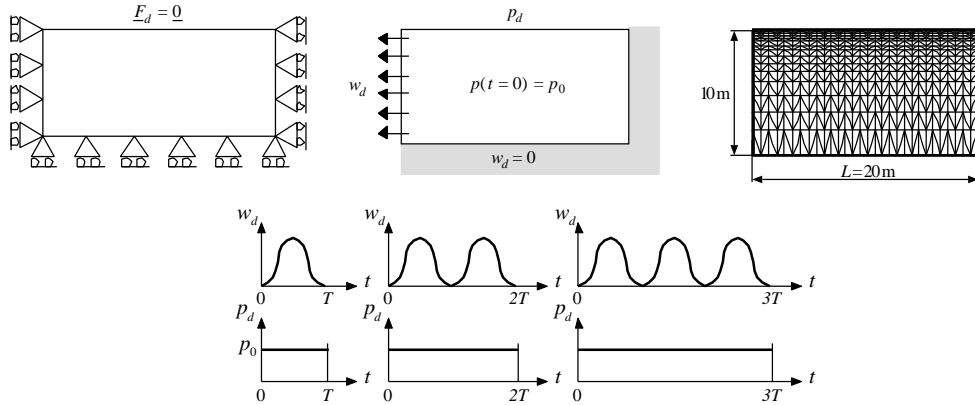


Figure 1: Problème avec flux imposé (en haut : quantités imposées solides et fluides, maillage ; en bas : trois cas de chargement)

cas test ( $n_T$ )	ISPP	LATIN sans P3	LATIN avec 1/2P3
	$n_S + n_F(n_{\text{sub}})$	$n_S + n_F(n_{\text{it}})$	$n_S + n_F(n_{\text{it}})$
1 (60)	240 + 240 (4)	720 + 720 (12)	4 + 8 (16)
2 (120)	600 + 600 (5)	1 920 + 1 920 (16)	6 + 10 (20)
3 (180)	900 + 900 (5)	3 420 + 3 420 (19)	11 + 12 (21)

Tableau 1: Nombre de résolutions globales

Étudions le comportement des algorithmes face à l'augmentation de la complexité en temps du chargement. On constate que pour un taux de convergence donné (*i. e.* un nombre de sous-itérations  $n_{\text{sub}}$  fixé), le coût de la méthode ISPP est directement relié au nombre de pas de temps  $n_T$ . En revanche, dans le cas de la LATIN avec 1/2P3, le nombre de champs générés  $n_S + n_F$  (et donc le coût de la simulation) n'augmente que très peu avec la complexité du chargement.

## 5 Une approche multiéchelle en temps

Dans notre cas, l'utilisation d'échelles de temps différentes pour la partie solide et la partie fluide n'affecte pas l'étape linéaire dans laquelle les calculs sur chaque physique sont indépendants. En revanche, l'étape locale demande une certaine attention puisque les différentes physiques y interagissent.

## 5.1 Une étape locale multiéchelle

La méthode décrite ici est une adaptation de la stratégie micro/macro proposée dans [6, 7] pour résoudre les problèmes multiéchelles en espace. Elle consiste à réécrire les inconnues sous la forme  $s = s^M + s^m$  où  $s^M$  est la partie « macroscopique » et  $s^m$  le complément « microscopique ». Dans notre cas, on choisit d'exprimer les quantités fluides avec les échelles macro et micro (*p. ex.*  $p = p^M + p^m$ ) tandis que les quantités solides sont décrites uniquement par leur partie macro (*p. ex.*  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^M$ ).

En introduisant un projecteur  $\boldsymbol{\pi}$ , la partie macro d'une fonction du temps  $f$  est  $f^M = \boldsymbol{\pi}f$  et la partie micro est le complément  $f^m = (\mathbf{id} - \boldsymbol{\pi})f$ . L'intervalle de temps étudié  $[0, T]$  est discrétisé en  $n_M$  sous-intervalles pour la partie solide et  $n$  sous-intervalles pour la partie fluide. Le ratio entre les pas de temps est donc  $\Delta t_S/\Delta t_F = n/n_M$ .

Le système couplé qui doit être résolu à l'étape locale est alors réécrit sous la forme de deux équations, l'une dont la résolution peut être faite sur la grille solide uniquement, l'autre sur la grille fluide. Le calcul est effectué par une méthode de point fixe.

## 5.2 Résultats numériques de l'approche multiéchelle

Cette approche multiéchelle en temps a été testée sur un problème de consolidation mono-dimensionnel. On a simulé le problème à force imposée décrit dans [1] avec la méthode LATIN sans P3. La partie solide était décrite uniquement sur une discrétisation macro contenant  $n_M = 32$  pas de temps tandis que la discrétisation fluide comportait  $n$  pas de temps.

$\Delta t_S/\Delta t_F$	$\eta_S$	$\eta_F$	$\eta$	$\eta_F/\eta_S$
1	$12,9 \cdot 10^{-4}$	$17,9 \cdot 10^{-4}$	$22,1 \cdot 10^{-4}$	1,39
2	$6,47 \cdot 10^{-4}$	$8,97 \cdot 10^{-4}$	$11,1 \cdot 10^{-4}$	1,38
4	$3,27 \cdot 10^{-4}$	$4,33 \cdot 10^{-4}$	$5,52 \cdot 10^{-4}$	1,35
8	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$2,18 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-4}$	1,26
<b>16</b>	$1,05 \cdot 10^{-4}$	$1,10 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-4}$	<b>1,05</b>
32	$0,82 \cdot 10^{-4}$	$0,71 \cdot 10^{-4}$	$1,08 \cdot 10^{-4}$	0,86
64	$0,77 \cdot 10^{-4}$	$0,66 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^{-4}$	0,85

Tableau 2: Contributions à l'erreur dans le cas où la partie solide est supposée avoir uniquement une échelle macro avec  $\Delta t_S = T/32$

Le Tableau 2 montre l'évolution des contributions  $\eta_S$  et  $\eta_F$  à l'erreur totale  $\eta$  en fonction de  $\Delta t_S/\Delta t_F$ . Comme on a affaire à un problème couplé, le raffinement de la discrétisation fluide diminue les deux contributions. Cependant, la contribution du fluide diminue plus rapidement que celle du solide. On peut observer qu'il faut un ratio  $\Delta t_S/\Delta t_F$  de l'ordre 16 pour que les contributions soient du même ordre de grandeur.

## 6 Approximation sous forme de chargements radiaux

### 6.1 Une approximation adaptée des inconnues

Dans [1] et dans le Tableau 1, on a vu que le troisième principe de la méthode (une approximation adaptée des inconnues) était nécessaire pour augmenter l'efficacité. Classiquement, il consiste à chercher les corrections  $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_n$  dans une base de chargements radiaux. En d'autres termes, les corrections des inconnues sont exprimées comme le produit d'une fonction scalaire du temps et d'un champ de l'espace.

Cependant, dans [1], cette approximation n'avait été mise en place que sur les corrections cinématiques  $\Delta \mathbf{e}$  et  $\Delta p$ , conduisant à ce qu'on désignait par la version 1/2P3. Cette approximation permettait de diminuer le nombre de systèmes globaux à résoudre mais elle n'avait malheureusement aucune influence sur le coût de stockage. En effet, comme dans la version sans P3, il était nécessaire de sauver la valeur des inconnues à chaque point de Gauss et à chaque pas de temps.

Ici, nous proposons d'étendre l'approximation radiale aux quantités statiques (ce qui sera désigné par la version P3). Cette solution ne devrait pas dégrader la convergence de la méthode mais réduire considérablement le coût de stockage puisqu'il suffit de sauver les quelques fonctions du temps et champs de l'espace qui sont générés automatiquement par l'algorithme.

### 6.2 Influence de l'approximation radiale

La Figure 2 montre l'influence de l'approximation sur la convergence de la méthode dans le cas mono-dimensionnel. Le nombre de pas de temps est fixé à 32 pour la discrétisation solide et 512 pour la discrétisation fluide. Un premier calcul a été réalisé sans P3. Un second avec seulement l'approximation des quantités cinématiques (la version 1/2P3 proposée dans [1]). Enfin, un dernier calcul a été réalisé avec l'approximation de tous les champs (la version P3 décrite ci-dessus). Les directions de recherche utilisées dans les trois cas étaient les mêmes.

On constate que l'approximation radiale ne dégrade pas la convergence et est donc bien adaptée à ce type de problème. Le Tableau 3 illustre son influence sur le coût du calcul. Il présente le nombre d'itérations  $n_{it}$  et le nombre de résolutions globales pour le solide  $n_S$  et pour le fluide  $n_F$  qui sont nécessaires pour atteindre une erreur totale  $\eta$  de 1 %.

sans P3	avec 1/2P3	avec P3
$n_S + n_F (n_{it})$	$n_S + n_F (n_{it})$	$n_S + n_F (n_{it})$
384 + 6144 (12)	16 + 16 (16)	24 + 24 (12)

Tableau 3: Comparaison du coût de la méthode LATIN avec ou sans approximation radiale (nombre de résolutions globales)

En terme de nombre de résolutions globales, il y a un ratio de 200 entre la méthode sans P3 et avec 1/2P3, et un ratio de 140 entre la méthode sans P3 et celle avec P3. Cette dernière est cependant de loin la plus intéressante en terme de modularité : dans le cas du couplage entre plusieurs codes éléments finis (un pour chaque problème physique), le volume d'informations

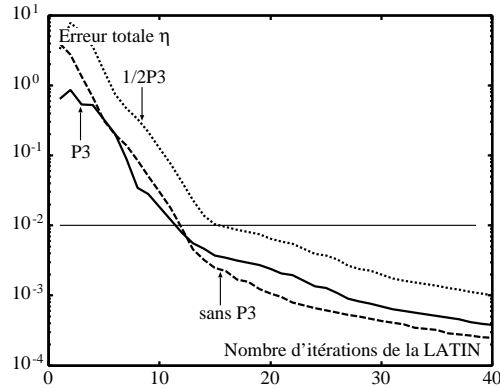


Figure 2: Convergence de la méthode LATIN avec ou sans approximation radiale

à échanger est considérablement diminué. Si on suppose que l'étape locale est dupliquée et effectuée dans chacun des codes, les transferts se résument à échanger une paire « fonction du temps, champ spatial » lorsque l'étape linéaire en génère une. En revanche, dans les approches incrémentales classiques [4], ces échanges doivent avoir lieu à chaque pas de temps.

## 7 Conclusion

Nous venons de décrire brièvement une nouvelle approche pour traiter les problèmes multiphysiques. Celle-ci est basée sur la méthode LATIN et a été testée avec succès sur le problème de consolidation d'un sol poreux saturé.

Dans la version multiéchelle en temps de la stratégie, il est possible d'utiliser des discrétisations différentes pour chacune des physiques. Si la résolution est effectuée en couplant plusieurs codes éléments finis, chacun d'eux peut avoir sa propre discrétisation en temps. Dans le cas des milieux poreux notamment, la discrétisation fluide doit être plus fine si l'on souhaite que les contributions de chaque physique à l'erreur totale soient du même ordre de grandeur. En outre, l'utilisation d'une approximation adaptée des inconnues a permis d'augmenter l'efficacité de l'approche, tant du point de vue coût de calcul que stockage.

Dans les essais numériques qui ont été réalisés, les discrétisations en temps étaient uniformes. Il serait intéressant d'envisager une procédure d'auto-adaptation de celles-ci. Des travaux concernant l'utilisation d'une formulation Galerkin discontinue en temps sont aussi en cours.

La prochaine étape sera de prendre en compte les aspects multiéchelles en espace. Une méthode mixte de décomposition de domaine, basée sur l'approche micro-macro, a déjà prouvé son efficacité pour les problèmes ne portant que sur la partie solide. Elle devrait facilement pouvoir être étendue à chaque physique afin d'utiliser des discrétisations indépendantes.

Enfin, la méthode doit maintenant être testée sur d'autres problèmes couplés, qui introduisent éventuellement des non-linéarités.



## Références

- [1] DUREISSEIX, D., LADEVÈZE, P., SCHREFLER, B. A. A computational strategy for multiphysics problems — application to poroelasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **56**(10), 1489–1510 (2003).
- [2] FARHAT, C., LESOINNE, M. Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **182**, 499–515 (2000).
- [3] FELIPPA, C. A., PARK, K. C. Staggered transient analysis procedures for coupled mechanical systems : formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **24**, 61–111 (1980).
- [4] FELIPPA, C. A., PARK, K. C., FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 3247–3270 (2001).
- [5] LADEVÈZE, P. *Nonlinear Computational Structural Mechanics — New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Springer Verlag (1999).
- [6] LADEVÈZE, P., DUREISSEIX, D. A new micro-macro computational strategy for structural analysis. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences*, **327**, 1237–1244 (1999).
- [7] LADEVÈZE, P., LOISEAU, O., DUREISSEIX, D. A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **52**(1–2), 121–138 (2001).
- [8] LADEVÈZE, P., NOUY, A. A multiscale computational method with time and space homogenization. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, **330**, 683–689 (2002).
- [9] LEMOUSSU, H., BOUCARD, P. A., LADEVÈZE, P. A 3-D shock computational strategy for real assembly and shock attenuator. *Advances in Engineering Software*, **33/7-10**, 517–526 (2002).
- [10] LEWIS, R. W., SCHREFLER, B. A., SIMONI, L. Coupling versus uncoupling in soil consolidation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **15**, 533–548 (1991).
- [11] MATTEAZZI, R., SCHREFLER, B., VITALIANI, R. *Comparisons of partitioned solution procedures for transient coupled problems in sequential and parallel processing*, pp. 351–357. *Advances in Computational Structures Technology*. Civil-Comp Ltd, Edinburgh, Scotland (1996).
- [12] PIPERNO, S., FARHAT, C., LARROUTUROU, B. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. Part I : model problem, theory and two-dimensional application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **124**, 79–112 (1995).
- [13] TURSKA, E., SCHREFLER, B. A. On convergence conditions of partitioned solution procedures for consolidation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **106**, 51–63 (1993).
- [14] TURSKA, E., SCHREFLER, B. A. On consistency, stability and convergence of staggered solution procedures. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, **5**, 265–271 (1994).