HAL open science

Une stratégie de calcul micro-macro pour les structures hétérogènes

David Dureisseix, Pierre Ladevèze, Olivier Loiseau

To cite this version:

David Dureisseix, Pierre Ladevèze, Olivier Loiseau. Une stratégie de calcul micro-macro pour les structures hétérogènes. 4e Colloque National en Calcul des Structures, May 1999, Giens, France. pp.375-380. hal-00321770

HAL Id: hal-00321770

https://hal.science/hal-00321770v1

Submitted on 12 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Une stratégie de calcul ”micro-macro” pour les structures hétérogènes

D. Dureisseix and P. Ladevèze and O. Loiseau

Résumé

Lorsque la réponse d'une structure hétérogène est simulée, la présence d'effets à courte longueur de variation conduit à une discrétisation fine. Pour résoudre ces problèmes, une stratégie de calcul multi-échelles fortement liée aux techniques d'homogénéisation, et bien adaptée aux calculateurs parallèles, est présentée. L'implantation dans un code de calcul par éléments finis est discutée, ainsi que des exemples illustrant les caractéristiques de cette approche.

1 Introduction

Dans le cas de structures hétérogènes, avec des constituants aux propriétés mécaniques très différentes, la solution locale possède des zones à fort gradients, des effets à courte longueur de variation, etc. Pour de tels problèmes, des stratégies de calcul sont développées afin de les rendre abordables.

L'approche proposée ici utilise une décomposition du problème de référence en sous-structures (par exemple les cellules d'une structure composite) et interfaces, [4]. La solution contient d'une part des effets à grande longueur de variation : c'est la solution effective, définie sur la structure homogénéisée qui est qualifiée d'échelle macro ; elle contient d'autre part des effets plus locaux : ce sont les corrections définies sur une échelle micro additionnelle. La procédure d'homogénéisation est automatiquement réalisée par l'algorithme, qui se place dans la famille des méthodes de décomposition de domaine multi-échelles, [3, 5, 2], et qui est donc bien adaptée aux ordinateurs à architecture parallèle. La version dont l'implantation est discutée ici est basée sur une discrétisation hiérarchique liée aux deux échelles micro et macro.

2 Approche micro-macro

Une fois la structure décomposée en sous-structures et interfaces, [4], les quantités cherchées sont séparées en partie macro et complément micro, [1]. En particulier, le champ de déplacement est $U = U^M + U^m$. $U^M \in \mathcal{U}^M$ représente les effets à grande longueur de variation, il est défini sur un maillage global de la structure et doit être régulier sur toute celle-ci. $U^m \in \mathcal{U}^m$ est le “sur-déplacement” micro qui sera présenté un peu plus

tard. Il est susceptible d'être discontinu d'une sous-structure à l'autre et représente les effets à petite longueur de variation. La déformation sur chaque sous-structure Ω^E est ainsi $\varepsilon(U) = \varepsilon(U^M) + \varepsilon(U^m)$. Pour simplifier, on ne présente ici que les grands traits de la méthode dans le cas de l'élasticité linéaire et des interfaces parfaites.

Le problème peut être maintenant écrit sur ces deux échelles ; en particulier, l'admissibilité $\mathbf{A_d}$ (le comportement des sous-structures) en l'absence de charges extérieures, est : $\forall U^{m\star} \in \mathcal{U}^m, \forall U^{M\star} \in \mathcal{U}^M$

$$\int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}(\varepsilon(U^m) + \varepsilon(U^M))\mathbf{K}\varepsilon(U^{m\star})d\Omega^E = \int_{\partial\Omega^E} F^m \cdot U^{m\star} dS \tag{1}$$

$$\sum_E \int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}(\varepsilon(U^M) + \varepsilon(U^m))\mathbf{K}\varepsilon(U^{M\star})d\Omega^E = \sum_E \int_{\partial\Omega^E} F^M \cdot U^{M\star} dS \tag{2}$$

où $\mathbf{K}$ est l'opérateur de Hooke, et F^M et F^m sont les charges sur les interfaces au niveau macro et micro. Le comportement des interfaces parfaites, Γ, entre deux sous-structures traduit quant à lui la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts, sur chacune des deux échelles.

L'algorithme de résolution (LATIN méthode) construit à chaque itération, une solution de $\mathbf{A_d}$ puis de Γ en se servant de directions de recherche :

• connaissant une solution s de $\mathbf{A_d}$, l'étape locale consiste à déterminer une solution $\hat{s}$ de Γ vérifiant la direction de recherche $(\hat{F}^m - F^m) - k^m(\hat{U}^m - U^m) = 0$ sur chaque interface ; une direction similaire est utilisée pour les quantités macro. k^m est un paramètre de la méthode.

• connaissant une solution $\hat{s}$ de Γ, l'étape linéaire consiste à déterminer une solution s de $\mathbf{A_d}$ vérifiant la direction de recherche conjuguée $(F^m - \hat{F}^m) + k^m(U^m - \hat{U}^m) = 0$.

L'admissibilité (1) associée à la direction de recherche de l'étape linéaire conduit à une solution micro U^m qui doit équilibrer des charges données provenant de $\hat{s}$ ainsi qu'une charge macro $-\mathbf{K}\varepsilon(U^M)$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}\,\varepsilon(U^m)\mathbf{K}\varepsilon(U^{m\star})d\Omega^E + \int_{\partial\Omega^E} U^m \cdot k^m U^{m\star} dS = \\ = \int_{\partial\Omega^E} (\hat{F}^m + k^m\hat{U}^m) \cdot U^{m\star} dS - \int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}\,\varepsilon(U^M)\mathbf{K}\varepsilon(U^{m\star})d\Omega^E\end{aligned} \tag{3}$$

Le problème étant linéaire, la solution est donc la superposition des solutions respectives pour ces deux chargements, à savoir $\hat{U}$ et $\tilde{U}$. Cette dernière ne dépend que de la charge macro ; réintroduite dans le terme de couplage de l'admissibilité macro (2), celui-ci peut donc être écrit formellement comme

$$\int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}\,\varepsilon(U^{M\star})\mathbf{K}\varepsilon(\tilde{U})d\Omega^E = \int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}\,\varepsilon(U^{M\star})\mathbf{L}\mathbf{K}\varepsilon(U^M)d\Omega^E \tag{4}$$

où $\mathbf{L}$ est un opérateur linéaire. Le problème macro peut ainsi être écrit comme un problème homogénéisé, portant sur des quantités effectives :

$$\begin{aligned}\sum_E \int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}\,\varepsilon(U^M)(\mathbf{1}+\mathbf{L})\mathbf{K}\varepsilon(U^{M\star})d\Omega^E = \sum_E \int_{\partial\Omega^E} F^M \cdot U^{M\star} dS + \\ - \sum_E \int_{\Omega^E} \mathrm{Tr}\,\varepsilon(\hat{U})\mathbf{K}\varepsilon(U^{M\star})d\Omega^E\end{aligned} \tag{5}$$

en particulier, $(\mathbf{1}+\mathbf{LK})\varepsilon(U^M)$ est la contrainte homogénéisée et $(\mathbf{1}+\mathbf{L})\mathbf{K}$, l'opérateur de Hooke homogénéisé. L'utilisation de (5) comme problème global dans une méthode de décomposition de domaine doit améliorer les performances de celle-ci, surtout pour des problèmes hétérogènes.

3 Discrétisation et implantation

Le traitement diffère ici de la version hiérarchique sans homogénéisation, donnée dans [2], essentiellement au niveau de l'étape linéaire. Nous allons ainsi décrire cette dernière pour une sous-structure Ω^E.

L'implantation de la version discrétisée de l'approche micro-macro peut être réalisée de façon élégante dès que l'on se place dans la base hiérarchique de type éléments finis, Figure (1-a). Les degrés de liberté sont alors explicitement partitionnés en deux groupes : les degrés de liberté U_E^m de type "sur-déplacement" micro et ceux de type déplacement macro U_E^M.

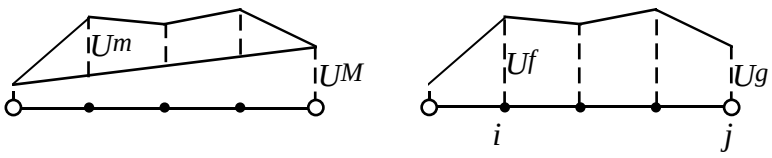

FIG. 1: *Illustration des bases a) hiérarchique et b) standard*

L'admissibilité (2) et (3) fait alors intervenir une rigidité du type :

$$\begin{bmatrix} K_E^m + k_E^m & K_E^{mM} \\ K_E^{Mm} & K_E^M \end{bmatrix} \tag{6}$$

où k_E^m est une rigidité bord issue de la direction de recherche. Notons que la continuité imposée à U^M conduit à un problème macro global sur l'ensemble de la structure.

Cette technique a néanmoins l'inconvénient de nécessiter un stockage important (en particulier celui de K^{Mm}) puisque la matrice dans la base hiérarchique a une structure de type "flèche". Le coût de calcul est aussi important, que ce soit au niveau de la construction explicite de K^{Mm} ou à celui de la factorisation des matrices de raideur des sous-structures pour condenser le problème sur les degrés de liberté macro.

Une deuxième approche consiste à réaliser les calculs à partir de la base éléments finis standard, Figure (1-b). Cette fois-ci, la rigidité est exprimée formellement (les degrés de liberté ne sont pas regroupés en pratique, car ils sont ordonnés selon une technique classique de renumérotation) en séparant les degrés de liberté des nœuds micro (avec un exposant f) de ceux des nœuds macro (avec un exposant g). Leur interprétation en tant que déplacements nodaux est maintenue ici :

$$U_E = \begin{bmatrix} U_E^f \\ U_E^g \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_E = \begin{bmatrix} K_E^f & K_E^{fg} \\ K_E^{gf} & K_E^g \end{bmatrix} \tag{7}$$

Le lien avec la base hiérarchique précédente se fait à l'aide d'un opérateur de projection P, [2], projetant les fonctions de forme macro de la discrétisation macro sur les fonctions de forme standard $\varphi : U = U_i^m \varphi_i + P_{ij} U_j^M \varphi_i$ (les fonctions de base macro sont ainsi en fait $P_{ij}\varphi_i$) ce qui conduit à $K_E^m = K_E^f$.

Seule $K_E^M = P_E^T K_E P_E$ est construite explicitement au moment de l'intégration des caractéristique mécaniques, ce qui n'est plus le cas de $K_E^{Mm} = P_E^T K_E$. L'application de cette dernière à un champ de déplacement est obtenue par l'application de K_E et P_E (conservés sous forme élémentaire). La construction de l'opérateur du système (5) discrétisé, $K_E^M - P_E^T K_E (K_E^m + k_E^m)^{-1} K_E P_E$, se fait alors par résolutions successives d'un petit nombre de problèmes sur chaque sous-structure (le nombre de degrés de liberté macro intervenant sur la sous-structure seulement).

Une étape linéaire consiste donc sur chaque sous-structure (ce qui peut être réalisé en parallèle), à calculer la partie relative à $\hat{s}$ du second membre de (3), puis effectuer une montée-descente pour obtenir $\hat{U}_E$. L'assemblage des charges $P_E^T K_E \hat{U}_E$ permet de pratiquer une montée-descente sur le système global (5) qui fournit la solution macro U^M. De nouveau sur chaque sous-structure, il reste à calculer la seconde partie du second membre $-K_E P_E U_E^M$, pour obtenir avec une dernière montée-descente la solution micro U^m.

4 Exemple

À fin d'illustrer la stratégie de calcul micro-macro proposée, un exemple test est présenté sur la Figure 2. Il s'agit d'une structure tridimensionnelle de type poutre cantilever multi-perforée dans la direction transverse et soumise à un effort tranchant terminal parabolique.

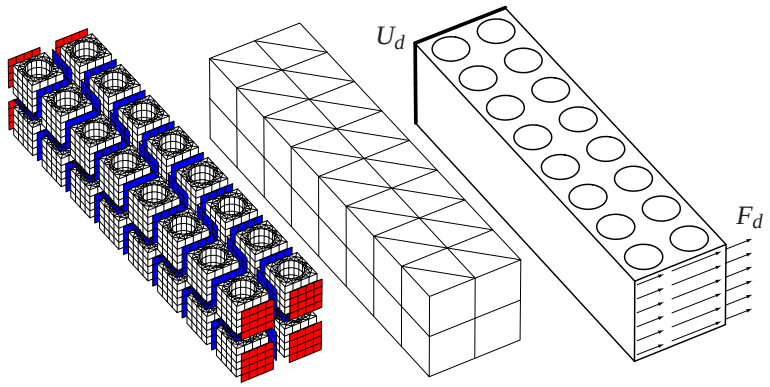

FIG. 2: *Discrétisations de l'échelle micro (sous-structures et interfaces), de l'échelle macro et problème traité*

Le problème de référence éléments finis comporte 96 819 degrés de liberté. Il a été décomposé en 32 sous-structures comportant chacune 320 éléments prismatiques à 15 nœuds et 3 552 degrés de liberté. L'échelle macro est discrétisée quant à elle avec 64 éléments prismatiques à 6 nœuds et 243 degrés de liberté.

Avec la discrétisation présentée précédemment, la solution à convergence est la solution du problème de référence discrétisée avec une approche en déplacement. L'erreur vis à vis de cette référence au cours des itérations est tracée sur la Figure 3. Cette même figure compare la convergence de l'approche micro-macro à celle de l'approche hiérarchique n'intégrant pas d'homogénéisation [2] ainsi qu'à celle de l'approche mono-échelle n'utilisant pas d'échelle macro [4].

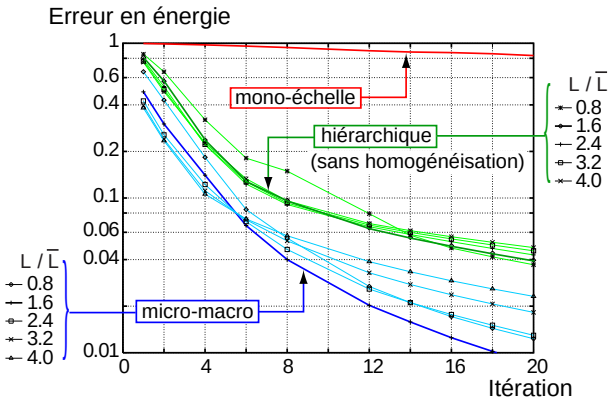

FIG. 3: *Convergence comparée des différentes méthodes : micro-macro, hiérarchique (sans homogénéisation), et mono-échelle*

Pour les deux premiers calculs, la direction de recherche a été choisie sous la forme $k^m = \bar{E}/(l/4)$, où $\bar{E}$ est le module d'Young obtenu à partir de la loi des mélanges, et l est une longueur caractéristique des interfaces (la longueur d'un côté). La simulation a été réalisée sur un calculateur SGI-Origin2000, les différents algorithmes ayant étés implantés dans le code de calcul Castem2000 développé au CEA de Saclay.

5 Conclusions

La stratégie de calcul micro-macro proposée se base sur une modélisation de la structure en tant qu'assemblage de constituants simples : les sous-structures et les interfaces. Elle considère alors les quantités mises en jeu comme la somme de quantités macro et d'un complément micro.

Cette stratégie ne souffre pas de certaines limitations des techniques classiques d'homogénéisation telles que la nécessité de la séparation des échelles et l'adaptation difficile aux problèmes non-linéaires d'évolution. De plus, elle permet d'utiliser les moyens de calcul les plus performants actuellement, à savoir les ordinateurs à architecture parallèle.

La méthode LATIN, [4], est utilisée pour bâtir un algorithme qui s'interprète comme une méthode mixte de décomposition de domaine multi-échelles. L'utilisation d'une échelle macro homogénéisée rend l'algorithme extensible et améliore son taux de convergence, par rapport à une approche n'utilisant pas de technique d'homogénéisation et dont les performances étaient déjà comparables à celles de la méthode FETI, [3, 2].

Références

[1] D. Dureisseix and P. Ladevèze. A micro-macro approach for structural analysis on parallel architecture computers. In S. R. Idelsohn, E. Onate, and E. N. Dvorkin, editors, *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, June 1998. CIMNE, IACM.

[2] D. Dureisseix and P. Ladevèze. Une approche parallèle et multi-échelles en calcul des structures : exemples et performances. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 7(1–3):73–87, 1998.

[3] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227, 1991.

[4] P. Ladevèze. *Mécanique non-linéaire des structures — Nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales*. Hermès, Paris, 1996.

[5] J. Mandel. Balancing domain decomposition. *Communications in Applied Numerical Methods*, 9:233–241, 1993.