

Sur une stratégie de calcul multiéchelle pour l'analyse des structures composites

Discrétisation et performances

Olivier Loiseau¹, Pierre Ladevèze¹, and David Dureisseix¹

¹ LMT Cachan (UMR 8535) – ENS Cachan / CNRS / Université Paris 6, 61, Avenue Président Wilson, F-94235 Cachan CEDEX, {loiseau,ladeveze,dureisseix}@lmt.ens-cachan.fr

Afin de traiter efficacement les problèmes de grande taille associés à la simulation du comportement de structures hétérogènes, décrites à l'échelle micro, une stratégie de calcul multiéchelle fortement liée aux techniques d'homogénéisation a été proposée dans [LAD 00]. Ici, des outils spécifiques destinés au traitement des matériaux composites sont présentés : l'introduction d'une troisième échelle et l'utilisation de la solution de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques dans les régions éloignées des bords.

In order to solve efficiently large scale problems arising from the simulation of heterogeneous structures, described up to the microscale, a multiscale computational strategy strongly related to homogenization techniques has been proposed in [LAD 00]. In this paper, specific tools required to address the case of composite materials are proposed : the use of a third scale and of the periodic media homogenization theory within the areas located far from the boundaries.

This is a preprint of the article published by Taylor & Francis in *Revue Européenne des Éléments Finis / European Journal of Computational Mechanics* 11(2-4) :349-362, 2002, available online : <http://www.tandfonline.com/10.3166/reef.11.349-362>.

Keywords : sous-structuration, matériaux hétérogènes, homogénéisation, méthode LATIN
substructuring, heterogeneous materials, homogenization, LATIN method

1 Introduction

Pour simuler efficacement la réponse mécanique des structures composites ou, de façon plus générale, hétérogènes, une grande partie des démarches numériques actuelles repose sur des approches multiéchelles. Une problématique multiéchelle comporte les éléments suivants : un problème global, dit macroscopique, généralement homogénéisé, et un problème microscopique hétérogène. La question centrale qui se pose pour la résolution est : comment établir un lien entre les deux problèmes, et donc entre les deux échelles ? On peut distinguer, parmi les différentes approches, trois familles susceptibles d’apporter une information quantitative à chacune de ces échelles :

- les stratégies vouées au traitement numérique de la microstructure, consistant à redéfinir des éléments finis spécifiques [GHO 93, MEG 95] ;
- les démarches d’homogénéisation, par exemple articulées autour de l’homogénéisation des milieux périodiques, qui permettent d’atteindre les valeurs des champs à chaque échelle [DUV 76, BEN 78, SAN 80, FEY 00, FIS 97] ;
- les approches globales macroscopiques, qui adoptent le point de vue d’un traitement d’ensemble de la structure homogénéisée, en effectuant des réanalyses locales couplées au problème complet pour les régions critiques [ZOH 96, FIS 95], réalisées au moyen de techniques numériques adaptées [RIX 99, LET 94, MAN 96].

Les démarches de la première famille, à savoir les développements pour le traitement numérique de la microstructure, doivent être associées à une démarche d’homogénéisation si l’on veut effectuer des calculs de structure. Les techniques d’homogénéisation possèdent quant à elles des limitations. En particulier la prise en compte des effets de bord nécessite des traitements spécifiques qui justifient l’élaboration de stratégies particulières, celles de la troisième famille.

La stratégie de calcul développée ici [LAD 99, LAD 00] est itérative et incorpore dès sa conception la résolution d’un problème dit “*jj* de grille grossière” bâti à partir d’une démarche d’homogénéisation, qui lui confère une extensibilité numérique pour les cas homogènes comme hétérogènes. La démarche d’homogénéisation mise en place est nouvelle et a pour but de s’affranchir des limitations de celles mentionnées dans le cas de la théorie de l’homogénéisation des milieux périodiques. Cette stratégie, qui est rappelée ici, est implantable sur ordinateurs à architecture parallèle, car déduite d’une décomposition de domaine [LAD 01] qui utilise un découpage de la structure initiale en sous-structures et interfaces. La stratégie de résolution associée est mixte et basée sur les concepts de la méthode LATIN (LArge Time INcrement) [LAD 96]. À la différence de la théorie de l’homogénéisation des milieux périodiques, elle ne nécessite aucun traitement particulier des zones de bord. Par contre, lorsque le nombre de cellules élémentaires devient important, le coût associé à la résolution du problème homogénéisé peut devenir

prohibitif.

Le présent article est concentré sur la mise en place d'outils spécifiques pour le calcul de structures composites, qui au vu des exemples présentés, améliorent de façon importante les performances.

2 Problème de référence et description micro-macro

Le problème de référence est celui de la réponse statique d'une structure Ω soumise à une densité d'efforts volumique \underline{f}_d , une densité d'efforts surfacique \underline{F}_d sur une partie du bord $\partial_2\Omega$ et à un déplacement imposé \underline{U}_d sur le reste du bord $\partial_1\Omega$. Nous ferons, dans les développements qui suivent, l'hypothèse des petites perturbations et supposerons le comportement du matériau linéaire.

2.1 Découpage en sous-structures et interfaces

On considère la structure Ω découpée en N sous-structures Ω_E et interfaces $\Gamma_{EE'}$. Les inconnues du problème sont alors de deux natures : (i) les inconnues volumiques par sous-structure, à savoir le déplacement \underline{u}_E et la contrainte $\underline{\sigma}_E$, (ii) les inconnues surfaciques par interface, à savoir un champ de déplacement relatif entre deux sous-structures E et E' , $\underline{W}_{EE'}$, et réciproquement $\underline{W}_{E'E}$, et un champ d'inter-efforts $\underline{F}_{EE'}$ et $\underline{F}_{E'E}$, dont on ne suppose pas *a priori* qu'ils doivent être continus.

Les équations du problème sous-structuré sont les suivantes :

- équations de liaison (admissibilité cinématique) par sous-structure

$$(\underline{u}_E, \underline{W}_{EE'}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \quad \text{et} \quad \underline{u}_E|_{\Gamma_{EE'}} = \underline{W}_{EE'} \quad (1)$$

- équations d'équilibre (admissibilité statique) par sous-structure

$$\begin{aligned} (\underline{\sigma}_E, \underline{F}_{E'E}) &\in \mathcal{S}_E \times \mathcal{F}_E \quad \text{et} \\ \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_{EE'}^*) &\in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \quad \text{cinématiquement admissibles,} \\ \int_{\Omega_E} \text{Tr} [\underline{\sigma}_E \varepsilon(\underline{u}_E^*)] d\Omega &= \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega + \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_{E'E} \cdot \underline{W}_{EE'}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (2)$$

- relations de comportement

- du matériau par sous-structure (\mathbf{D} est l'opérateur de Hooke)

$$\underline{\sigma}_E = \mathbf{D}\varepsilon(\underline{u}_E) \quad (3)$$

- d'une interface parfaite

$$\begin{cases} \underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0 \\ \underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

La force de ce découpage réside dans le fait que les équations (4), qui traduisent le comportement d'une interface parfaite, peuvent être remplacées par des équations du type conditions aux limites, interface de contact unilatéral, *etc.*, suivant les cas, indépendamment des équations de liaison (1) et d'équilibre (2). \mathcal{U}_E désigne l'espace des champs de déplacement à énergie finie sur Ω_E et \mathcal{W}_E sa trace sur les interfaces attenantes ; les espaces correspondants pour la contrainte et les efforts sont \mathcal{S}_E et \mathcal{F}_E .

2.2 Définition des échelles micro et macroscopiques

On définit deux échelles distinctes notées m (échelle microscopique) et M (échelle macroscopique) afin de tirer parti de la présence d'effets à courte et grande longueurs de variation, respectivement. La séparation est effectuée sur les quantités d'interfaces, au moyen d'un projecteur $\mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}$ par interface $\Gamma_{EE'} : \underline{F}_{E'E} = \underline{F}_{E'E}^M + \underline{F}_{E'E}^m$ et $\underline{W}_{EE'} = \underline{W}_{EE'}^M + \underline{W}_{EE'}^m$ avec

$$\begin{aligned} \underline{F}_{E'E}^M &= \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}(\underline{F}_{E'E}) & \text{et} & & \underline{F}_{E'E}^m &= (\mathbf{1} - \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}})(\underline{F}_{E'E}) \\ \underline{W}_{EE'}^M &= \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}(\underline{W}_{EE'}) & \text{et} & & \underline{W}_{EE'}^m &= (\mathbf{1} - \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}})(\underline{W}_{EE'}) \end{aligned}$$

Les espaces correspondants sont alors $\mathcal{W}_E = \mathcal{W}_E^M \oplus \mathcal{W}_E^m$ et $\mathcal{F}_E = \mathcal{F}_E^M \oplus \mathcal{F}_E^m$.

L'échelle macroscopique qui sera utilisée dans la suite correspond à la partie linéaire du champ d'interface qu'extrait donc le projecteur symétrique $\mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}$. On notera dans ce cas que les champs macroscopiques appartiennent à un espace de dimension finie, et que les champs microscopiques sont à résultante et moment nuls. Le problème alors obtenu est à deux échelles, et l'équilibre s'écrit comme suit (le comportement du matériau a été pris en compte) :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_{EE'}^{M*}, \underline{W}_{EE'}^{m*}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E^M \times \mathcal{W}_E^m \quad \text{cinématiquement admissibles,} \\ \int_{\Omega_E} \text{Tr} [\mathbf{D}\varepsilon(\underline{u}_E) \varepsilon(\underline{u}_E^*)] d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_E^* d\Omega + \\ \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_{E'E}^M \cdot \underline{W}_{EE'}^{M*} + \underline{F}_{E'E}^m \cdot \underline{W}_{EE'}^{m*} d\Gamma \quad (5) \end{aligned}$$

2.3 Stratégie micro-macro

La démarche de résolution du problème à deux échelles s'appuie sur la méthode LATIN [LAD 96]. Dans le cadre d'un problème traitant d'une structure décomposée en sous-structures et interfaces, cette méthode repose sur deux points : (i) la séparation des équations en deux ensembles, \mathbf{A}_d contenant les équations d'admissibilité statique et cinématique, pour chaque sous-structure indépendamment, et $\mathbf{\Gamma}$ contenant uniquement les relations de comportement des interfaces, (ii) une stratégie itérative à deux directions de recherche mixtes, définies pour les deux échelles. Une itération comporte deux étapes :

- une étape locale. Elle consiste à vérifier d’une part le comportement des interfaces parfaites $\Gamma_{EE'}$ sur les deux échelles :

$$\begin{aligned}\hat{F}_{E'E}^M + \hat{F}_{EE'}^M &= 0 & \hat{F}_{E'E}^m + \hat{F}_{EE'}^m &= 0 \\ \hat{W}_{E'E}^M - \hat{W}_{E'E}^M &= 0 & \hat{W}_{E'E}^m - \hat{W}_{E'E}^m &= 0\end{aligned}$$

et d’autre part, une première direction de recherche (montée) qui s’écrit, les quantités $\underline{F}_{E'E}$ et $\underline{W}_{EE'}$ étant connues à cette étape :

$$\begin{aligned}\hat{F}_{E'E}^M - \underline{F}_{E'E}^M - \mathbf{k}_M (\hat{W}_{EE'}^M - \underline{W}_{EE'}^M) &= 0 \\ \hat{F}_{E'E}^m - \underline{F}_{E'E}^m - \mathbf{k}_m (\hat{W}_{EE'}^m - \underline{W}_{EE'}^m) &= 0\end{aligned}$$

- une étape linéaire, qui comporte la résolution d’un problème microscopique par sous-structure, et d’un problème global portant sur les quantités macroscopiques, qui seront détaillés dans la suite. La direction de recherche utilisée (descente) est ici :

$$\begin{aligned}\underline{F}_{E'E}^M - \hat{F}_{E'E}^M + \mathbf{k}_M (\underline{W}_{EE'}^M - \hat{W}_{EE'}^M) &= 0 \\ \underline{F}_{E'E}^m - \hat{F}_{E'E}^m + \mathbf{k}_m (\underline{W}_{EE'}^m - \hat{W}_{EE'}^m) &= 0\end{aligned}$$

Conjointement avec (5), et en supposant $\underline{f}_d = 0$ pour simplifier, on obtient

$$\begin{aligned}\forall \underline{u}_E^* \in \mathcal{U}_E & \int_{\Omega_E} \text{Tr} [\mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E) \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*)] d\Omega + \\ & \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \mathbf{k}_m (\mathbf{1} - \boldsymbol{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}) \underline{u}_E \cdot (\mathbf{1} - \boldsymbol{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}) \underline{u}_E^* d\Gamma = \\ & \left[\sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_{E'E}^M \cdot \boldsymbol{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}(\underline{u}_E^*) d\Gamma \right] + \\ & \left[\sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} (\hat{F}_{E'E}^m + \mathbf{k}_m \hat{W}_{EE'}^m) \cdot (\mathbf{1} - \boldsymbol{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}) \underline{u}_E^* d\Gamma \right] \quad (6)\end{aligned}$$

Une description précise de la méthode de résolution multiéchelle est donnée dans [LAD 00]. L’étude des paramètres numériques est réalisée dans [LAD 01], et conduit à une version optimale de la stratégie dont le problème global consiste en la vérification de la continuité cinématique des champs de déplacements macroscopiques pour un jeu de champs d’inter-efforts macroscopiques choisis *a priori* statiquement admissibles.

3 Initialisation par une solution à partie microscopique périodique

3.1 Démarche d'homogénéisation

En utilisant la linéarité du problème (6), on sépare le déplacement solution en deux contributions : $\underline{u}_E = \tilde{\underline{u}}_E + \hat{\underline{u}}_E$.

La première, $\tilde{\underline{u}}_E$, équilibre la partie macroscopique des inter-efforts $\underline{F}_{E'E}^M$. Sa détermination conduit à la construction de l'opérateur homogénéisé \mathbf{L}_E de comportement de la cellule :

$$\mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}} \tilde{\underline{u}}_E|_{\Gamma_{EE'}} = \mathbf{L}_E \underline{F}_{E'E}^M \quad (7)$$

La seconde contribution, $\hat{\underline{u}}_E$, équilibre le chargement microscopique $\hat{\underline{F}}_{E'E}^m + \mathbf{k}_m \underline{W}_{EE'}^m$ connu. On a donc :

$$\underline{W}_{EE'}^M = \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}} \underline{u}_E|_{\Gamma_{EE'}} = \mathbf{L}_E \underline{F}_{E'E}^M + \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}} \hat{\underline{u}}_E|_{\Gamma_{EE'}} \quad (8)$$

Une pièce composite, dont la structure microscopique du matériau est décrite par la répétition spatiale périodique d'une cellule élémentaire, peut engendrer un nombre important de cellules. Cette constatation sert d'appui à une première hypothèse de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques [DUV 76, BEN 78, SAN 80] selon laquelle le rapport ϵ entre les longueurs caractéristiques des échelles microscopiques et macroscopiques doit être très petit. Dans ce cas, la solution est supposée quasi-périodique, c'est-à-dire à la fois dépendante d'une variable globale dite " lente ", considérée constante par cellule microscopique, et périodique par rapport à une seconde variable dite " rapide ". Nous allons reprendre à notre compte ces deux hypothèses, dans le but de proposer une détermination directe de la solution microscopique. Nous nous plaçons donc dans la situation où le nombre de cellules est important, et dans des régions éloignées des bords et des zones à fort gradient. La séparation entre variations " lentes " et " rapides " est réalisée dans notre cas par l'intermédiaire des projecteurs $\mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}}$ sur les interfaces $\Gamma_{EE'}$.

La partie de la solution à courte longueur de variation, représentée par $\underline{W}_{EE'}^m$, sera donc supposée périodique, et les efforts associés $\underline{F}_{E'E}^m$ anti-périodiques, de sorte que le travail micro du membre de droite de l'équilibre (5) est nul. On recherchera $\tilde{\underline{u}}_E$ dans l'espace des champs dont la trace sur les interfaces est à partie microscopique périodique, que l'on note $\mathcal{U}_E^{m\text{-périodique}}$:

$$\tilde{\underline{u}}_E \in \mathcal{U}_E^{m\text{-périodique}} \Leftrightarrow (\mathbf{1} - \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE^+}}) \tilde{\underline{u}}_E|_{\Gamma_{EE^+}} = (\mathbf{1} - \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE^-}}) \tilde{\underline{u}}_E|_{\Gamma_{EE^-}} \quad (9)$$

où E^+ et E^- désignent deux interfaces d'une sous-structure, en vis-à-vis.

La même démarche que celle conduite précédemment pour obtenir \mathbf{L}_E (en substituant $\mathcal{U}_E^{m\text{-périodique}}$ à \mathcal{U}_E), permet d'obtenir un nouvel opérateur homogénéisé macroscopique $\tilde{\mathbf{L}}_E$.

3.2 Exemples

Deux exemples sont proposés afin de valider l'approche mise en place : le premier permet d'évaluer la qualité de l'opérateur homogénéisé obtenu, et le second, la qualité de la solution microscopique associée, ainsi que son domaine de validité. Il s'agit d'exemples de calculs de structures bi-dimensionnels (en déformations planes), sous l'hypothèse des petites perturbations. Les matériaux utilisés sont élastiques linéaires et isotropes.

3.2.1 Évaluation de la qualité de l'opérateur de comportement homogénéisé

On étudie une structure élancée, en flexion, constituée d'un matériau lamifié réalisé par une succession de couches transverses, figure 1. On fait varier le rapport des modules d'Young des couches de renfort par rapport à celui des couches de matrice entre 1 et 10 000.

La variable observée est la flèche en bout de poutre. La solution de référence est obtenue par un calcul fin par éléments finis ; la solution de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques est obtenue au moyen du même maillage dont le comportement orthotrope des éléments est identifié analytiquement.

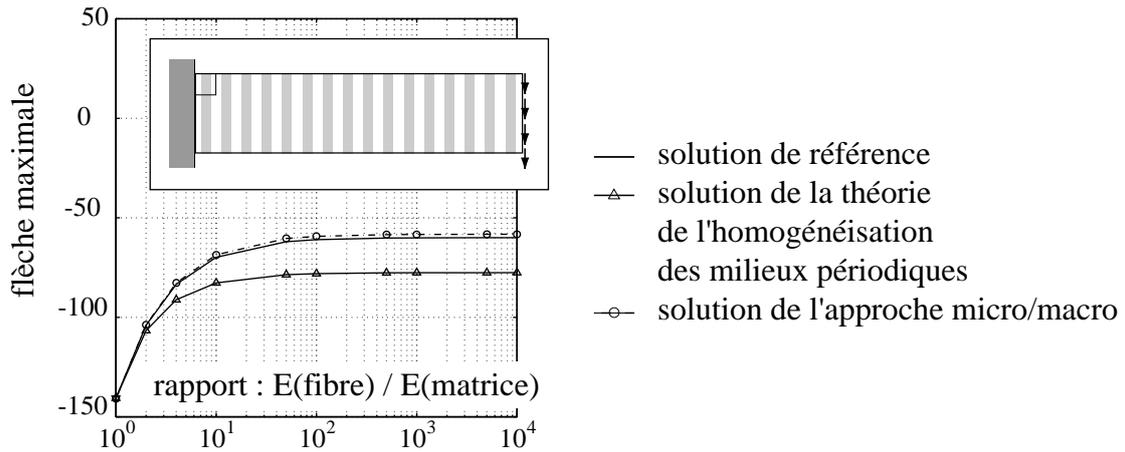


FIGURE 1: Structure en flexion : comparaison des solutions

On constate sur la FIGURE 1 que la solution apportée par notre approche est très proche de la solution de référence, et ceci même pour des situations fortement hétérogènes. Un gain est même obtenu par rapport à la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques car la cinématique macroscopique utilisée dans l'approche présentée ici est plus riche. Elle permet, en effet, de prendre en compte des gradients de déformations dans une cellule.

3.2.2 Gain apporté par la solution à partie microscopique périodique

Dans cette section, nous souhaitons évaluer le gain apporté par la procédure de construction d'une initialisation pour la stratégie LATIN micro/macro ; rappelons que cette procédure consiste à effectuer un calcul macroscopique direct avec le comportement $\tilde{\mathbf{L}}_E$, d'où l'on extrait la partie microscopique du champ de déplacement pour initialiser l'algorithme itératif.

Pour cela, on propose de traiter l'exemple d'une structure comportant un grand nombre de cellules, avec un matériau constitutif à microstructure périodique. On réalise deux calculs : le premier est initialisé au moyen d'un champ microscopique nul, ce qui correspond au cas standard, le second utilise la solution fournie par la nouvelle procédure décrite ci-dessus. L'objectif est alors de comparer l'évolution de l'erreur vis-à-vis d'une solution de référence dans les deux cas.

L'exemple qui sert de support à cette expérience est basé sur une structure composite multicouche $[0, 90]_s$ idéalisée, représentée sur la FIGURE 2. Chaque

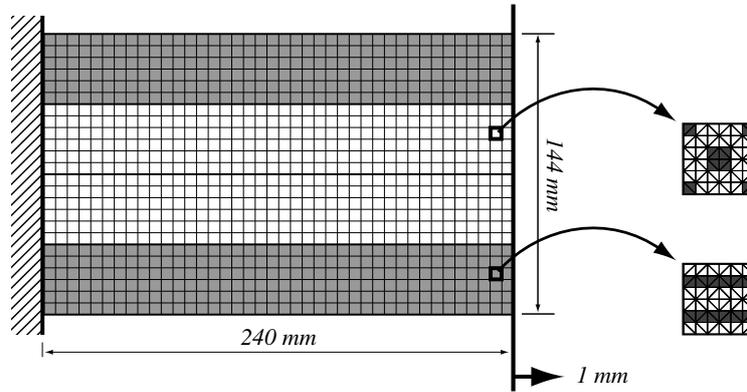


FIGURE 2: Structure composite $[0, 90]_s$ idéalisée utilisée pour l'évaluation du gain apporté par une initialisation périodique

couche est constituée de cellules élémentaires toutes identiques ; deux cellules différentes ont donc été utilisées, une par orientation de pli modélisé (voir FIGURE 2) : les caractéristiques des matériaux constituants sont celles d'un composite bore/aluminium. La structure complète, qui compte au total neuf cent soixante de ces cellules, est encadrée à une extrémité et sollicitée en traction par le biais d'un déplacement imposé horizontal à l'autre extrémité.

Sur la FIGURE 3 est représentée l'évolution de l'erreur en énergie entre la solution itérative et la solution de référence directe au cours des itérations, avec et sans initialisation spécifique.

On constate sur cet exemple que l'utilisation de la solution à partie microscopique périodique pour initialiser accroît la rapidité de l'algorithme : en effet, la courbe de convergence " avec initialisation " est en permanence au

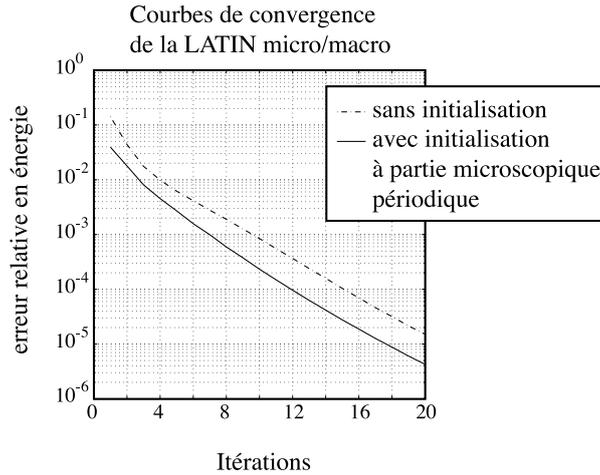


FIGURE 3: Courbes de convergence de l’approche LATIN micro/macro avec et sans initialisation spécifique

dessous de la courbe “ sans initialisation ”. Toutefois, il s’agit là d’une estimation globale de l’erreur commise par rapport à la solution de référence qui, si l’on s’en contente, montre l’existence d’un gain réel mais pas forcément très significatif vu le surcoût associé à la phase de construction de l’initialisation. C’est pourquoi nous proposons d’étudier la répartition des contributions à cette erreur globale afin de montrer qu’un gain très significatif est apporté par cette initialisation pour certaines régions de la structure bien définies.

Pour cela, la carte des contributions des sous-structures à l’erreur à la première itération est tout d’abord représentée sur la FIGURE 4. Sans initialisation spécifique (a), la répartition des contributions à l’erreur est très homogène, alors qu’avec (b), le niveau de contribution à l’erreur est très bas pour les régions éloignées des bords et où la microstructure est périodique ; le niveau de contribution atteint pour de telles régions est de l’ordre de celui que l’on peut attendre à convergence.

Ce résultat permet d’affirmer que l’initialisation proposée produit une solution apte à remplacer la solution microscopique itérative pour les régions évoquées, de sorte que le calcul itératif de la contribution microscopique peut n’être effectué que pour un nombre restreint de cellules. Les régions qui nécessitent la détermination itérative des champs microscopiques peuvent être choisies *a priori* par expérience, ou automatiquement après la procédure de construction de l’initialisation périodique, au moyen d’un indicateur local et d’un critère établi. Un tel indicateur, basé sur le non-respect des continuités des inter-efforts et des déplacements entre sous-structures voisines a été utilisé pour cela dans [LOI 01]. Il montre une bonne répartition qualitative de l’erreur, en corrélation avec la contribution à l’erreur de référence.

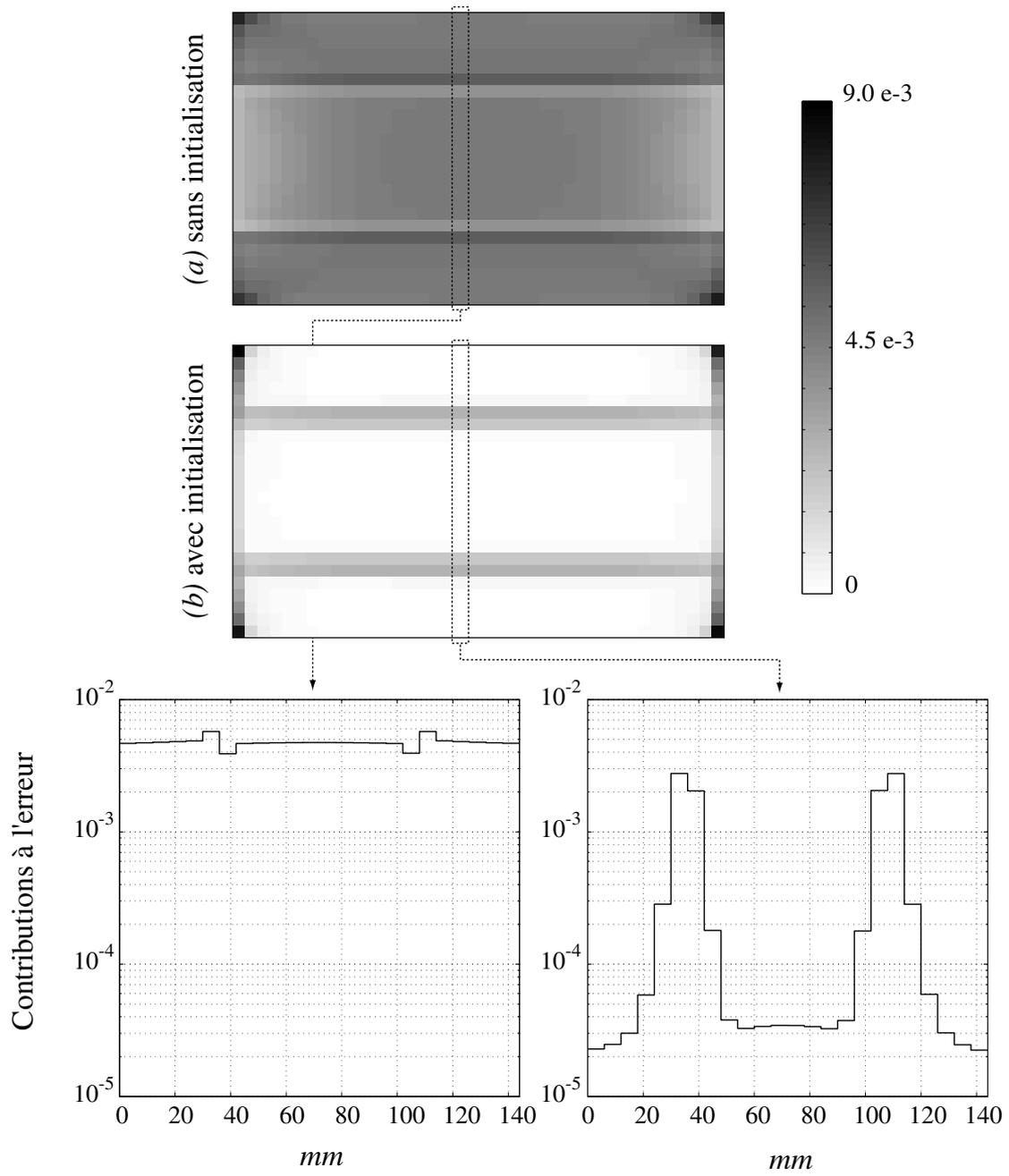


FIGURE 4: Carte des contributions à l'erreur à la première itération, (a) sans initialisation spécifique de l'algorithme, et (b), avec

4 Discrétisation du problème macroscopique

La deuxième particularité du type de problème traité, du fait du nombre important de cellules et de sous-structures, est celle d'un problème macro qui peut devenir lui-même très coûteux. Dans ce cas, on perçoit la nécessité d'introduire une échelle supplémentaire de modélisation, obtenue par le biais d'une discrétisation du problème macroscopique global.

L'écriture de ce problème macroscopique donne lieu à deux approches, l'une en déplacements [LAD 99, LAD 00], l'autre en efforts [LAD 01].

Dans [LAD 01] il est montré qu'après optimisation des paramètres de direction de recherche macroscopiques, les deux approches se confondent. Aussi, pour exposer la façon dont est discrétisé le problème macroscopique, nous avons choisi de travailler avec la version optimale en déplacements, plus facile à interpréter par analogie avec les éléments finis, même si une discrétisation de la version optimale en effort est possible et pourrait donner des résultats différents.

4.1 Problème macroscopique : approche en déplacements

L'approche en déplacements consiste à rechercher les déplacements macroscopiques *continus* à la traversée des interfaces. La direction de recherche associée s'écrit sous forme faible et devient globale sur toute la structure :

$$\forall \underline{W}_{EE'}^{M\star} \in \mathcal{W}_{\text{ad},0}^M$$

$$\sum_E \sum_{E'} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{W}_{EE'}^{M\star} \cdot [\underline{F}_{E'E}^M - \hat{\underline{F}}_{E'E}^M + k^M (\underline{W}_{EE'}^M - \hat{\underline{W}}_{EE'}^M)] d\Gamma = 0 \quad (10)$$

$\mathcal{W}_{\text{ad},0}^M$ est l'espace des champs de déplacements d'interface macroscopiques cinématiquement admissibles à zéro : ils sont continus aux passages d'interfaces parfaites et nuls où les déplacements sont imposés. Pour terminer l'écriture du problème macroscopique, on utilise enfin l'opérateur inverse généralisé \mathbf{L}_E^+ de l'opérateur homogénéisé de comportement macroscopique \mathbf{L}_E (8) :

$$\underline{F}_{E'E}^M = \mathbf{L}_E^+ (\underline{W}_{EE'}^M - \mathbf{\Pi}_{\Gamma_{EE'}} \hat{\underline{u}}_{E|_{\Gamma_{EE'}}}) \quad (11)$$

en le substituant dans la direction de recherche précédente.

4.2 Interpolation des champs macroscopiques

Le problème à l'échelle macroscopique possède un nombre fini d'inconnues, et sa taille dépend du produit entre le nombre d'interfaces que compte la structure découpée et la dimension de l'espace des champs macroscopiques. Par analogie avec la démarche classique des éléments finis, nous proposons de substituer à la cinématique de blocs de cellules, une cinématique simplifiée basée sur la projection de la trace sur les interfaces de fonctions de formes

de type éléments finis linéaires dans l'espace des champs macroscopiques. La cinématique macroscopique introduite, par le choix du projecteur $\Pi_{\Gamma_{EE'}}$, peut s'interpréter comme une cinématique de milieu de Cosserat généralisé et discret (voir FIGURE 5(a)). Aussi, les éléments proposés pour interpoler la cinématique d'un bloc de cellules sont directement inspirés par ceux utilisés pour ce type de milieu [NAK 84].

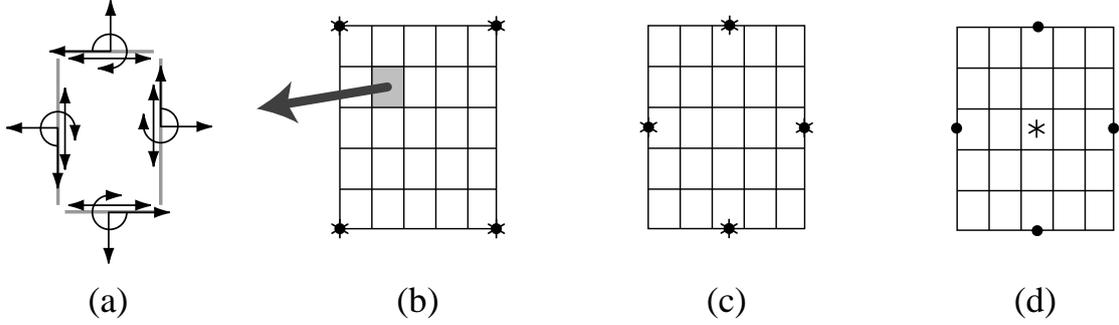


FIGURE 5: (a) Cinématique d'une cellule, (b,c,d) éléments testés (nœuds d'interpolation macroscopique : • des translations, ☆ de la partie linéaire)

La cinématique macroscopique d'une cellule comporte, par face, une translation, une rotation et un allongement. La rotation et l'allongement, qui correspondent à des gradients des champs de déplacements des interfaces, peuvent être très différents selon la direction de la face concernée, suivant l'anisotropie du matériau et du chargement considérés. C'est pourquoi, dans ces exemples, nous avons choisi de garder ces variables indépendantes les unes des autres dans chaque direction. Pour l'élément (b), il en résulte six champs qui sont interpolés indépendamment par les fonctions de forme de l'élément fini quadrangle linéaire. L'élément (c) possède une cinématique obtenue par l'extension de celle d'une cellule au bloc de cellules : toutes les variables cinématiques, y compris les translations, sont indépendantes les unes des autres dans chaque direction et sont interpolées linéairement entre les valeurs prises aux nœuds de l'élément. Cet élément possède la propriété de converger vers la cinématique d'une cellule, à la différence des deux autres. L'élément (d) possède une valeur constante pour la rotation et l'allongement.

4.3 Comparaison des différents éléments

Dans le but de comparer l'efficacité des trois éléments proposés, on prend l'exemple de la structure de la FIGURE 6 dont on discrétise le problème macroscopique, pour quatre cas-tests différents. À chaque fois, la cellule élémentaire est identique à celle des plis à zéro degré de l'exemple précédent (figure 2).

On notera qu'une discrétisation fine a été maintenue près des bords de manière à bien en capter les effets. Le cas (iv) est pour sa part un simple cas de discrétisation raffinée du cas (iii).

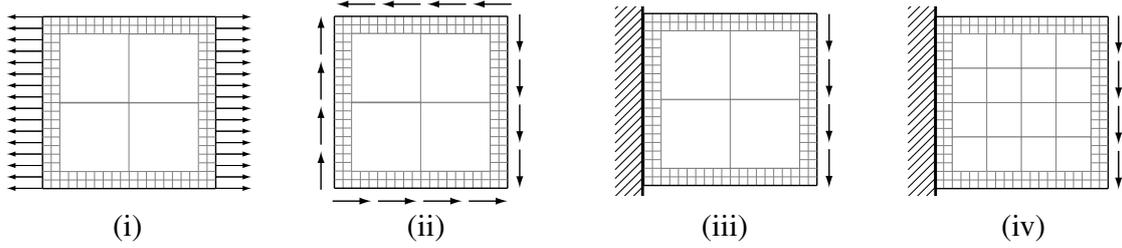


FIGURE 6: Cas-tests de comparaison des éléments (b, c, d)

type d'élément	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
(a)	$9,93 \cdot 10^{-5}$	$1,95 \cdot 10^{-5}$	$3,23 \cdot 10^{-1}$	$2,02 \cdot 10^{-1}$
(b)	$7,89 \cdot 10^{-5}$	$1,94 \cdot 10^{-5}$	$2,50 \cdot 10^{-1}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$
(c)	$11,5 \cdot 10^{-5}$	$2,01 \cdot 10^{-5}$	$4,66 \cdot 10^{-1}$	$2,90 \cdot 10^{-1}$

TABLE 1: Erreurs vis-à-vis de la solution de référence, pour chaque cas-test

On rassemble dans le TABLE 1 les erreurs relatives en énergie sur toute la structure entre la solution obtenue et la solution élément finis du calcul complet. Les résultats des cas-tests (i) et (ii) ne permettent pas de distinguer un élément parmi les autres, toutefois on notera que l'erreur obtenue est très basse ; on peut en conclure que les éléments proposés sont tous aptes à représenter exactement les champs macroscopiques obtenus pour des sollicitations homogènes. Les cas-tests (iii) et (iv) permettent de mettre en avant la supériorité de l'élément (b), qui, rappelons-le, est le seul à posséder l'avantage de converger vers la cinématique d'une cellule. On constate également que dans un cas difficile à discrétiser, tel qu'une structure en flexion, le raffinement du maillage permet d'améliorer la qualité de la solution dans tous les cas.

5 Conclusion

Des outils spécifiques destinés au traitement des matériaux composites ont été proposés dans le cadre de l'approche micro-macro basée sur la LATIN, introduite dans [LAD 99]. L'utilisation, en son sein, de la démarche issue de la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques a été exposée, et la qualité de l'opérateur homogénéisé obtenu a été évaluée ainsi que la pertinence de la solution microscopique post-traitée. L'introduction d'une troisième échelle a été réalisée par discrétisation du problème macroscopique, plusieurs éléments ont été proposés et une étude comparative numérique a permis de choisir le meilleur. Ces deux outils permettront au final un gain au niveau coût de calcul indéniable, dans le cadre de cette approche, pour les structures composites.

Références

- [BEN 78] BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [DUV 76] DUVAUT G., Matériaux élastiques composites à structure périodique, homogénéisation, in *Proceedings of the IUTAM Congress, Delft*, 1976.
- [FEY 00] FEYEL F., CHABOCHE J.L., FE² multiscale approach for modeling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber SiC/Ti composite materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 183, 2000, pp. 309-330.
- [FIS 95] FISH J., BELSKY V., Multigrid method for periodic heterogeneous Media (Part 1,2), *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 126, 1995, pp. 1-38.
- [FIS 97] FISH J., SHEK K., PANDHEERADI M., SHEPARD M.S., Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 148, 1997, pp. 53-73.
- [GHO 93] GHOSH S., MUKHOPADHYAY S.N., A material based finite element analysis of heterogeneous media involving Dirichlet tessellations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 104, 1993, pp. 211-247.
- [LAD 96] LADEVÈZE P., *Mécanique non-linéaire des structures*, Hermès, 1996.
- [LAD 99] LADEVÈZE P., DUREISSEIX D., Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures, *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 327, 1999, pp. 1237-1244.
- [LAD 00] LADEVÈZE P., DUREISSEIX D., A micro-macro approach for parallel computing of heterogeneous structures, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, vol. 1, 2000, pp. 18-28.
- [LAD 01] LADEVÈZE P., LOISEAU O., DUREISSEIX D., A micro-macro and parallel computational strategy for highly-heterogeneous structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 52(1-2), 2001, pp. 121-138.
- [LET 94] LE TALLEC P., Domain decomposition methods in computational mechanics, *Computational Mechanics Advances*, vol. 1, 1994.
- [LOI 01] LOISEAU O., Une stratégie de calcul multiéchelle pour les structures hétérogènes, PhD thesis, ENS de Cachan, 2001.
- [MAN 96] MANDEL J., BREZINA M., Balancing Domain Decomposition for Problems with Large Jumps in Coefficients, *Mathematics of Computation*, vol. 65, 1996, pp. 1387-1401.

- [MEG 95] MEGUID S.A., ZHU Z.H., A novel finite element for treating inhomogeneous solids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, 1995, pp. 1579-1592.
- [NAK 84] NAKAMURA S., BENEDICT R., LAKE R.S., Finite element method for orthotropic micropolar elasticity, *International Journal of Engineering Science*, vol. 22, 1984, pp. 319-330.
- [RIX 99] RIXEN D., FARHAT C., A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, 1999, pp. 489-516.
- [SAN 80] SANCHEZ-PALENCIA E., Non homogeneous media and vibration theory, *Lectures Notes in Physics*, vol. 127, 1980.
- [ZOH 96] ZOHDI T.I., ODEN J.T., RODIN G.J., Hierarchical modelling of heterogeneous bodies, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 138, 1996, pp. 273-298.