

Sur une stratégie de calcul multi-échelle pour l'analyse des structures composites : discrétisation et performances

Olivier Loiseau, Pierre Ladevèze, David Dureisseix

▶ **To cite this version:**

Olivier Loiseau, Pierre Ladevèze, David Dureisseix. Sur une stratégie de calcul multi-échelle pour l'analyse des structures composites : discrétisation et performances. 5e Colloque National en Calcul des Structures, May 2001, Giens, France. pp.691-698. hal-00322468

HAL Id: hal-00322468
https://hal.science/hal-00322468

Submitted on 24 Aug 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives| 4.0 International License

Sur une stratégie de calcul multi-échelle pour l'analyse des structures composites : discrétisation et performances

Olivier LOISEAU, Pierre LADEVÈZE, David DUREISSEIX

LMT Cachan (UMR 8535) - ENS Cachan / CNRS / Université Paris VI
61, Avenue Président Wilson, F-94235 Cachan CEDEX
loiseau,ladeveze,dureisse@lmt.ens-cachan.fr

Résumé

Afin de traiter efficacement les problèmes de grande taille associés à la simulation du comportement de structures hétérogènes, une stratégie de calcul multi-échelle fortement liée aux techniques d'homogénéisation a été proposée dans [4]. Ici, des outils destinés au traitement spécifique des matériaux composites sont présentés : l'introduction d'un troisième échelle et l'utilisation de la solution de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques dans les régions éloignées des bords.

Introduction

Avec pour objectif de traiter efficacement les problèmes associés à la simulation numérique du comportement de structures comportant des hétérogénéités, parfois fortes, une stratégie de calcul multi-échelle a été proposée précédemment [3, 4]. Il s'agit d'une méthode de décomposition de domaine qui utilise un découpage de la structure initiale en sous-structures et interfaces. La stratégie de résolution associée est mixte et basée sur les concepts de la LATIN Method [2].

On s'intéressera dans cet article au cas particulier des structures composites dont le matériau consiste en la répétition spatiale périodique d'un motif, donné par une cellule élémentaire. Le découpage en sous-structures est lui-même réalisé par ce découpage en cellules élémentaires. La stratégie multi-échelle dont il est question ici, à la différence d'approches fondées sur la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques [7], ne nécessite aucun traitement particulier des zones de bord [1, 8]. Par contre, lorsque le nombre de cellules élémentaires devient important, le coût associé à la résolution du problème homogénéisé peut devenir prohibitif. On propose donc une discrétisation des champs du problème macroscopique, qui permet d'une part de limiter le coût de calcul et d'autre part de définir une troisième échelle dans le cadre de la stratégie. Dans les régions

éloignées des bords, de la même façon que dans la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques, la solution à l'échelle microscopique est périodique. On utilise cette propriété de la solution à cette échelle pour proposer un nouvel opérateur de comportement homogénéisé, ainsi qu'une détermination directe des champs microscopiques.

1 Problème de référence

Le problème mécanique de référence est celui de la réponse statique, en petites perturbations, d'une structure Ω soumise à une densité d'efforts volumique $\underline{f}_d$, une densité d'efforts surfacique $\underline{F}_d$ sur une partie du bord $\partial_2\Omega$ et à un déplacement imposé $\underline{U}_d$ sur les reste du bord $\partial_1\Omega$, constituée d'un matériau élastique linéaire.

La structure Ω est découpée en N sous-structures Ω_S et interfaces $\Gamma_{SS'}$. Les inconnues du problème sont alors de deux nature : (i) les inconnues volumiques par sous-structures, à savoir le déplacement $\underline{u}_S$ et la contrainte σ_S, (ii) les inconnues surfaciques par interface, à savoir un champ de déplacement relatif entre deux sous-structures $\underline{W}_{SS'}$, et réciproquement $\underline{W}_{S'S}$, et les champs d'inter-efforts $\underline{F}_{SS'}$ et $\underline{F}_{S'S}$, dont on ne suppose pas *a priori* qu'ils doivent être continus. Les équations du problème sous-structuré sont, d'une part, les équations de liaison, et d'équilibre qui relient les quantités de la sous-structure aux quantités d'interfaces, et, d'autre part, les relations de comportement, qui traduisent le comportement du matériau de la sous-structure et celui des interfaces.

On définit deux échelles distinctes notées m (échelle microscopique) et M (échelle macroscopique) afin de prendre en compte les effets à courte et grande longueurs de variation, respectivement. La séparation est effectuée sur les quantités d'interfaces, au moyen d'un projecteur $\mathbf{\Pi}$ symétrique :

$$\begin{array}{lllll} \underline{F}_{S'S} = \underline{F}^M_{S'S} + \underline{F}^m_{S'S} & \text{avec} & \underline{F}^M_{S'S} = \mathbf{\Pi}(\underline{F}_{S'S}) & \text{et} & \underline{F}^m_{S'S} = (\mathbf{id} - \mathbf{\Pi})(\underline{F}_{S'S}) \\ \underline{W}_{SS'} = \underline{W}^M_{SS'} + \underline{W}^m_{SS'} & \text{avec} & \underline{W}^M_{SS'} = \mathbf{\Pi}(\underline{W}_{SS'}) & \text{et} & \underline{W}^m_{SS'} = (\mathbf{id} - \mathbf{\Pi})(\underline{W}_{SS'}) \end{array}$$

L'échelle macroscopique qui sera utilisée dans la suite correspond à la partie linéaire du champ d'interface. On notera que, dans ce cas, le champ macroscopique appartient à un espace de dimension finie, et que les champs microscopiques sont à résultante et moment nuls.

Une description précise de la méthode itérative de résolution multi-échelle est donnée dans [4]. Elle fait apparaître à chaque itération deux problèmes couplés : l'un, macroscopique, est résolu globalement, l'autre, microscopique, est résolu par sous-structure.

2 Initialisation par une solution à partie microscopique périodique

Une pièce composite, dont la structure microscopique du matériau peut être décrite par la répétition spatiale périodique d'une cellule élémentaire, engendre un nombre important de ces cellules. Cette constatation sert d'appui à une première hypothèse de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques [7] selon laquelle le rapport ϵ entre les longueurs caractéristiques des échelles microscopique et macroscopique est très petit. Dans ce cas, la solution est supposée quasi-périodique, c'est-à-dire à la fois dépendante d'une variable globale dite «lente», considérée constante par cellule microscopique, et périodique par rapport à une seconde variable dite «rapide». Nous allons reprendre à notre

compte ces deux hypothèses, dans le but de proposer un nouvel opérateur de comportement homogénéisé et la détermination directe de la solution microscopique.

2.1 Démarche d'homogénéisation

La séparation entre variations «lentes» et «rapides» est réalisée dans notre cas par l'intermédiaire du projecteur $\mathbf{\Pi}$ sur les interfaces. En utilisant la linéarité du problème, on sépare le déplacement solution de l'équilibre micro-macro en deux contributions : $\underline{u}_S = \underline{\hat{u}}_S + \underline{\tilde{u}}_S$. L'une, notée $\underline{\hat{u}}_S$, est en équilibre avec les efforts volumiques et la partie microscopique des inter-efforts , l'autre, notée $\underline{\tilde{u}}_S$, est en équilibre avec la partie macroscopique des inter-efforts. On obtient les équations d'équilibre suivantes (où le comportement du matériau a été pris en compte) :

$$\forall\ (\underline{u}^*_S, \underline{W}^{m*}_{SS'}) \in \mathcal{U}_S \times \mathcal{W}^m_S \quad \int_{\Omega_S} \mathrm{Tr}\left[\mathbf{K}_S \varepsilon(\underline{\hat{u}}_S)\, \varepsilon(\underline{u}^*_S)\right]\, d\Omega \;=\; \int_{\Omega_S} \underline{f}_{dS} \cdot \underline{u}^*_S\, d\Omega \;+\; \sum_{S'} \int_{\Gamma_{SS'}} \underline{F}^m_{S'S} \cdot \underline{W}^{m*}_{SS'}\, d\Gamma \quad (1)$$

$$\forall\ (\underline{u}^*_S, \underline{W}^{M*}_{SS'}) \in \mathcal{U}_S \times \mathcal{W}^M_S \quad \int_{\Omega_S} \mathrm{Tr}\left[\mathbf{K}_S \varepsilon(\underline{\tilde{u}}_S)\, \varepsilon(\underline{u}^*_S)\right]\, d\Omega \;=\; \sum_{S'} \int_{\Gamma_{SS'}} \underline{F}^M_{S'S} \cdot \underline{W}^{M*}_{SS'}\, d\Gamma \quad (2)$$

La partie de la solution à courte longueur de variation, représentée par $\underline{W}^m_{SS'}$ sera donc supposée périodique, et les efforts associés $\underline{F}^m_{S'S}$ anti-périodiques, de sorte que le travail de la partie microscopique des inter-efforts dans la partie microscopique du déplacement, sur le contour de la sous-structure, est nul, dans (1). On supposera de plus que $\underline{f}_{dS}$ est nul, si bien que la contribution $\underline{\hat{u}}_S$ peut être choisie nulle elle-aussi.

La détermination de $\underline{\tilde{u}}_S$ conduit à la construction de l'opérateur homogénéisé de comportement de la cellule. Afin de respecter l'hypothèse de périodicité de la partie microscopique de la solution, on recherchera $\underline{\tilde{u}}_S$ dans l'espace des champs dont la trace sur les interfaces est à partie microscopique périodique, que l'on note $\mathcal{U}_S^{\textit{m-périodique}}$:

$$\underline{\tilde{u}}_S \in \mathcal{U}_S^{\textit{m-périodique}} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{W}^m_{SS'} = (\mathbf{id} - \mathbf{\Pi})(\underline{\tilde{u}}_{S|_{\Gamma_{SS'}}}) \\ \underline{W}^m_{SS^+} = \underline{W}^m_{SS^-} \end{array} \right. \quad (3)$$

où S^+ et S^- désignent deux interfaces d'une sous-structure, en vis-à-vis.

Le problème à résoudre, regroupant l'équilibre (2) et les équations de liaison, s'écrit alors : trouver $\underline{\tilde{u}}_S \in \mathcal{U}_S^{\textit{m-périodique}}$ qui vérifie

$$\forall\ \underline{u}^*_S \in \mathcal{U}_S^{\textit{m-périodique}} \quad \int_{\Omega_S} \mathrm{Tr}\left[\mathbf{K}_S \varepsilon(\underline{\tilde{u}}_S)\, \varepsilon(\underline{u}^*_S)\right]\, d\Omega \;=\; \sum_{S'} \int_{\Gamma_{SS'}} \underline{F}^M_{S'S} \cdot \mathbf{\Pi}(\underline{u}^*_{S|_{\Gamma_{SS'}}})\, d\Gamma \quad (4)$$

Pour un jeu d'inter-efforts macroscopiques $\underline{F}^M_S$ donné, ce problème admet une solution unique, à un mouvement de corps rigide près déterminé au niveau de la résolution du problème grossier global. Dû à la linéarité du comportement, la solution obtenue est linéaire

par rapport à $\underline{F}_S^M$. La partie macroscopique de la trace du déplacement sur les faces de la cellule conserve cette linéarité, et on peut alors écrire simplement un nouvel opérateur de comportement homogénéisé de la cellule $\tilde{\mathbf{L}}_S$:

$$\underline{W}_S^M = \mathbf{\Pi}(\underline{u}_{S|_{\Gamma_{SS'}}}) = \tilde{\mathbf{L}}_S(\underline{F}_S^M) \tag{5}$$

Cette démarche permet d'obtenir un nouvel opérateur homogénéisé macroscopique $\tilde{\mathbf{L}}_S$ ainsi que la solution microscopique associée $\underline{\tilde{u}}_S$.

2.2 Exemples

Deux exemples sont proposés afin de valider l'approche mise en place : le premier permet d'évaluer la qualité de l'opérateur homogénéisé obtenu, et le second, la qualité de la solution microscopique post-traitée, ainsi que son domaine de validité. Il s'agit d'exemples de calculs bi-dimensionnels, en petites perturbations, de structures, sous l'hypothèse des déformations planes ; les matériaux utilisés sont élastiques linéaires et isotropes.

2.2.1 Évaluation de la qualité de l'opérateur de comportement homogénéisé

On étudie une structure élancée, en flexion, constituée d'un matériau lamifié réalisé par une succession de couches transverses. On fait varier le rapport des modules d'Young des couches de renfort par rapport à celui des couches de matrice entre 1 et 10000. Le cas extrême d'un rapport supérieur à 1000 revient à considérer des couches rigides interposées dans un milieu élastique.

La variable observée est la flèche en bout de poutre. La solution de référence est obtenue par un calcul par éléments finis fin ; la solution de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques est obtenue au moyen du même maillage dont le comportement orthotrope des éléments est identifié analytiquement.

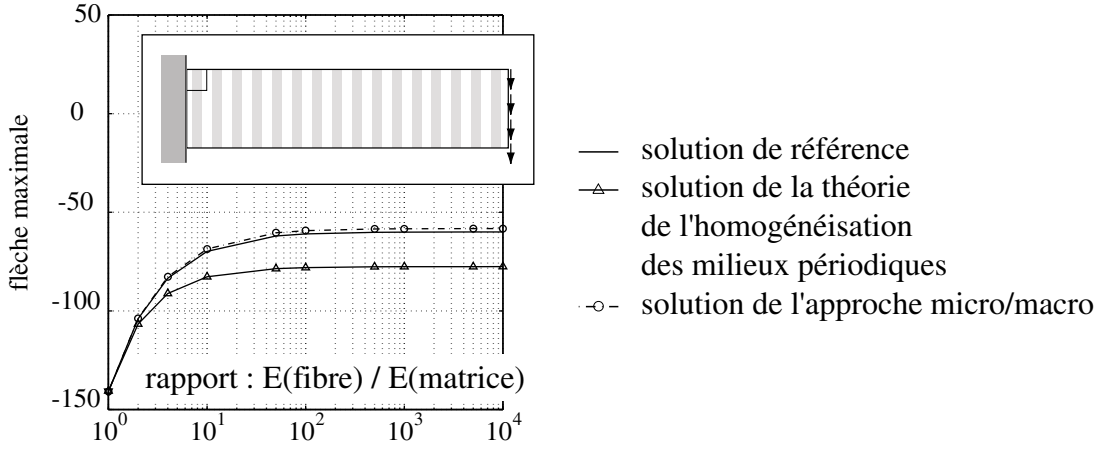


FIG. 1 – *Structure en flexion : comparaison des solutions.*

On constate sur la FIG.1 que la solution apportée par notre approche est très proche de la solution de référence, et ceci même pour des situations fortement hétérogènes. Un gain

est même obtenu par rapport à la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques car la cinématique macroscopique utilisée dans l'approche présentée ici est plus riche, elle permet, en effet, de prendre en compte les gradients de déformations d'une cellule.

2.2.2 Évaluation de la qualité de la solution microscopique périodique post-traitée

On étudie une structure carrée en traction, encastrée sur un de ses côtés. Cette structure composite est composée de 400 cellules maillées identiquement (représentée à gauche sur la FIG.2), dont les inclusions sont 6 fois plus rigides que la matrice (rapport des valeurs approximatives d'un composite Boron-Aluminium, par exemple). On détermine alors la réponse globale de la structure, ainsi que la solution microscopique périodique, pour toutes les cellules. À droite de la FIG.2 est représentée la carte des contributions à l'erreur relative en énergie, par cellule, entre cette solution et la solution de référence, résultat du calcul élément fini direct complet.

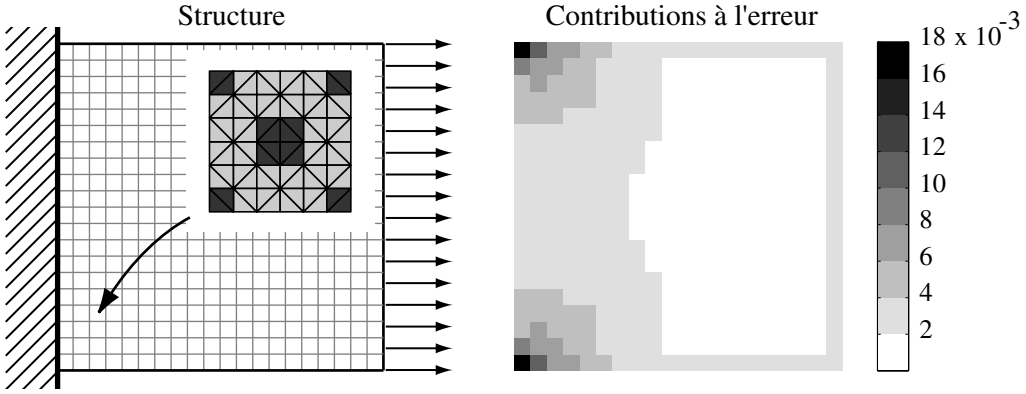


FIG. 2 – *Structure en traction ; carte des contributions à l'erreur entre solution microscopique périodique et solution de référence.*

Cette carte permet de valider les hypothèses formulées plus haut quant à l'utilisation d'une solution à partie microscopique périodique : on constate en effet, sur cet exemple, que l'erreur est très basse dans les zones éloignées des bords et des singularités (les coins de la face encastrée), et que par conséquent la solution apportée par cette démarche peut remplacer la solution itérative dans de telles zones.

3 Discrétisation du problème macroscopique - Troisième échelle

3.1 Problème macroscopique : approche en déplacements

D'après [4], le problème macroscopique optimal en déplacements, correspondant à un paramètre de direction de recherche $k^M = 0$ (voir [5]), est de la forme suivante :

$$\forall\, \underline{W}^{M*}_{SS'} \in \mathcal{W}^M_{ad,0} \quad \sum_{\Gamma_{SS'}} \int_{\Gamma_{SS'}} \underline{W}^{M*}_{SS'} \,.\, (\underline{F}^M_{S'S} + \underline{F}^M_{SS'})\; d\Gamma = 0 \tag{6}$$

$\mathcal{W}^M_{ad,0}$ est l'espace des champs de déplacements d'interface macroscopiques cinématiquement admissibles à zéro : ils sont continus aux passages d'interfaces parfaites et nuls où les déplacements sont imposés.

En utilisant ensuite le fait que $\mathcal{W}^M_S$ et $\mathcal{F}^M_S$ sont des espaces de dimension finie, en proposant une base orthonormée de cet espace, et en notant $[W^M_{SS'}]$ et $[F^M_{S'S}]$ les représentants respectifs de $\underline{W}^M_{SS'}$ et $\underline{F}^M_{S'S}$ dans cette base, il est possible d'écrire ce problème de la façon suivante

$$\sum_{\Gamma_{SS'}} [W^{M*}_{SS'}]^T \Big([F^M_{S'S}] + [F^M_{SS'}] \Big) = \sum_S [W^{M*}_S]^T [F^M_S] = 0 \tag{7}$$

où $[W^{M*}_S]$ et $[F^M_S]$ sont les vecteurs qui contiennent la totalité des variables macroscopiques, pour une cellule.

De plus, si l'on définit l'opérateur inverse généralisé $\mathbf{L}^+_S$ de l'opérateur homogénéisé de comportement macroscopique $\mathbf{L}_S$ [4], on a, sur une cellule, la relation

$$[F^M_S] = [\mathbf{L}^+_S][W^M_S] - [G^m_{S,d}] \tag{8}$$

où $[G^m_{S,d}]$ rassemble les données issues de la résolution à l'échelle microscopique. Au final, le problème macroscopique peut donc s'écrire

$$\forall\, [W^{M*}_S] \text{ C. A. à zero}, \sum_S [W^{M*}_S]^T [\mathbf{L}^+_S][W^M_S] - [W^{M*}_S]^T [G^m_{S,d}] = 0 \tag{9}$$

3.2 Interpolation des champs macroscopiques

Le problème à l'échelle macroscopique (9) possède un nombre fini d'inconnues, et sa taille dépend du produit entre le nombre d'interfaces que compte la structure découpée et la dimension de l'espace des champs macroscopiques. Dans le but de diminuer la taille de ce problème, et donc de minimiser le coût associé à sa résolution, dans le cas d'un grand nombre de cellules, on en propose une «discrétisation» par analogie avec la démarche classique des éléments finis. En pratique, nous proposons de substituer à la cinématique de blocs de cellules, une cinématique simplifiée basée sur la projection de fonctions de formes de type éléments finis linéaires dans l'espace des champs macroscopiques.

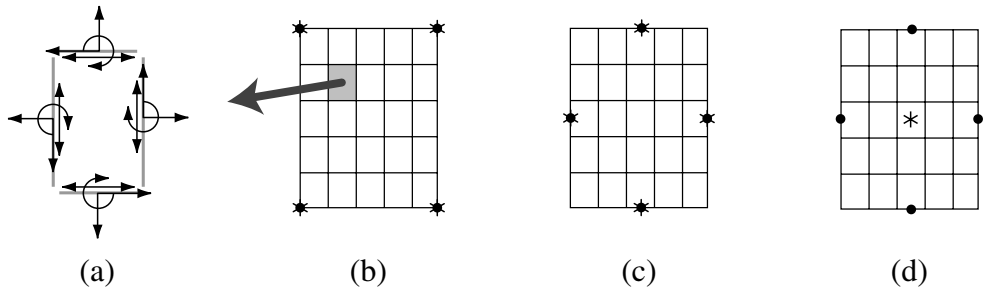


FIG. 3 – *(a) Cinématique d'une cellule (b,c,d) Éléments testés.*

La cinématique macroscopique d'une cellule comporte, par face, une translation, une rotation et un allongement. La rotation et l'allongement, qui correspondent à des gradients des champs de déplacements des interfaces, peuvent être très différents selon la direction

de la face concernée, suivant l'anisotropie du matériau et du chargement considérés. C'est pourquoi, dans ces exemples, nous avons choisi de garder ces variables indépendantes les unes des autres dans chaque direction.

Cette cinématique, conditionnée par le choix du projecteur $\mathbf{\Pi}$, peut s'interpréter comme une cinématique de milieu de Cosserat généralisé et discret (voir FIG.3(a)). Aussi, l'élément (b) proposé est directement inspirés par ceux utilisés pour ce type de milieu [6]. Les champs sont interpolés indépendamment par les fonctions de forme de l'élément fini quadrangle linéaire. L'élément (c) possède une cinématique obtenue par l'extension de celle d'une cellule au bloc de cellules. Cet élément a été adapté afin de possèder la propriété de converger vers la cinématique d'une cellule. L'élément (d) possède une valeur constante pour la rotation et l'allongement. Si l'on note l'interpolation des déplacements de la manière suivante : $[W_S^M] = [C_S][Q^M]$, où $[Q^M]$ représente les inconnues nodales, le problème discrétisé assemblé suivant est obtenu

$$\Big(\sum_S [C_S]^T [\mathbf{L}_S^+][C_S] \Big) [Q^M] = \sum_S [C_S]^T [G_{S,d}^m] \tag{10}$$

L'intégration du comportement et des efforts généralisés est alors réalisée de manière exacte.

3.3 Comparaison des différents éléments

Dans le but de comparer l'efficacité des trois éléments proposés, on reprend l'exemple de la structure présentée sur la FIG.2 que l'on discrétise, et pour laquelle on modifie les conditions aux limites. Les quatre cas-tests sont représentés sur la FIG.4. On notera

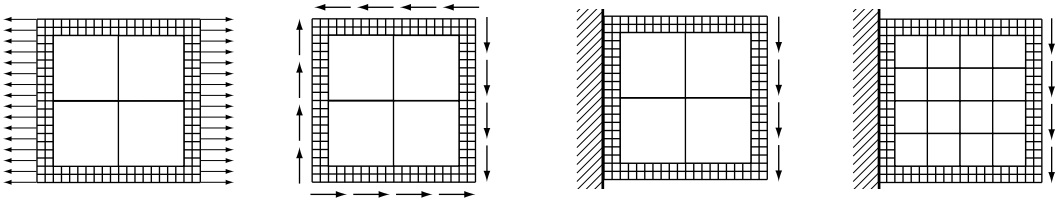


FIG. 4 – *Cas-tests de comparaison des éléments (b, c, d).*

qu'une discrétisation fine a été maintenue près des bords de manière à bien en capter les effets. Les cas (iv) est pour sa part un simple cas de discrétisation raffinée du cas (iii).

On rassemble dans le TAB.1 les erreurs en énergie sur toute la structure entre la solution obtenue et la solution élément finis du calcul complet (cette erreur est adimensionnée par l'énergie élastique totale de la structure). Les résultats des cas-tests (i) et (ii) ne per-

type d'élément	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(b)	9.93e-05	1.95e-05	3.23e-01	2.02e-01
(c)	7.89e-05	1.94e-05	2.50e-01	1.30e-01
(d)	1.15e-04	2.01e-05	4.66e-01	2.90e-01

TAB. 1 – *Erreurs vis-à-vis de la solution de référence, pour chaque cas-test.*

mettent pas de distinguer un élément parmi les autres, toutefois on notera que l'erreur

obtenue est très basse ; on peut en conclure que les éléments proposés sont tous aptes à représenter exactement les champs macroscopiques obtenus pour des sollicitations homogènes. Les cas-tests (iii) et (iv) permettent de mettre en avant la supériorité de l'élément (c), qui, rappelons-le, est le seul à posséder l'avantage de converger vers la cinématique d'une cellule. On constate également que dans un cas difficile à discrétiser, tel qu'une structure en flexion, le raffinement du maillage permet d'améliorer la qualité de la solution dans tous les cas.

Conclusion

Des outils spécifiques destinés au traitement des matériaux composites ont été proposés dans le cadre de l'approche micro-macro basée sur la LATIN, introduite dans [3]. L'utilisation, en son sein, de la démarche issue de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques a été exposée, et la qualité de l'opérateur homogénéisé obtenu a été évaluée ainsi que la pertinence de la solution microscopique post-traitée. L'introduction d'une troisième échelle a été réalisée par discrétisation du problème macroscopique, plusieurs éléments ont été proposés et une étude comparative numérique a permis de choisir le meilleur. Ces deux outils permettront au final un gain au niveau coût de calcul indéniable, dans le cadre de cette approche, pour les structures composites.

Références

[1] Fish J., Belsky V. Multigrid method for periodic heterogeneous media (part 1,2). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126:1–38, 1995.

[2] Ladevèze P. *Mécanique non-linéaire des structures*. Hermès, 1996.

[3] Ladevèze P., Dureisseix D. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, 327:1237–1244, 1999.

[4] Ladevèze P., Dureisseix D. A micro-macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1:18–28, 2000.

[5] Ladevèze P., Loiseau O., Dureisseix D. A micro-macro and parallel computational strategy for highly-heterogeneous structures. to appear in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001.

[6] Nakamura S., Benedict R., Lake R.S. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 22:319–330, 1984.

[7] Sanchez-Palencia E. Non homogeneous media and vibration theory. *Lectures Notes in Physics*, 127, 1980.

[8] Zohdi T.I., Oden J.T., Rodin G.J. Hierarchical modelling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138:273–298, 1996.