



HAL
open science

Considérations sur les symétries indicielles et matérielles d'un tenseur : Application à l'élasticité du second-gradient

Nicolas Auffray, R. Bouchet

► **To cite this version:**

Nicolas Auffray, R. Bouchet. Considérations sur les symétries indicielles et matérielles d'un tenseur : Application à l'élasticité du second-gradient. 2008. hal-00325207

HAL Id: hal-00325207

<https://hal.science/hal-00325207>

Preprint submitted on 26 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Considérations sur les symétries indicielles et
matérielles d'un tenseur :
Application à l'élasticité du second-gradient

N.Auffray¹, R.Bouchet
ONERA DMSM
29 avenue de la Division Leclerc
CHATILLON France

Mai 2008

¹*mail* : naufroy@onera.fr

Résumé

Nous nous intéresserons au cours de ce document à la structure des opérateurs de comportement linéaire. Les exemples choisis seront liés à l'élasticité classique ainsi qu'à l'élasticité du second-gradient. Si l'élasticité classique est un sujet relativement classique quoique toujours en développement au vue des nombreuses publications en traitant, l'élasticité généralisée est bien moins étudiée. Une des raisons à cela est que cette dernière loi de comportement prend en compte dans sa formulation des tenseurs d'ordres élevés (supérieur à 4), or l'étude de tels opérateurs n'est pas triviale. Cette difficulté est à mettre en regard avec l'intérêt qu'ont les théories des milieux continus généralisés pour l'homogénéisation de milieux hétérogènes. De fait nous nous intéresserons dans ce qui suit à introduire des outils de manipulations de ces tenseurs d'ordres supérieur. Nous ne parlerons que très peu de mécanique et nous mettrons l'accent sur les liens qui unissent une propriété physique avec l'opérateur la décrivant et ceci dans un contexte linéaire.

L'objectif sera d'introduire des méthodes issues de la théorie mathématique de représentation des groupes, méthodes qui sont pertinentes pour obtenir le squelette d'un opérateur de comportement. Ces méthodes sont classiques dans d'autres champs de la physique, en la relativité ou bien en mécanique quantique, toutefois elles ne sont que peu connues des mécaniciens. Nous introduirons de fait dans la suite le minimum de bases théoriques nécessaires à notre discours et nous illustrerons ce propos de manière détaillé sur les tenseurs d'ordre 4 et 6 présent dans la théorie des milieux du second gradient. Nous détaillerons chacun des points conjointement avec les références nécessaires pour les approfondissements théoriques. Au final la méthode proposée (car celle que nous regarderons ici n'est qu'une partie de nombreuses autres) à l'avantage d'être très générale et calculable à la main. De plus, et c'est tout l'intérêt de cette approche, elle nous permet de re-investir pour nos études les logiciels développés pour des besoins spécifiques d'autres branches de la physique mathématique. Notamment tout ce que nous proposons ainsi pourra être mise en oeuvre avec l'aide du logiciel libre de représentation de groupe SCHUR [1].

Table des matières

1	Généralité sur les représentations de groupes	5
1.1	Représentation de groupe	5
1.1.1	Représentation	5
1.1.2	Réductibilité de la représentation	5
1.1.3	Cas des groupes finis	6
1.2	Représentation du groupe symétrique	6
1.2.1	Propriétés des tableaux de Young	7
1.2.2	Opérateurs associés à un tableau	9
1.2.3	Transformation des TYS	11
1.2.4	Synthèse	13
1.3	Méthodes tensorielles	13
1.3.1	Espace tensoriel	14
1.3.2	Représentation	14
1.3.3	Réductibilité de la représentation	14
1.3.4	Action couplée	15
1.3.5	Prise en compte de la dimension	16
2	Élasticité classique et généralisée	18
2.1	Élasticité du second gradient	18
2.2	Tenseurs sans symétries indicielles	19
2.2.1	Étude d'un tenseur d'ordre 4 générique	19
2.2.2	Étude d'un tenseur d'ordre 6 générique	22
2.3	Prise en compte des symétries indicielles	25
2.3.1	Cadre de travail	26
2.3.2	Petites symétries	26
2.3.3	Grande symétrie	28
2.3.4	Tenseurs avec symétries indicielles	30
2.3.5	Cas bidimensionnel	33
2.4	Règles de branchement	34
2.4.1	Branchement $GL(d) \downarrow O(d)$	34
2.4.2	Branchement $O(d) \downarrow O(p)$	37
2.4.3	Synthèse	40
2.5	Comparaison des spectres bi et tri dimensionnels	41
A	Décomposition par produit tensoriel des représentations	46
A.1	Arithmétique des e.v. de tenseurs irréductibles	46
A.2	Détermination des spectres de réduction	47

B	Compléments à l'étude des tableaux	49
B.1	Exemple du lien entre relation de Garnir et décomposition de tableaux . . .	49
B.2	TYG dans les différents systèmes de symétries	50
B.2.1	TYG pour S_6 -petites symétries-	50
B.2.2	Prise en compte de la grande symétries	51
B.2.3	TYG pour S_6 -petites et grande symétries-	54
C	Règles de combinatoires supplémentaires	56
C.1	Règles de Littlewood-Richardson	56
C.2	Branchements	57

Présentation du document

Une propriété physique linéaire quelconque peut être modélisée par un opérateur mathématique linéaire appelé tenseur, toutefois tout tenseur ne traduit pas une propriété physique.

Pour passer du statut d'opérateur mathématique à celui d'opérateur physique un tenseur doit satisfaire à plusieurs conditions, nous traiterons ici des conditions liées aux symétries du problème. Considérons une propriété tensorielle définie sur un domaine matériel, le tenseur de cette propriété doit satisfaire deux conditions de symétries distinctes :

1. respect des symétries physiques du phénomène ;
2. prise en compte des symétries du milieu matériel.

La symétrie physique se traduit par une invariance du tenseur par permutation de ses indices, on parle également de symétrie indicielle. Le groupe de transformation ayant cette invariance est le groupe symétrique S_n , où n est l'ordre du tenseur. La symétrie du milieu, ou symétrie matérielle, implique des relations entre les diverses composantes de notre tenseur. Son groupe d'opérations est le groupe des matrices orthogonales de dimension d , $O(d)$; pour des questions de simplicité toutefois nous nous concentrerons ici sur le sous-groupe des opérations directes, $SO(d)$. De fait le groupe de symétrie d'un tenseur physique est l'intersection de ses groupes de symétrie matérielle ($SO(d)$ -invariance) ainsi qu'indicielle (S_n -invariance). On peut déjà remarquer que si l'on considère un tenseur d'ordre n en dimension d , S_n est l'ensemble des opérations agissant sur l'ordre du tenseur tandis que $SO(d)$ agit sur les dimensions de ce tenseur. Nous verrons ici qu'il existe un lien très fort appelé *dualité de Schur-Weyl* qui unit l'action de ces deux groupes et qui nous permet par l'étude du groupe S_n d'obtenir le « squelette » du comportement de notre tenseur sous l'action $SO(d)$ ¹. L'avantage de cette approche est que, via l'utilisation des diagrammes de Young, le calcul des propriétés du groupe symétrique est très simple

Nous procéderons dans ce document de la manière suivante, nous introduirons tout d'abord, au chapitre 1, les bases théoriques minimum de représentation linéaire des groupes nécessaires à rendre ce document le plus auto-suffisant possible. Nous nous y intéresserons à l'exposition des outils d'étude du groupe symétrique, de manière à analyser la structure des symétries indicielles d'un tenseur. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous introduirons la dualité Schur-Weyl et regarderons quels liens unissent symétries indicielles et matérielles. Ce bagage introduit nous l'illustrerons et le compléterons au chapitre 2 en traitant conjointement des cas particuliers des tenseurs d'élasticité classique et d'hyper-élasticité². Le problème notamment de la prise en compte explicite des symétries indi-

¹En toute rigueur la dualité Schur-Weyl est établie entre les représentations irréductibles des groupes $GL(d)$ et S_n . Toutefois via l'utilisation de *règles de branchement* [2] nous pouvons établir une correspondance entre $SO(d)$ et S_n .

²A ne pas confondre avec le comportement hyper-élastique, nous appellerons dans ce document tenseur d'hyper-élasticité le tenseur d'ordre 6 qui relie le gradient de la déformation au tenseur d'hyper-contrainte.

cielles particulières de ces tenseurs sera abordé et nous y introduirons une méthodologie qui, à notre connaissance est nouvelle. Nous conclurons par nous interroger sur l'aspect dimensionnel d'une loi de comportement, c'est-à-dire en comparant la structure des élasticité dans des espaces à deux, ou trois dimensions.

Chapitre 1

Généralité sur les représentations de groupes

Pour la discussion qui va suivre il nous est nécessaire d'introduire ici quelques notions assez générales sur la théorie de représentation linéaire de groupe.

1.1 Représentation de groupe

1.1.1 Représentation

On appelle représentation linéaire d'un groupe G dans un espace vectoriel V l'image de ce groupe dans $GL(V)$ le groupe linéaire de V . $GL(V)$ est le groupe des automorphismes de V , c'est-à-dire le groupe de toutes les applications bijectives de V dans V . La représentation d'un groupe dans un espace vectoriel est la manière dont ce groupe agit sur les éléments de cet espace vectoriel.

Formellement cela revient à définir un homomorphisme $D : G \rightarrow GL(V)$, c'est-à-dire une application vérifiant les propriétés suivantes :

1. $D(e_G) = e_{GL(V)}$;
2. $\forall g \in G, D(g^{-1}) = D^{-1}(g)$;
3. $\forall g, h \in G^2 D(gh) = D(g)D(h)$

Cela revient à dire que $D(G)$ est l'image de $(G, *)$ dans $(GL(V), \circ)$.

Une représentation quelconque possède est, dans certain cas, décomposable en une somme de représentations élémentaires, c'est ce que l'on appelle la réductibilité.

1.1.2 Réductibilité de la représentation

Une représentation D sur V est dite réductible si son action laisse des sous-espaces de V invariants par son action¹. Décomposer D de manière irréductible consiste à écrire $D = \bigoplus_k D_k$ où chaque représentation D_k de G agit de manière irréductible sur un sous-espace de V . Ceci induit nécessairement la décomposition de V en somme directe de $V = \bigoplus_k V_k$.

¹Autre que ses sous-espaces triviaux bien évidemment.

Vis-à-vis de ce qui nous intéresse nous travaillerons avec des représentations ayant la propriété d'être unitaires, c'est-à-dire telles que $\forall g \in G, D^*(g) = D^{-1}(g)$. Dans notre cas cela signifie que les matrices réelles avec les quelles nous travaillerons seront orthogonales, i.e. $\forall g \in G, D^t(g) = D^{-1}(g)$. Ceci est important car on sait que toute représentation unitaire est complètement réductible [3]². Cela abouti au fait qu'une représentation unitaire est soit irréductible, soit décomposable en sommes directes de représentations irréductibles. Intéressons nous tout d'abord aux groupes finis.

1.1.3 Cas des groupes finis

Dans le cas des groupes finis on a le théorème suivant

Théorème 1 (Théorème de Maschke) *Toute représentation de dimension finie d'un groupe fini est complètement réductible.*

La question qui se pose est, pour un groupe donné, combien existe-t-il de manières inéquivalentes de faire agir ce groupe sur V . Par inéquivalente nous voulons dire telle qu'il n'existe pas de relation de conjugaison permettant de passer d'une représentation à une autre. Comme démontré dans de nombreux ouvrages, dont [3], dans le cas d'un groupe fini on a le théorème suivant qui répond à cette question :

Théorème 2 *Le nombre de représentations irréductibles d'un groupe fini est égal au nombre de ses classes de conjugaison.*

De cela on en déduit que soit D une représentation de G sur V , on a

$$D = \bigoplus_{k \in \bar{G}_k} m_k D_k \quad (1.1)$$

où k indexe les classes de conjugaison de G , D_k est la représentation irréductible de G associée à la classe de conjugaison \bar{G}_k , et m_k la multiplicité de cette représentation. Appliquons à présent ces résultats au groupe des permutations.

1.2 Représentation du groupe symétrique

De manière formelle le groupe symétrique d'un ensemble F est le groupe des permutations de F , c'est-à-dire des bijections de F sur lui-même, ce groupe est classiquement noté $S(F)$. On appelle groupe des permutations à n éléments et on note S_n le groupe symétrique appliqué à l'ensemble des nombres de 1 à n . On montre que si $\text{Card}(F) = n$ alors $S(F)$ et S_n sont isomorphes, de fait on ramène systématiquement l'étude de $S(F)$ à celle de S_n . Par abus de langage classique nous appellerons S_n groupe symétrique. L'ordre de ce groupe, c'est-à-dire le nombre d'éléments distincts qui le compose, est $n!$.

Les classes de conjugaisons de S_n définissent les catégories de transformations distinctes qu'il contient. On montre que ces classes sont isomorphes à l'ensemble des partitions de l'entier n . On appelle partition d'un entier n sa décomposition en une somme d'entiers $m_i \leq n$ telle que $\forall j > i, m_j \geq m_i$. Pour S_n ces partitions correspondent à un découpage en cycles de l'ensemble des permutations. Prenons un exemple simple, on

²A vérifier si ya pas un souci avec Mascke

considère l'entier 3 on a $p(3) = \{1 + 1 + 1, 1 + 2, 3\}$ l'ensemble de ses partitions. Si l'on considère maintenant S_3 alors on peut découper ce groupe en trois sous-ensembles, nous indiquerons ces ensembles dans l'ordre alphabétique. On a $S_{3_a} = \{(1)(2)(3)\}$, $S_{3_b} = \{(12)(3), (23)(1), (13)(2)\}$ et $S_{3_c} = \{(123), (132)\}$ ces trois ensembles. S_{3_a} est l'ensemble des transformations définies par trois 1-cycles, il équivaut au groupe trivial de l'élément neutre ; S_{3_b} celui des transformations du type un 2-cycle et un 1-cycle ; S_{3_c} celui des transformations du type un 3-cycle. Une manière élégante, pratique et rapide de travailler avec les groupes symétriques ainsi que leurs classes de conjugaisons passe par l'utilisation des diagrammes de Young. On rappelle le théorème 2 que l'on complète pour les groupes symétriques du suivant [4] :

Théorème 3 *Les représentations irréductibles de S_n sont en correspondance avec les $p(n)$ tableaux d'Young à n boîtes.*

Les diagrammes de Young des classes de conjugaison de S_3 sont³

$$\begin{array}{ccc}
 \square\square\square & \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}
 \end{array} \tag{1.2}$$

Chaque colonne représente un j -cycle avec j la longueur de la colonne. Le diagramme $\square\square\square$ représente la classe d'équivalence de l'élément neutre e , de même $\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$ est le diagramme de l'action d'un 3-cycle. Dans la suite de rapport nous noterons λ la forme diagramme de Young, ainsi pour les diagrammes ci-dessus et de gauche à droite nous aurons :

$$\lambda = \{3\}; \quad \lambda = \{2, 1\}; \quad \lambda = \{1, 1, 1\} \tag{1.3}$$

nous confondrons de plus la forme du diagramme avec la partition à laquelle elle correspond. De plus, à partir de maintenant, nous noterons classiquement $\lambda \vdash n$ l'ensemble des partitions de n .

Un des avantages de cette notation diagrammatique est que l'on peut l'utiliser pour effectuer simplement des calculs sur les groupes des permutations. C'est ce que nous illustrerons au cours de la sous-section suivante.

1.2.1 Propriétés des tableaux de Young

Nous détaillerons ici quelques unes des innombrables propriétés des tableaux de Young. Pour les démonstrations rigoureuses des relations que nous présenterons on pourra se reporter à l'ouvrage de Claudio Procesi [5], ainsi qu'à l'article de Sagan [6] qui ouvre à d'autres horizons l'utilisation des tableaux de Young (TY dans la suite).

Nombre de permutations dans une classe de conjugaison

Si l'on considère le diagramme $\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \end{array}$, combien existe-t-il de manière différentes de le remplir ? Dans ce cas le dénombrement manuel est facile à effectuer, les cycles différents

³La convention d'écriture choisie pour les tableaux de Young est la convention anglo-saxonne par opposition à la convention française moins répandues.

sont $(12)(3)$, $(23)(1)$ ainsi que $(13)(2)$, ce qui nous donne les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \quad (1.4)$$

Il existe donc 3 manières différentes de remplir nos diagrammes de Young. Dans le cas général si j désigne un j -cycle et k_j le nombre de j -cycle dans le diagramme considéré alors le nombre P_k de manière de remplir ce diagramme est

$$P_k = \frac{n!}{\prod_{j=1}^n j^{k_j} k_j!} \quad (1.5)$$

On vérifie que l'on a bien $\sum_{k \in p(n)} P_k = n!$.

1.2.1.1 Dimension des représentations associées aux classes de conjugaison

Les classes de conjugaison de S_3 identifiées, les permutations inéquivalentes dans chaque classe dénombrées, la question se pose maintenant de déterminer pour chaque classe de conjugaison la dimension de la représentation qu'elle génère. Nous ne détaillerons pas explicitement ce point précis, nous nous concentrerons sur l'utilisation des TY pour répondre à notre problème. L'explication du « pourquoi ça marche ? » pourra être trouvée dans les références [4, 5, 7] et à avoir avec l'identification des sous-espaces invariants de la décomposition régulière, décomposition classique et réductible.

A chaque partition de n , donc à chaque diagramme de Young, est associé un module⁴ appelé *module de Specht* noté S^λ . Le module de Specht λ est le module de la représentation irréductible associée à λ . Les « vecteurs » de base de S^λ sont engendrés par les tableaux de Young standards (TYS par la suite) associés au diagramme considéré.

Nous appellerons *TYS* est un diagramme rempli par l'ensemble des entiers de 1 à n disposé de manière strictement croissante lorsque l'on se déplace de gauche à droite et de haut en bas dans le tableau. Dans le cas de $\lambda = \{2, 1\}$ nous n'avons que deux *TYS* :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad (1.6)$$

A strictement parler les *TYS* ne sont pas les vecteurs de base de S^λ , c'est leur action sur les éléments de S_n qui génère les vecteurs de base du module. Nous reviendrons ultérieurement sur la manière dont un *TYS* génère un vecteur de base de S^λ , regardons pour l'instant comment dénombrer l'ensemble des *TYS* associés à une partition λ . Quand $n = 3$ il n'y a pas de souci pour opérer manuellement le dénombrement des différents *TYS*, toutefois quand n croît l'opération se complique très rapidement.

Considérons, par exemple, le diagramme suivant :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad (1.7)$$

⁴Nous reviendrons ultérieurement sur ce point, mais notons déjà qu'un module est un « espace vectoriel » sur un anneau et non pas sur corps.

le problème du dénombrement devient plus délicat. Toutefois il existe une technique simple et efficace pour effectuer ce dénombrement : la méthode du crochet (hook formula) de Frame-Robinson-Thrall. Pour ce faire on associe à chaque boîte du diagramme sa longueur de crochet l_i . Cette longueur se calcule en comptant pour une boîte donnée le nombre de boîtes à sa droite que l'on somme avec le nombre de boîtes le long de sa verticale descendante plus elle même. Notre diagramme rempli des longueurs de crochet associées à chacune de ses boîtes nous donne :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 6 & 5 & 2 \\ \hline 5 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline \end{array} \quad (1.8)$$

Le calcul du nombre de vecteurs indépendants associés au diagramme, et donc la dimension du module associé, se fait ensuite tout simplement par la formule suivante :

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_i l_i} \quad (1.9)$$

Dans le cas précédent cela nous donne un espace de dimension $\frac{10!}{6*5^2*4*3*2^3} = 252$. Le dénombrement manuel aurait été autrement plus difficile à effectuer, sans compter le risque élevé d'erreurs d'étourderies. On trouve des démonstrations simples de ces résultats dans [6]. On a de plus la relation suivante qui unit les dimensions des modules de Specht avec l'ordre du groupe symétrique :

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n! \quad (1.10)$$

Maintenant que nous avons ces informations pratiques sur l'utilisation des tableaux de Young, regardons un peu plus en détail ce qu'il y a derrière cela. Nous introduirons pour cela la notion d'algèbre de groupe, ce point éclaire sur la nature des modules de Specht.

1.2.2 Opérateurs associés à un tableau

Revenons sur la manière dont un TYS associé à une partition λ engendre un vecteur de base de S^λ . Faisons pour cela un detour du côté de la notion d'algèbre de groupe. On considère un groupe fini G contenant n éléments. On note $\mathbb{K}[G]$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles des éléments de G , où \mathbb{K} indique un corps. Concrètement on a $\mathbb{R}[G]$ définie comme :

$$\mathbb{R}[G] = \{a_1 g_1 + \dots + a_n g_n \mid a_k \in \mathbb{R}, g_k \in G\} \quad (1.11)$$

Soit $\mathcal{B}_G = \{g_1, \dots, g_n\}$ on a naturellement $\{G, +, \cdot\}$ ⁵ qui forme un \mathbb{R} -espace vectoriel. En outre cette espace vectoriel est muni d'une opération de multiplication

$$\forall (a_s)_{s \in G}, (b_t)_{t \in G} \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{s \in G} a_s \cdot s \right) \left(\sum_{t \in G} b_t \cdot t \right) = \sum_{s \in G} \sum_{t \in G} a_s b_t \cdot st = \sum_{s \in G} \left(\sum_{t, u \in G \mid tu=s} a_t b_u \right) s \quad (1.12)$$

Cette multiplication interne, notée \times , confère à $\{G, +, \cdot, \times\}$ la structure de \mathbb{R} -algèbre, nous noterons cette algèbre plus simplement $\mathbb{R}[G]$.

⁵ G représente l'ensemble des éléments du groupe G pensés comme des vecteurs

De fait un G -module est un module sur l'anneau de l'algèbre de groupe. Ce que l'on appelle module de Specht est le sous-module irréductible du S_n -module induit par la partition λ . L'action d'un TYS sur un élément de S_n génère une combinaison linéaire d'éléments de S_n ; le vecteur obtenu appartient à $\mathbb{R}[S_n]$ et est un vecteur de base⁶ de S^λ . Pour ce faire deux opérations sont associées à l'action d'un TY sur S_n , un symétriseur associé aux lignes du tableau ainsi qu'un antisymétriseur associé aux colonnes du tableau.

Soit T un tableau de forme λ , et σ un élément de S_n . On peut définir deux groupes d'opérations à partir de T , le groupe l_T des opérations qui préservent les lignes et c_T le groupe des opérations qui préservent les colonnes. A partir de ces groupes on définit deux éléments de l'algèbre de groupe $\mathbb{R}[S_n]$: le symétriseur s_T et l'antisymétriseur a_T associés au tableau et définis par :

$$s_T = \sum_{\sigma \in l_T} \sigma \quad (1.13)$$

$$a_T = \sum_{\sigma \in c_T} \epsilon_\sigma \sigma \quad (1.14)$$

où ϵ_σ représente la signature de la permutation σ . Le produit de ces deux éléments y_T définit un projecteur sur le module de Specht S^λ , ce projecteur une fois normé est communément appelé *symétriseur de Young*. On a donc

$$y_T = a_T s_T = \sum_{\sigma \in l_T, \tau \in c_T} \epsilon_\tau \sigma \tau \quad (1.15)$$

et $e_T = \frac{y_T}{n(T)}$ le projecteur associé. L'action de e_T sur un élément de S_n produit un vecteur de l'algèbre du groupe, ce vecteur appartient au module S^λ , où λ est la forme de T .

On considère par exemple $\lambda = \{2, 1\}$ partition associée à une classe d'équivalence de S_3 . Le diagramme de Young associé à cette partition est $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$. La dimension du module $S^{\{2,1\}}$ est égale au nombre de TYS associés au diagramme. Dans notre cas on a :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad (1.16)$$

soit un module de dimension 2. La génération du projecteur est immédiate et procède de la sorte⁷, on symétrise le tableau par lignes puis on l'antisymétrise par colonnes. Ainsi on obtient les projecteurs

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \frac{1}{4}([e - (13)][e + (12)]) = \frac{1}{4}(e + (12) - (13) - (13)(12)) \quad (1.17)$$

ainsi que

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \frac{1}{4}([e - (12)][e + (13)]) = \frac{1}{4}(e - (12) + (13) - (12)(13)) \quad (1.18)$$

qui appliqués aux éléments $\{123\}$ et $\{132\}$ de S_3 génèrent les vecteurs de permutations

$$|a\rangle = \frac{1}{4}|123 + 213 - 321 - 231\rangle \quad (1.19)$$

⁶La démonstration rigoureuse de cette propriété pourra être trouvée dans [8].

⁷On pourra en trouver la démonstration [4].

$$|b\rangle = \frac{1}{4}|132 + 312 - 231 - 321\rangle \quad (1.20)$$

qui sont les vecteurs de base de $S^{\{2,1\}}$.

Mais maintenant si au lieu de considérer S_3 on considère $S(\mathbb{T}^{(3)})$, où $\mathbb{T}^{(3)}$ représente l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 3, par isomorphisme on a les mêmes classes de conjugaisons ainsi que les mêmes représentations mais ce coup-ci plus dans $[1; n]$ mais dans un espace vectoriel de tenseurs. Soit t_{ijk} on a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \frac{1}{4}|t_{ijk} + t_{jik} - t_{kji} - t_{jki}\rangle = |m_{ijk}\rangle \quad (1.21)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \frac{1}{4}|t_{ikj} + t_{kij} - t_{jki} - t_{kji}\rangle = |n_{ijk}\rangle \quad (1.22)$$

L'action de S_3 sur l'espace des tenseurs d'ordre 3 se décompose dans $S^{\{2,1\}}$ dans la base des tenseurs m_{ijk} et n_{ijk} .

De cela on peut en déduire des règles d'invariances et de transformations de nos TY, ces règles nous seront utiles pour prendre en compte les symétries indicelles de nos tenseurs.

1.2.3 Transformation des TYS

Nous avons vu que, sous sa forme standard, un TYS de type λ appliqué comme opérateur sur un ensemble génère une représentation irréductible de S_n sur cette ensemble. La question que nous nous posons est la suivante : étant donné un module S^λ comment se décompose dans la base de ce module l'action d'un tableau d'Young non-standard sur un élément de S_n ? L'action générale de décomposer un tableau non-standard en une combinaison de linéaires de tableaux standards sera appelée *redressement* du tableau. Il y a deux techniques de redressement : une par transformation équivalente, l'autre par décomposition.

Transformations équivalentes

Une série de transformations équivalentes est une série de modifications de l'ordre des éléments dans le tableau de telle manière à ce que le vecteur résultant reste identique. Les actions autorisées sont :

- les permutations des éléments appartenant au symétriseur (ligne) mais pas à l'antisymétriseur ;
- les permutations des éléments de l'antisymétriseur (colonne) affublées de la signature de la permutation.

Nous appellerons dans la suite *descente* une décroissance dans la séquence le long d'une ligne dans TY, de fait un tableau peut contenir plusieurs descentes qui seront autant d'anomalies à corriger. Illustrons cela sur un exemple :

Exemple 1 On considère la partition $\lambda = \{4, 2\}$, ainsi que la tableau non standard suivant :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad (1.23)$$

ce tableau présente 3 descentes. Pour commencer on permute 6 et 2 dans l'antisymétriseur, la transformation étant impaire le tableau résultant est affublé d'un signe $-$.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 6 & 5 & & \\ \hline \end{array} \quad (1.24)$$

On permute les deux premières colonnes, on a le droit car cette opération agit dans s_T sans modifier a_T . On fait de même pour les deux dernière colonne, d'où

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline \end{array} \quad (1.25)$$

Notre tableau non standard a été redressé, aucune des opérations précédentes n'a modifiée le vecteur généré par le tableau initial.

Cependant comme nous le montrons avec l'exemple 2, ce genre de transformation peut ne pas aboutir.

Exemple 2 Le tableau $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline \end{array}$ n'est pas trivialement redressable.

Le tableau de l'exemple 2 présente une descente que l'on n'arrive pas à faire disparaître par une série de manipulations simples. Toutefois on sait que le vecteur engendré par le TY se décompose dans la base de $S^{\{4,2\}}$ des TYS de λ , de fait notre TY s'exprime comme une combinaison linéaire de TYS. Pour effectuer cette réduction nous utiliserons l'algorithme de redressement de Garnir.

Algorithme de Garnir

Les démonstrations des relations de Garnir pourront être trouvées dans les références [8,9]. On considère un tableau de TY présentant une à plusieurs descentes non éliminable trivialement, par exemple

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad (1.26)$$

on notera y_T l'opérateur associé à ce diagramme ainsi que $|v\rangle$ le vecteur de l'algèbre de groupe associé à T . L'algorithme de Garnir cherche à déterminer un élément g_G de l'algèbre de groupe tel que l'on ait $g_G \cdot |v\rangle = |0\rangle$. On montre que les permutations à prendre en compte pour construire cet élément appartiennent à un TY asymétrique extrait du TY à régulariser. Si l'on considère les deux cases contenant la descente, ce tableau sera l'union d'une bande contenant les éléments situés au-dessous du terme majeur de la descente et d'une bande contenant les termes au-dessus de l'élément mineur. Dans notre cas on a

$$\begin{array}{c} 2 \\ 5 \ 4 \\ 6 \end{array} \quad (1.27)$$

L'éléments g_G est la somme des opérations signées sur ce tableau qui le transforme en d'autres tableaux tels que les nombres dans les deux bandes soient croissants lorsque l'on

se déplace vers le bas. On a la série exhaustive des tableaux suivants qui vérifie cette condition

$$\begin{array}{cccccc}
 & 2 & & 2 & & 4 & & 2 & & 4 & & 5 \\
 5 & 4 & & 4 & 5 & & 2 & 5 & & 4 & 6 & & 2 & 6 \\
 6 & & ; & 6 & & ; & 6 & & ; & 5 & & ; & 5 & & ; & 4
 \end{array} \tag{1.28}$$

On en déduit que l'élément g_G de Garnir correspondant est

$$g_G = e - (45) + (245) + (456) - (2465) + (25)(46) \tag{1.29}$$

Cet élément vérifie $g_G|v\rangle = 0$, la démonstration en est donnée dans [8]. On montre que la relation de Garnir implique à une relation sur les tableaux⁸, c'est à dire dans notre cas

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 5 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 3 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \tag{1.30}$$

Cette décomposition obtenue on l'itère sur les éléments non-redressés que l'on vient de produire, au bout d'un certain nombre d'opérations notre TY initial sera écrit comme une combinaison linéaire de TYS.

1.2.4 Synthèse

Faisons une synthèse de cette sous-section. Les classes de conjugaison de S_n sont en rapport avec l'ensemble des partitions du nombre n , on en déduit que S_n possède $p(n)$ classes de conjugaisons. La structure en cycle de chacune de ces classes de conjugaison est, de plus, connue. Nous savons qu'il existe autant de représentations inéquivalentes d'un groupe que celui-ci possède de classe de conjugaison ; on en conclut donc à l'existence de $p(n)$ représentations irréductibles de S_n . Les diagrammes de Young permettent de réaliser rapidement des calculs de combinatoire sur les classes de conjugaison du groupe symétrique, le théorème (3) nous indique qu'il en est de même pour les représentations irréductibles. De fait à partir d'un calcul de combinatoire nous avons pu calculer les cardinaux des classes de conjugaison, ainsi que, via la règle du crochet déterminer la dimension des différentes représentations. Nous avons conclu en introduisant la notion de vecteur engendré par un TYS, ainsi qu'en proposant deux méthodes de transformations de TY. Ceci étant introduit, intéressons nous à présent à l'action des groupes de matrices sur nos tenseurs. L'ensemble de ces méthodes porte le nom de méthodes tensorielles et intègre à présent la notion de dimensions.

1.3 Méthodes tensorielles

Cette section va nous permettre de faire le lien entre les savoirs théoriques que nous avons introduit et la problématique de l'étude des tenseurs de comportement que nous traiterons au chapitre suivant. Nous nous donnerons pour commencer quelques définitions, puis nous nous présenterons la dualité de Schur-Weyl qui nous permet de lier les représentations du groupe des permutations avec celles du groupe linéaire. Or dans le cadre de l'étude des groupes de symétrie des opérateurs de comportement, nous nous intéressons à l'action du groupe orthogonal sur nos tenseurs, groupe qui est un sous groupe de $GL(d)$.

⁸Ce résultat sera montré sur un exemple en annexe §.B.1.

1.3.1 Espace tensoriel

On considère un espace vectoriel V de dimension d , il sera notre espace de travail dit « naturel ». Dans le cas de la mécanique, par exemple, nous considérerons l'espace euclidien classique que nous noterons E et qui pourra correspondre, selon les cas, à un espace à 2 ou 3 dimensions. Selon les grandeurs étudiées il sera nécessaire de se placer dans un espace vectoriel construit à partir de l'espace naturel par tensorisation de cet espace. Nous noterons $V^{\otimes n}$ un tel espace et nous le définirons par :

$$V^{\otimes n} = V \otimes \dots \otimes V \quad (1.31)$$

Notre objectif est de caractériser l'action des groupes $GL(d)$, $O(d)$, $SO(d)$ ainsi que S_n dans l'espace des tenseurs cartésiens d'ordre n en dimension d . On rappelle que $GL(V)$ est le groupe des automorphismes de V , $SO(V)$ est son sous-groupe qui contient les transformations orthogonales de déterminant $+1$. L'objectif est d'établir un lien entre les représentations irréductibles de ces groupes de Lie et celles du groupe des permutations des indices de ce tenseur.

1.3.2 Représentation

On complète la définition que l'on a donnée au §1.1.1 aux groupes de matrices. On appelle représentation fondamentale d'un groupe linéaire de dimension d sa représentation naturelle par des matrices. Par exemple pour $SO(2)$, le groupe spécial orthogonal d'un espace de dimension 2, sa représentation fondamentale sur E est le classique groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

On appellera D l'application (homomorphisme) qui a un élément du groupe abstrait $so(2)$ lui associe sa matrice dans le groupe des matrices $SO(2)$, et, de manière générale, nous appellerons D tout homomorphisme agissant de la sorte. Si l'on construit à partir de V l'espace tensoriel $V^{\otimes n}$ la représentation du groupe G sur $V^{\otimes n}$ est donnée par la représentation produit $D^{\otimes n} = D \otimes \dots \otimes D$.

Passons maintenant à la réductibilité de telles représentations.

1.3.3 Réductibilité de la représentation

Soit D_A et D_B deux représentations de G sur V_A et V_B . La représentation de G sur $V_A \otimes V_B$ est la représentation produit tensoriel $D_A \otimes D_B$. Plusieurs résultats sont reliés à cette représentation produit tensoriel. On a $D_A \otimes D_B$ unitaire si D_A et D_B sont unitaires, donc complètement réductible si d'ordre fini [3]. De plus si D_A et D_B sont des représentations irréductibles leur produit tensoriel n'est, en général, pas irréductible⁹. De fait si nos deux représentations sont unitaires, leur produit se décompose selon la décomposition dite de *Clebsch-Gordan* suivante :

$$D_A \otimes D_B = \bigoplus_i m_i D_i \quad (1.33)$$

⁹ Sauf si au moins une des représentations est de dimension 1.

Dans le cas des représentations irréductibles de $O(3)$ on montre [3, 7] que la décomposition précédente s'explique :

$$D_{ir}^{\otimes n} \otimes D_{ir}^{\otimes m} = \bigoplus_{k=|m-n|}^{m+n} D_{ir}^{\otimes k} \quad (1.34)$$

qui est la règle d'addition des moments angulaires que l'on a classiquement en mécanique quantique. Dans (1.34) l'exposant indique l'ordre du tenseur sur lequel agit la représentation. Le lien entre la dimension de la représentation irréductible et son ordre est donnée par la relation¹⁰ :

$$\text{Dim}(D_{ir}^{\otimes n}) = \frac{(d+n-3)!(d+2n-2)}{(d-2)!n!} \quad (1.35)$$

ce qui, dans le cas de $O(3)$, aboutit au résultat classique suivant :

$$\text{Dim}(D_{ir}^{\otimes n}) = 2n + 1 \quad (1.36)$$

et à

$$\text{Dim}(D_{ir}^{\otimes n}) = \begin{cases} 2 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

pour $O(2)$. Ceci est intéressant car connaissant la construction de la représentation de $O(d)$ sur V_n on connaît de fait la structure $O(d)$ -irréductible de V_n quelque soit n . C'est à partir de cette remarque que Jerphagnon et *al.* ont proposée dans [10], et pour $O(3)$, une méthode d'étude des tenseurs modélisant les propriétés physiques des matériaux. L'algorithme simple qu'ils proposent dans cet article, et que nous avons complété de manière à prendre en compte la grande symétrie des tenseurs de comportement [11], se base sur l'approche proposée dans cette sous-section. L'exposé de cette méthode pourra être trouvé en annexe A. L'avantage de la méthode est que l'on n'a pas besoin de comprendre outre mesure la philosophie mathématique sous-jacente pour l'appliquer. Mettons à présent en avant le lien qui unit l'action de S_n sur les indices d'un tenseur avec sa décomposition $GL(d)$ -invariante.

1.3.4 Action couplée

On considère notre espace tensorisé $V^{\otimes n}$ ainsi qu'une base \mathcal{B} de cet espace, cette base peut s'écrire :

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \quad (1.38)$$

Soit σ un élément de S_n , on a $D(\sigma)$ l'application qui permute les vecteurs de \mathcal{B} selon σ , on peut écrire

$$D(\sigma)e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(n)}} \quad (1.39)$$

De plus $V^{\otimes n}$ supporte l'action d'un deuxième groupe $GL(d)$, soit g un élément de ce groupe, son action sur \mathcal{B} s'écrit :

$$D(\sigma)D^{\otimes n}(g)e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \quad (1.40)$$

on montre que leur actions commutent [5, 7], i.e

$$D(\sigma)D^{\otimes n}(g)e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} = D^{\otimes n}(g)D(\sigma)e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \quad (1.41)$$

¹⁰En fait l'espace des représentations de irréductible de $O(d)$ d'ordre n dans un espace naturel est isomorphe à l'espace des polynômes harmoniques d'ordre n à d dimensions.

cette relation de commutation implique ce qui va suivre. On rappelle que les deux représentations $D(\sigma)$ et $D^{\otimes n}(g)$ sont réductibles, on a¹¹

$$D(\sigma) = \bigoplus_Y m_Y D_Y(\sigma), \quad D^{\otimes n}(g) = \bigoplus_i m_i D_i(g) \quad (1.42)$$

et on abouti à la dualité Schur-Weyl suivante, citée dans [7] :

Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des sous-espaces $V_Y^{\otimes n}$ et celui des $V_i^{\otimes n}$: la restriction de la représentation $D^{\otimes n}(g)$ à chaque $V_Y^{\otimes n}$ se décompose précisément en m_i copies de D_i , pour un certain i et la restriction de $D(\sigma)$ à chaque $V_i^{\otimes n}$ se réduit en m_Y copies de D_Y . De plus, la multiplicité de D_i dans V_n^Y est égale à la dimension de D_Y , et la multiplicité de D_Y dans $V_i^{\otimes n}$ vaut la dimension de D_i , on a

$$m_i = f_Y, \quad m_Y = \text{Dim}(D_i) \quad (1.43)$$

La démonstration de ce résultat pourra être trouvée dans [5, 7]. De fait la relation écrite ci-dessus nous indique que les espaces que nous avons identifiés comme étant invariant sous l'action du groupe de permutation le sont également sous l'action du groupe des rotations. Toutefois il est clair que pour invariant l'espace ne sera pas nécessairement irréductible, mais à cette réduction près, nous obtenons à partir de l'étude des permutations toutes les représentations possibles de $GL(d)$ sur $V^{\otimes n}$. Le corollaire est que l'on peut déterminer par voie de conséquence des représentations qui ne peuvent pas exister car enfreignant la dualité Schur-Weyl. Concrètement cela revient à dire que l'on peut construire une représentation de $GL(d)$ tel qu'il n'existe pas de représentation de S_n qui lui soit associée. Nous donnerons un exemple de cela dans ce qui va suivre. Clôturons à présent cette section en indiquant comment calculer la dimension des tenseurs associés aux représentations $GL(d)$ -irréductible.

1.3.5 Prise en compte de la dimension

L'utilisation des diagrammes de Young nous permet de calculer facilement dans un espace de physique de dimension d le nombre de composantes du tenseur associé à la représentation λ . L'algorithme est le suivant, on considère $\lambda = \{4, 2\}$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad (1.44)$$

Quel est le nombre de composantes d'un tenseur ayant ces symétries dans un espace à d dimensions ? L'algorithme consiste à placer d dans l'angle de l'équerre du diagramme et de le remplir en rajoutant $+1$ pour un déplacement vers la droite et -1 pour un vers le bas. Dans un espace à 3 dimensions le précédent diagramme nous donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (1.45)$$

le calcul de la dimension s'effectue ensuite

$$\dim D_i = \frac{\prod_i b_i}{\prod_i l_i} \quad (1.46)$$

¹¹Ici et dans la suite on indexera par Y les espaces relatifs aux représentations irréductibles de S_n et par i ceux associés à celle de $GL(d)$.

où les b_i sont les valeurs inscrites dans nos boites et les l_i les longueurs de crochet définies au §.1.2.1. Ainsi le nombre de composantes de notre tenseur est de :

$$\dim D_i = \frac{2 * 3^2 * 4 * 5 * 6}{5 * 4 * 2^2} = 27 \quad (1.47)$$

Un corollaire essentiel est qu'en dimension d les classes d'équivalences de S_n présentant des cycles de longueurs strictement supérieur à d conduisent à des tenseurs nuls. De fait si on considère un tenseur T d'ordre n en dimension d , et que l'on considère sa décomposition $GL(d)$ -irréductible, comme la longueur maximale d'un cycle est de n si $d \geq n$ alors l'ensemble des classes d'équivalences conduisent à des tenseurs non nuls, donc à des spectres en permutation indépendants de la dimension. De fait quand d varie de 1 à n le spectre se déploie et dépend donc fortement de la dimension de l'espace de travail. De fait si l'on se place dans le cadre de la mécanique où les tenseurs peuvent être d'ordre élevé, on comprend bien que les opérateurs vont fortement varier selon que l'on se place dans un espace à deux dimensions ou bien trois dimensions. La prise en compte de ces paramètres dimensionnels dans le cas des opérateurs d'élasticités classiques et du second ordre est un des objectifs que nous poursuivrons dans la suite de ce document.

Chapitre 2

Élasticité classique et généralisée

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer les concepts qui viennent d'être introduit à l'étude des tenseurs de comportement. Le fil rouge de ce chapitre sera l'étude des tenseurs d'ordre pair de l'élasticité du second gradient. Nous présenterons pour commencer la formulation de cette élasticité. Puis nous verrons comment établir les décompositions $SO(3)$ et $SO(2)$ -invariantes des divers opérateurs. L'établissement de tels décomposition est le travail initial à effectuer si l'on s'intéresse aux différents systèmes d'anisotropie qu'un comportement peut avoir [12, 13].

Ce chapitre nous permettra d'aborder trois points essentiels. Tout d'abord nous introduirons une méthode pour tenir compte des symétries indicielles de nos tenseurs. Cette méthodologie nous est totalement propre et permet de traiter de cas complexes et ceci de manière indépendante de la dimension. En ce sens notre méthodologie est plus générale que celle de Jerphagnon et *al.* [10]. Le second point sera de montrer comment obtenir un représentation $SO(d)$ -invariante à partir de celle $GL(d)$ -invariante obtenue à partir de la dualité Schur-Weyl. Finalement nous verrons comment obtenir effectivement cette décomposition quand d est petit, c'est-à-dire comment la prise en compte de la dimension modifie le spectre de nos opérateur.

Commençons donc par introduire le modèle d'élasticité qui va nous servir à illustrer notre propos.

2.1 Élasticité du second gradient

Les équations de l'élasticité du second gradient s'écrivent [14] :

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\mathbb{C}} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\mathbb{M}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (2.1)$$

$$\underset{\sim}{\mathbb{S}} = \underset{\sim}{\mathbb{M}}^T : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\mathbb{A}} \cdot \underset{\sim}{\mathbb{K}} \quad (2.2)$$

où : $\underset{\sim}{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy ; $\underset{\sim}{\mathbb{S}}$ le tenseur d'hyper-contrainte ; $\underset{\sim}{\varepsilon}$ le tenseur des déformations ; $\underset{\sim}{\mathbb{K}}$ est le tenseur du « gradient des déformations » ; $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$ est le tenseur d'élasticité du premier ordre ; $\underset{\sim}{\mathbb{A}}$ le tenseur d'élasticité du second ordre et $\underset{\sim}{\mathbb{M}}$ le tenseur de couplage entre l'élasticité classique et celle du second ordre.

soit pour un tenseur d'ordre 4 en dimension 3, 15 composantes. Le module associé à $\square\square\square\square$ dans S_4 correspond donc bien au sous-espace vectoriel des tenseurs totalement symétriques. Les modules associés aux autres partitions génèrent de même des sous-espaces orthogonaux possédant des propriétés de symétries mixtes.

Quand la dimension du module est supérieure à 1 il faut, conformément à la dualité Schur-Weyl, multiplier la dimension de D_i par celle du module, on obtient ainsi :

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
D_i	15	15	6	3	0
f^λ	1	3	2	3	1
Dt_i	15	45	12	9	0

(2.15)

et on vérifie bien que l'on a $3^4 = 15 + 45 + 12 + 9 = 81$. Cette décomposition est $GL(3)$ -invariante, toutefois on peut aller plus loin si l'on considère $O(3)$ un sous-groupe de $GL(3)$ qui possède en outre la propriété d'orthogonalité.

Le spectre de la décomposition $GL(3)$ -invariante d'un tenseur d'ordre 4 quelconque en dimension 3 est le suivant

$$\text{Sp}_{GL(3)}(C_{ijkl}) = \square\square\square\square \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}^{(3)} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}^{(2)} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}^{(3)} \quad (2.16)$$

A partir du produit tensoriel des représentations $O(3)$ -irréductible par l'algorithme présenté en annexe on obtient :

$$\text{Sp}_{O(3)}(C_{ijkl}) = 0^{(3)} \otimes 1^{\#(6)} \otimes 2^{(6)} \otimes 3^{\#(3)} \otimes 4 \quad (2.17)$$

Comme la décomposition $O(3)$ -invariante est comprise dans la décomposition $GL(3)$ -invariante, on peut identifier les deux décompositions de manière à établir un dictionnaire permettant de passer de l'une à l'autre. De fait on obtient le dictionnaire suivant :

$GL(3)$		$O(3)$
$\square\square\square\square$	\rightarrow	$0 \oplus 2 \oplus 4$
$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$1^{\#} \oplus 2 \oplus 3^{\#}$
$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$0 \oplus 2$
$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$1^{\#}$

(2.18)

Cette méthode de dictionnaire permet d'associer très facilement une représentation de $GL(3)$ avec sa représentation associée de $O(3)$. Ainsi notamment on voit qu'à la représentation triviale de S_4 (i.e. $\square\square\square\square$) est associée un tenseur d'ordre 4, totalement symétrique qui se décompose comme $0 \oplus 2 \oplus 4$ dans $O(3)$ et correspond, conformément à la formule (1.36), à 15 termes du tenseur complet. Ce dictionnaire établi, et connaissant les spectres des tenseurs $C_{(ij)[kl]}$ et $C_{[ij][kl]}$ [11] qui sont les suivants :

$$\text{Sp}_{O(3)}(C_{[ij][kl]}) = 0^{(2)} \oplus 1^{\#} \oplus 2^{(3)} \oplus 3^{\#} \oplus 4 \quad (2.19)$$

$$\text{Sp}_{O(3)}(C_{[ij][kl]}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (2.20)$$

on en conclut les spectres en permutation suivants :

$$\text{Sp}_{S_3}(C_{[ij][kl]}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2.21)$$

$$\text{Sp}_{S_3}(C_{[ij][kl]}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2.22)$$

Cette méthode de dictionnaire appelle un certain nombre de remarques. Tout d'abord en pratique elle ne présente pas un intérêt conséquent vis-à-vis de nos problématiques car ce qui nous intéresse est plus de passer de S_n à $O(3)$ que l'opération inverse. Toutefois l'établissement du dictionnaire nous montre immédiatement qu'il existe des configurations qui ne sont pas tensorielles, en effet si l'on considère un opérateur dont le spectre serait le suivant $(0 \oplus 2 \oplus 3^\# \oplus 4)$ alors cet opérateur ne peut pas être tensoriel car on ne peut lui associer aucun spectre en permutation. De fait plus que les tenseurs harmoniques la vraie base d'écriture d'un tenseur est celle identifiée par le dictionnaire ci-dessus, nous reviendrons sur ce détail dans la suite du document. Le dernier point à soulever et que cette méthode nous a permis d'obtenir la forme du spectre en permutation que nous devons retrouver en prenant en compte maintenant explicitement les symétries indicelles du tenseur.

Regardons ce qui se passe maintenant si l'on s'intéresse au tenseur d'hyper-élasticité d'ordre 6.

2.2.2 Étude d'un tenseur d'ordre 6 générique

On procédera comme introduit précédemment en deux temps : _ étude de la structure du groupe des permutations, ici S_6 ; _ étude du tenseur en dimension d . Commençons donc par l'étude du groupe symétrique.

Application à S_6

Le groupe des permutations agissant sur les indices d'un tenseur d'ordre 6 est naturellement S_6 . Les classes de conjugaison de ce groupe sont isomorphes à l'ensemble des diagrammes de Young à 6 éléments. Ces diagrammes sont :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2.23)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad (2.24)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (2.25)$$

On référera aux onze classes en les indexant de (a) à (k) et ceci de gauche à droite et de haut en bas. Le nombre de permutations dans chaque classe est

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)
P_μ	1	15	45	40	15	120	40	90	90	144	120

(2.26)

Par identification avec le spectre de la décomposition harmonique de A_{ijklmn} on obtient le dictionnaire suivant :

$GL(3)$		$SO(3)$
	→	$0 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 6$
	→	$1^\# \oplus 2 \oplus 3^\# \oplus 4 \oplus 5^\#$
	→	$0 \oplus 2^{(2)} \oplus 3^\# \oplus 4$
	→	$1^\# \oplus 3^\#$
	→	$1^\# \oplus 3^\#$
	→	$1^\# \oplus 2$
	→	0

(2.34)

Comme précédemment ce résultat montre que la décomposition $O(3)$ -irréductible de tout tenseur d'ordre 6 en dimension 3 est une combinaison linéaire des vecteurs de bases introduit dans le dictionnaire précédent. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante, en effet un tenseur d'ordre 6 en dimension 3 (mais c'est vrai pour quelque soit n et d) à un nombre de composantes maximales, de fait une combinaison linéaire de vecteurs de base conduisant à un nombre de composantes supérieur à celles du tenseur ne représentera pas un tenseur. De plus on peut montrer que tout tenseur contient le tenseur totalement symétrique et que le poids de ce tenseur dans la décomposition est forcément de 1. Tout vecteur dans la base précédente comportant un coefficient autre que 1 le long du vecteur de base $\square\square\square\square\square\square$ ne représente pas un tenseur d'ordre 6 et ce quelque soit la dimension.

Notons que ici, et contrairement à l'exemple de l'élasticité classique, on a deux modules dont le spectre harmonique est identique. De fait si l'on considère le tenseur d'élasticité du second ordre $A_{[ij]k [lm]n}$ et que l'on essaie de remonter aux modules de Specht connaissant le spectre harmonique on a pas unicité de la solution, on a les deux possibilités suivante :

$$\text{Sp}(A_{[ij]k [lm]n}) = \square\square\square\square\square\square + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}^{(3)} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}^{(2)} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad (2.35)$$

ou

$$\text{Sp}(A_{[ij]k [lm]n}) = \square\square\square\square\square\square + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}^{(3)} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}^{(2)} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad (2.36)$$

Ceci constitue un problème à l'obtention propre de décomposition à partir de notre méthode de dictionnaire. De fait, il nous faut travailler sur une méthodologie robuste nous permettant de passer proprement de la décomposition en modules de Specht au spectre harmonique. Ceci implique concrètement plusieurs choses :

- tenir compte explicitement des symétries indicelles ;
- effectuer la réduction explicite d'une représentation $GL(d)$ -irréductible à une représentation $O(d)$ -irréductible et $SO(d)$ -irréductible.

Cela nous permettra de montrer que le cas numéro 1 ne peut pas exister, et que donc la bonne décomposition est la deuxième.

Détaillons brièvement les deux points précédents, nous en traiterons plus en détail dans la suite de ce document. Par tenir compte explicitement de la symétrie on veut dire que jusqu'à présent lors du calcul de la décomposition en module on ne tenait pas compte des symétries indicielles de notre tenseur. En effet la méthode du dictionnaire nous permettait de court-circuiter cette démarche en trouvant par identification la bonne solution, or l'ordre du tenseur augmentant cette méthode n'est plus satisfaisante. Tenir compte explicitement des symétries revient à trouver le sous-spectre de Sp_{S_n} de nos tenseurs avec leurs symétries indicielles. L'idée revient donc à se demander pour une symétrie donnée quelles sont les vecteurs de base précédemment identifié qui restent indépendants. C'est le premier point, le second tient au fait que la décomposition obtenue par la dualité de Schur-Weyl, du fait de l'orthogonalité des matrices de $O(3)$ est réductible. Prenons un exemple d'illustration, on considère la séquence suivante :

$$\square\square\square\square\square\square|_{S_6} \rightarrow \square\square\square\square\square\square|_{GL(3)} \rightarrow 0|_{O(3)} \oplus 2|_{O(3)} \oplus 4|_{O(3)} \oplus 6|_{O(3)} \quad (2.37)$$

Au module associé à la représentation triviale du groupe des permutations est associé le module des tenseurs totalement symétriques, ce module est irréductible dans $GL(3)$ mais réductible dans $O(3)$. Sa décomposition dans $O(3)$ est une somme de tenseurs harmoniques, c'est-à-dire totalement symétriques et de traces nulles, et on retrouve au final la décomposition classique d'un tel tenseur c'est-à-dire $0|_{O(3)} \oplus 2|_{O(3)} \oplus 4|_{O(3)} \oplus 6|_{O(3)}$.

Jusqu'à présent l'utilisation du dictionnaire nous permettait d'éviter d'effectuer la décomposition d'une représentation $GL(3)$ -irréductible en une représentation $O(3)$ -irréductible. En effet la technique du spectre harmonique nous donne immédiatement la représentation $O(3)$ -irréductible de notre tenseur. Si maintenant on veut proprement passer de la structure en permutation de notre opérateur à sa décomposition en tenseurs harmoniques il nous faudra réaliser explicitement cette réduction. Cette réduction correspond à la contraction sur l'ensemble des traces des opérateurs $GL(3)$ -invariants. Nous y reviendrons plus précisément dans la sous-section §.2.4.1. Notons toutefois que c'est grâce à ce point que nous pourrons dériver la décomposition harmonique¹ d'un tenseur d'ordre quelconque en dimension quelconque. Passons à présent, et pour commencer, à la prise en compte des symétries indicielles.

2.3 Prise en compte des symétries indicielles

Nous procéderons au cours de cette partie en trois étapes, nous commencerons par poser un cadre général à la prise en compte des symétries indicielles puis nous expliciterons une méthode pour réduire la décomposition de Specht par la prise en compte, tout d'abord des petites symétries, puis, dans un second temps, de la grande symétrie. Comme nous le montrerons dans ce qui va suivre la prise en compte de la petite symétrie sera rendue immédiate par l'utilisation d'un TY généralisé (TYG par la suite), tandis que la réduction des vecteurs de bases dans la cas de la grande symétrie mettra en oeuvre l'algorithme de Garnir.

¹A def

2.3.1 Cadre de travail

On considère que l'on travaille dans $V_d^{\otimes n}$. Un élément M de cet espace s'écrit :

$$M = M_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n} \quad (2.38)$$

Sous l'action du groupe symétrique S_n on peut décomposer $V_d^{\otimes n}$ en sommes directes de modules de Specht, c'est-à-dire en sous-espaces irréductibles et invariants sous l'action de S_n . On notera S^λ le module de Specht associé au diagramme de Young λ , et les vecteurs de base de ce module sont engendrés par les tableaux associés au diagramme λ . De fait on a

$$GL(V^{\otimes n}) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} S^\lambda \quad (2.39)$$

Plaçons nous par exemple dans $V^{\otimes 6}$, on considère $Y_{\{5,1\}} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array}$ le diagramme de Young associé à la partition $\lambda = \{5, 1\}$ de 6. Dans le cas général où l'on a pas de symétries indicielles, la dimension de $S^{\{5,1\}}$ est égale au nombre de TYS distincts ; c'est-à-dire 5 dans notre exemple.

$$S^{\{5,1\}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.40)$$

La décomposition d'un tenseur présentant des symétries matérielles dans la base des TYS précédemment identifiée va conduire à des composantes qui seront soit liées, soit nulles. Il devient alors intéressant de se demander qu'elle est la base de S^λ réellement vue par notre tenseur vis-à-vis de ses symétries. L'approche que nous allons suivre pour résoudre ce problème est la suivante, nous étudierons l'action des symétriseurs de Young sur des ensembles présentant des symétries ceci de manière à identifier la base vue par notre tenseur.

2.3.2 Petites symétries

Commençons avec une exemple simple, on considère $\lambda = \{2, 1\}$ de S_3 , le module $S^{\{2,1\}}$ de dimension 2 est généré par les TYS suivants :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (2.41)$$

On rappelle que les vecteurs sont générés à partir de l'action du symétriseur de Young sur un élément de S_3 , i.e. si l'on nomme $|a\rangle$ et $|b\rangle$ les vecteurs générés par ces TYS, ceux-ci s'expriment :

$$|a\rangle = [e + (12) - (13) - (13)(12)]\{abc\} = |abc + bac - cba - bca\rangle \quad (2.42)$$

$$|b\rangle = [e + (13) - (12) - (12)(13)]\{acb\} = |acb + cab - bca - cba\rangle \quad (2.43)$$

où nous avons noté $\{abc\}$ un élément de S_3 de manière à éviter toute ambiguïté entre les actions sur S_3 et les éléments de S_3 . De fait si au lieu de considérer un élément $\{abc\}$ on considèrerait plutôt un élément de type $\{aab\}$ on aurait une séquence présentant une « petite symétrie » de type (12), en effet $(12) \star \{aab\} = \{aab\}$. La réécriture de nos vecteurs précédents pour cette séquence conduit à :

$$|a\rangle = [e + (12) - (13) - (13)(12)]\{aab\} = |aab + aab - baa - aba\rangle \quad (2.44)$$

$$|b\rangle = [e + (13) - (12) - (12)(13)]\{aba\} = |aba + baa - aba - baa\rangle \quad (2.45)$$

$$= |0\rangle \quad (2.46)$$

Pour la séquence $\{aab\}$, c'est-à-dire pour une séquence de S_3 présentant une symétrie (12), la dimension de $S^{\{2,1\}}$ passe de 2 à 1. Si on revient aux TYS dans le premier cas on peut définir l'application qui aux nombres 1, 2 et 3 associe respectivement a , b et c on obtient :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \quad (2.47)$$

et

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \quad (2.48)$$

et on sait que dans ce cas précis les TYS conduisent à des vecteurs non nuls. Dans le second cas on associe 1,2 et 3 à a , a et b , on obtient

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a & a \\ \hline c & \\ \hline \end{array} \quad (2.49)$$

et

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline a & c \\ \hline a & \\ \hline \end{array} \quad (2.50)$$

où le vecteur engendré par le dernier TYS est nul. On constate sur d'autres cas similaires que si l'image de la séquence par les TYS possède au moins une répétition dans une colonne alors le vecteur obtenu est nul.

On appellera tableau de Young semi-standard le remplissage d'un diagramme de Young de forme λ tel que l'on ait des séquences strictement croissantes selon les colonnes et croissantes au sens large selon les lignes. De fait on peut conjecturer que pour une séquence de S_n présentant des répétitions le nombre de dimensions du module associé à la forme λ est égal au nombre de tableaux de Young semi-standard différents obtenus sur cette séquence.

Ainsi si l'on considère un tenseur ayant les symétries $A_{[ij]k [lm]n}$, la séquence associée à ses petites symétries est la suivante : $\{aabccd\}$. Quelle est alors vis-à-vis de ce tenseur sa décomposition sur $S^{\{5,1\}}$?

Ce module est généré par les TYS suivants :

$$S^{\{5,1\}} = \text{Vect}\left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 4 & & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 5 & & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & & & & & \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

l'image de notre séquence par ces TYS est

$$\text{Im}(\{aabccd\}) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & c & d \\ \hline a & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & a & c & c & d \\ \hline b & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & a & b & c & d \\ \hline c & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & a & b & c & d \\ \hline c & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & a & b & c & c \\ \hline d & & & & \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.52)$$

Cette famille est nécessairement génératrice car l'ensemble des TYS l'était, pour que $\text{Im}(\{aabccd\})$ soit une base de $S_{Sym}^{\{5,1\}}$, le module de Specht symétrisé, il ne faut conser-

ver que les vecteurs linéairement indépendants de cette famille. On a $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline a & b & c & c & d \\ \hline a & & & & \\ \hline \end{array}$ qui

gène un vecteur nul ainsi qu'un vecteur $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & a & b & c & d \\ \hline c \\ \hline \end{array}$ de multiplicité 2. De fait dans le sous-espace vectoriel des tenseurs possédant les petites symétries introduite ci-dessus, le module de Specht $S^{\{5,1\}}$ est généré par trois vecteurs :

$$\text{Im}(\{abccd\}) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & a & c & c & d \\ \hline b \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & a & b & c & d \\ \hline c \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & a & b & c & c \\ \hline d \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.53)$$

Ces vecteurs étant indépendant, ils forment une base de $S_{Sym}^{\{5,1\}}$. On a donc, en notation TYS :

$$S_{Sym}^{\{5,1\}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

Dans la suite nous préférons fonctionner avec une écriture de type mixte, mélange des deux précédentes, c'est-à-dire numérique avec répétitions. On notera alors à partir de la séquence $\{112334\}$:

$$S_{Sym}^{\{5,1\}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.55)$$

Passons à présent à la prise en compte de la grande symétrie.

2.3.3 Grande symétrie

Comme d'habitude cette question est plus délicate que la première, on procédera de la manière suivante. Dans le sous-espace des tenseurs possédant les petites symétries introduites plus haut on a

$$S_{Sym}^{\{5,1\}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.56)$$

Tout vecteur s'écrit comme combinaison linéaire de ces derniers. Revenons un instant en notation traditionnelle, c'est-à-dire en considérant nos TYS. Le TYS associé au premier vecteur de $S_{Sym}^{\{5,1\}}$ est $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$. On considère son action sur une séquence alphabétique de $S_6 : \{abcdef\}$. Par renumérotation on a la relation

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \{abcdef\} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \{defabc\} \quad (2.57)$$

On suppose que notre séquence soit invariante par $(14)(25)(36)$, c'est-à-dire présente une grande symétrie. On a donc

$$\{abcdef\} = \{defabc\} \quad (2.58)$$

Cette invariance nous permet de récrire (2.57) :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \{abcdef\} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \{abcdef\} \quad (2.59)$$

Et de part la structure de l'anneau de l'algèbre de groupe, on peut écrire :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \right) \{abcdef\} = 0 \quad (2.60)$$

$$\text{donc nécessairement } \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & \\ \hline 3 & & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 6 & & & & & \\ \hline \end{array} .$$

Si l'on repasse en écriture symétrisée, la grande symétrie implique pour les vecteurs de base de $S_{Sym}^{\{5,1\}}$ les relations suivantes :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.61)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.62)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.63)$$

Et on peut donc assurément écrire

$$S_{GSym}^{\{5,1\}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.64)$$

car par les définitions précédentes la famille de vecteurs précédente est nécessairement génératrice. La question est maintenant de savoir si cette famille est libre.

La résolution de cette question est de nature algorithmique, on sait que les vecteurs de base d'un module de Specht sont des TYS, de fait il nous faut ramener les vecteurs générateurs précédents à des TYS. Pour ce faire on utilise les manipulations de tableau introduites au §.1.2.3, à savoir :

1. les transformations équivalentes ;
2. le redressement par l'algorithme de Garnir.

La première action à effectuer est la réécriture des vecteurs de l'équation (2.64) en ordonnant dans les lignes les valeurs de manières croissantes. On a

$$S_{GSym}^{\{5,1\}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.65)$$

Si l'on considère le TY $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array}$ on a

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.66)$$

or, par définition de la grande symétrie,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.67)$$

de fait la grande symétrie implique la relation

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.68)$$

donc

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} = 0 \quad (2.69)$$

On a obtenu ce résultat uniquement avec des manipulation équivalentes du TY, cependant ce n'est pas toujours le cas.

Regardons ce qui se passe pour les deux autres vecteurs,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.70)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.71)$$

Les descentes présentes dans ces tableaux ne peuvent pas être éliminées par des transformations simples. Comme au §.1.2.3 il nous faut donc décomposer notre tableau en une combinaison linéaire de TYS, pour ce faire nous utiliserons l'algorithme de Garnir [9]. On obtient alors

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.72)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.73)$$

Comme on sait d'après l'étude de notre tout premier tableau que $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} = 0$, on en conclut que $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array}$.

En conclusion si l'on modélise l'action de S_6 sur un ensemble possédant les symétries $\{[ab]c [def]\}$ alors la dimension du module de Specht $S^{\{5,1\}}$ passe de 5 dimensions, dans le cas général, à 1 dans notre cas particulier. En écriture symétrisée on a :

$$S_{GSym^{\{5,1\}}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.74)$$

soit en notation TYS :

$$S_{GSym^{\{5,1\}}} = \text{Vect} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \right\} \quad (2.75)$$

L'ensemble de ces techniques nous permet de prendre en compte les symétries indicielles de nos tenseurs lors du calcul de leur décomposition. Revenons à présent sur nos tenseurs d'élasticité.

2.3.4 Tenseurs avec symétries indicielles

Ayant établi une méthode pour prendre en compte les diverses symétries indicielles de nos tenseurs, nous allons l'appliquer aux opérateurs de comportement qui nous intéressent. Avant cela nous introduirons de manière explicite le groupe de symétrie indicelle de nos opérateurs.

2.3.4.1 Groupe des symétries indicielles

Pour déterminer sa décomposition, le premier point est d'établir le groupe de symétrie de notre tenseur sous l'action du groupe des permutations. On considérera pour l'exposé la symétrie de type $\{[ab]c [def]\}$. On a

$$G_{S_6}(A_{\{[ij]k [lm]n\}}) = \{\sigma \in S_6 \mid D(\sigma)A_{\{[ij]k [lm]n\}} = A_{\{[ij]k [lm]n\}}\} \quad (2.76)$$

Si l'on considère la petite et la grande symétrie on a les générateurs

$$\text{Gen}_{S_6}(A_{\{\underline{[ij]k} \underline{[lm]n}\}}) = [e, (12), (45), (14)(25)(36)] \quad (2.77)$$

le groupe engendré possède les huit éléments suivants :

$$G_{S_6}(A_{\{\underline{[ij]k} \underline{[lm]n}\}}) = \{e, (12), (45), (12)(45), (14)(25)(36), \dots \quad (2.78)$$

$$(1425)(36), (1524)(36), (15)(24)(36)\} \quad (2.79)$$

dont les ordres sont respectivement $\{1, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 2\}$. Le couplage des petites et grandes symétries font que ce groupe n'est pas abélien. Il est toutefois à noter qu'il est isomorphe à celui de l'élasticité classique. On remarque que l'ordre du groupe divise bien celui de S_6 , ce qui est plutôt rassurant. La première conséquence de cela est que lors de la décomposition harmonique, l'obtention du tenseur totalement symétrique se fera par symétrisation sur $\frac{6!}{|G_{S_6}|} = 80$ permutations au lieu de 720. Et on retrouve bien la symétrisation sur $\left(\frac{4!}{|G_{S_6}|}\right) = 3$ permutation de l'élasticité classique [16].

Ceci nous permet de faire une remarque. La symétrie de nos tenseurs est du type $\{\underline{[ab]c} \underline{[de]f}\}$, pour calculer la réduction de spectre que cela implique nous avons associé, pour la petite symétrie, :

$$\{\underline{[ab]c} \underline{[de]f}\} \rightarrow \{aacddf\} \quad (2.80)$$

Les générateurs associés au groupe de symétrie de la séquence $\{aacddf\}$ étant bien les mêmes que ceux de $\{\underline{[ab]c} \underline{[de]f}\}$. Toutefois on pourrait se demander pourquoi nous n'avons pas effectué le même type de substitution pour prendre en compte la grande symétrie, i.e. pourquoi ne pas avoir considéré la séquence $\{aacaac\}$. L'identification des générateurs associés à la séquence précédente sont :

$$\text{Gen}_{\{aacaac\}} = [e, (12), (14), (15), (36)] \quad (2.81)$$

et différent de ceux de notre séquence initiale. L'ordre du groupe ainsi généré est de 48, il possède de fait nettement plus de symétrie que celui de notre tenseur. On peut montrer que le groupe de symétrie indicielle de l'élasticité est un sous-groupe du groupe de la séquence $\{aacaac\}$. Cette parenthèse refermée revenons à l'étude de nos opérateurs.

2.3.4.2 Élasticité classique

Appliquons à l'élasticité du premier ordre les techniques introduites au cours du §.2.3. Notre objectif est ici de montrer que par elles nous retrouvons bien les résultats attendus. La prise en compte des petites symétries nous permet d'écrire la séquence symétrisée $\{1122\}$, les tableaux non standards associés à cette séquence sont les suivants :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (2.82)$$

de fait on en conclut immédiatement la décomposition d'un tenseur de type $[ij][kl]^2$.

$$\text{Sp}_{GL_3}(C_{[ij][kl]}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad (2.83)$$

²Comme par exemple le tenseur de l'effet Kerr.

et donc grâce au dictionnaire

$$\text{Sp}_{O(3)}(C_{[ij][kl]}) = 0^{(2)} \oplus 1^\# \oplus 2^{(3)} \oplus 3^\# \oplus 4 \quad (2.84)$$

On constate que la décomposition que nous avons trouvée précédemment par identification a été ici dérivée formellement. Si l'on prend on compte la grande symétrie maintenant on abouti aux relations

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (2.85)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (2.86)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (2.87)$$

d'où $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} = 0$ et

$$\text{Sp}_{GL_3}(C_{[ij][kl]}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad (2.88)$$

d'où

$$\text{Sp}_{SO(3)}(C_{[ij][kl]}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (2.89)$$

Ces résultats sont parfaitement cohérents. Regardons à présent ce qui se passe avec l'élasticité du second ordre.

2.3.4.3 Élasticité du second ordre

Commençons tout d'abord par prendre en compte les petites symétries. Dans le cas général d'un tenseur sans symétries indicielles on a la décompositions suivante :

$$\text{Sp}_{GL(3)}(A_{ijklmn}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} (5) \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} (9) \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} (10) \quad (2.90)$$

$$\oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} (5) \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} (16) \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} (5) \quad (2.91)$$

La prise en compte des petites symétries se fait grâce à la séquence symétrisée $\{112334\}$. Un calcul direct sur les TYG générés³ à partir de cette séquence, et pour l'ensemble des S^λ , nous permet d'écrire pour une tenseur ayant des symétries du types $[ij]k[lm]n$:

$$\text{Sp}_{GL(3)}(A_{[ij]k[lm]n}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} (3) \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} (4) \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} (3) \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} (2) \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} (4) \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad (2.92)$$

soit, via le dictionnaire :

$$\text{Sp}_{O(3)}(A_{[ij]k[lm]n}) = 0^{(6)} \oplus 1^\#(12) \oplus 2^{(16)} \oplus 3^\#(12) \oplus 4^{(8)} \oplus 5^\#(3) \oplus 6 \quad (2.93)$$

Si maintenant on prend en compte la grande symétrie on peut aller plus loin. La mise en oeuvre de cette réduction est, du fait de l'algorithme de Garnir, un peu plus calculatoire. On trouvera en annexe (§B.2.2) les détails du calcul. On obtient au final :

$$\text{Sp}_{GL(3)}(A_{[ij]k[lm]n}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \end{array} (3) + \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} (2) + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad (2.94)$$

³La liste complète de ces TYG pourra être trouvée en annexe B.2.1.

d'où

$$\text{Sp}_{O(3)}(A_{[ij]k [lm]n}) = 0^{(5)} \oplus 1^{\#(4)} \oplus 2^{(10)} \oplus 3^{\#(5)} \oplus 4^{(5)} \oplus 5^{\#} \oplus 6 \quad (2.95)$$

On retrouve bien au final la décomposition de notre tenseur.

Si l'on s'intéresse à une modélisation dans un espace physique à 2 dimensions, il est important de voir comment se transfèrent nos résultats obtenus jusqu'alors dans un espace à 3 dimensions. Cette question, ainsi que les problématiques qui lui sont associées, sera l'objet de la sous-section suivante.

2.3.5 Cas bidimensionnel

Lors du passage dans un espace à 2 dimensions, on perd l'information contenue dans les classes de permutation possédant plus d'un 2-cycle. Les dimensions des tenseurs restants sont déterminés à partir de la formule dimensionnelle introduite au §.1.3.5. Les diagrammes associés à cette opération sont, dans le cas des tenseurs d'ordre 6, les suivants :

$$(a) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \quad (b) : \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \quad (c) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad (e) : \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad (2.96)$$

les diagrammes non listés conduisant à des tenseurs de dimensions nulles. L'ensemble de ces renseignements est listé dans le tableau suivant, et ceci pour un tenseur ne présentant pas de symétries indicielles :

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)
D_i	7	5	3	0	1	0	0	0	0	0	0
n_i	1	5	9	10	5	16	5	10	9	5	1
Dt_i	7	25	27	0	5	0	0	0	0	0	0

(2.97)

Si l'on vérifie le nombre de composantes obtenue on trouve bien $= 7 + 25 + 27 + 5 = 2^6$, on a donc la décomposition GL_2 -invariante suivante :

$$\text{Sp}_{GL(2)}(A_{ijklmn}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline \end{array}^{(5)} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}^{(9)} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}^{(5)} \quad (2.98)$$

Si on considère $A_{[ij]k [lm]n}$ on obtient, conformément à la réduction des symétries effectuées au §.2.3.4.3 :

$$\text{Sp}_{GL(2)}(A_{[ij]k [lm]n}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}^{(3)} \quad (2.99)$$

ce qui correspond un espace de dimension 21, dimension cohérente avec celle de notre tenseur en dimension 2. Cette décomposition est donc cohérente. Comment à présent passer à une décomposition $O(2)$ -invariante ? La décomposition obtenue étant $GL(2)$ -invariante mais pas $O(2)$ -invariante il nous faut effectuer explicitement cette réduction.

Comme montré au §.1.3.3 lorsque l'espace naturel est de dimension 2, la dimension d'un sous-espace $SO(2)$ -irréductible est indépendante de son ordre et égale à 2, ceci nous empêche notamment d'obtenir notre décomposition par identification. La réduction d'une décomposition $GL(2)$ -invariante en une décomposition $SO(2)$ -invariante s'obtient par la contraction des traces de nos opérateurs. Il existe des algorithmes pour faire cela, ceux-ci appartiennent à la catégorie des règles de branchement en théorie des groupes de Lie. L'objectif de la section suivante sera d'introduire ces méthodes dites de branchements des représentation.

2.4 Règles de branchement

L'objet des règles de branchement est de disposer de méthode algorithmique permettant de passer d'une décomposition G_1 -invariante à une décomposition G_2 -invariante. L'ensemble des techniques mis en place au cours de ce document nous a permis d'obtenir pour tout tenseur sa décomposition $GL(d)$ -invariante. Toutefois ce qui nous intéresse dans l'étude de nos lois de comportement n'est pas tant l'action du groupe linéaire sur nos tenseurs que l'action des transformations orthogonales. C'est l'action de ce groupe qui nous permet d'étudier les symétries matérielles de nos matériaux. Pour obtenir ce résultat il nous faut donc obtenir à partir de la décomposition $GL(d)$ -invariante les décompositions $SO(2)$ et $SO(3)$ -invariantes qui nous intéresse.

Pour ce faire nous utiliserons des outils développés par King [2, 17] permettant d'effectuer cette réduction de manière graphique à partir de nos diagrammes de Young. La théorie derrière ces outils est relativement complexe et nous ne rentrerons pas ici dans des considérations techniques. La démarche suivie au cours de cette section est la suivante, dans un premier temps nous introduirons, à proprement parler, la règle de branchement (« branching rule ») qui nous intéresse, c'est-à-dire celle nous permettant de passer de $GL(d)$ à $O(d)$. Cette opération sera notée $GL(d) \downarrow O(d)$. Le choix de la dimension d est fait de manière à éviter dans un premier temps les problèmes de modifications de spectre qui apparaissent en basse dimension. Le prise en compte des problèmes dimensionnelles sera l'objectif de notre seconde partie, nous y traiterons des règles dites de modification (« modifications rules »), c'est-à-dire des branchements $O(d) \downarrow O(p)$. Nous concluons cette section sur le branchement immédiat $O(p) \downarrow SO(p)$.

Il est important de noter que en pratique une fois que la démarche globale est comprise, l'ensemble des opérations présentés dans cette section pourra être effectué via l'utilisation d'un logiciel dédié. Pour notre part l'ensemble des résultats obtenus ici a été vérifié avec le logiciel libre SCHUR [1]. Présentons donc l'ensemble des opérations à réaliser pour passer de $GL(d)$ à $SO(p)$.

La séquence de branchements à laquelle nous nous intéressons est la suivante :

$$GL(d) \downarrow SO(p) = GL(d) \downarrow O(d) \downarrow O(p) \downarrow SO(p) \quad (2.100)$$

Intéressons nous pour commencer à $GL(d) \downarrow O(d)$.

2.4.1 Branchement $GL(d) \downarrow O(d)$

Une décomposition $GL(d)$ -irréductible est réductible sous l'action de $O(d)$ le sous-groupe des éléments orthogonaux de $GL(d)$. Les sous-espaces invariants supplémentaires sont obtenus par contraction des indices de nos tenseurs. Le cas classique est le suivant, si l'on considère un tenseur d'ordre 2 alors on la relation suivante :

$$\square\square|_{GL(d)} + \square|_{GL(d)} = \square\square|_{O(d)} + \square|_{O(d)} + 0|_{O(d)} \quad (2.101)$$

C'est-à-dire que sous l'action de $O(d)$ la partie symétrique de notre tenseur se décompose en un tenseur sphérique et un tenseur déviatorique. La partie déviatorique est un cas particulier de tenseurs totalement symétriques et de traces nulles, appelé tenseurs harmoniques, qui constituent les éléments de base de toutes décompositions $O(d)$ -invariante.

Qu'est ce que la trace d'un tenseur d'ordre n ? La trace d'un tenseur d'ordre n est un tenseur d'ordre $n - 2$ obtenu par contraction du tenseur sur deux indices. Donc, dans le cas général, une trace n'est pas un scalaire et elle n'est pas unique. Les traces d'un tenseur d'ordre n sont l'ensemble des tenseurs d'ordre $n - 2$ obtenus par contraction sur tous les couples d'indices possibles. Par voie de conséquent dans le cas d'un tenseur totalement symétrique il n'y a qu'une trace associée. Étudions manuellement le cas de $\square\square\square\square\square\square|_{GL(d)}$, il s'agit d'un tenseur totalement symétrique d'ordre 6, on peut écrire :

$$\square\square\square\square\square\square|_{GL(d)} = \square\square\square\square\square\square|_{O(d)} \oplus \square\square\square\square|_{GL(d)} \quad (2.102)$$

ce qui est l'écriture équivalente de ce qui se passait pour un tenseur d'ordre 2. Toutefois le tenseur trace est cette fois-ci d'ordre 4 et possède une trace non nulle, on peut donc le contracter à nouveau. En itérant la démarche on aboutit à :

$$\square\square\square\square\square\square|_{GL(d)} = \square\square\square\square\square\square|_{O(d)} \oplus \square\square\square\square|_{O(d)} \oplus \square\square|_{O(d)} \oplus 0|_{O(d)} \quad (2.103)$$

soit avec nos notations classiques :

$$\square\square\square\square\square\square|_{GL(d)} = 6 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 0 \quad (2.104)$$

King introduit dans [2] un algorithme permettant de généraliser cette opération de contraction d'indices sur l'ensemble des diagrammes de Young. Il considère pour cela la série infinie suivante :

$$S = 1 + \square\square + \square\square\square\square + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \square\square\square\square\square\square + \dots \quad (2.105)$$

La définition formelle de cette série est nettement plus compliquée mais procède de la sorte : c'est la série de toutes les combinaisons que l'on peut obtenir à partir de $\square\square$, c'est-à-dire de la contraction sur deux indices. Considérons à présent un sous-espace $GL(d)$ -invariant représenté par un diagramme de Young de forme λ , on notera $V_\lambda^{GL(d)}$ un tel espace. La série S implique la relation de décomposition suivante :

$$V_\lambda^{GL(d)} = V_{\lambda/S}^{O(d)} \quad (2.106)$$

qui s'explique de la manière suivante :

$$V_{\lambda/S}^{O(d)} = V_\lambda^{O(d)} \oplus V_{\lambda/\{2\}}^{O(d)} \oplus V_{\lambda/\{4\}}^{O(d)} \oplus V_{\lambda/\{2,2\}}^{O(d)} \oplus \dots \quad (2.107)$$

où la notation λ/μ indique qu'il faut considérer l'ensemble des manières de retirer μ à λ tel que le diagramme résultat soit un diagramme de Young. Illustrons ce principe avec quelques exemples :

Exemple 3 On considère notre tenseur totalement symétrique $\square\square\square\square\square\square$. On a immédiatement :

$$\square\square\square\square\square\square|_{GL(d)} = \square\square\square\square\square\square|_{O(d)} \oplus \square\square\square\square\square\square|x|x|_{O(d)} \oplus \square\square\square\square|x|x|x|x|_{O(d)} \oplus \square\square\square\square|x|x|x|x|x|x|_{O(d)} \quad (2.108)$$

Détaillons à présent un cas plus compliqué

Exemple 4 On considère $\lambda = \{4, 2\}$, dans le tableau suivant la colonne de gauche contiendra la séquence de S concernée et celle de droite les contractions⁴ de λ résultantes :

$\{\mu_S\}$		$\{\lambda/\mu_S\}$				
1	→		$\begin{array}{ c c c c } \hline o & o & o & o \\ \hline o & o & & \\ \hline \end{array}$			
$\begin{array}{ c c } \hline x & x \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c } \hline o & o & x & x \\ \hline o & o & & \end{array}$	\oplus	$\begin{array}{ c c c c } \hline o & o & o & x \\ \hline o & x & & \end{array}$	\oplus	$\begin{array}{ c c c c } \hline o & o & o & o \\ \hline x & x & & \end{array}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline x & x & x & x \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c } \hline o & o & x & x \\ \hline x & x & & \end{array}$				
$\begin{array}{ c c } \hline x & x \\ \hline y & y \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c } \hline o & o & x & x \\ \hline y & y & & \end{array}$				
$\begin{array}{ c c c c } \hline x & x & x & x \\ \hline y & y & & \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c } \hline x & x & x & x \\ \hline y & y & & \end{array}$				

(2.109)

Au final on a donc :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \Big|_{GL(d)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \Big|_{O(d)} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \Big|_{O(d)} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \Big|_{O(d)} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Big|_{O(d)} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Big|_{O(d)}^{(2)} \oplus 0 \Big|_{O(d)}$$

(2.110)

On obtient ainsi, pour les décompositions de nos tenseurs de comportement d'ordre 4 et 6 respectivement les dictionnaire suivants :

Dictionnaire pour une tenseur d'ordre d'ordre 4 en dimension d

$GL(d)$		$O(d)$	
$\begin{array}{ c c c c } \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c } \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus 0$	
$\begin{array}{ c c c } \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c } \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus 0$	
$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$	

(2.111)

⁴Le fonctionnement précis des règles de contraction est plus subtil qu'il n'y parait à première vue, pour être valable une contraction doit vérifier les règles de Littlewood-Richardson. Le détail de ces règles sera donné en annexe §C.1.

Dictionnaire pour une tenseur d'ordre 6 en dimension d

$GL(d)$		$O(d)$
	→	⊕ ⊕ ⊕ 0
	→	⊕ ⊕ ⊕ ⊕
	→	⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ 0
	→	⊕ ⊕
	→	⊕ ⊕ ⊕
	→	⊕ ⊕ ⊕ 0

(2.112)

Les tableaux ainsi obtenus sont valables qu'en dimension élevée, dès que l'on travaille en basse dimension certains éléments de ces décompositions vont varier ou bien s'annuler. Regardons à présent comment effectuer ces branchements en dimension.

2.4.2 Branchement $O(d) \downarrow O(p)$

On a dans [17] la définition suivante :

Définition 1 Soit c la longueur de la première colonne d'un diagramme λ . On considère les groupes $O(2k)$ et $O(2k + 1)$, et on appelle représentation standard pour ces groupes une représentation telle que $c \leq k$.

Cela nous permet pour chaque diagramme de définir deux cas de figure :

1. $c \leq k$ vérifiées, alors le tableau est standard (s) et il est conservé tel quel dans la décomposition de $O(p)$;
2. $c \leq k$ non vérifiée, alors le tableau est non standard (ns). On doit le transformer en un tableau standard pour conclure.

Pour les groupes qui nous intéressent, c'est-à-dire $O(3)$ et $O(2)$, la condition $c \leq k$ n'est plus vérifiée dès l'apparition d'un élément dans l'antisymétriseur. Ainsi, par exemple, pour la décomposition de $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} |_{GL(d)}$ dans $O(3)$ on a :

s	ns
; ⁽²⁾ ; 0	; ;

(2.113)

La question importante devient à présent la suivante : comment transformer une représentation non standard en une représentation standard ? La réponse est donnée dans [17]. Elle réside dans la formule :

$$\{\mu\} = (-1)^x \epsilon\{\sigma\} \quad (2.114)$$

où ϵ représente le tenseur alterné ; ainsi que dans la procédure suivante :

1. on se place dans dernière case de la première colonne, et on se déplace de h cases vers le haut et la droite en longeant le contour du diagramme ;

2. on retire les case traversées du diagramme initiale ;
3. si le diagramme résultant n'est pas un diagramme de Young alors la représentation associée au diagramme de départ est identiquement nulle ;
4. sinon on conserve le diagramme résultant et on note x le nombre de cases vers la droite traversées par la bande h ;
5. le diagramme obtenu est égale au $\{\mu\}$ de la formule (2.114).
6. si ce diagramme est standard alors on arrête la procédure, sinon on la reprend depuis le début.

La longueur h de bande à retirer se calcule par la formule suivante :

$$h = 2c - d \quad (2.115)$$

Prenons quelques exemples :

Exemple 5 On considère la représentation de $O(d)$ associée à $\lambda = \{5, 1\}$, on a $c=2$. Dans $O(3)$ une telle représentation est non-standard. On calcule la longueur de branche $h = 2c - d = 1$, on retire cette boîte au diagramme de Young correspondant à la partition $\{\lambda\}$, i.e.

$$\{\sigma\} : \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & o \\ \hline x & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.116)$$

Le diagramme $\{\sigma\}$ obtenu est un diagramme de Young standard, on s'arrête donc à cette étape. Le décalage x est égale à 0. On peut donc remplacer la représentation $\{\lambda\}$ non-standard par la représentation standard $\{\mu\} = \epsilon\{\sigma\}$. On a ϵ qui dépend du signe du déterminant de la transformation de $O(3)$ considérée, ainsi si l'on considère $SO(3)$ alors on a nécessairement $\epsilon = 1$. En représentation par diagramme de Young cette relation se traduit par

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline O(d) & & & & O(3) \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & & & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \# \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (2.117)$$

où la notation $\#$ indique que l'on a affaire à un pseudo-tenseur, ou tenseur axial.

Exemple 6 Si on considère la représentation de $O(d)$ associée à $\lambda = \{4, 2\}$, on a $c=2$. Dans $O(3)$ une telle représentation est non-standard. On calcule la longueur de branche $h = 2c - d = 1$, on retire cette boîte au diagramme de Young correspondant à la partition $\{\lambda\}$, i.e.

$$\{\sigma\} : \begin{array}{|c|c|c|} \hline o & o & o \\ \hline x & o & \\ \hline \end{array} \quad (2.118)$$

Le diagramme $\{\sigma\}$ obtenu n'est pas un diagramme de Young, on s'arrête donc à cette étape. On a $\{\mu\} = \emptyset$.

Et un dernier exemple plus compliqué :

Exemple 7 On considère à présent la représentation de $O(d)$ associée à $\lambda = \{2, 2, 2\}$, on a $c=3$. Dans $O(3)$ une telle représentation est non-standard. On calcule la longueur de branche $h = 2c - d = 3$, on retire cette boîte au diagramme de Young correspondant à la partition $\{\lambda\}$, i.e.

$$\{\nu\} : \begin{array}{|c|c|c|} \hline o & o & o \\ \hline o & x & \\ \hline x & x & \\ \hline \end{array} \quad (2.119)$$

Le diagramme $\{\sigma\}$ obtenu est un diagramme de Young non-standard. On doit réduire à nouveau le diagramme. Notons que l'on a déjà $\{\mu\} = -\epsilon\{\nu\}$. Et que donc si on recommence la procédure on obtient

$$\{\sigma\} : \begin{array}{|c|c|} \hline o & o \\ \hline x & \\ \hline \end{array} \quad (2.120)$$

d'où $\{\nu\} = \epsilon\{\sigma\}$, donc $\{\mu\} = -\epsilon^2\{\sigma\}$ et comme $\epsilon^2 = 1$ on a finalement $\{\mu\} = -\{\sigma\}$. En représentation par diagramme de Young cette relation se traduit par

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline O(d) & & O(3) \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} & \rightarrow & -\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (2.121)$$

Cela nous permet d'écrire les quatre tableaux suivants : les deux premiers sont les dictionnaires $GL(3) \rightarrow O(3)$ et $GL(2) \rightarrow O(2)$ associés à un tenseur d'ordre 4 ; les deux suivants sont les mêmes dictionnaires pour les tenseurs d'ordre 6.

Dictionnaire pour une tenseur d'ordre d'ordre 4 en dimension 3

$GL(3)$	\rightarrow	$O(3)$	$=$	$O(3)$
$\begin{array}{ c c c c } \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$\begin{array}{ c c c c } \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus 0$	$=$	$4 \oplus 2 \oplus 0$
$\begin{array}{ c c c } \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$\begin{array}{ c c c } \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \# \oplus \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c } \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \#$	$=$	$3\# \oplus 2 \oplus 1\#$
$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus 0$	$=$	$2 \oplus 0$
$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$\begin{array}{ c } \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \#$	$=$	$1\#$

Dictionnaire pour une tenseur d'ordre d'ordre 4 en dimension 2

$GL(2)$	\rightarrow	$O(2)$	$=$	$O(2)$
$\begin{array}{ c c c c } \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$\begin{array}{ c c c c } \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus 0$	$=$	$4 \oplus 2 \oplus 0$
$\begin{array}{ c c c } \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus 0\#$	$=$	$2 \oplus 0\#$
$\begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$	\rightarrow	0	$=$	0

Dictionnaire pour une tenseur d'ordre 6 en dimension 3

$GL(3)$		$O(3)$		$O(3)$
	→	$\square\square\square\square\square\square \oplus \square\square\square\square \oplus \square\square \oplus 0$	=	$6 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 0$
	→	$\square\square\square\square\square\# \oplus \square\square\square\square \oplus \square\square\# \oplus \square\square \oplus \square\#$	=	$5\# \oplus 4 \oplus 3\# \oplus 2 \oplus 1\#$
	→	$\square\square\square\square \oplus \square\square\square\# \oplus \square\square^{(2)} \oplus 0$	=	$4 \oplus 3\# \oplus 2^{(2)} \oplus 0$
	→	$\square\square\square\# \oplus \square\#$	=	$3\# \oplus 1\#$
	→	$\square\square\square\# \oplus \square\#$	=	$3\# \oplus 1\#$
	→	$\square\square \oplus \square$	=	$2 \oplus 1$
	→	0	=	0

(2.124)

Dictionnaire pour une tenseur d'ordre 6 en dimension 2

$GL(2)$		$O(2)$		$O(2)$
	→	$\square\square\square\square\square\square \oplus \square\square\square\square \oplus \square\square \oplus 0$	=	$6 \oplus 4 \oplus 2 \oplus 0$
	→	$\square\square\square\square \oplus \square\square \oplus 0\#$	=	$4 \oplus 2 \oplus 0\#$
	→	$\square\square \oplus 0$	=	$2 \oplus 0$
	→	$0\#$	=	$0\#$

(2.125)

Le dernier branchement à effectuer est $O(p) \downarrow SO(p)$. Ce branchement est immédiat, car comme $SO(p)$ ne contient que des transformations directes on a toujours $\epsilon = +1$, la décomposition est la même que la précédente en ne tenant plus compte de $\#$. On vient de conclure la séquence de branchement annoncé en préambule, c'est-à-dire que l'on a réalisé toutes les opérations de la séquence :

$$GL(d) \downarrow SO(p) = GL(d) \downarrow O(d) \downarrow O(p) \downarrow SO(p) \quad (2.126)$$

Les résultats obtenues concordent bien avec les diverses identifications que nous avons effectuées au cours de ce document.

2.4.3 Synthèse

Nous venons d'introduire deux points importants :

- comment passer d'une décomposition $GL(d)$ -invariante à une décomposition $O(d)$ -invariante ;
- comment modifier la décomposition en fonction de la dimension de l'espace de travail.

Ceci nous a permis d'obtenir notre dictionnaire sans avoir à recourir à de l'identification. Nos résultats ont été obtenus en toute généralité. Nous allons mettre en pratique ces

techniques au cours de la section suivante pour dériver le spectre de nos opérateurs de comportement dans un espace à 2 dimensions. Cela nous permettra de les comparer à ceux, plus classiques, que l'on a en trois dimensions. L'intérêt de cette méthode est de savoir ce que l'on fait lorsque l'on étudie de manière plane un comportement complexe. Cela permettra de répondre en outre à plusieurs questions du type :

- quand on change de dimension le nombre de coefficients d'anisotropie varie-t-il ?
- combien de coefficients pour telle classe d'anisotropie ?
- existe-il des comportements qui dépendent de la dimension ?

certaines de ces questions sont triviales, d'autres moins ; l'approche proposée ici permet d'y répondre, ce sera le but de la section suivante.

2.5 Comparaison des spectres bi et tri dimensionnels

Nous allons comparer ici les spectres harmoniques de nos opérateurs selon que l'on travaille dans un espace à 2 ou bien à 3 dimensions. Commençons par les tenseurs d'ordre 4, on comparera respectivement les cas où on ne prend en compte aucune symétrie indicelle, juste les petites symétries pour finir avec les symétries élastiques. En 3 dimensions on a les spectres harmoniques suivants :

$$\text{Sp}_{SO(3)}(A_{ijkl}) = 0^{(3)} \oplus 1^{(6)} \oplus 2^{(6)} \oplus 3^{(3)} \oplus 4 \quad (2.127)$$

$$\text{Sp}_{SO(3)}(A_{[ij][lm]}) = 0^{(2)} \oplus 1 \oplus 2^{(3)} \oplus 3 \oplus 4 \quad (2.128)$$

$$\text{Sp}_{SO(3)}(A_{\underline{[ij]} \underline{[lm]}}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (2.129)$$

A partir de notre méthode, nous pouvons à présent dériver proprement les spectres harmoniques de nos opérateurs bidimensionnels.

$$\text{Sp}_{SO(2)}(A_{ijkl}) = 0^{(6)} \oplus 2^{(4)} \oplus 4 \quad (2.130)$$

$$\text{Sp}_{SO(2)}(A_{[ij][lm]}) = 0^{(3)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (2.131)$$

$$\text{Sp}_{SO(2)}(A_{\underline{[ij]} \underline{[lm]}}) = 0^{(2)} \oplus 2 \oplus 4 \quad (2.132)$$

Regardons à présent ce qui se passe dans le cas des tenseurs d'ordre 6. On rappelle qu'en 3 dimensions on a les spectres suivants :

$$\text{Sp}_{SO(3)}(A_{ijklmn}) = 0^{(15)} \oplus 1^{(36)} \oplus 2^{(40)} \oplus 3^{(29)} \oplus 4^{(15)} \oplus 5^{(5)} \oplus 6 \quad (2.133)$$

$$\text{Sp}_{SO(3)}(A_{[ij]k[lm]n}) = 0^{(6)} \oplus 1^{(12)} \oplus 2^{(16)} \oplus 3^{(12)} \oplus 4^{(8)} \oplus 5^{(3)} \oplus 6 \quad (2.134)$$

$$\text{Sp}_{SO(3)}(A_{\underline{[ij]k} \underline{[lm]n}}) = 0^{(5)} \oplus 1^{(4)} \oplus 2^{(10)} \oplus 3^{(5)} \oplus 4^{(5)} \oplus 5^{(1)} \oplus 6 \quad (2.135)$$

Les spectres de nos opérateurs de comportement en 2 dimensions sont les suivants.

$$\text{Sp}_{SO(2)}(A_{ijklmn}) = 0^{(20)} \oplus 2^{(15)} \oplus 4^{(6)} \oplus 6 \quad (2.136)$$

$$\text{Sp}_{SO(2)}(A_{[ij]k[lm]n}) = 0^{(10)} \oplus 2^{(8)} \oplus 4^{(4)} \oplus 6 \quad (2.137)$$

$$\text{Sp}_{SO(2)}(A_{\underline{[ij]k} \underline{[lm]n}}) = 0^{(5)} \oplus 2^{(5)} \oplus 4^{(2)} \oplus 6 \quad (2.138)$$

Il est intéressant de noter que le changement de dimension induit une profonde modification du spectre de sa décomposition harmonique. La modification qui s'opère n'est pas triviale. On note la disparition des termes impaires des spectres bidimensionnelles

ainsi que la non-inclusion de ce spectre dans le tridimensionnel. Si l'on observe la décomposition de $A_{[ij]k[lm]n}$ on constate notamment que le nombre de coefficients isotropes augmentent passant de 6 à 10. Dans le cas de l'élasticité de Mindlin ce nombre est constant et on pourrait penser qu'il s'agissait d'une propriété générale des tenseurs isotropes, les résultats précédents semblent attester du contraire. On constate toutefois que dans le cas d'un tenseur totalement symétrique les spectres concordent, on a l'impression que plus le tenseur est symétrique plus il y a coïncidence des spectres. Qu'en est-il vraiment ?

En fait cet effet est plus ou moins « une illusion d'optique » induite par l'écriture de nos spectre dans $SO(2)$, si on les récrits proprement dans $O(2)$, c'est-à-dire en tenant compte explicitement de la différence entre tenseurs axiaux et polaires on obtient :

$$\text{Sp}_{O(2)}(A_{ijklmn}) = 0^{\#(10)} \oplus 0^{(10)} \oplus 2^{(15)} \oplus 4^{(6)} \oplus 6 \quad (2.139)$$

$$\text{Sp}_{O(2)}(A_{[ij]k[lm]n}) = 0^{\#(5)} \oplus 0^{(5)} \oplus 2^{(8)} \oplus 4^{(4)} \oplus 6 \quad (2.140)$$

$$\text{Sp}_{O(2)}(A_{[ij]k} [lm]n) = 0^{\#} \oplus 0^{(4)} \oplus 2^{(5)} \oplus 4^{(2)} \oplus 6 \quad (2.141)$$

Ces spectres constituent la décomposition rigoureuse de nos opérateurs bidimensionnelles. On constate alors qu'ils sont strictement inclus dans le spectre des opérateurs tridimensionnels. Une remarque intéressante est que contrairement à ce que l'on pense généralement l'isotropie de l'élasticité de Mindlin dépend, en deux dimensions, de quatre coefficients et non de cinq. Nous ne savons pas si ceci avait déjà été noté dans la littérature.

Regardons ce qui se passe dans le cas de tenseurs d'ordres 4, leur décomposition $O(2)$ -invariante est la suivante :

$$\text{Sp}_{O(2)}(C_{ijkl}) = 0^{\#(3)} \oplus 0^{(3)} \oplus 2^{(4)} \oplus 4 \quad (2.142)$$

$$\text{Sp}_{O(2)}(C_{[ij][kl]}) = 0^{\#} \oplus 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (2.143)$$

$$\text{Sp}_{O(2)}(C_{[ij]} [lm]) = 0^{(2)} \oplus 2 \oplus 4 \quad (2.144)$$

Ce qu'il est à noter est que, sur de l'ensemble des tenseurs que nous avons étudié, le tenseur d'élasticité classique constitue le cas particulier où les décompositions $SO(2)$ et $O(2)$ -invariantes concordent. Ceci est intéressant dans le sens où cela montre que l'élasticité classique ne prend pas en compte la nature chirale d'une symétrie matérielle, tandis que cette effet apparaît dans l'élasticité plane du second ordre. Nous nous sommes d'ailleurs intéressé à ce point de manière théorique dans [18] et de manière plus pratique dans [19].

Illustration

Pour revenir au cas du tenseur $A_{[ij]k[lm]n}$ hémitrope, l'existence des dix coefficients hémitropes peut se vérifier assez simplement. On pose le système exprimant l'invariance par rotation d'un tenseur :

$$\tilde{Q}\tilde{A}\tilde{Q}^T - \tilde{A} = \tilde{0} \quad (2.145)$$

où \tilde{A} est la représentation par un tenseur d'ordre 2 du tenseur $A_{[ij]k[lm]n}$, et \tilde{Q} l'opérateur de rotation adapté. La définition de ces opérateurs à fait l'objet de la publication [19]. Si l'on résout le système pour une rotation $\theta = \frac{2\pi}{8}$, c'est-à-dire pour un angle tel que,

en vertu du théorème de Hermann, l'unique solution soit le tenseur hémitrope [11], on obtient le résultat suivant :

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_5 & a_3 & -a_6 & f_3 & f_4 \\ a_5 & a_1 & a_6 & -a_3 & -f_4 & f_3 \\ a_4 & -a_7 & a_2 & -a_8 & f_5 & f_6 \\ a_7 & -a_4 & a_8 & a_2 & -f_6 & f_5 \\ f_7 & f_8 & a_9 & -a_{10} & f_1 & f_2 \\ -f_8 & f_7 & a_{10} & a_9 & -f_2 & f_1 \end{pmatrix} \quad (2.146)$$

avec

$$f_1 = f(a_1, a_2, a_3, a_4) \quad (2.147)$$

$$f_2 = f(a_5, a_6, a_7, a_8) \quad (2.148)$$

$$f_3 = f(a_1, a_2, a_5) \quad (2.149)$$

$$f_4 = f(a_5, a_8, a_{10}) \quad (2.150)$$

$$f_5 = f(a_3, a_4, a_9) \quad (2.151)$$

$$f_6 = f(a_6, a_7, a_{10}) \quad (2.152)$$

$$f_7 = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_9) \quad (2.153)$$

$$f_8 = f(a_1, a_2, a_3, a_4, a_{10}) \quad (2.154)$$

$$(2.155)$$

La base physique de l'espace vectoriel sur lequel agit notre tenseur A a été défini dans l'exemple précédent comme :

$$(K_{111} \quad K_{222} \quad K_{221} \quad K_{112} \quad \sqrt{2}K_{122} \quad \sqrt{2}K_{121}) \quad (2.156)$$

On vérifie donc bien que l'hémitropie plane dans le cas d'un tenseur n'ayant que les petites symétries est bien défini pas la donnée de 10 composantes indépendantes. La classe d'isotropie d'un tel tenseur dépendant de la donnée de 5 coefficients, on voit bien le distinguo qu'il existe entre hémitropie et isotropie. Ce résultat pratique constitue une preuve concrète de l'efficacité de notre méthode pour étude des tenseurs de rang élevé.

2.5.0.1 Étude des classes de symétrie

Le deuxième point est qu'à partir de cette décomposition il devient facile de calculer le nombre de coefficients de notre loi de comportement pour différents groupes de symétrie. Nous pouvons introduire dès maintenant une remarque essentielle qui nous permettra de faire le lien avec d'autres travaux traitant des symétries des lois de comportement : les sous-espaces $O(2)$ -harmoniques de notre décomposition correspondent aux sous-espaces de Cartan identifiés dans des travaux comme ceux de Forte et Vianello [12, 20] ainsi que de Weller [13]. Un raisonnement sur les diagrammes de Young montre très facilement ce résultat. Pour ce faire il est nécessaire de considérer une nouvelle règle de branchement : $U(n) \downarrow U(n-1)$. King montre dans [2] que les règles $O(n) \downarrow O(n-1)$ et $U(n) \downarrow U(n-1)$ sont identiques⁵. La règle $O(n) \downarrow O(n-1)$ implique l'utilisation de la série infinie M

⁵Cette précision est liée au fait que cette équivalence semble être si classique dans une certaine littérature qu'elle n'est pas précisée, ni même rappelée. Cela rend l'utilisation de logiciel de décomposition formelle comme SCHUR assez ardue car toutes ces équivalences sont sous-entendues.

définie comme suit :

$$M = 1 + \square + \square\square + \square\square\square + \dots \quad (2.157)$$

L'application de cette règle dans le cas $SO(3) \downarrow SO(2)$ est immédiate, et on a :

$$\{n\}_{SO(3)} = \sum_{k=1}^n \{k\}_{SO(2)} + 0_{SO(2)} \quad (2.158)$$

$\{n\}$ étant harmonique en dimension 3 sa dimension est de $2n + 1$; la dimensions d'un tenseur harmonique d'ordre non nul en dimension 2 étant égale à 2 et à 1 dans le cas contraire, on retrouve bien : $\text{Dim}(\sum_{k=1}^n \{k\}_{SO(2)} + 0_{SO(2)}) = 2n + 1$. Cette décomposition qui quand $n = 4$ s'explique sous forme de diagramme de Young par :

$$\square\square\square\square_{SO(3)} = \square\square\square\square_{SO(2)} + \square\square\square_{SO(2)} + \square\square_{SO(2)} + \square_{SO(2)} + 0_{SO(2)} \quad (2.159)$$

est bien la décomposition de Cartan associée au tenseur harmonique d'ordre n . De fait si l'on considère $Q(\theta) \in SO(2)$ ainsi que (s_k, t_k) les composantes associées à $\{k\}_{SO(2)}$ alors l'action de $Q(\theta)$ sur $\{k\}_{SO(2)}$ se représente par :

$$\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \quad (2.160)$$

C'est grâce à cette remarque que nous pourrons étudier les classes de symétrie de nos tenseurs en utilisant la méthode mise en oeuvre par notamment Forte et Vianello [12].

Conclusion

Les outils d'étude des tenseurs que nous avons proposés ici semblent être méconnus des mécaniciens du solide et peuplent essentiellement les publications de physiques théoriques. Toutefois notre travail à ici l'objectif de mettre en avant les intérêts de ce type d'approche pour d'étude des lois de comportements.

Dans les travaux concernant les classes de symétrie d'opérateurs de comportement [12, 13, 20] le point délicat est la réalisation de la décomposition harmonique en indicelle (par opposition à notre méthode diagrammatique). Il existe un certain nombre de publications très calculatoires donnant des techniques pour la réaliser [21, 22], toutefois leurs utilisations demeurent ardues. La méthode que nous proposons ici repose sur l'utilisation de diagramme, qui quoique calculatoire le sont toujours nettement moins que les approches indicelles. De plus notre technique de décomposition devrait pouvoir être facilement implémentée dans un logiciel de calcul formel.

Au niveau du travail effectué dans ce document nous désirons souligner trois points.

Tout d'abord notre objectif était d'obtenir en dimensions quelconque les résultats que l'on avait dans la littérature en 3 dimensions. Ceci a été réalisé en établissant nos décompositions en toutes généralités en dimensions d et à l'ordre n . Nous avons ensuite particulariser nos résultats au dimensions 2 et 3. Les spectres obtenues constituent, ils nous semblent, un résultat nouveau. Il n'existe pas à notre connaissance d'algorithme systématique en dimension d pour obtenir, à la manière de Jerphagnon [10] en dimension 3, automatiquement le spectre d'un tenseur quelconque.

Le second point, qui constitue notre apport le plus personnel, est la méthodologie proposée pour prendre en compte les symétrie indicelle de nos tenseurs. Contrairement à celle de Jerphagnon que nous avons complété dans [11], l'approche proposée ici est indépendante de la dimension de l'espace de travail ; de plus il devient facile de programmer un algorithme la mettant en oeuvre de manière automatique pour des système plus complexes.

Un autre avantage, à notre sens, de la méthode proposée est qu'elle repose sur un algorithme essentiellement diagrammatique. De fait elle est applicable même sans comprendre outre mesure l'ensemble des mécaniques mathématiques qui sont derrière.

Annexe A

Décomposition par produit tensoriel des représentations

Nous illustrons ici rapidement le principe d'obtention de la décomposition harmonique par tensorisation successive de représentations irréductibles. C'est à cette technique que nous nous référons quand nous parlons de l'approche de Jerphagnon [10].

A.1 Arithmétique des e.v. de tenseurs irréductibles

Le principe de cette arithmétique repose sur le produit tensoriel des représentations irréductibles [4, 8]. On considère \mathbb{E}_1 et \mathbb{E}_2 deux e.v. portant des représentations irréductibles D_1 et D_2 d'un groupe G . L'espace produit $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2$ porte une représentation $D = D_1 \otimes D_2$ qui n'est pas irréductible et se réduit selon la *décomposition de Clebsch-Gordan* :

$$D_1 \otimes D_2 = \bigoplus_{\rho} m_{\rho} D_{\rho} \quad (\text{A.1})$$

où m_{ρ} indique la multiplicité de la représentation D_{ρ} . Dans le cas de $O(3)$ les espaces irréductibles sont les espaces des tenseurs harmoniques \mathbb{H}^k évoqué précédemment. Dans ce cas là l'espace produit se décompose alors suivant la règle dite « d'addition du moment angulaire » [4] suivante, soit \mathbb{H}^i et \mathbb{H}^j d'ordre respectifs i et j alors :

$$\mathbb{E} = \mathbb{H}^i \otimes \mathbb{H}^j = \bigoplus_{k=|i-j|}^{i+j} \mathbb{H}^k \quad (\text{A.2})$$

Ainsi le produit tensoriel de deux tenseurs irréductibles d'ordre 1 donne le spectre d'un tenseur d'ordre 2. On a alors

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ij}) = 1_a \otimes 1_b = 0_a \oplus 1_a^{\#} \oplus 2_a \quad (\text{A.3})$$

où la notation $\#$ indique un tenseur axial, ou pseudo tenseur. De plus il est à noter que les indices a, b, \dots que nous utilisons n'ont pour but que de distinguer les différentes composantes de même ordre. Ainsi comme le produit tensoriel est non-commutatif, l'espace vectoriel $1_a \otimes 1_b$ diffère de $1_b \otimes 1_a$ et le tenseur résultant est non-symétrique. Au contraire l'espace engendré par $1_a \otimes 1_a$ sera un espace sur lequel notre tenseur sera symétrique¹.

¹Car celui-ci est à coefficients dans \mathbb{R} qui est un corps commutatif. Il faudrait travailler dans un corps non-commutatif comme celui des quaternions pour que cela ne soit plus automatiquement vrai.

On rappelle de plus que le produit tensoriel est associatif mais non commutatif, tandis que l'opérateur « somme directe » l'est. De plus, le produit tensoriel est distributif par rapport à la somme directe. On a donc, en résumé, la structure algébrique suivante :

Propriété 1 Soit E l'ensemble des décompositions $O(3)$ -invariante. Cet ensemble muni des lois internes \oplus et \otimes , avec \otimes définie par la décomposition de Clebsch-Gordan est un semi-anneau.

On a de plus, d'après [10], les propriétés suivantes :

Propriété 2 La décomposition harmonique d'un tenseur totalement symétrique d'ordre pair ne contient que des termes d'ordre pairs. Et réciproquement pour un tenseur impair.

Propriété 3 Dans le cas d'un tenseur polaire d'ordre pair, tous les tenseurs d'ordres pairs de cette décomposition sont polaires et tous les tenseurs d'ordres impairs sont axiaux (i.e. de type $\#$), et réciproquement dans le cas d'un tenseur impair.

De fait on a :

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ij}) = 1_a \otimes 1_a = 0_a \oplus 1_a \oplus 2_a \quad (\text{A.4})$$

et

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)}) = 1_a \otimes 1_a = 0_a \oplus 2_a \quad (\text{A.5})$$

A partir de ces règles simples nous pouvons bâtir l'ensemble des spectres des tenseurs de comportement. Nous détaillerons de plus le principe pour prendre en compte la grande symétrie, principe qui n'était pas énoncé dans les publications ayant traitées du sujet [10, 23]. Regardons l'application de cette méthode sur quelques tenseurs.

A.2 Détermination des spectres de réduction

Tenseurs d'ordre 3

On considère le cas général de l'e.v. des tenseurs d'ordre 3. Il peut être engendré à partir de $1_a \otimes 1_b \otimes 1_c$. On obtient alors la structure suivante :

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\mathbb{T}_{ijk}) &= 1_a \otimes 1_b \otimes 1_c = 1_a \otimes (1_b \otimes 1_c) \\ &= 1_a \otimes (0_b \oplus 1_b \oplus 2_b) = (1_a \otimes 0_b) \oplus (1_a \otimes 1_b) \oplus (1_a \otimes 2_b) \\ &= 0_a \oplus 1_a \oplus 1_b \oplus 1_c \oplus 2_a \oplus 2_b \oplus 3_a \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

que l'on réécrit

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{ijk}) = 0^\# \oplus 1^{(3)} \oplus 2^{\#(2)} \oplus 3 \quad (\text{A.7})$$

ce qui correspond bien à un espace à 27 dimensions.

Si on suppose maintenant une symétrie de type $(ij)k$, qui est celle que nous avons retenue pour notre tenseur $\underline{\underline{K}}$, on peut considérer un tenseur appartenant à ce e.v comme étant le résultat d'un produit tensoriel d'un vecteur par un tenseur d'ordre 2 symétrique. On a

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)k}) = 1_a \otimes (0_b \oplus 2_b) = 1^{(2)} \oplus 2^\# \oplus 3 \quad (\text{A.8})$$

ce qui correspond bien à un sous-espace de dimension 18 de l'e.v. précédent. La structure identifiée correspond également à celle identifiée dans [13] pour l'e.v. des tenseurs piézoélectriques. Continuons maintenant avec les spectres de tenseurs d'ordre 4.

Tenseurs d'ordre 4

On considère le tenseur d'élasticité sans la grande symétrie, c'est-à-dire possédant les symétries indicielles : $(ij)(kl)$. Ce tenseur correspond physiquement à celui de l'effet Kerr [20]. Le e.-v des tenseurs photoélastiques à la structure suivante :

$$(0_a \oplus 2_a) \otimes (0_b \oplus 2_b) = (0_a \otimes 0_b) \oplus (0_a \otimes 2_b) \oplus (2_a \otimes 0_b) \oplus (2_a \otimes 2_b) \quad (\text{A.9})$$

Donc au final on a

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)}) = (0_a \oplus 2_a) \otimes (0_b \oplus 2_b) = 0^{(2)} \oplus 1^\# \oplus 2^{(3)} \oplus 3^\# \oplus 4 \quad (\text{A.10})$$

ce qui correspond au spectre de la décomposition harmonique effectuée dans [24]. Le même calcul effectué par la méthode de Spencer aurait été beaucoup plus compliqué à mener.

Considérons à présent le cas de l'élasticité, on tient compte à présent de la grande symétrie : $(ij)(kl)$. Le problème admet des simplifications. La grande symétrie implique de récrire (A.9) de la manière suivante :

$$(0_a \oplus 2_a) \otimes (0_a \oplus 2_a) = (0_a \otimes 0_a) \oplus (0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a) \oplus (2_a \otimes 2_a) \quad (\text{A.11})$$

avec des termes au « carré » et des termes croisés. On a naturellement pour les termes « carrés »

$$0_a \otimes 0_a = 0_a \quad \text{et} \quad 2_a \otimes 2_a = 0_a \oplus 2_a \oplus 4_a \quad (\text{A.12})$$

par propriété de la décomposition d'un tenseur totalement symétrique. Tandis que pour les termes croisés $(0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a)$ constitue un sous-espace symétrique et non deux sous-espaces indépendants. De fait on a

$$(0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a) = 2_a \quad (\text{A.13})$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\text{Sp}(\mathbb{T}_{(ij)(kl)}) = 0^{(2)} \oplus 2^{(2)} \oplus 4 \quad (\text{A.14})$$

Et l'on retrouve bien le spectre de la décomposition harmonique tel que l'on peut le trouver dans la littérature [12, 16, 25].

Annexe B

Compléments à l'étude des tableaux

B.1 Exemple du lien entre relation de Garnir et décomposition de tableaux

La démonstration dans le cas général est donnée dans [8], nous nous contenterons de l'illustrer ici sur un cas particulier. Nous désirons ici redresser le TY :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.1})$$

L'élément de Garnir associé à ce redressement est $g_G = e - (12) + (23)(12)$ et on désire montrer que son action sur le vecteur associé à notre tableau à redresser est équivalent à la relation sur les tableaux suivante :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.2})$$

Nous indexerons les tableaux précédents de gauche à droite a, b et c . Les opérateurs associés à ces tableaux sont respectivement :

$$y_a = e + (12) - (23) - (23)(12) \quad (\text{B.3})$$

$$y_b = e + (12) - (13) - (13)(12) \quad (\text{B.4})$$

$$y_c = e + (13) - (12) - (12)(23) \quad (\text{B.5})$$

les vecteurs de l'algèbre de groupe associés sont :

$$|a\rangle = |213 + 123 - 312 - 132\rangle \quad (\text{B.6})$$

$$|b\rangle = |123 + 213 - 321 - 231\rangle \quad (\text{B.7})$$

$$|c\rangle = |132 + 312 - 231 - 321\rangle \quad (\text{B.8})$$

On a l'égalité suivante :

$$g_G |a\rangle = 0 \quad (\text{B.9})$$

Calculons $(12)|a\rangle$:

$$(12)|a\rangle = (12)|213 + 123 - 312 - 132\rangle \quad (\text{B.10})$$

$$= |123 + 213 - 321 - 231\rangle \quad (\text{B.11})$$

$$= |b\rangle \quad (\text{B.12})$$

De fait on peut déjà récrire notre relation (B.9) de la manière suivante :

$$|a\rangle = |b\rangle - (23)|b\rangle \quad (\text{B.13})$$

Calculons donc à présent $(23)|b\rangle$:

$$(23)|b\rangle = (23)|123 + 213 - 321 - 231\rangle \quad (\text{B.14})$$

$$= |132 + 312 - 231 - 321\rangle \quad (\text{B.15})$$

$$= |c\rangle \quad (\text{B.16})$$

De fait on abouti à

$$g_G|a\rangle = 0 \Leftrightarrow |a\rangle = |b\rangle - |c\rangle \quad (\text{B.17})$$

B.2 TYG dans les différents systèmes de symétries

B.2.1 TYG pour S_6 -petites symétries-

$S^{\{6\}}$

$$\boxed{112334} \quad (\text{B.18})$$

$S^{\{5,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.19})$$

$S^{\{4,2\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.20})$$

$S^{\{4,1,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.21})$$

$S^{\{3,2,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.22})$$

$S^{\{3,3\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.23})$$

$S^{\{2,2,2\}}$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.24})$$

B.2.2 Prise en compte de la grande symétries

$S^{\{6\}}$

Trivialement $S^{\{6\}}$ est généré par un seul vecteur : $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$.

$S^{\{5,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 1 & & & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.27})$$

On a immédiatement $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} = 0$. Par redressement de Garnir on abouti à :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 4 & & & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.28})$$

On en conclut que $S^{\{5,1\}}$ est généré par un seul vecteur.

$S_{\{4,2\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 1 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 2 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 1 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.32})$$

soit au final après simplifications

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.46})$$

$S_{\{4,1,1\}}$ dépend d'un vecteur.

$S_{\{3,2,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.47})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 1 & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.48})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 \\ \hline 4 & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.50})$$

On a immédiatement

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.51})$$

après manipulations on obtient :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.52})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \right) \quad (\text{B.53})$$

$S_{\{3,2,1\}}$ dépend de 2 vecteur.

$S_{\{2,2,2\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.54})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.55})$$

d'où

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = 0 \quad (\text{B.56})$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} = 0 \quad (\text{B.57})$$

$S_{\{2,2,2\}}$ est un module vide.

$S_{\{3,3\}}$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.58})$$

$S_{\{3,3\}}$ est engendré par un vecteur.

B.2.3 TYG pour S_6 -petites et grande symétries-

$S^{\{6\}}$

$$\boxed{112334} \quad (\text{B.59})$$

$S^{\{5,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.60})$$

$S^{\{4,2\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.61})$$

$S^{\{4,1,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline 2 & & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.62})$$

$S^{\{3,2,1\}}$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{B.63})$$

$S^{\{3,3\}}$

1	1
2	3
3	4

(B.64)

Annexe C

Règles de combinatoires supplémentaires

C.1 Règles de Littlewood-Richardson

Les règles de Littlewood-Richardson sont un ensemble de critères permettant de calculer le produit extérieur de deux représentations $\{\lambda\}$ et $\{\mu\}$. Cette question à avoir avec l'étude des fonctions symétriques, mais nous nous y intéresserons ici comme une démarche algorithmique pour calculer le produit de deux diagramme de Young. Concrètement cela nous permet de répondre à la question :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \dots? \quad (\text{C.1})$$

Cette question pourrait revenir, dans nos problématiques, à se demander ce que l'on obtient si l'on réalise le produit tensoriel d'un tenseur d'ordre 6 par un produit tensoriel d'ordre 4 possédant les symétries indicelles indiquées par les diagramme de Young. L'algorithme graphique pour résoudre cette question est le suivant. On considère dans notre produit extérieur le diagramme de Young le plus simple, pour nous cela sera $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$. On numérote les cases de ce diagramme de la manière suivante : un 1 pour les éléments de la première ligne, un 2 pour la seconde et ainsi de suite . . . Dans notre exemple on a

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} & \boxed{2} \\ \hline \end{array} \quad (\text{C.2})$$

On ajoute une à une les cases de ce diagramme à l'autre de telle manière que :

1. on commence par les cases numérotées 1, puis 2, etc. . . ;
2. à chaque étape le diagramme obtenu soit un diagramme de Young ;
3. il n'y ai pas de chiffres identiques dans les colonnes du diagrammes résultant ;
4. que les mots associés aux tableaux générés soit des permutations de treillis.

Ce sont ces conditions que nous appelons les règles de Littlewood-Richardson. La dernière règle est la plus énigmatique. Voyons tout d'abord, pour comprendre ce qu'elle implique, ce qu'est un mot associé à un tableau. On considère le tableau suivant :

$$(T) : \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{6} \\ \hline \boxed{3} & \boxed{6} & & \\ \hline \boxed{1} & \boxed{2} & & \\ \hline \boxed{5} & & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{C.3})$$

le mot associé à T et noté $w(T)$ est la séquence des nombres du tableau lue de droite à gauche et de haut en bas. Ainsi nous avons $w(T) = \{652163215\}$. Une permutation de treillis (lattice permutation) est une séquence d'entiers $\pi = i_1 i_2 \dots i_n$ telle que toute ses sous-séquences $\pi_k = i_1 i_2 \dots i_k$ et pour tout entier m son occurrence soit au moins égale à celle de l'entier $m + 1$.

Exemple 8 Le mot $\{652163215\}$ n'est pas une permutation de treillis.
 Le mot $\{1232113\}$ n'est pas une permutation de treillis, car $\{1232\}$ ne l'est pas.
 Le mot $\{1123213\}$ est une permutation de treillis.

Pour revenir à notre question, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \dots? \tag{C.4}$$

La solution est la série constituée des diagrammes suivant :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & 1 & 1 \\ \hline o & o & 2 & 2 & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & 1 & 1 \\ \hline o & o & 2 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & 1 & 1 \\ \hline o & o & 2 & 2 & & \\ \hline \end{array} + \dots \tag{C.5}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & 1 \\ \hline o & o & 1 & 2 & \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & 1 \\ \hline o & o & 1 & & \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & 1 \\ \hline o & o & 2 & & \\ \hline 1 & & & & \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & 1 \\ \hline o & o & & & \\ \hline 1 & 2 & & & \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} + \dots \tag{C.6}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & \\ \hline o & o & 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & \\ \hline o & o & 1 & & \\ \hline 1 & 2 & & & \\ \hline 2 & & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline o & o & o & o & \\ \hline o & o & & & \\ \hline 1 & 1 & & & \\ \hline 2 & 2 & & & \\ \hline \end{array} \tag{C.7}$$

C.2 Branchements

$\{\mu_S\}$		$\{\lambda/\mu_S\}$
1	→	$\begin{array}{ c c c c c } \hline o & o & o & o & o \\ \hline o & & & & \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c } \hline a & a \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c c c } \hline o & o & o & a & a & \\ \hline o & & & & & \\ \hline \end{array}; \begin{array}{ c c c c c } \hline o & o & o & o & a \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline a & a & a & a \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c c c } \hline o & a & a & a & a & \\ \hline o & & & & & \\ \hline \end{array}; \begin{array}{ c c c c c } \hline o & o & a & a & a \\ \hline \end{array}$

$\{\mu_S\}$		$\{\lambda/\mu_S\}$
1	→	$\begin{array}{ c c c c } \hline o & o & o & o \\ \hline o & & & \\ \hline o & & & \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c } \hline a & a \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c c c } \hline o & o & a & a & \\ \hline o & & & & \\ \hline o & & & & \\ \hline \end{array}; \begin{array}{ c c c c c } \hline o & o & o & o & a \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{ c c c c } \hline a & a & a & a \\ \hline \end{array}$	→	$\begin{array}{ c c c c } \hline o & a & a & a \\ \hline o & & & \\ \hline a & & & \\ \hline \end{array}$

$\{\mu_S\}$		$\{\lambda/\mu_S\}$										
1	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>o</td><td>o</td><td>o</td></tr> </table>	o	o	o	o	o	o				
o	o	o										
o	o	o										
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	a	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>o</td><td>a</td><td>a</td></tr> </table>	o	o	o	o	a	a		
a	a											
o	o	o										
o	a	a										
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td></tr></table>	a	a	b	b	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>a</td><td>a</td></tr> <tr><td>o</td><td>b</td><td>b</td></tr> </table>	o	a	a	o	b	b
a	a											
b	b											
o	a	a										
o	b	b										

(C.10)

$\{\mu_S\}$		$\{\lambda/\mu_S\}$																													
1	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>o</td><td>o</td><td></td></tr> <tr><td>o</td><td></td><td></td></tr> </table>	o	o	o	o	o		o																						
o	o	o																													
o	o																														
o																															
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	a	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td><td>a</td></tr> <tr><td>a</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>o</td><td></td><td></td></tr> </table> ; <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>a</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table> ; <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td><td>a</td></tr> <tr><td>o</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	o	o	a	a			o			o	o	o	a						o	o	a	o					
a	a																														
o	o	a																													
a																															
o																															
o	o	o																													
a																															
o	o	a																													
o																															
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td></tr></table>	a	a	b	b	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>a</td><td>a</td></tr> <tr><td>o</td><td>b</td><td></td></tr> <tr><td>b</td><td></td><td></td></tr> </table> ; <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td><td>a</td></tr> <tr><td>a</td><td>b</td><td></td></tr> <tr><td>b</td><td></td><td></td></tr> </table>	o	a	a	o	b		b			o	o	a	a	b		b									
a	a																														
b	b																														
o	a	a																													
o	b																														
b																															
o	o	a																													
a	b																														
b																															

(C.11)

$\{\mu_S\}$		$\{\lambda/\mu_S\}$												
1	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>o</td><td>o</td></tr> </table>	o	o	o	o	o	o						
o	o													
o	o													
o	o													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>a</td><td>a</td></tr></table>	a	a	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>a</td><td>a</td></tr> </table>	o	o	o	o	a	a				
a	a													
o	o													
o	o													
a	a													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td></tr></table>	a	a	b	b	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>o</td><td>o</td></tr> <tr><td>a</td><td>a</td></tr> <tr><td>b</td><td>b</td></tr> </table>	o	o	a	a	b	b		
a	a													
b	b													
o	o													
a	a													
b	b													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>a</td><td>a</td></tr><tr><td>b</td><td>b</td></tr><tr><td>c</td><td>c</td></tr></table>	a	a	b	b	c	c	→	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>a</td><td>a</td></tr> <tr><td>b</td><td>b</td></tr> <tr><td>c</td><td>c</td></tr> </table>	a	a	b	b	c	c
a	a													
b	b													
c	c													
a	a													
b	b													
c	c													

(C.12)

Bibliographie

- [1] Schur Group Theory Software. <http://schur.sourceforge.net/>.
- [2] R.C. King. Branching rules for classical groups using tensor and spinor methods. *Journal of Physics A*, 8 :429–449, 1975.
- [3] Yvette Kosmann-Schwarzbach. *Groupes et symétries. Groupes finis, groupes et algèbres de Lie, représentations*. 2005.
- [4] J.B. Zuber. *Introduction à la théorie des groupes et de leurs représentations*. 1994.
- [5] Claudio Procesi. *Lie Groups : An Approach through Invariants and Representations*. Springer, 2007.
- [6] Bruce E. Sagan. *Invariant Theory and Tableaux*, chapter The Ubiquitous Young Tableau, pages 262–298. Springer-Verlag, 1990.
- [7] Philippe Ruelle. Théorie des groupes. Cours Université Catholique de Louvain.
- [8] Bruce E. Sagan. *The Symmetric Group : Representation, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Springer, 2000.
- [9] Daniel Krob. *Elements de combinatoire*. 1995.
- [10] J. Jerphagnon, D. Chemla, and R. Bonneville. The description of the physical properties of condensed matter using irreducible tensors. *Advances in Physics*, 27 :609 – 650, 1978.
- [11] Nicolas Auffray. Décomposition harmonique des tenseurs -méthode spectrale-. *Compte Rendus -Mécanique*, 336 :370–375, 2007.
- [12] Sandra Forte and Maurizio Vianello. Symmetry classes for elasticity tensors. *Journal of Elasticity*, 43 :81–108, 1996.
- [13] Thibaut Weller. *Etude des symétries et modèles de plaques en piézoélectricité linéarisée*. PhD thesis, Université Montpellier 2, 2004.
- [14] Samuel Forest. *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Les Presses de l’Ecole des Mines de Paris, 2006.
- [15] R. D. Mindlin and N. N. Eshel. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4 :109–124, 1968.
- [16] George Backus. A geometrical picture of anisotropic elastic tensors. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 8 :633–671, 1970.
- [17] R.C. King. Modification rules and products of irreducible representations of the unitary, orthogonal, and symplectic groups. *Journal of Mathematical Physics*, 12 :1588–1598, 1971.
- [18] Nicolas Auffray, Régis Bouchet, and Yves Brechet. Class-jump phenomenon in physical symmetries in bidimensional space. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, (en cours de publication), 2008.

- [19] Nicolas Auffray, Regis Bouchet, and Yves Brechet. Derivation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain gradient elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, (en cours de publication), 2008.
- [20] Sandra Forte and Maurizio Vianello. Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors. *International Journal of Engineering Science*, 35(14) :1317–1326, November 1997.
- [21] A. Spencer. A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 8 :475–481, 1970.
- [22] Jovo Jaric. On the decomposition of symmetric tensors into traceless symmetric tensors. *International Journal of Engineering Science*, 41 :2123–2141, 2003.
- [23] T. P. Srinivasan. A description of acoustical activity using irreducible tensors. *Journal of Physics C*, 21 :4207–4219, 1988.
- [24] Sandra Forte and Maurizio Vianello. Functional bases for transversely isotropic and transversely hemitropic invariants of elasticity tensors. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 51 :543–552, 1998.
- [25] Reidar Baerheim. Harmonic decomposition of the anisotropic elasticity tensor. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 46 :391–419, 1993.