



**HAL**  
open science

## Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures

Pierre Ladevèze, David Dureisseix

► **To cite this version:**

Pierre Ladevèze, David Dureisseix. Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1999, 327 (12), pp.1237-1244. 10.1016/S1287-4620(00)88647-0 . hal-00322182

**HAL Id: hal-00322182**

**<https://hal.science/hal-00322182>**

Submitted on 27 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0  
International License

# Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures

Pierre Ladevèze et David Dureisseix

LMT-Cachan, (ENS de Cachan / CNRS / Université Paris 6),  
61 Avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX

## Résumé.

Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro est proposée pour analyser les structures dont le comportement est décrit à l'échelle "micro" (par exemple : les structures composites). Elle devrait remplacer avantageusement, au moins pour un certain nombre de questions, les techniques standards d'homogénéisation et de réanalyse locale plus ou moins couplées. Le but est ici de décrire les bases de cette approche.

Ce document est le preprint de l'article publié sous sa forme finale comme : Pierre Ladevèze et David Dureisseix, Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series IIB – Mechanics-Physics-Astronomy*, 327(12) :1237–1244, 1999, ISSN 1287-4620, DOI 10.1016/S1287-4620(00)88647-0.

**Mots clés :** homogénéisation, décomposition de domaine, multi-échelles

## A new micro/macro computational strategy for structural analysis

### Abstract.

A new micro/macro computational strategy is proposed for the analysis of structures which are described up to the "micro" level, such as composite structures. It is intended to overcome standard homogenization techniques coupled with a local re-analysis, at least for several domains of interest. The feature herein is the description of the basis of the proposed approach.

This is a preprint of the article published in its final form as : Pierre Ladevèze and David Dureisseix, Une nouvelle stratégie de calcul micro/macro en mécanique des structures, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series IIB – Mechanics-Physics-Astronomy*, 327(12) :1237–1244, 1999, ISSN 1287-4620, DOI 10.1016/S1287-4620(00)88647-0.

**Keywords :** homogenization, domain decomposition, multilevel

### Abridged English Version

Structural analysis is nowadays more and more concerned with material models which are described up to a scale smaller than the macroscopic structural level. This is for instance the case when dealing with composite materials. For linear analysis, the treatment of such two-level problems is currently performed with techniques that take into account homogenization, coupled with a local re-analysis. The most mastered technique is probably the one initiated by Sanchez-Palencia for periodic media [9]. For the others, the reader can refer to [1]. Of course, a "constraint" in the use of this method lies in the fact that the ratio between the small scale and the large scale has to be small. Moreover, these techniques are not really suited to non linear problems of evolution, where they are applied to linear problems arising from successive linearizations related to the computational strategy.

The features of the micro/macro approach proposed herein are to avoid several limitations of classical homogenization techniques, and to be suited to the currently most powerful computing resources, i.e. parallel-architecture computers.

This iterative strategy has a strong mechanical background ; it is built upon remarkable properties satisfied by structural models described up to the micro scale.

The first point is the decomposition of the structure into an assembly of simple constituents : sub-structures and interfaces. For instance, a sub-structure may gather one or several cells of composite structures. Each of these components possesses its own variables and equations. An interface transfers both a distribution of displacement and a distribution of forces.

The novelty with respect to [6], is the splitting of the unknowns (displacements, forces, stress, strain) of the form :  $\mathbf{s} = \mathbf{s}^M + \mathbf{s}^m$ , where  $\mathbf{s}^M$  are the macroscopic quantities and  $\mathbf{s}^m$  is the additive “micro” complement. Several families of descriptions are conceivable. Two of them are described in this paper. The first one is based on using a hierarchical element or super-element for each sub-structure, i.e. with two discretization scales. The second one is related to a “continuum-medium” point of view, and features a general method for homogenization and local re-analysis.

The second point of the micro/macro strategy is the use of the so-called LATIN method on the problem to be solved, expressed as an assembly of sub-structures and interfaces. The LATIN method is a non-incremental iterative computational strategy. It deals with the entire studied time interval, [6]. The result is here the micro/macro strategy, for which the convergence is proved for stable materials under standards assumptions. In order to focus on the main ideas, this method is described herein only for linear elasticity.

For linear problems, the strategy involves numerical parameters that can be interpreted as interface stiffnesses. At each iteration, one has to solve a “macro” problem, defined on the entire structure, and a family of independent linear problems, associated to the sub-structures and interfaces. These are the “micro” problems. The “macro” problem is related to the homogenized structure.

This scheme is well suited to parallel-architecture computers; a numerical example illustrates the possibilities of this method. It can be interpreted as a mixed domain decomposition method. A first version suited to weakly heterogeneous structures has been reported in [3]. This version is a priori less efficient than the micro/macro computational strategy, but is nevertheless comparable to the FETI domain decomposition method, which is today the reference within the field of parallelism, [4]. Of course, the use of two scales or two grids pertains in other methods, for instance in multigrid methods, where the basis is essentially numerical and far away from the “homogenization” background of the mechanician [2], except for special recent versions devoted to periodic media [5].

## 1 Problème de référence et reformulation

Le problème de référence est celui de la réponse quasi-statique d’une structure  $\Omega$  sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , dans le cas de figure des petites perturbations, et en isotherme. Les sollicitations sont un déplacement imposé  $\underline{U}_d$  sur une partie de sa frontière  $\partial_1\Omega$ , une densité surfacique d’efforts imposés  $\underline{F}_d$  sur la partie complémentaire  $\partial_2\Omega$ , une densité volumique d’efforts imposés  $\underline{f}_d$  sur le domaine  $\Omega$ . Pour simplifier la présentation, il n’est décrit ici que dans le cas particulier de l’élasticité linéaire. De par la nature des problèmes alors traités, le temps n’intervient plus et la solution cherchée est celle de la configuration finale uniquement. Le cas non-linéaire est présenté dans [7].

Le premier élément de la stratégie micro/macro est de modéliser la structure comme un assemblage de constituants simples : les sous-structures et les interfaces [6] (voir Figure 1). Chaque constituant a ses propres variables et ses propres équations.

Une sous-structure  $\Omega_E$ ,  $E \in \mathbf{E}$ , est soumise à l’action de son environnement (les interfaces voisines) défini par une distribution d’efforts  $\underline{F}_E$  et une distribution de déplacements  $\underline{W}_E$  sur sa frontière  $\partial\Omega_E$ . Une interface  $\Gamma_{EE'}$  entre les sous-structures  $E$  et  $E'$  transfère à la fois la distribution de déplacements et la distribution d’efforts de part et d’autre :  $\underline{W}_E, \underline{W}_{E'}$  et  $\underline{F}_E, \underline{F}_{E'}$ .

La solution du problème de référence,  $\mathbf{s} = \bigcup_{E \in \mathbf{E}} \mathbf{s}_E$  avec  $\mathbf{s}_E = (\underline{U}_E, \underline{W}_E, \boldsymbol{\sigma}_E, \underline{F}_E)$  et  $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ , doit ainsi satisfaire un premier groupe d’équations,  $\mathbf{A}_d$ , traduisant l’admissibilité du comportement des sous-structures :

– les équations de liaison :

$$\underline{U}_E \in \mathcal{U}_E, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_E = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}_E), \quad \underline{U}_E |_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E \quad (1)$$

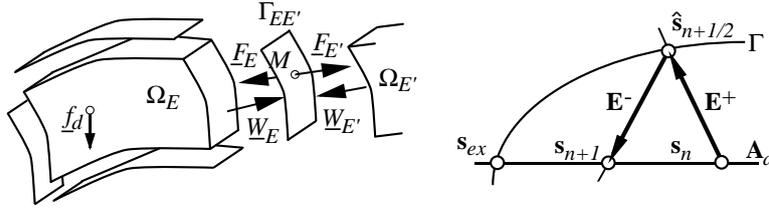


FIGURE 1 – Sous-structures, interfaces et schéma itératif  
Sub-structures, interfaces and iterative scheme

– les équations d'équilibre :  $\sigma_E \in \mathcal{S}_E$ ,

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}_E \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr}[\sigma_E \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{U}^* dS \quad (2)$$

ainsi qu'à un deuxième groupe d'équations,  $\Gamma$ , traduisant le comportement du matériau et des interfaces :

– la relation de comportement :  $\sigma_E = \mathbf{K} \varepsilon_E$ , où  $\mathbf{K}(\underline{M})$  est le tenseur de Hooke, caractéristique du comportement local du matériau,

– le comportement des interfaces ; par exemple pour une interface parfaite, les *conditions de transmission* sont  $\underline{W}_E = \underline{W}_{E'}$ ,  $\underline{F}_E + \underline{F}_{E'} = 0$ , et les conditions aux limites sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ .

La régularité imposée a priori aux champs de déplacement  $\underline{U}_E$  et de contraintes  $\sigma_E$  est standard ; par exemple, on a  $\mathcal{U}_E = [H^1(\Omega_E)]^3$  et  $\mathcal{S}_E = [L^2(\Omega_E)]^6$  en dimension 3. De plus, on introduit  $\underline{W} = \{\underline{W}_E \mid E \in \mathbf{E}\}$ ,  $\underline{F} = \{\underline{F}_E \mid E \in \mathbf{E}\}$ , les espaces correspondants étant  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{F}$ .

Sur un côté commun  $\Gamma_{EE'}$  aux deux sous-structures  $E$  et  $E'$ , la trace de  $(\underline{W}, \underline{F})$  est constituée des deux jeux de quantités  $(\underline{W}_E, \underline{F}_E)_{\Gamma_{EE'}}$  et  $(\underline{W}_{E'}, \underline{F}_{E'})_{\Gamma_{EE'}}$  (Figure 1).

## 2 Description des différentes quantités aux échelles micro et macro

### 2.1 Description générale

On va considérer la solution du problème représentée sur deux échelles distinctes notées  $m$  (échelle “ micro ”) et  $M$  (échelle “ macro ”) afin de prendre en compte séparément les effets à petite et à grande longueur de variation.

Le point de départ est la description aux interfaces des interefforts ou des déplacements sur les deux échelles. Pour une interface  $\Gamma_{EE'}$  vue de la sous-structure  $E$ , l'intereffort  $\underline{F}_E \mid_{\Gamma_{EE'}}$  et le déplacement  $\underline{W}_E \mid_{\Gamma_{EE'}}$  sont partitionnés en :

$$\underline{F}_E = \underline{F}_E^M + \underline{F}_E^m \quad \text{et} \quad \underline{W}_E = \underline{W}_E^M + \underline{W}_E^m$$

Une première démarche pour définir un tel partitionnement est de se donner un opérateur de projection  $\pi_{\Gamma_{EE'}}$  qui conduit à  $\underline{W}_E^M \mid_{\Gamma_{EE'}} = \pi_{\Gamma_{EE'}} \underline{W}_E \mid_{\Gamma_{EE'}}$ . Les espaces de déplacement micro et macro pour le bord  $\Gamma_{EE'}$  sont notés  $\mathcal{W}_{EE'}^m$  et  $\mathcal{W}_{EE'}^M$ .

Les interefforts associés s'en déduisent car la contribution au travail de la sous-structure  $E$  relative à l'interface  $\Gamma_{EE'}$  est supposée s'écrire :

$$(\underline{F}_E, \underline{W}_E)_{\Gamma_{EE'}} = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E \cdot \underline{W}_E dS = (\underline{F}_E^m, \underline{W}_E^m)_{\Gamma_{EE'}} + (\underline{F}_E^M, \underline{W}_E^M)_{\Gamma_{EE'}}$$

Une autre démarche tout à fait similaire consiste à se donner un opérateur de projection  $\pi_{\Gamma_{EE'}}$  tel que  $\underline{F}_E^M \mid_{\Gamma_{EE'}} = \pi_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E \mid_{\Gamma_{EE'}}$ , avec les espaces d'efforts micro et macro  $\mathcal{F}_{EE'}^m$  et  $\mathcal{F}_{EE'}^M$ . Cette fois-ci, les déplacements associés s'en déduisent par dualité. Deux exemples de projection sont donnés dans les sections suivantes ; plus de détails pourront être trouvés dans [8].

Étendus à l'ensemble des interfaces et des sous-structures, les partitionnements précédents conduisent à  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^M + \mathcal{W}^m$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^M + \mathcal{F}^m$ . D'autres choix importants sont également faits. Les déplacements et interefforts "micro" relatifs à deux sous-structures  $E$  et  $E'$  ayant une interface commune  $\Gamma_{EE'}$  ne sont pas assujettis à vérifier a priori des conditions de transmission même partielles. Par contre, les quantités "macro" sont, elles, assujetties à vérifier au moins partiellement ces conditions : on impose  $(\underline{W}^M, \underline{F}^M) \in \mathcal{W}_{ad}^M \times \mathcal{F}_{ad}^M$  où  $\mathcal{W}_{ad}^M$  et  $\mathcal{F}_{ad}^M$  sont des espaces à préciser, dont deux exemples seront donnés ultérieurement.

En résumé, l'état  $s$  de la structure est caractérisé par des quantités micro et macro associées à  $(\underline{W}^M, \underline{F}^M) \in \mathcal{W}_{ad}^M \times \mathcal{F}_{ad}^M$  et  $(\underline{W}^m, \underline{F}^m) \in \mathcal{W}^m \times \mathcal{F}^m$ .

## 2.2 Exemple 1 de description micro/macro : élément ou super-élément hiérarchique

Plaçons-nous dans le cas d'un traitement par la méthode des éléments finis où des maillages différents mais emboîtés sont employés pour décrire les échelles micro et macro. Les déplacements sont alors décrits sur les deux grilles, l'espace de discrétisation étant partitionné selon une base hiérarchique. Plus précisément, considérons une frontière  $\Gamma_{EE'}$  aux sous-structures  $E$  et  $E'$ . Le déplacement  $\underline{W}_E$  sur  $\Gamma_{EE'}$  s'écrit :

$$\underline{W}_E^M |_{\Gamma_{EE'}} = \sum_{i=1}^m \underline{W}_E^M(\underline{X}_i) \varphi_i |_{\Gamma_{EE'}} \quad \underline{W}_E^m |_{\Gamma_{EE'}} = \sum_{j=m+1}^n \underline{W}_E^m(\underline{X}_j) \varphi_j |_{\Gamma_{EE'}}$$

avec  $\underline{W}_E^m(\underline{X}_i) = 0$  pour  $i \in 1, \dots, m$ , les  $\varphi$  étant les fonctions de base hiérarchiques, Figure 2. Ces relations définissent  $\mathcal{W}^M$  et  $\mathcal{W}^m$ . Par dualité, on obtient  $\mathcal{F}^M$  et  $\mathcal{F}^m$ .

Par ailleurs, on impose aux déplacements macro qualifiés d'admissibles de vérifier les conditions de transmission aux interfaces et les conditions aux limites, ce qui définit  $\mathcal{W}_{ad}^M$ . Bien sur, on a ici  $\mathcal{F}_{ad}^M = \mathcal{F}^M$ .

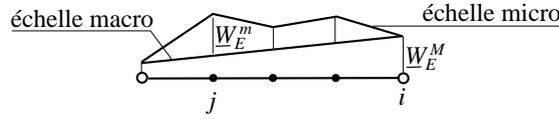


FIGURE 2 – Description hiérarchique des échelles macro et micro sur une interface  
Hierarchical description of macro and micro scale on an interface

## 2.3 Exemple 2 de description micro/macro : une méthode générale d'homogénéisation et de réanalyse locale

Le point de départ est ici la description des interefforts. Considérons une frontière  $\Gamma_{EE'}$  entre deux sous-structures  $E$  et  $E'$ . L'intereffort  $\underline{F}_E^M |_{\Gamma_{EE'}}$  est  $\underline{F}_E^M |_{\Gamma_{EE'}} = \boldsymbol{\pi}_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}_E$ , où  $\boldsymbol{\pi}_{\Gamma_{EE'}}$  est un projecteur au sens du produit scalaire usuel. De plus, on se place dans la situation où  $\underline{F}_E^m |_{\Gamma_{EE'}}$  est à résultante et moment nul. On définit ainsi  $\mathcal{F}^M$  et  $\mathcal{F}^m$ ; par dualité, on obtient  $\mathcal{W}^M$  et  $\mathcal{W}^m$ .

**Cas particulier en dimension 2.**  $\underline{F}_E^M |_{\Gamma_{EE'}} = \lambda_i \underline{F}_{E,i}^M + \lambda_j \underline{F}_{E,j}^M$  où  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$  sont les coordonnées barycentriques ( $\lambda_i + \lambda_j = 1$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\lambda_j \geq 0$ ) avec

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \lambda_i \underline{F}_{E,i}^m dS = \int_{\Gamma_{EE'}} \lambda_j \underline{F}_{E,j}^m dS = 0.$$

Les interefforts dits admissibles vérifient, outre les conditions aux limites sur  $\partial_2 \Omega$ , les conditions de transmission aux interfaces  $\underline{F}_E^M |_{\Gamma_{EE'}} + \underline{F}_{E'}^M |_{\Gamma_{EE'}} = 0$ . Ces conditions définissent  $\mathcal{F}_{ad}^M$ ; on a ici  $\mathcal{W}_{ad}^M = \mathcal{W}^M$ . Les conditions d'équilibre global sur chaque sous-structure, ne sont pas a priori vérifiées.

### 3 Stratégie de calcul micro/macro

Pour résoudre le problème posé en terme d'assemblage de sous-structures et d'interfaces, une stratégie basée sur la LATIN méthode est mise en place [6]. Dans le cas présent de l'élasticité linéaire, le cadre de cette méthode se dégenère : la dualité correspondante est maintenant de type "travail" et non plus "dissipation." La stratégie de calcul est itérative, chaque itération comporte deux étapes (voir Figure 1).

Pour simplifier la présentation, on se place dans la situation de l'exemple 1.

#### 3.1 Étape locale à l'itération $n$

Dans cette étape, on vérifie exactement le *comportement du matériau*, ainsi que le *comportement des interfaces*. Le problème consiste donc, connaissant un itéré  $\mathbf{s}_n$  de  $\mathbf{A}_d$ , à déterminer  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ . On se donne de plus une direction de recherche  $\mathbf{E}^+$ , que  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_n$  doit vérifier ; cela consiste à satisfaire, pour chaque sous-structure  $E$

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{En+1/2} - \boldsymbol{\sigma}_{En}) + \mathbf{K}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{En+1/2} - \boldsymbol{\varepsilon}_{En}) = 0,$$

et pour chaque interface  $\Gamma_{EE'}$  et chaque sous-structure  $E$ ,

$$\forall \underline{W}^{m*} \in \mathcal{W}_{EE'}^m, \quad (\hat{\underline{F}}_{En+1/2}^m - \underline{F}_{En}^m, \underline{W}^{m*})_{\Gamma_{EE'}} - (\mathbf{k}^m(\hat{\underline{W}}_{En+1/2}^m - \underline{W}_{En}^m), \underline{W}^{m*})_{\Gamma_{EE'}} = 0,$$

ainsi qu'une relation similaire pour l'échelle macro (avec  $M$  au lieu de  $m$ ).

$\mathbf{K}$  est l'opérateur de Hooke.  $\mathbf{k}^m$  et  $\mathbf{k}^M$  sont des paramètres de la méthode.  $\mathbf{k}^m$  est relatif aux quantités micro seulement, il est lié à des caractéristiques d'interfaces, alors que  $\mathbf{k}^M$  est lié au comportement global de la structure [3].

Dans le cas d'une interface  $\Gamma_{EE'}$  parfaite, l'appartenance à  $\Gamma$  se traduit par le comportement sur les deux échelles :  $\underline{W}_E^m = \underline{W}_{E'}^m$ ,  $\underline{W}_E^M = \underline{W}_{E'}^M$  et

$$\forall \underline{W}^{m*} \in \mathcal{W}_{EE'}^m, \forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad (\underline{F}_E^m + \underline{F}_{E'}^m, \underline{W}^{m*})_{\Gamma_{EE'}} = (\underline{F}_E^M + \underline{F}_{E'}^M, \underline{W}^{M*})_{\Gamma_{EE'}} = 0$$

ainsi que les conditions aux limites sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ .

#### 3.2 Étape linéaire à l'itération $n$

Connaissant  $\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} \in \Gamma$ , il s'agit de déterminer  $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ . Pour chaque sous-structure  $E$ , on doit avoir un champ de contraintes qui est en équilibre avec les efforts sur les interfaces, equ. (1), un champ de déplacement compatible avec les déplacements sur les interfaces, equ. (2).

Toujours au niveau de l'admissibilité, on doit avoir  $(\underline{W}^M, \underline{F}^M) \in \mathcal{W}_{ad}^M \times \mathcal{F}_{ad}^M$ .

$\mathbf{s}_{n+1}$  est également défini par la direction de descente  $\mathbf{E}^-$  : pour chaque sous-structure  $E$ , on a

$$(\boldsymbol{\sigma}_{En+1} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{En+1/2}) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\varepsilon}_{En+1} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{En+1/2}) = 0,$$

pour chaque interface  $\Gamma_{EE'}$  et sous-structure  $E$ ,

$$\forall \underline{W}^{m*} \in \mathcal{W}_{EE'}^m, (\underline{F}_{En+1}^m - \hat{\underline{F}}_{En+1/2}^m, \underline{W}^{m*})_{\Gamma_{EE'}} + (\mathbf{k}^m(\underline{W}_{En+1}^m - \hat{\underline{W}}_{En+1/2}^m), \underline{W}^{m*})_{\Gamma_{EE'}} = 0$$

Pour les quantités macro, la direction de descente est nécessairement globale :

$$\forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M$$

$$\sum_{\Gamma_{EE'}} \sum_E (\underline{F}_{En+1}^M - \hat{\underline{F}}_{En+1/2}^M, \underline{W}^{M*})_{\Gamma_{EE'}} + (\mathbf{k}^M(\underline{W}_{En+1}^M - \hat{\underline{W}}_{En+1/2}^M), \underline{W}^{M*})_{\Gamma_{EE'}} = 0$$

On peut montrer que le problème ainsi défini admet une solution unique pour  $\mathbf{k}^m \geq \mathbf{k} > 0$  et  $\mathbf{k}^M \geq 0$  (où  $\mathbf{k}$  est une constante). Il se scinde en deux problèmes : un problème micro sur chaque sous-structure et un problème macro global.

**Problème micro.** En considérant toutes les quantités macro comme données, le problème micro consiste à trouver  $\mathbf{s}_E^m = (\underline{U}_E^m, \underline{W}_E^m, \boldsymbol{\sigma}_E^m, \underline{F}_E^m)$  admissible au niveau micro.

La formulation en déplacement de ce problème est la suivante :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}_E^m &= \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}_E^m), \quad \underline{U}_E^m|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E^m, \quad \underline{U}_E^m \in \mathcal{U}_E^m, \quad \underline{W}_E^m \in \mathcal{W}_{EE'}^m \\
\forall \underline{U}^{m*} \in \mathcal{U}_E^m & \int_{\Omega_E} \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}_E^m) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^{m*})] + \int_{\partial\Omega_E} \underline{U}_E^m \cdot \mathbf{k}^m \underline{U}^{m*} dS = \\
&= \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{m*} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\hat{\underline{F}}_E^m + \mathbf{k}^m \hat{\underline{W}}_E^m) \cdot \underline{U}^{m*} dS - \int_{\Omega_E} \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_E^M \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^{m*})] d\Omega \quad (3)
\end{aligned}$$

Ce problème est par nature linéaire, sa solution s'écrit donc sous la forme  $\underline{U}_E^m = \hat{\underline{U}}_d + \tilde{\underline{U}}$  où  $\hat{\underline{U}}_d$  ne fait intervenir que des quantités connues lors de cette étape et où  $\tilde{\underline{U}}$  provient uniquement des charges généralisées macro  $\boldsymbol{\varepsilon}_E^M$ .

Une équivalence en énergie permet de définir le champ macro correspondant  $\tilde{\underline{U}} \in \mathcal{U}_E^M$  :

$$\forall \underline{U}^{M*} \in \mathcal{U}_E^M \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr}[(\boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\underline{U}}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^{M*})) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^{M*})] d\Omega = 0$$

Formellement,  $\tilde{\underline{U}}$  se déduit ainsi linéairement de  $\underline{U}^M$  par

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\underline{U}})|_{\Omega_E} = \mathbf{L}_E \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^M)|_{\Omega_E} \quad (4)$$

où  $\mathbf{L}_E$  est un opérateur qui dépend des caractéristiques matériau de la sous-structure  $E$  et du choix de la description micro/macro.

**Problème macro.** Le problème macro se construit de façon similaire. Il porte quant à lui sur les quantités macro  $\mathbf{s}^M = (\underline{U}^M, \underline{W}^M, \boldsymbol{\sigma}^M, \underline{F}^M)$ . En utilisant la forme (4), il peut néanmoins maintenant être interprété comme un problème homogénéisé portant sur les quantités macro effectives ; sa formulation en déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon}^M &= \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^M), \quad \underline{U}^M|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E^M, \quad \underline{U}^M|_{\partial\Omega_E} \in \mathcal{U}_E^M, \quad \underline{W}_E^M \in \mathcal{W}_{ad}^M \\
\forall \underline{U}^{M*} \in \mathcal{U}_0^M & \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E} \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^M) (\mathbf{1} + \mathbf{L}_E) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^{M*})] d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{U}^M \cdot \mathbf{k}^M \underline{U}^{M*} dS = \\
&= \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^{M*} d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\hat{\underline{F}}_E^M + \mathbf{k}^M \hat{\underline{W}}_E^M) \cdot \underline{U}^{M*} dS - \int_{\Omega_E} \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\underline{U}}_d) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^{M*})] d\Omega \quad (5)
\end{aligned}$$

La régularité demandée conduit donc à un problème global sur la structure à l'échelle macro. La solution  $\underline{U}^M$  de ce dernier permet ensuite de calculer le terme de charge sur l'échelle micro qui fournira alors la correction micro  $\underline{U}_E^m$ .

La quantité  $(\mathbf{1} + \mathbf{L}_E) \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{U}^M)|_{\Omega_E}$  est la contrainte homogénéisée et l'opérateur  $(\mathbf{1} + \mathbf{L}_E) \mathbf{K}|_{\Omega_E}$  est l'opérateur de Hooke homogénéisé, sur la sous-structure  $E$ .

## 4 Convergence

En suivant la démonstration de la convergence de la stratégie de calcul mono-échelle et parallèle donnée dans [6], on peut démontrer, sous réserve des hypothèses usuelles en élasticité, que le processus itératif est convergent si les directions de recherche sont telles que :  $\infty > \mathbf{k}_2 \geq \mathbf{k}^m|_{\Gamma_{EE'}} \geq \mathbf{k}_1 > 0$  et  $\infty > \mathbf{k}_2 \geq \mathbf{k}^M|_{\Gamma_{EE'}} \geq 0$  (où  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  sont des constantes).

On a en particulier  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{ex}\| = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{s}}_{n+1/2} - \mathbf{s}_{ex}\| = 0$ , où (quand  $\mathbf{k}^M \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s}\|^2 &= \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\Omega_E} (\text{Tr}[\boldsymbol{\sigma}_E \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_E] + \text{Tr}[\boldsymbol{\varepsilon}_E \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}_E]) d\Omega + \\
&+ \int_{\partial\Omega_E} (\underline{F}_E^m \cdot \mathbf{k}^{m-1} \underline{F}_E^m + \underline{W}_E^m \cdot \mathbf{k}^m \underline{W}_E^m + \underline{F}_E^M \cdot \mathbf{k}^{M-1} \underline{F}_E^M + \underline{W}_E^M \cdot \mathbf{k}^M \underline{W}_E^M) dS
\end{aligned}$$

## 5 Exemple

À fin d'illustrer la stratégie de calcul micro/macro proposée, un exemple test est présenté sur la Figure 3. Il s'agit d'une structure tridimensionnelle de type poutre cantilever multi-perforée dans la direction transverse et soumise à un effort tranchant terminal parabolique. La description des échelles est ici celle de l'exemple 1.

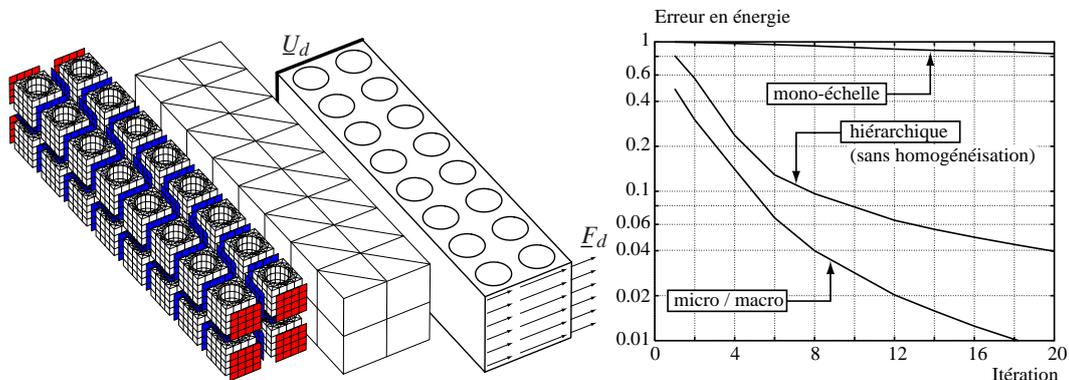


FIGURE 3 – Discretisations des échelles micro et macro, problème traité et courbes de convergence  
Discretizations of micro and macro scale, considered problem and convergence curves

Cette même figure reporte en l'erreur vis à vis de la solution du problème de référence discrétisé (96 819 degrés de liberté). Elle est comparée à celle obtenue avec l'approche hiérarchique n'intégrant pas d'homogénéisation [3] ainsi qu'à celle de l'approche mono-échelle n'utilisant pas d'échelle macro [6]. En nombre d'itérations, le gain est très important.

Les directions de recherche utilisées sont :  $\mathbf{k}^m = \frac{E}{0.6l} \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{k}^M = 0$ ;  $E$  est le module d'Young moyen au sens de la loi des mélanges et  $l$  la longueur d'un côté d'une interface.

## 6 Conclusion

La technique proposée, dont les bases sont décrites ici, se classe parmi les approches du calcul de structures par homogénéisation. Elle intègre une formulation du problème sur les échelles micro et macro dans la LATIN méthode.

Elle conduit de plus à une approche mécaniquement parallèle du type des méthodes de décomposition de domaine, bien adaptée aux architectures parallèles des moyens de calcul actuellement les plus puissants.

## Références

- [1] Christensen (R. M.). – *Mechanics of composite materials*. – Krieger, 1991.
- [2] Douglas (C. C.). – A review of numerous parallel multigrid methods. In : *Applications on Advanced Architecture Computers*, éd. par Astfalk (G.), pp. 187–202. – Philadelphia, SIAM, 1996.
- [3] Dureisseix (D.) et Ladevèze (P.). – *A multi-level and mixed domain decomposition approach for structural analysis*, pp. 246–253. – AMS, 1998, *Domain Decomposition Methods 10, Contemporary Mathematics*, volume 218.
- [4] Farhat (C.) et Roux (F.-X.). – A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, pp. 1205–1227.
- [5] Fish (J.) et Belsky (V.). – Multigrid method for periodic heterogeneous media. Part 1 and part 2. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 126, 1995, pp. 1–38.

- [6] Ladevèze (P.). – *Mécanique non-linéaire des structures — Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales.* – Paris, Hermès, 1996.
- [7] Ladevèze (P.) et Dureisseix (D.). – *Une nouvelle stratégie de calcul parallèle et micro / macro en mécanique non-linéaire.* – Rapport Interne n° 188, Cachan, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Juil. 1997.
- [8] Ladevèze (P.) et Dureisseix (D.). – A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. à paraître dans *Computational Advances in Modeling Composites and Heterogeneous Materials*, 1999.
- [9] Sanchez-Palencia (E.). – *Non homogeneous media and vibration theory.* – Springer Verlag, 1980, *Lecture Notes in Physics*, volume 127.