



HAL
open science

Une approche parallèle et multi-échelle en calcul des structures : exemples et performances

David Dureisseix, Pierre Ladevèze

► To cite this version:

David Dureisseix, Pierre Ladevèze. Une approche parallèle et multi-échelle en calcul des structures : exemples et performances. 3e Colloque National en Calcul des Structures, May 1997, Giens, France. pp.315-320. hal-00321764

HAL Id: hal-00321764

<https://hal.science/hal-00321764>

Submitted on 24 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE APPROCHE PARALLÈLE ET MULTI-ÉCHELLES EN CALCUL DES STRUCTURES : EXEMPLES ET PERFORMANCES

David DUREISSEIX - Pierre LADEVÈZE
Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan
(ENS de Cachan / CNRS / Université Paris 6)
61 Avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX (FRANCE)

Résumé : Aujourd’hui, les ordinateurs à architecture parallèle sont ceux qui offrent la plus grande puissance de calcul. Parmi les méthodes bien adaptées à ce type d’architecture, les méthodes de décomposition de domaine peuvent être classées en approches primales ([Le 94]), duales ([FAR 94]) ou “mixtes”, comme celle qui est utilisée ici : les inconnues sont à la fois les déplacements et efforts aux interfaces. Un inconvénient de ces méthodes est la diminution du taux de convergence lorsque le nombre de sous-domaines croît. L’utilisation d’un mécanisme global de propagation d’information parmi tous les sous-domaines peut y remédier [BRA 86] et plusieurs algorithmes, comme la méthode FETI [FAR 94], ou la “Balancing Domain Decomposition method” [MAN 93], en utilisent un. Nous proposons ici de prendre en compte deux échelles introduites lors d’une décomposition en sous-structures et interfaces. Le problème à grande échelle est alors utilisé pour permettre l’échange global d’information et ainsi améliorer les performances. De plus, nous comparons cette approche à différentes variantes de la méthode FETI.

Abstract: Parallel architecture computers are nowadays the most powerful ones. Domain decomposition methods conducts to algorithms well suited to such architectures. Several approaches related with these methods have been designed; for instance, primal approaches ([Le 94]), dual ones ([FAR 94]) or “mixed” ones, as the approach used herein: both displacements and efforts are the unknowns. A general drawback for these methods is the decrease of convergence when increasing the number of substructures. Using a global mechanism to propagate information among all the substructures can avoid this drawback [BRA 86]. It is now implemented on several algorithms, such as the FETI method [FAR 94], or the “Balancing Domain Decomposition method” [MAN 93]. We are proposing herein to take into account two scales introduced when decomposing the structure into substructures and interfaces. The large scale problem is then used to build a global exchange of information and therefore to improve performance. Moreover, comparisons with different variants of the FETI method are proposed.

1. Formulation du problème

Dans le but de procéder au traitement en parallèle du problème, la structure est découpée en sous-structures $\Omega^E (E \in \mathbf{E})$ et en interfaces $L^{EE'}$, chacune possédant ses propres variables et ses propres équations. Les principes de cette approche sont décrits dans [LAD 96], sa faisabilité a été montrée dans [LAD 92], et [COG 96] propose des exemples significatifs.

1.1 Comportement des sous-structures

Chaque sous-structure est soumise à l’action de son environnement (les interfaces voisines) : une répartition d’efforts \underline{F}^E et un champ de déplacement \underline{W}^E sur sa frontière $\partial\Omega^E$ (figure 1). Pour tout $E \in \mathbf{E}$, $(\underline{W}^E; \underline{F}^E)$ doit vérifier :

- équations de liaison : le champ de déplacement \underline{U}^E à énergie finie sur la sous-structure Ω^E (dont

on note \mathcal{U}^E l'espace fonctionnel associé) doit satisfaire à

$$\varepsilon^E = \varepsilon(\underline{U}^E) \quad \text{et} \quad \underline{U}^E|_{\partial\Omega^E} = \underline{W}^E \quad (1)$$

- équations d'équilibre : le champ de contraintes σ^E équilibre \underline{f}_d et \underline{F}^E , i.e.

$$\forall \underline{U}^* \in \mathcal{U}^E, \int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma^E \varepsilon(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega^E} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* dS + \int_{\partial\Omega^E} \underline{F}^E \cdot \underline{U}^*|_{\partial\Omega^E} dS \quad (2)$$

- relation de comportement : ici, le comportement est celui de l'élasticité linéaire (\mathbf{K} est le tenseur de Hooke)

$$\sigma^E = \mathbf{K} \varepsilon^E \quad (3)$$

L'ensemble des inconnues $(\underline{W}^E, \underline{F}^E, \underline{U}^E, \sigma^E)$, pour $E \in \mathbf{E}$, qui caractérisent l'état des sous-structures est noté \mathbf{s} .

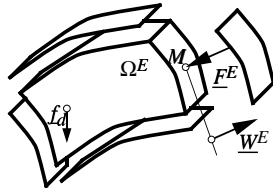


Figure 1: Sous-structure

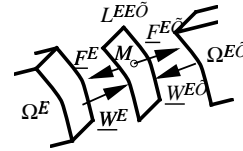


Figure 2: Interface

1.2 Comportement des interfaces

L'état de la liaison entre deux sous-structures Ω^E et $\Omega^{E'}$ est défini à partir des déplacements et des efforts $(\underline{W}^E; \underline{F}^E)$ et $(\underline{W}^{E'}; \underline{F}^{E'})$ (figure 2). Par exemple, pour une liaison parfaite, ils doivent vérifier :

$$\underline{F}^E + \underline{F}^{E'} = 0 \quad \text{et} \quad \underline{W}^E = \underline{W}^{E'} \quad (4)$$

D'autres types de liaison peuvent être envisagés : liaisons à effort imposé, à déplacement imposé, liaisons de contact unilatéral avec ou sans frottement, ... , [LAD 96].

1.3 Description de l'algorithme

En suivant la trame des méthodes à grand incrément de temps (LATIN en anglais) [LAD 92], les équations sont réparties en deux groupes pour séparer les difficultés :

- Γ est l'ensemble des inconnues \mathbf{s} qui vérifient le comportement de chaque interface (4).
- \mathbf{A}_d est celui des \mathbf{s} qui vérifient le comportement de chaque sous-structure (1), (2), (3) ;

La solution cherchée \mathbf{s}_{ex} est alors l'intersection de \mathbf{A}_d et Γ . Un algorithme à deux étapes construit alors successivement un élément de \mathbf{A}_d puis de Γ (figure 3), en utilisant des directions de recherche qui sont les paramètres de la méthode :

- l'étape locale utilise la direction de recherche $E+$: $(\hat{F} - F) - k(\hat{W} - W) = 0$
Trouver $\hat{\mathbf{s}} \in \Gamma$ de façon à ce que $\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{s}_n$ appartienne à la direction de recherche $E+$ est un problème local sur les interfaces. Il est trivialement parallélisable.

- l'étape linéaire utilise la direction de recherche $E- : (\underline{F} - \hat{\underline{F}}) + k(\underline{W} - \hat{\underline{W}}) = 0$

Le problème consiste alors à trouver $\mathbf{s}_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ de telle façon à ce que $\mathbf{s}_{n+1} - \hat{\mathbf{s}}$ appartienne à $E-$. Cela conduit à un problème global uniquement par sous-structure, qui peut donc être traité en parallèle une fois les sous-structures distribuées parmi les processeurs disponibles.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, cet algorithme est similaire à celui proposé dans [LAD 85], [LIO 90], [GLO 90].

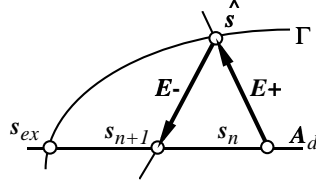


Figure 3: L'algorithme LATIN à deux étapes

2. Une extension multi-échelles

Un comportement classique des méthodes de type décomposition de domaine est la dégradation du taux de convergence lorsque le nombre de sous-structures croît [BRA 86]. Par exemple, pour le problème modèle d'une structure bidimensionnelle élancée soumise à un chargement de flexion parabolique (figure 4), la solution de référence $(\underline{U}; \sigma)_{\text{ref}}$ éléments finis permet de définir le taux de convergence :

$$\tau = -\log \frac{e_{n+1}}{e_n} \quad \text{où} \quad e_n^2 = \frac{\int_{\Omega} \text{Tr}[(\sigma_n - \sigma_{\text{ref}}) \mathbf{K}^{-1} (\sigma_n - \sigma_{\text{ref}})] d\Omega}{\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma_{\text{ref}} \mathbf{K}^{-1} \sigma_{\text{ref}}] d\Omega}$$

Le paramètre de direction de recherche peut être ici choisi sous la forme $k = E/L_0$, E étant le module d'Young du matériau et L_0 une longueur qui caractérise donc la direction de recherche. Pour l'approche LATIN précédente, Ph. Lorong a montré que la valeur "optimale" de L_0 est liée à la taille de la structure, [COG 96]. La figure 5 reporte alors le taux de convergence moyen pour atteindre la convergence ($e_n \leq 1\%$) en fonction du nombre de sous-structures.

Pour remédier à un tel inconvénient et construire un mécanisme d'échange global d'information, nous choisissons ici de représenter la solution cherchée sur différentes échelles : $(\underline{U}^E; \sigma^E) = (\underline{U}_1^E; \sigma_1^E) + (\underline{U}_2^E; \sigma_2^E)$, où 1 et 2 sont respectivement utilisés pour les inconnues relatives à la grande échelle (grandeurs effectives) et aux corrections sur l'échelle fine. Les principes de cette technique ont été décrits dans [DUR 96]. On choisit de conserver le problème sur la grande échelle global afin de construire un mécanisme d'échange global d'information alors que l'échelle fine est traitée par la technique précédente de sous-structuration. À chaque échelle, notées par la suite Ω_1 et Ω_2 , correspond ici un maillage différent avec éléments emboîtés. Les transferts d'information entre les échelles sont alors réalisés avec un opérateur de prolongation \mathbb{P} et un opérateur de restriction $\mathbb{R} = \mathbb{P}^T$. Avec des maillages emboîtés, la prolongation peut être réalisée avec une projection de type éléments finis hiérarchiques [ZIE 83].

Le problème peut maintenant être écrit sur chaque échelle :

- sur l'échelle fine 2, sur chaque sous-structure Ω_2^E , $\forall \underline{U}_2^* \in \mathcal{U}_2^E$,

$$\int_{\Omega^E} \text{Tr}[\sigma_2^E \varepsilon(\underline{U}_2^*)] d\Omega = \int_{\partial\Omega^E} \underline{F}_2^E \cdot \underline{U}_2^* dS - \int_{\Omega^E} \text{Tr}[\varepsilon(\mathbb{P}^E \underline{U}_1) \mathbf{K}_\varepsilon(\underline{U}_2^*)] d\Omega \quad (5)$$

- sur la grande échelle 1, $\forall \underline{U}_1^* \in \mathcal{U}_1$,

$$\int_{\Omega_1} \text{Tr}[\sigma_1 \varepsilon(\underline{U}_1^*)] d\Omega = \int_{\Omega_1} \text{Tr}[\varepsilon(\underline{U}_1^*) \sum_{E \in \mathbb{E}} \mathbb{R}^E \mathbf{K}_E(\underline{U}_2^E)] d\Omega \quad (6)$$

où \mathcal{U}_2^E est la partie de \mathcal{U}^E correspondant à l'échelle fine 2 et où \mathcal{U}_1 est relatif aux champs définis sur l'ensemble de la structure Ω , vérifiant des conditions aux limites homogènes.

La solution est alors recherchée successivement dans les deux échelles à chaque itération. Pour l'exemple précédent, le gain en taux de convergence est illustré sur la figure 5 quand chaque sous-structure est maillée avec 2 048 éléments à 6 nœuds, et ceci pour chaque sous-structuration (4, 16 et 64 sous-structures). La grande échelle a été maillée avec un nombre d'éléments triangulaires à 3 nœuds égal à deux fois le nombre de sous-structures.

La quasi-indépendance du taux de convergence vis à vis du nombre de sous-structures illustre l'extensibilité numérique de l'approche LATIN multi-échelles.

On peut aussi noter sur cet exemple que la nouvelle valeur optimale pour la direction de recherche, en utilisant deux échelles, est cette fois-ci relative à la longueur des interfaces (L_0 a été choisi égal à 0,25 fois la longueur d'une sous-structure). Elle n'est donc cette fois plus caractérisée par le comportement global de toute la structure.

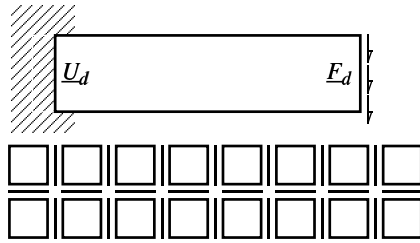


Figure 4: Problème modèle avec une décomposition en 16 sous-structures et interfaces

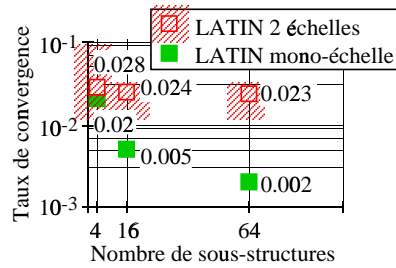


Figure 5: Taux de convergence fonction du nombre de sous-structures

3. Comparaisons

La méthode FETI, [FAR 94], propose une solution qui vérifie l'équilibre aux interfaces et améliore les sauts de déplacement au cours des itérations, et qui doit de plus satisfaire à l'équilibre global sur chaque sous-domaine. Cela conduit à la résolution d'un problème global sur tous les sous-domaines qui est l'analogie du problème à grande échelle.

L'exemple proposé est cette fois-ci une poutre tridimensionnelle avec une charge tranchante à l'extrémité. Le maillage est représenté sur la figure 6 avec des éléments cubiques à 20 nœuds, ainsi que plusieurs maillages possibles pour la grande échelle, avec des éléments cubiques à 8 nœuds.

La figure 7 reporte l'erreur en énergie e_n en fonction des itérations, pour la méthode FETI sans préconditionnement, puis avec un préconditionneur économique, et le préconditionneur de Dirichlet. Ces trois derniers calculs ont été réalisés par F.-X. ROUX sur le PARAGON de l'ONERA-Châtillon. L'ancien algorithme LATIN mono-échelle ainsi que l'extension multi-échelles pour les diverses discrétisations de la grande échelle sont aussi reportées. Ils ont été réalisés sur le CRAY-T3D de l'IDRIS à Orsay. Ces deux calculateurs ont été utilisés dans une configuration où 32 processeurs sont disponibles.

Comme des comparaisons en temps entre deux approches dépend des processeurs, réseaux de communication, compilateurs, environnement de programmation, accès disque, ..., nous avons retenus les principales tendances des algorithmes en pondérant les précédents résultats : après avoir analysé les parties coûteuses des simulations, nous avons identifié les initialisations des approches FETI et LATIN mono-échelle à 1, en temps CPU équivalent (cumulé sur les 32 processeurs). Après cela, les itérations FETI et LATIN 2-échelles pour le cas (a) sont identifiées en terme de coût. La figure 8 reporte alors l'évolution de l'erreur en fonction de ce temps CPU équivalent.

Le coût d'une approche éléments finis directe est ici en temps CPU équivalent de 18.

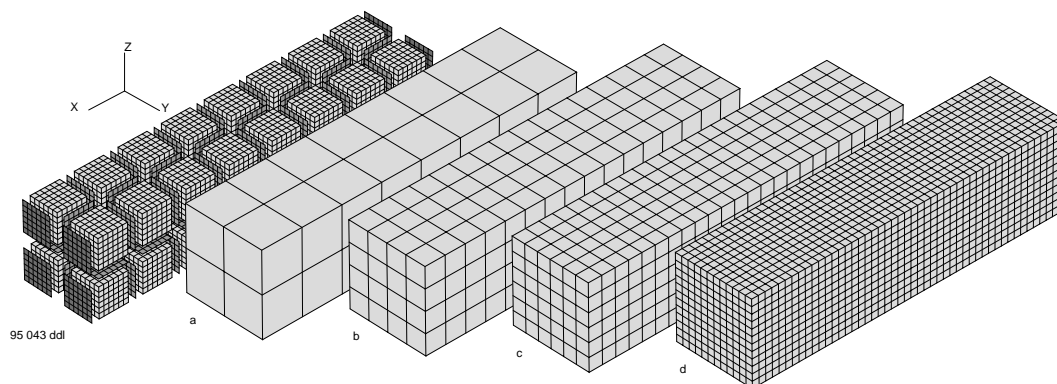


Figure 6: Maillages du problème sous-structuré et du problème à grande échelle

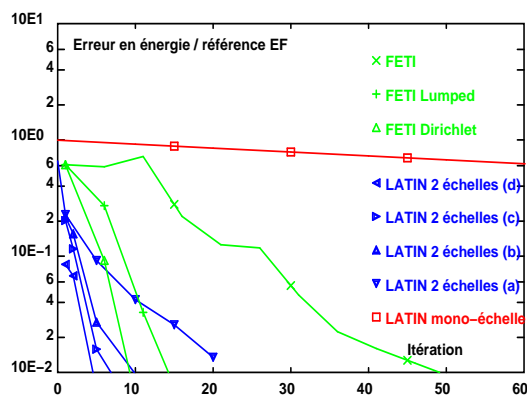


Figure 7: Comparaison des approches

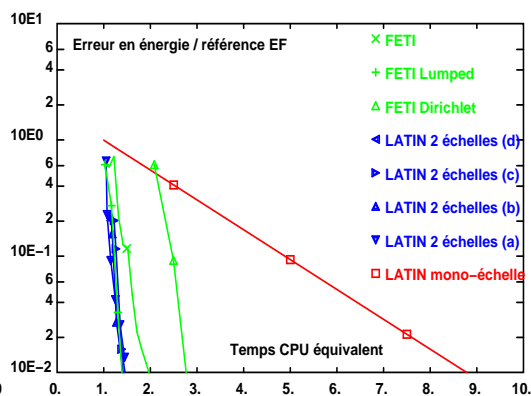


Figure 8: Comparaison des coûts

4. Conclusions

L'originalité de l'utilisation conjointe d'une approche à grand incrément de temps avec une technique de sous-structuration réside dans le rôle majeur joué par les interfaces qui sont considérées comme des structures particulières avec leurs propres variables et leurs propres équations.

Cela conduit à un algorithme “purement” parallèle qui peut être amélioré par l’introduction d’un schéma à deux échelles. La conséquence est l’émergence d’un problème global sur toute la structure à résoudre à chaque itération. L’algorithme en résultant est numériquement extensible ; il dépend de plus peu du raffinement du maillage.

Le but à long terme est l’extension à l’analyse de structures à comportement non-linéaire et à grand nombre de degrés de liberté, en conservant la trame des approches LATIN.

Remerciements :

Les auteurs tiennent à remercier F.-X. ROUX de l’ONERA-Châtillon, pour les comparaisons avec les approches FETI ainsi que l’IDRIS d’Orsay, pour avoir pu accéder au CRAY-T3D.

Bibliographie

[BRA 86] Bramble, J. H., Pasciak, J. E., and Schatz, A. H., (1986), “The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring, I”, *Math. Comp.*, Vol 47, no. 175, pp 103–134.

[COG 96] Cognard, J.-Y., Dureisseix, D., Ladevèze, P., and Lorong, P., (1996), “Expérimentation d’une approche parallèle en calcul de structures”, *Revue Européenne des Éléments Finis*, Vol 5, no. 2, pp 197–220.

[DUR 96] Dureisseix, D. and Ladevèze, P., (September 1996), “Parallel and multi-level strategies for structural analysis”, dans *Proceedings of the Second European Conference on Numerical Methods in Engineering* (Désidéri, J.-A., ed.), pp 599–604, Wiley.

[FAR 94] Farhat, C. and Roux, F.-X., (June 1994), “Implicit parallel processing in structural mechanics”, dans *Computational Mechanics Advances* (Oden, J. T., ed.), Vol 2, North-Holland.

[GLO 90] Glowinski, R. and Le Tallec, P., (1990), “Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping Schwarz alternating method”, dans *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Chan, T. F., Glowinski, R., Périaux, J., and Widlund, O. B., eds.), (Philadelphia), pp 224–231, SIAM.

[LAD 85] Ladevèze, J., (November 1985), “Algorithmes adaptés aux calculs vectoriel et parallèle pour des méthodes de décomposition de domaines”, dans *Actes du 3ème colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures* (Grellier, J. P. and Campel, G. M., eds.), (Bastia), pp 893–907, Pluralis.

[LAD 92] Ladevèze, P. and Lorong, P., (1992), “A large time increment approach with domain decomposition technique for mechanical non linear problems”, dans *Comput. Meths. Appl. Sc. Engng.* (Glowinski, R., ed.), (New York), pp 569–578, INRIA, Nova Science.

[LAD 96] Ladevèze, P., (1996), “Mécanique non-linéaire des structures — nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales”, Paris: Hermès.

[Le 94] Le Tallec, P., (1994), “Domain decomposition methods in computational mechanics”, dans *Computational Mechanics Advances*, Vol 1, North-Holland.

[LIO 90] Lions, P.-L., (1990), “On the Schwarz alternating method III: a variant for nonoverlapping subdomains”, dans *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations* (Chan, T. F., Glowinski, R., Périaux, J., and Widlund, O. B., eds.), (Philadelphia), pp 202–223, SIAM.

[MAN 93] Mandel, J., (1993), “Balancing domain decomposition”, *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol 9, pp 233–241.

[ZIE 83] Zienkiewicz, O. C., De S. R. Gago, J. P., and Kelly, D. W., (1983), “The hierarchical concept in finite element analysis”, *Computers & Structures*, Vol 16, no. 1–4, pp 53–65.