



HAL
open science

Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrodinger sur une variété: de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique.

Olivier Lablée

► **To cite this version:**

Olivier Lablée. Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrodinger sur une variété: de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique.. Gazette des Mathématiciens, 2008, 116, pp.11-27. hal-00325598

HAL Id: hal-00325598

<https://hal.science/hal-00325598>

Submitted on 1 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Spectre du laplacien et de l'opérateur de Schrödinger sur une variété : de la géométrie spectrale à l'analyse semi-classique

Olivier Lablée*

1 octobre 2008

1 Introduction

Il serait difficile de faire une présentation exhaustive de l'étude de l'opérateur laplacien et de celui de Schrödinger en quelques pages, néanmoins ces notes donnent un panorama partiel et historique sur l'étude spectrale de ces deux opérateurs. On y présente quelques résultats remarquables qui illustrent en particulier la diversité des thèmes mathématiques associés.

L'étude du laplacien dans l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^n , et plus généralement de l'opérateur de Schrödinger, est bien sûr très présente en physique, comme par exemple en mécanique quantique : dans un système physique constitué d'une particule se déplaçant dans une partie ouverte X de \mathbb{R}^n , l'espace de Hilbert associé est $L^2(X)$, et, si la particule n'est soumise à aucune force, l'hamiltonien¹ est :

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$$

où $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ est le laplacien de \mathbb{R}^n , m la masse de la particule, et \hbar la constante de Planck. Si au contraire la particule est soumise à un champ de force dérivant d'un potentiel réel V , l'hamiltonien est alors :

$$H = H_0 + V$$

V désignant l'opérateur de multiplication par la fonction V .

En géométrie riemannienne, l'opérateur de Laplace-Beltrami² est la généralisation du laplacien de \mathbb{R}^n . Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 à valeurs réelles définie sur une variété riemannienne (M, g) , et pour $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ une carte locale

*Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, Université Joseph Fourier Grenoble 1.

¹En physique il représente l'énergie de la particule, mathématiquement c'est une fonction (contexte classique) ou bien un opérateur linéaire (contexte quantique).

²Dans ces notes, on utilise la convention de signe des analystes pour l'opérateur de Laplace-Beltrami. Dans la convention des géomètres $\Delta_g f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$.

de la variété M , l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement laplacien de (M, g) , appliqué à la fonction f est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$$

où $g = \det(g_{ij})$ et $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$. Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur. Beaucoup de géomètres, motivés par le livre de Berger, Gauduchon et Mazet [10], se sont alors intéressés à cet invariant spectral. L'étude du laplacien, et plus particulièrement de son spectre, est un carrefour entre la théorie spectrale, l'analyse harmonique, la géométrie différentielle et même la théorie des groupes.

Le plan de ces notes est le suivant : Dans une première partie on donne le contexte mathématique de manière à voir le laplacien et l'opérateur de Schrödinger comme des opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert. La partie suivante est consacrée aux problèmes directs consistant à déterminer le spectre de ces opérateurs. Ensuite, dans une autre partie, on présente rapidement la problématique inverse : à savoir dans quelle mesure le spectre peut-il déterminer la géométrie de départ ? Enfin, la dernière partie est une invitation à l'analyse semi-classique.

2 Préliminaires

2.1 Le contexte

Considérons une variété riemannienne (M, g) complète connexe de dimension $n \geq 1$. On lui associe l'espace de Hilbert $L^2(M) = L^2(M, d\mathcal{V}_g)$, \mathcal{V}_g désignant le volume riemannien associé à la métrique g .

L'opérateur de Schrödinger H associé à la variété (M, g) de potentiel V , V étant une fonction de M dans \mathbb{R} , est défini comme l'opérateur linéaire non-borné sur les fonctions lisses à support compacte $\mathcal{C}_c^\infty(M, \mathbb{R})$ par :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_g + V \tag{1}$$

Δ_g étant le laplacien de (M, g) , et \hbar un paramètre positif. Par la suite, sauf dans la partie 5, pour des raisons de commodité d'écriture, on supposera que $\hbar = \sqrt{2}$. Dans le cas où $V \equiv 0$, on parle simplement d'opérateur laplacien.

Si $M = \mathbb{R}^n$ le laplacien canonique est $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

2.2 Motivation

On s'intéresse au problème spectral : Trouver les couples non-triviaux (λ, u) de scalaires complexes et de fonctions tels que :

$$-\Delta_g u + V u = \lambda u$$

(avec $u \in L^2(M)$ dans le cas non compact).

Dans le cas des variétés à bord on a besoin en supplément d'imposer des conditions au bord sur les fonctions u , comme par exemple les conditions de Dirichlet : on impose $u = 0$ sur le bord de M , ou celles de Neumann : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur le bord de M , n étant la normale extérieure au bord de M . Dans le cas des variétés compactes sans bord, comme par exemple la sphère, on parle de problème fermé.

Il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien (ou de l'opérateur de Schrödinger) sur une variété riemannienne complète (M, g) :

1. Les problèmes directs : étant donnée une variété riemannienne (M, g) , que dire du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ ou de celui de l'opérateur $-\Delta_g + V$?
2. Les problèmes inverses : étant donné le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$, que dire géométriquement de la variété (M, g) ?

Avant de répondre à ces questions, examinons quelques propriétés générales du spectre.

2.3 Quelques propriétés de l'opérateur $H = -\Delta_g + V$

Intéressons nous aux hypothèses assurant d'une part le caractère auto-adjoint des opérateurs laplacien et Schrödinger, et d'autre part l'obtention d'un spectre discret.

2.3.1 Le caractère auto-adjoint

Une des premières questions à traiter lors de l'étude spectrale d'un opérateur linéaire est celle du caractère auto-adjoint, ou à défaut du caractère essentiellement auto-adjoint. Rappelons que un opérateur linéaire H est essentiellement auto-adjoint si son unique fermeture \overline{H} est auto-adjointe. Quel est l'intérêt du caractère auto-adjoint ? Il y a au moins deux bonnes raisons d'en parler :

1. Si H est auto-adjoint, on a déjà une première information spectrale importante : le spectre de l'opérateur H est une partie de \mathbb{R} .
2. Le caractère auto-adjoint assure en mécanique quantique l'unicité de la solution de l'équation de Schrödinger : en effet, à partir de l'hamiltonien auto-adjoint H , on peut, via le calcul fonctionnel [42], [49], construire de manière unique le groupe unitaire fortement continu³ $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ où :

$$U(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}.$$

Ainsi, pour tout état initial ψ_0 , l'évolution quantique de ψ_0 par l'hamiltonien H au cours du temps est donnée par

$$\psi(t) = U(t)\psi_0 = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\psi_0 \in L^2.$$

Notons bien qu'en dérivant la précédente expression on obtient :

³Ce qui signifie que : $U(0) = I$, $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$, $U^*(t) = U^{-1}(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)\varphi = \varphi$.

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -\frac{i}{\hbar}H\psi(t).$$

C'est l'équation de Schrödinger qui régit toute la mécanique quantique !
 Quels sont les principaux résultats connus sur le caractère auto-adjoint ?

- Dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, T. Carleman [12] en 1934 a montré que si la fonction V est localement bornée et globalement minorée, alors l'opérateur de Schrödinger H est essentiellement auto-adjoint.
- En 1972, T. Kato [37] a montré que l'on pouvait remplacer dans l'énoncé de Carleman l'hypothèse $V \in L_{loc}^\infty(M)$ par $V \in L_{loc}^2(M)$.
- En 1994, I. Olenik [46], [47], [48] donne un énoncé très général concernant des variétés riemanniennes complètes connexes quelconques avec des hypothèses plus complexes sur la fonction V . Un corollaire sympathique de cet énoncé est le suivant :

Théorème 1 : Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$, et V une fonction de $L_{loc}^\infty(M)$ tels que $\forall x \in M, V(x) \geq C$, où C est une constante réelle, alors l'opérateur

$$H = -\Delta_g + V$$

est essentiellement auto-adjoint.

2.3.2 Le spectre de l'opérateur est-il discret ?

Hormis le fait que le spectre est réel, que savons nous de plus ? En 1934 K. Friedrichs [31] a montré que dans le cas où la variété $M = \mathbb{R}^n$ avec sa métrique standard, si la fonction V est confinante, ie $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, alors le spectre de l'opérateur de Schrödinger H est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Dans le contexte d'une variété riemannienne compacte avec un laplacien pur ($V \equiv 0$), nous savons aussi [10] que le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ est constitué d'une suite de valeurs propres positives, de multiplicités finies, et s'accumulant en $+\infty$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Qu'en est-il des variétés non compactes ? Commençons par donner une définition :

Définition 1 : Soit (M, g) une variété lisse et V une fonction de M dans \mathbb{R} , on dira que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, si et seulement si

$$\forall A > 0, \exists K \subset\subset M, \forall x \in M \setminus K, |f(x)| \geq A.$$

Un des théorèmes concernant le spectre de l'opérateur de Schrödinger est celui de Kondratev et Shubin [38], [39] qui donnent un énoncé assez technique sur les variétés à géométrie bornée ; de cet énoncé, on a le corollaire bien pratique suivant :

Théorème 2 : Soit (M, g) une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$, et V une fonction de $L_{loc}^\infty(M)$ telle que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. Alors le spectre de l'opérateur $H = -\Delta_g + V$ est constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Le théorème de Courant de 1953 [27], assure en particulier que la première valeur propre λ_1 de l'opérateur H est simple :

$$\inf_{x \in M} V(x) \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

3 Un aperçu sur les problèmes directs

L'objectif est, à géométrie fixée, de pouvoir calculer, ou à défaut de donner des propriétés sur le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$ ou de celui de l'opérateur $-\Delta_g + V$. On va d'abord parler de résultats exacts, puis de méthodes qualitatives.

3.1 Calcul explicite de spectre

Il n'y a bien sûr pas de méthodes générales pour calculer un spectre d'opérateur linéaire ; même dans le cas de Schrödinger sur une variété raisonnable, le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples où l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même quelques calculs exacts :

3.1.1 Premier exemple : un problème fermé sur un tore

La théorie des séries de Fourier sur le tore⁴ T_L de dimension un et de longueur $L > 0$ nous informe que le spectre de l'opérateur

$$H = -\frac{d^2}{dx^2}$$

est :

$$\sigma(H) = \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

⁴Rappelons que regarder les fonctions sur le tore de longueur $L > 0$ revient exactement à regarder les fonctions L -périodiques.

avec comme vecteurs propres associés les fonctions :

$$e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{L}}, n \in \mathbb{Z}.$$

En effet, si $\lambda \in \sigma(H)$, alors par définition du spectre $\exists u \in L^2(T_L)$, $u \neq 0$ telle que $-u'' = \lambda u$. Par la théorie L^2 des séries de Fourier la suite de fonctions

$$\left(e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{L}} \right)_{n \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(T_L)$, ainsi $\exists! (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telle que

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n.$$

Ainsi l'équation différentielle $-u'' - \lambda u = 0$ devient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \left(\frac{4\pi^2 n^2}{L^2} - \lambda \right) e_n = 0.$$

Comme $u \neq 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$, tel que $a_{n_0} \neq 0$, ainsi $-u'' - \lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4\pi^2 n_0^2}{L^2}$. On vient de donc de montrer l'inclusion

$$\sigma(H) \subset \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Réciproquement il est clair que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $He_n = \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} e_n$, ainsi nous avons bien que

$$\sigma(H) = \left\{ \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3.1.2 Second exemple : l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique, ou opérateur d'Hermité comme on le nomme en analyse harmonique, est l'un des rares exemples d'opérateur de Schrödinger sur une variété non compacte pour lequel on arrive à calculer explicitement son spectre. L'oscillateur harmonique joue un rôle très important dans l'étude des systèmes intégrables en classification symplectique : il sert en effet de modèle de référence des équilibres stables de type elliptique ; pour plus de détails, on peut consulter le livre de Vu Ngoc [54]. Ici on prend $M = \mathbb{R}$ et :

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2}.$$

Les propriétés spectrales de l'opérateur H sont très remarquables : on arrive à calculer son spectre et les vecteurs propres associés de manière explicite. Ces calculs, d'un point de vue très formel, se trouvent dans n'importe quel bon livre de mécanique quantique. Pour des démonstrations précises, on conseille par exemple le livre de M.E. Taylor [53]. Le résultat est alors le suivant, le spectre de l'opérateur H est :

$$\sigma(H) = \left\{ n + \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

avec comme vecteurs propres associés la base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ constituée des fonctions d'Hermite :

$$e_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \text{ où } H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) .$$

3.2 Etude qualitative spectrale

Dans nombre de cas on ne sait pas calculer un spectre, on essaye alors de le décrire de manière qualitative. Il y a disons deux sous thèmes :

- Le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur.
- Le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : analyse semi-classique.

3.2.1 Exemples de résultats qualitatifs en bas du spectre

Donnons quelques exemples de résultats concernant le bas du spectre. Commençons par des résultats de comparaison des premières valeurs propres.

Théorème 3 : (Théorème de Faber-Krahn, 1953) : Soit M une partie bornée de \mathbb{R}^n . En notant par $\lambda_1(M)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet, on a :

$$\lambda_1(M) \geq \lambda_1(B_M)$$

B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à $\text{Vol}(M)$. Et on a égalité si et seulement si M est isométrique à B_M .

Dans le même style, on a aussi la version avec conditions de Neumann où l'inégalité est dans l'autre sens :

Théorème 4 : (Théorème de Szegő-Weinberger, 1954) : Soit M une partie bornée de \mathbb{R}^n . En notant par $\mu_1(M)$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Neumann, on a :

$$\mu_1(M) \leq \mu_1(B_M)$$

B_M désignant la boule euclidienne de volume égal à $\text{Vol}(M)$. Et on a égalité si et seulement si M est isométrique à B_M .

Un autre type de résultat classique concerne les constantes de Cheeger : Soit (M, g) une variété riemannienne connexe et compacte de dimension $n \geq 1$. Pour toute partie bornée régulière D de M , on considère la quantité

$$h(D, g) = \frac{\text{Vol}(\partial D, g)}{\text{Vol}(D, g)}$$

où $\text{Vol}(\partial D, g)$ est le volume $n - 1$ dimensionnel.
On définit ensuite la constante de Cheeger par

$$h(M, g) = \inf_{D \in X} h(D, g)$$

X étant l'ensemble de tous les domaines de M de volumes majorés par $\frac{\text{Vol}(M, g)}{2}$. Alors un des résultats de Cheeger est que la première valeur propre non nulle du Laplacien est minorée par $\frac{h(M, g)^2}{4}$ [10].

Pour finir, donnons un autre résultat intéressant qui concerne la multiplicité des valeurs propres en fonction de la topologie. Pour cela plaçons nous un instant dans le cas des surfaces : si (M, g) est une surface complète connexe, et

$$H = -\Delta_g + V$$

avec $V \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tels que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$. En notant (cf. Théorème 2) par

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

le spectre de l'opérateur H et par m_k la multiplicité de la k -ème valeur propre λ_k , nous avons le résultat dû à S. Y. Cheng [14] et amélioré par G. Besson [11], Y. Colin De Verdière [19], N. Nadirashvili [45] et B. Sévenec [51] :

Théorème 5 : *Sous les hypothèses précédentes nous avons :*

- Si $X = \mathbb{S}^2$ ou \mathbb{R}^2 , alors $\forall k \geq 3, m_k \leq 2k - 3$.
- Si $X = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ou K_2 (la bouteille de Klein), alors $\forall k \geq 1, m_k \leq 2k + 1$.
- Si $X = \mathbb{T}^2$, alors $\forall k \geq 1, m_k \leq 2k + 2$.
- En notant par $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré, si $\chi(M) < 0$, alors $\forall k \geq 1, m_k \leq 2k - 2\chi(M)$.

3.2.2 Etude qualitative du "haut" du spectre

L'exemple de base est la formule asymptotique de Weyl de 1911, [10]. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire Ω de \mathbb{R}^2 avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres $\mathcal{N}(\lambda)$ inférieure à un réel positif λ , vérifié l'équivalence, pour $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{4\pi} \lambda$$

où $\text{Vol}(\Omega)$ est l'aire du rectangle Ω . En 1911, H.Weyl démontra cette conjecture.

Théorème 6 : *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe de dimension n , si on note par $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_g$ sur M , on a l'équivalent pour $\lambda \rightarrow +\infty$*

$$\text{Card}(\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k \leq \lambda\}) \sim \frac{B_n \text{Vol}(M, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

où $B_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité de \mathbb{R}^n .

On reviendra dans la dernière partie à l'étude du "haut" du spectre en utilisant l'analyse semi-classique.

4 Problèmes inverses : la géométrie spectrale

4.1 Le son détermine t-il la forme d'un tambour ?

La problématique inverse est la suivante : étant donné le spectre d'un laplacien ou d'un opérateur de Schrödinger, quelles informations géométriques sur la variété (M, g) peut-on avoir ? Dans le cas du laplacien, un des premiers à formaliser mathématiquement cette question est sans doute Mark Kac [36] en 1966 dans son célèbre article "Can one hear the shape of a drum?"⁵ : pour le laplacien riemannien, une suite de valeurs propres (un ensemble d'harmoniques du tambour) caractérise-t-elle, à isométrie près, la variété de départ (la géométrie du tambour) ? Il est connu que si deux variétés sont isométriques, elles sont alors isospectrales (c'est-à-dire ont le même spectre). Mais qu'en est t-il de la réciproque ?

On sait depuis 1964, que la réponse au problème de M. Kac est négative ; en effet, J. Milnor [44] donne comme exemple de variétés isospectrales mais non isométriques, une paire de tores plats de dimension 16. Depuis, de nombreux autres exemples ont été trouvés, à commencer par T. Sunada [52], qui en 1985 donne une méthode de construction systématique de variétés isospectrales non isomorphes. C. Gordon et E.N. Wilson [32] ont aussi donné en 1984 une méthode de construction de déformations continues de variétés qui sont isospectrales sans être isométriques. L'histoire ne s'arrête pas là, d'autres méthodes de construction apparaissent, comme par exemple la méthode de transplantation de P. Bérard [3], [4] etc...

En 1992, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert [33] donnent le premier exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre commun pour le laplacien avec conditions de Neumann ou de Dirichlet. Pour plus de détails sur cet exemple ou pourra consulter les auteurs [33], [34] mais aussi voir les articles très pédagogiques de P. Bérard [6], [7], [8].

Mentionnons aussi pour finir le travail de S. Zelditch [55] datant de 2000, où il montre que si on se restreint à des parties de \mathbb{R}^2 simplement connexes avec un bord analytique et possédant deux axes de symétrie orthogonaux, alors le spectre détermine complètement la géométrie.

4.2 Spectre des longueurs et formules de traces

La donnée du spectre du laplacien donne des informations sur d'autres invariants géométriques comme la dimension, le volume et l'intégrale de la courbure scalaire. En fait le laplacien fournit aussi d'autres invariants, comme par exemple le spectre des longueurs d'une variété. Le spectre des longueurs d'une variété riemannienne est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. En 1973 Y. Colin de Verdière [15], [16] montre que dans le cas compact, modulo une hypothèse de genericité toujours vérifiée à courbure sectionnelle négative,

⁵"Peut-on entendre la forme d'un tambour ?"

le spectre du laplacien détermine complètement le spectre des longueurs. La technique utilisée par Y. Colin de Verdière repose sur les formules de traces. Ces dernières s'utilisent dans un cadre beaucoup plus général que celui des opérateurs de Schrödinger.

Le principe formel des formules de traces est le suivant : considérons d'abord un opérateur linéaire H non-borné sur un Hilbert ayant un spectre discret : $\sigma(H) = \{\lambda_n, n \geq 1\}$, et puis une fonction f "sympathique". La formule de trace consiste alors à calculer la trace de l'opérateur $f(H)$ de deux façons différentes :

- La première façon, lorsque que cela a un sens, avec les valeurs propres de l'opérateur linéaire $f(H)$

$$\text{Tr}(f(H)) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k).$$

- La seconde façon, via le noyau de Schwartz de l'opérateur $f(H)$, si $f(H)\varphi(x) = \int_M K_f(x, y)\varphi(y) dy$, alors

$$\text{Tr}(f(H)) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

Ainsi

$$\sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

La difficulté réside dans le choix de f , d'une part pour légitimer ces formules, et d'autre part pour arriver à en tirer des informations spectro-géométriques. Les choix de fonctions f les plus courants sont : $f(x) = e^{-xt}$ où $t \geq 0$ (fonction de la chaleur), $f(x) = \frac{1}{x^s}$, où $s \in \mathbb{C}$, avec $\text{Re}(s) > 1$ (fonction zêta de Riemann), $f(x) = e^{-\frac{ix}{h}}$ où $t \geq 0$ (fonction de Schrödinger), etc ...

Pour fixer les idées, donnons un exemple simple de formule de trace exacte : la formule sommatoire de Poisson pour un réseau⁶ Γ de \mathbb{R}^n . La formule de Poisson sur le tore $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ nous donne l'égalité :

$$\sum_{\lambda \in \sigma(\Delta_g)} e^{-\lambda t} = \frac{\text{Vol}(\Gamma \backslash \mathbb{R}^n)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \sum_{l \in \Sigma} e^{-\frac{l^2}{4t}} \quad (2)$$

où $\sigma(\Delta_g)$ est le spectre de l'opérateur Δ_g et Σ le spectre des longueurs comptés avec leurs multiplicités, la multiplicité d'une longueur étant le nombre de classes d'homotopies de lacets du tore plat $\Gamma \backslash \mathbb{R}^n$ représentées par une géodésique périodique de cette longueur. Dans l'égalité (2) le terme de droite correspond à la partie géométrique (volume, dimension,...) alors que le terme de gauche contient les informations spectrales. Pour une référence récente voir [26].

5 Une invitation à l'analyse semi-classique

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger sur une variété riemannienne complète connexe de dimension $n \geq 1$:

⁶Un réseau de \mathbb{R}^n est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n qui engendre \mathbb{R}^n .

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V \quad (3)$$

où h est un paramètre réel strictement positif.

De manière extrêmement simple et naïve l'idée de l'analyse semi-classique est de comprendre le spectre de l'opérateur H lorsque le paramètre $h \rightarrow 0$. On va dans cette partie donner une idée générale de ce qu'est l'analyse semi-classique, puis on terminera sur un exemple concret de calcul de spectre. Pour le lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'analyse semi-classique, on conseille la littérature suivante : Y. Colin de Verdière [25], Dimassi-Sjöstrand [28], L. Evans et M. Zworski [29], A. Martinez [43], D. Robert [50], S. Vu Ngoc [54].

5.1 Philosophie de l'analyse semi-classique

Dans la limite des grandes valeurs propres, l'asymptotique du spectre de l'opérateur de Schrödinger

$$H = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V$$

ou plus généralement d'un opérateur pseudo-différentiel, est remarquablement liée à une géométrie sous-jacente. Celle-ci vit sur le fibré cotangent T^*M , vu comme une variété symplectique⁷ : c'est la géométrie de l'espace des phases. C'est d'ailleurs le même phénomène qui permet de voir la mécanique classique (structure de variété symplectique) comme limite de la mécanique quantique (structure d'algèbre d'opérateurs).

Voyons pourquoi s'intéresser à l'asymptotique du spectre de l'opérateur H , revient dans une certaine mesure à faire tendre le paramètre h vers 0 (limite semi-classique). Par exemple, pour $E > 0$ fixé, l'équation :

$$-\frac{h^2}{2}\Delta_g \varphi = E\varphi$$

admet φ_k , le k -ième vecteur propre du laplacien Δ_g , comme solution si

$$-\frac{h^2}{2}\lambda_k = E.$$

Ainsi si $h \rightarrow 0^+$, alors $\lambda_k \rightarrow +\infty$. C'est pourquoi la limite semi-classique peut se voir comme l'asymptotique des grandes valeurs propres du laplacien.

Revenons un instant à la limite $h \rightarrow 0$, quel est son sens physique ? En "principe" tout système physique est de par nature quantique. D'après les fameuses inégalités d'incertitude de Heisenberg, on ne peut pas mesurer précisément à la fois vitesse et position d'un électron, sauf si $h = 0$. En fait plus h est petit, plus on peut faire des mesures simultanées précises. Ainsi plus $h \rightarrow 0$, plus on

⁷Rappelons que le fibré cotangent d'une variété différentiable est naturellement muni d'une structure symplectique. En effet, pour toute variété M lisse de dimension n , on peut munir de façon intrinsèque son fibré cotangent T^*M d'une structure de variété symplectique (T^*M, ω) de dimension $2n$ définie par la différentielle extérieure $\omega = d\alpha$ de la 1-forme de Liouville α .

se rapproche du déterminisme de la mécanique classique sur le fibré cotangent T^*M .

En pratique quand on fait de l'analyse semi-classique, on travaille à la fois avec des objets classiques (variétés symplectiques, algèbre des fonctions C^∞ , crochet de Poisson, équations de Hamilton,...) et des objets quantiques (espace de Hilbert, algèbre d'opérateurs, commutateur, équation de Schrödinger,...). Pour l'étude d'un opérateur de Schrödinger on est amené à considérer deux hamiltoniens vivant sur deux structures mathématiques distinctes :

Hamiltonien classique

On notera par p la fonction définie sur le fibré cotangent de M par :

$$p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in C^\infty(T^*M, \mathbb{R}).$$

Hamiltonien quantique

On associe à la fonction p définie ci dessus, son quantifié de Weyl \hat{P} , opérateur linéaire à domaine agissant sur une sous partie de $L^2(M)$:

$$\hat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta_g + V.$$

Pour finir, donnons une notation utile :

Notation 1 : Soient u_h et v_h deux fonctions dépendant d'un paramètre $h > 0$, alors si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists C_k > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |u_h(x) - v_h(x)| \leq C_k h^k$$

on dira alors que les deux fonctions u_h et v_h sont égales à $O(h^\infty)$ près, et on notera $u_h = v_h + O(h^\infty)$.

Définition 2 : Le spectre semi-classique d'un opérateur linéaire auto-adjoint \hat{H} est l'ensemble $\Sigma_h(\hat{H})$ des $\mu_h \in \mathbb{R}$ tels que

$$\exists u_h \in L^2(\mathbb{R}), u_h \neq 0, (\hat{H} - \mu_h I_d)(u_h) = O(h^\infty)$$

I_d étant l'opérateur identité.

Moralement le spectre semi-classique (ou microlocal) correspond aux valeurs propres approchées avec une précision d'ordre $O(h^\infty)$. Le lien précis entre spectre exact et semi-classique est donné par la

Proposition 1 [54] : Sur un compact K de \mathbb{R} , le spectre semi-classique $\Sigma_h(\widehat{H})$ et le spectre exact $\sigma(\widehat{H})$ de l'opérateur linéaire auto-adjoint \widehat{H} sont liés par :

$$\Sigma_h(\widehat{H}) \cap K = \sigma(\widehat{H}) \cap K + O(h^\infty)$$

au sens où si $\lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$, alors $\exists \mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$ tel que $\lambda_h = \mu_h + O(h^\infty)$; et si $\mu_h \in \sigma(\widehat{H}) \cap K$, alors $\exists \lambda_h \in \Sigma_h(\widehat{H}) \cap K$ tel que $\mu_h = \lambda_h + O(h^\infty)$.

5.2 Un exemple de calcul de spectre semi-classique : le double puits

Dans une série de trois articles [20], [21] et [24] Y. Colin de Verdière et B. Parisse se sont intéressés au spectre semi-classique de l'opérateur de Schrödinger

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

sur la variété $M = \mathbb{R}$, avec un potentiel V type double puits ayant un unique maximum local non dégénéré. Dans [21] et [24] les deux auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour trouver le spectre semi-classique de l'opérateur \widehat{P} dans une boule de taille h centrée autour de l'origine. Dans [41], on donne, à partir de la formule de Colin de Verdière-Parisse, la forme de ce spectre.

5.2.1 Le contexte

Soit $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$, et V possédant exactement un maximum local non dégénéré, que l'on supposera atteint en 0, ainsi : $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$, $V''(0) < 0$. Un exemple typique est la fonction : $V(x) = x^4 - x^2$.

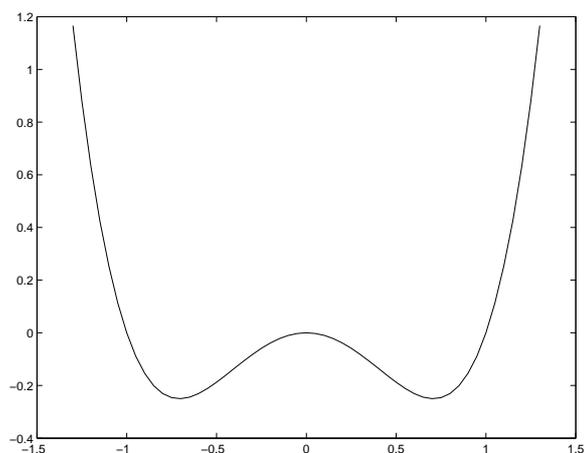


Fig 1. La courbe représentative de la fonction potentiel $V(x) = x^4 - x^2$. On distingue les deux puits (les minimums) du potentiel, le droit et le gauche.

On notera par p l'hamiltonien classique définie sur le fibré cotangent de \mathbb{R} par :

$$p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x) \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

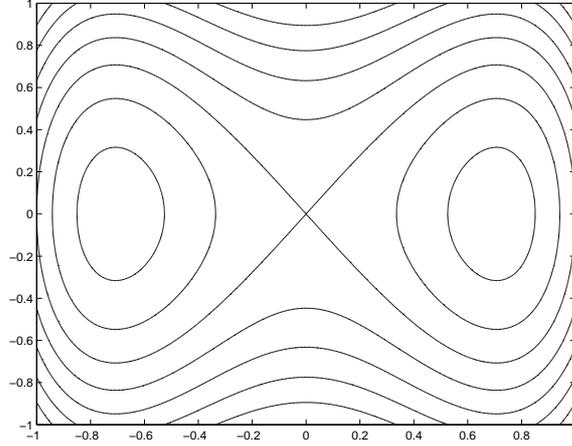


Fig 2. Courbes de $p^{-1}(c)$ dans le fibré cotangent $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$. Avec $c > 0$: une seule composante connexe, $c=0$: le huit hyperbolique, $c < 0$: deux composantes connexes elliptiques.

On associe à cette fonction, l'hamiltonien quantique \hat{P} , vu comme opérateur linéaire non-borné sur $L^2(\mathbb{R})$:

$$\hat{P} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V$$

Pour étudier le spectre de l'opérateur \hat{P} dans un voisinage de taille h autour de l'origine, fixons nous un $C > 0$, et pour $\lambda \in [-C, C]$ considérons l'opérateur :

$$\widehat{H}_\lambda = \hat{P} - h\lambda I_d.$$

Ainsi par définition du spectre semi-classique, nous avons que

$$\exists u_h \in L^2(\mathbb{R}), u_h \neq 0, \widehat{H}_\lambda(u_h) = O(h^\infty) \iff \lambda h \in \Sigma_h(\hat{P}).$$

5.2.2 La formule de Colin de Verdière-Parisse

Y. Colin de Verdière et B. Parisse, à l'aide de techniques fines d'analyse microlocale, et en utilisant des formes normales, ont démontré la formule suivante [21], [24] :

Théorème 7 : L'équation $\widehat{H}_\lambda(u_h) = O(h^\infty)$ admet une solution $u_h \in L^2(\mathbb{R})$ non triviale, avec son microsupport $MS(u_h) = p^{-1}\{0\}$, si et seulement si λ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + e^{2\pi\varepsilon}}} \cos\left(\frac{\theta_g - \theta_d}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\theta_g + \theta_d}{2} + \frac{\pi}{2} + \varepsilon \ln(h) + \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right)\right) \quad (4)$$

où $\varepsilon = \varepsilon(h, \lambda)$, $\theta_{g/d} = \theta_{g/d}(h, \lambda)$ sont des fonctions C^∞ par rapport à λ et admettant des développements asymptotiques en puissance de h . Plus précisément :

$$\varepsilon(h, \lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{-V''(0)}} + \sum_{j \geq 1} \varepsilon_j(\lambda) h^j$$

$$\theta_{g/d}(h, \lambda) = \frac{1}{h} A_{g/d}(0) - \lambda \sigma_{g/d}(0) + \sum_{j \geq 1} \theta_{g/d,j}(\lambda) h^j$$

où $A_{g/d}(0)$ désigne l'intégrale d'action du puit gauche/droit, et $\sigma_{g/d}(0)$ l'invariant symplectique associé [54].

5.2.3 Le spectre est un doublet en quinconce

En utilisant la formule de Colin de Verdière-Parisse, on peut en déduire des informations sur la forme du spectre semi-classique de l'opérateur

$$\widehat{P} = -\frac{h^2}{2} \Delta + V$$

autour de l'origine. A cause de la présence des deux puits de potentiel on s'attend à avoir deux spectres qui s'entremêlent; dans [41] on montre que dans une bande $[-h^\alpha, h^\alpha]$, où $\alpha \in]0, 1]$ est une constante indépendante du paramètre h , le spectre semi-classique de l'opérateur \widehat{P} est constitué de deux familles de réels en quinconce, et l'interstice spectral est d'ordre $O(h / |\ln(h)|)$:

Théorème 8 : *Le spectre semi-classique de l'opérateur \widehat{P} sur le compact de la forme $[-h^\alpha, h^\alpha]$, s'écrit comme la réunion disjointe de deux familles de réels :*

$$(\alpha_k(h))_k \amalg (\beta_l(h))_l$$

avec $\alpha_k(h) = \mathcal{A}_h(k)$ et $\beta_l(h) = \mathcal{B}_h(l)$, \mathcal{A}_h et \mathcal{B}_h étant des fonctions C^∞ . Les deux suites $(\alpha_k(h))_k$ et $(\beta_l(h))_l$ sont strictement décroissantes et en quinconce :

$$\beta_{k+1}(h) < \alpha_k(h) < \beta_k(h) < \alpha_{k-1}(h).$$

En outre l'interstice spectral est de l'ordre de $O(h / |\ln(h)|)$:

$$|\alpha_k(h) - \alpha_{k-1}(h)| = O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right) \quad \text{et} \quad |\beta_l(h) - \beta_{l-1}(h)| = O\left(\frac{h}{|\ln(h)|}\right).$$

Références

- [1] C. ANNE, *Majoration de multiplicités pour l'opérateur de Schrödinger*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie de Grenoble 8 : 53-60, 1989-1990.

- [2] P. BERARD, *Variétés riemanniennes isospectrales non isométriques*, Astérisque 177-178 : 127-154, 1989.
- [3] P. BERARD, *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann. 292 : 547-559, 1992.
- [4] P. BERARD, *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc. 48 : 565-576, 1993.
- [5] P. BERARD, *The isospectral problem for Riemannian manifolds*, Cours de DEA, Grenoble 1993. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/isos-dea93.ps>
- [6] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Introduction*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/tambours.pdf>
- [7] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 1*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre1.pdf>
- [8] P. BERARD, *On ne peut pas entendre la forme d'un tambour : Exposé 2*, Auxerre 2001. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pberard/auxerre2.pdf>
- [9] P. BERARD & M. BERGER, *Le spectre d'une variété riemannienne en 1982*, Kaigai (Tokyo) 1983.
- [10] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le spectre d'une variété Riemannienne*, Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.
- [11] G. BESSON, *Sur la multiplicité de la première valeur propre des surfaces riemanniennes*, Ann. Inst. Fourier. 30 : 109-128, 1980.
- [12] T. CARLEMAN, *Sur la théorie mathématique de l'équation de Schrödinger*, Ark. Mat. Astr. Fys. 24B 11 :1-7, 1934.
- [13] S. Y. CHENG, *Eigenvalues comparison theorems and geometric applications*, Math. Z. 143 : 289-290, 1975.
- [14] S. Y. CHENG, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comment. Math. Helv. 51 : 43-55, 1979.
- [15] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I*, Compositio Mathematica, 27 : 80-106, 1973.
- [16] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II*, Compositio Mathematica, 27 : 159-184, 1973.
- [17] Y. COLIN DE VERDIERE & J. VEY, *Le lemme de Morse isochore*, Topology, 18 : 283-293, 1979.
- [18] Y. COLIN DE VERDIERE, *Sur la multiplicité de la première valeur propre non nulle du Laplacien*, Comment. Math. Helv, 61 : 254-270, 1986.
- [19] Y. COLIN DE VERDIERE, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris, 20 : 599-615, 1987.
- [20] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSÉ, *Equilibre instable en régime semi-classique I : Concentration microlocale*, Comm PDE, 19 : 1535-1564, 1994.
- [21] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSÉ, *Equilibre instable en régime semi-classique II : Conditions de Bohr-Sommerferld*, Ann IHP, 61 : 347-367, 1994.
- [22] Y. COLIN DE VERDIERE, *Le spectre du laplacien : survol partiel depuis le Berger-Gauduchon-Mazet et problèmes*, Actes de la table tournante en l'honneur de Marcel Berger, Séminaires et Congrès SMF, 1 : 233-252, 1996.

- [23] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectres de graphes*, Cours Spécialisés numéro 4, SMF, 1998.
- [24] Y. COLIN DE VERDIERE & B. PARISSÉ, *Singular Bohr-Sommerfeld rules*, Commun. Math. Phys, 205 : 459-500, 2000.
- [25] Y. COLIN DE VERDIERE, *Méthodes semi-classique et théorie spectrale*, Cours de DEA, 2006.
- [26] Y. COLIN DE VERDIERE, *Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics : thirty years after*, Ann. Inst. Fourier. 57 (7) : 2429-2463, 2008.
- [27] R. COURANT & D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Intersciences Publishers, New York, 1953.
- [28] M. DIMASSI & J. SJÖSTRAND, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Math Society Lectures Note Series 268, 1999.
- [29] L. EVANS & M. ZWORSKI, *Lectures on semiclassical analysis*. <http://math-berkeley.edu/~zworski/semiclassical.pdf>.
- [30] G. FABER, *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kriesförmige den tiefsten Grundton gibt*. *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München Jahrgang*, 169-172, 1923.
- [31] K. FRIEDRICHS, *Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren*, Math. Ann. 109 : 465-487, 685-713, 1934.
- [32] C. GORDON & E. N. WILSON, *Isospectral deformations on compact solvmanifolds*, J. Diff. Geom. 19 : 241-256, 1984.
- [33] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones mathematicae 110 : 1-22, 1992.
- [34] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *One cannot hear the shape of a drum*, Bulletin of the AMS 27 : 134-138, 1992.
- [35] C. GORDON, *Isospectral closed riemannian manifolds which are not locally isometric*, J. Diff. Geom. 37 : 639-649, 1993.
- [36] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum?*, American Mathematical Monthly 73 (4) : 1-23, 1966.
- [37] T. KATO, *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. 13 : 135-148, 1972.
- [38] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry*, Proceedings of the conference "Functional Analysis, Partial Differential Equations and Applications" dedicated to the V. G. Maz'ya 60th birthday, Rostock, 1998.
- [39] V. A. KONDRAT'EV & M.A. SHUBIN, *Conditions for the discreteness of the spectrum for Schrödinger operators on manifolds*, Funct. Anal. and Appl. 33, 1999.
- [40] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises*, Math. Ann. 94 : 97-100, 1925.
- [41] O. LABELLE, *Sur le calcul du spectre semi-classique d'un système intégrable de dimension un autour d'une singularité hyperbolique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lablee/hyperbolique.pdf>

- [42] P. LEVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale*, Dunod, 2003.
- [43] A. MARTINEZ, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer, 2001.
- [44] J. MILNOR, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 51 : 542, 1964.
- [45] N. NADIRASHVILI, *Multiple eigenvalues of the Laplace operator*, Math. USSR Sbornik, 61 : 225-238, 1988.
- [46] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger operators on a complete Riemannian manifold*, Math. Notes. 54 :934-939, 1993.
- [47] I. M. OLEINIK, *On the connection of the classical and quantum mechanical completeness of a potential at infinity on complete Riemannian manifolds*, Math. Notes. 55 : 380-386, 1994.
- [48] I. M. OLEINIK, *On the essential self-adjointness of the Schrödinger-type operators on a complete Riemannian manifold*, PhD thesis, Northeastern University, 1997.
- [49] M. REED & B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, 1975.
- [50] D. ROBERT, *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1987.
- [51] B. SEVENNEC, *Majoration topologique de la multiplicité du spectre des surfaces*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie de Grenoble, 12 : 29-35, 1993-1994.
- [52] T. SUNADA, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, Ann. of Math. 121 : 169-186, 1985.
- [53] M. E. TAYLOR, *Noncommutative harmonic analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1986.
- [54] S. VU NGOC, *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*, Panoramas et synthèses 22, SMF,2006.
- [55] S. ZELDITCH, *Spectral determination of analytic bi-axisymmetric plain domains*, Geom. And Func. Ana. 10 : 628-677, 2000.

L'auteur remercie les prélecteurs de ces notes, en particulier, Stéphane Baseilhac, Pierre Bérard, Gérard Besson, Yves Colin De Verdière, Gilles Leborgne et Hervé Pajot.

Olivier Lablée

Université Grenoble 1- CNRS
 Institut Fourier
 UFR de Mathématiques
 UMR 5582
 BP 74 38402 Saint Martin d'Hères
 mail : lablee@ujf-grenoble.fr

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lablee/>