



**Les équations fondamentales des phénomènes  
électromagnétiques dans les corps en mouvement (Die  
Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge  
in bewegten Koerpern)**

Hermann Minkowski

► **To cite this version:**

Hermann Minkowski. Les équations fondamentales des phénomènes électromagnétiques dans les corps en mouvement (Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Koerpern). 1908. hal-00321285

**HAL Id: hal-00321285**

**<https://hal.science/hal-00321285>**

Submitted on 12 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Les équations fondamentales des phénomènes électromagnétiques dans les corps en mouvement. par Hermann Minkowski

## Introduction

L'accord n'est pas encore complet actuellement sur les équations fondamentales de l'Electrodynamique dans les corps en mouvement. La forme proposée par Hertz (1890) a dû être abandonnée, différents faits expérimentaux se trouvant en contradiction avec elle.

Basée sur une ~~simple~~ représentation atomistique de l'Electricité, la théorie des phénomènes optiques et électriques dans les corps en mouvement publiée par H. A. Lorentz en 1895, semble justifier par sa remarquable fécondité, les hypothèses hardies, qui la supportent et la pénètrent. La théorie de Lorentz ~~prend pour point de départ~~ certaines équations initiales, satisfaites en tout point de l'éther et parvient aux équations pour les phénomènes ~~pour~~ dans les corps pondérables par le calcul de moyennes dans des volumes "physiquement infiniment petits", mais contenant en réalité un grand nombre d'électrons.

En particulier, la théorie de Lorentz rend compte de l'impossibilité expérimentale de mettre en évidence un mouvement relatif de la Terre par rapport à l'éther, elle fait dépendre ce résultat d'une covariance des équations initiales pour certaines transformations des coordonnées et du temps auxquelles H. Poincaré a donné le nom de transformations de Lorentz. Pour ces équations initiales, la covariance pour les transformations de Lorentz est un fait purement mathématique que j'appellerai le théorème de relativité; ce théorème résulte essentiellement de la forme des équations différentielles pour la propagation des ondes avec la vitesse de la lumière.

Sans formuler encore d'hypothèses précises sur les relations entre l'electricité et la matière, on peut s'attendre à ce que le théorème précédent étende ses conséquences de telle manière

que les lois encore inconnues relatives aux corps pondérables jouissent également de la covariance pour les transformations de Lorentz. C'est là une prévision plutôt qu'une certitude et j'appellerai cette prévision le Postulat de relativité.

Si l'on ~~envisage~~ <sup>veut</sup> ensuite à ~~établir~~ <sup>considérer</sup> la covariance aussi prévue comme une relation précise entre les grandeurs mesurables dans les corps en mouvement, on pourra nommer cette relation le principe de relativité.

Ces distinctions me paraissent nécessaires pour caractériser l'état actuel de l'Electrodynamique des corps en mouvement.

H.A. Lorentz a découvert le théorème de relativité et énoncé le postulat de relativité en même temps qu'il émit l'hypothèse que les électrons et la matière en mouvement subissent une contraction suivant une loi bien définie.

A. Einstein a mis en évidence de la manière la plus précise qu'il n'y a pas là une hypothèse arbitraire, mais une conséquence de la forme nouvelle qu'imposent à la notion de temps les faits expérimentaux.

Le principe de relativité, dans le sens que je lui ai donné, n'a pas encore été formulé pour l'Electrodynamique des corps en mouvement. Je formule ce principe dans le présent travail et j'en déduis de manière nécessaire les équations fondamentales pour les corps en mouvement. Il en résulte immédiatement qu'aucune des formes proposées jusqu'ici pour ces équations ne satisfait complètement au principe.

On aurait pu s'attendre à ce que les équations de Lorentz pour les corps en mouvement satisfassent au principe de relativité. On trouve cependant qu'il n'en est pas ainsi pour les équations générales qu'admet Lorentz pour des corps aimantés de manière quelconque; le principe est cependant satisfait de manière approximative (si l'on néglige le carré du rapport de la vitesse de la matière à la vitesse de la lumière) par les équations relatives aux corps non aimantés. Ce résultat est dû à ce que la condition de non aimantation est exprimée sous une forme qui elle-même ne satisfait pas au postulat de relativité, dû par suite à une compensation fortuite de deux contradictions au postulat de relativité. Il ne résulte de là d'ailleurs aucune objection contre les hypothèses moléculaires de Lorentz, mais simplement que la contraction de l'électron par

Suite du mouvement doit être introduite plus tôt que ne le fait Lorentz.

Dans un Appendice, j'examine la position de la Mécanique classique par rapport au postulat de relativité. Une conciliation facile de la Mécanique avec le postulat de relativité ne correspondrait à aucun changement sensible pour les phénomènes observables, mais conduirait à une conséquence surprenante : en admettant le postulat de relativité, on obtient le moyen de déduire les équations complètes de la Mécanique du principe de conservation de l'Énergie (et de l'existence des formes diverses de l'énergie)

### 1 Notations

Soit  $x, y, z, t$  un système de coordonnées dans l'espace et dans le temps : l'unité de temps est choisie de telle manière par rapport à l'unité de longueur que la vitesse de la lumière dans le vide est égale à 1.

Bien qu'il serait préférable de ne pas modifier les notations de Lorentz, il me semble important de mettre en évidence dès maintenant certaines particularités grâce à un autre choix de symboles. Je représenterai le champ électrique par  $E$

l'induction magnétique -  $M$

l'induction électrique -  $e$

le champ magnétique -  $m$

de sorte que  $E, M, e, m$  remplaceront  $E, B, D, H$  dans la notation de Lorentz.

J'emploierai de plus les variables complexes d'une manière qui n'est pas habituelle dans les recherches physiques : au lieu de  $t$  j'emploierai la combinaison  $it$  où  $i$  représente l'unité imaginaire  $\sqrt{-1}$ . D'autre part des relations essentielles seront mises en évidence par l'emploi d'indices en posant

$x_1, x_2, x_3, x_4$  au lieu de  $x, y, z, it$

et en basant là-dessus un usage général des indices 1, 2, 3, 4. J'insiste expressément sur ce fait que j'obtiens par là uniquement un moyen de rendre plus visible des relations purement réelles et qu'on obtiendra toujours immédiatement le passage aux équations réelles en donnant aux symboles portant l'indice 4 des valeurs purement imaginaires et à ceux qui ne portent aucun ou deux indices 4 des valeurs toujours réelles.



Un système particulier de valeurs  $x, y, z, t$  ou  $x_1, x_2, x_3, x_4$  s'appellera un point espace-temps

Le plus  $\vec{w}$  représente le vecteur vitesse de la matière,  $\epsilon$  la constante diélectrique,  $\mu$  la perméabilité magnétique,  $\sigma$  la conductibilité de la matière,  $\rho$  la densité électrique en volume et  $S$  un vecteur, le courant électrique dont la définition sera donnée plus loin. (7 et 8)

## Première partie

### Examen du cas limite de l'Ether

#### 2. Les équations fondamentales pour l'éther

La théorie de Lorentz, grâce à une représentation atomistique de l'électricité, ramène à des lois très simples les phénomènes électrodynamiques dans les corps pondérables. Ces lois simples correspondent au cas limite des lois relatives aux corps pondérables quand on suppose  $\epsilon = 1$   $\mu = 1$   $\sigma = 0$  d'où  $m = M$   $e = E$ , en chaque point  $(x, y, z, t)$  on doit avoir :

$$(I) \quad \text{curl } \vec{m} - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \rho \vec{w}$$

$$(II) \quad \text{div } \vec{e} = \rho$$

$$(III) \quad \text{curl } \vec{e} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = 0$$

$$(IV) \quad \text{div } \vec{m} = 0$$

Je vais employer maintenant  $x_1, x_2, x_3, x_4$  pour  $x, y, z, t$  et de plus :

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$$

pour

$$\rho w_x, \rho w_y, \rho w_z, i\rho$$

puis :

$$f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

pour

$$m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z$$

On fera enfin la convention :

c'est-à-dire:  $f_{kh} = -f_{hk}$

$$f_{32} = -f_{23}, \quad f_{13} = -f_{31}, \quad f_{21} = -f_{12}$$

$$f_{41} = -f_{14}, \quad f_{42} = -f_{24}, \quad f_{43} = -f_{34}$$

Il en résulte que les trois équations contenues dans (I) et ~~les trois~~  
l'équation contenue dans (II) après multiplication par  $i$  s'écrivent:

$$(A) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= \rho_1 \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= \rho_2 \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= \rho_3 \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} &= \rho_4 \end{aligned} \quad \text{Div } f = P$$

D'autre part, les trois équations contenues dans (III) après multiplication par  $-i$  et dans (IV) après multiplication par  $-1$  s'écrivent:

$$(B) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial f_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Div } f^* = 0$$

On voit immédiatement sous cette forme la symétrie complète de ces deux systèmes d'équations par rapport aux permutations des indices 1, 2, 3, 4.

### 3. Le théorème de relativité de Lorentz

La forme des équations (I) - (IV) écrites en notation vectorielle met en évidence la covariance des systèmes d'équations A et B par rapport à une rotation du système de coordonnées autour de l'origine. Supposons par exemple une rotation de l'angle  $\varphi$  autour de l'axe des Z, les vecteurs  $e, m, w$  conservant des

directions fixes, et introduisons au lieu de  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les nouvelles variables  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  telles que :

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \quad x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \quad x'_3 = x_3 \quad x'_4 = x_4$$

puis les nouvelles grandeurs  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$ , définies par :

$$e'_1 = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi \quad e'_2 = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi \quad e'_3 = e_3 \quad e'_4 = e_4$$

et les grandeurs  $f'_{12}, \dots, f'_{34}$  définies par :

$$f'_{12} = f_{12} \cos \varphi + f_{31} \sin \varphi \quad f'_{31} = -f_{23} \sin \varphi + f_{31} \cos \varphi \quad f'_{12} = f_{12}$$

$$f'_{14} = f_{14} \cos \varphi + f_{24} \sin \varphi \quad f'_{24} = -f_{14} \sin \varphi + f_{24} \cos \varphi \quad f'_{34} = f_{34}$$

$$f'_{kh} = -f'_{hk} \quad h, k = 1, 2, 3, 4$$

Il résulte de là qu'au système (A) correspond un système (A') et au système (B) un système (B') de même forme entre les grandeurs accentuées.

De la symétrie des systèmes (A) et (B) par rapport aux indices 1, 2, 3, 4, le théorème de relativité découvert par Lorentz résulte sans aucun calcul.

Designons par  $i\psi$  une imaginaire pure et considérons la substitution :

$$x'_1 = x_1 \quad x'_2 = x_2$$

$$x'_3 = x_3 \cos i\psi + x_4 \sin i\psi \quad x'_4 = -x_3 \sin i\psi + x_4 \cos i\psi$$

En posant :

$$-i \tanh \psi = \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{e^\psi + e^{-\psi}} = q \quad \psi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+q}{1-q}$$

il vient :

$$\cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \quad \sin i\psi = \frac{iq}{\sqrt{1-q^2}}$$

où  $-1 < q < 1$  et où  $\sqrt{1-q^2}$  doit être pris avec le signe +. Si nous remplaçons maintenant  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  par  $x', y', z', t'$ , la substitution prend la forme purement réelle :

$$(4) \quad x' = x \quad y' = y \quad z' = \frac{z - qt}{\sqrt{1-q^2}} \quad t' = \frac{t - qz}{\sqrt{1-q^2}}$$

Si nous remplaçons dans les équations obtenues plus haut pour la rotation autour de l'axe des  $z$  les indices 1, 2, 3, 4 par 3, 4, 1, 2 et en même temps  $\varphi$  par  $i\psi$ , nous trouvons qu'à condition d'introduire de nouvelles grandeurs définies par:

$$\rho'_1 = \rho_1 \quad \rho'_2 = \rho_2$$

$$\rho'_3 = \rho_3 \cos i\psi + \rho_4 \sin i\psi \quad \rho'_4 = -\rho_3 \sin i\psi + \rho_4 \cos i\psi$$

$$f'_{41} = f_{41} \cos i\psi + f_{13} \sin i\psi \quad f'_{13} = -f_{41} \sin i\psi + f_{13} \cos i\psi \quad f'_{34} = f_{34}$$

$$f'_{32} = f_{32} \cos i\psi + f_{42} \sin i\psi \quad f'_{42} = -f_{32} \sin i\psi + f_{42} \cos i\psi \quad f'_{12} = f_{12}$$

$$f'_{kh} = -f'_{hk} \quad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

le système (A) se transforme dans le système (A') et le système (B) dans le système (B') de même forme entre les grandeurs accentuées.

Toutes ces équations se mettent immédiatement sous forme réelle et on peut énoncer le résultat de la manière suivante:  
Si l'on effectue la transformation réelle (4) et si l'on pose:

$$(5) \quad \rho' = \rho \frac{1 - q w_2}{\sqrt{1 - q^2}} \quad \rho' w'_2 = \rho \frac{w_2 - q}{\sqrt{1 - q^2}}$$

$$\rho' w'_x = \rho w_x \quad \rho' w'_y = \rho w_y$$

puis:

$$(6) \quad e'_{x'} = \frac{e_x - q m_y}{\sqrt{1 - q^2}} \quad m'_{y'} = \frac{-q e_x + m_y}{\sqrt{1 - q^2}} \quad e'_{z'} = e_z$$

et

$$(7) \quad m'_{x'} = \frac{m_x + q e_y}{\sqrt{1 - q^2}} \quad e'_{y'} = \frac{q m_x + e_y}{\sqrt{1 - q^2}} \quad m'_{z'} = m_z$$

on obtient entre les vecteurs  $\vec{w}'$ ,  $\vec{e}'$ ,  $\vec{m}'$  les composantes  $w'_{x'}, w'_{y'}, w'_{z'}$ ,  $e'_{x'}, e'_{y'}, e'_{z'}$ ;  $m'_{x'}, m'_{y'}, m'_{z'}$ , les coordonnées  $x', y', z'$  et la grandeur  $\rho'$  des équations (I') - (IV') analogues à (I) - (IV)

Remarquons que  $e_x - q m_y$ ,  $e_y + q m_x$  sont les composantes du vecteur  $\vec{e} + (\vec{v} \times \vec{m})$  où  $\vec{v}$  est un vecteur dirigé suivant l'axe des  $z$  et de longueur égale à  $q$ ; de même  $m_x + q e_y$ ,  $m_y - q e_x$  sont les composantes du vecteur  $\vec{m} - (\vec{v} \times \vec{e})$ .  
Les équations (6) et (7) peuvent s'écrire sous la forme suivante:



$$e'_x + i m'_x = (e_x + i m_x) \cos i\psi + (e_y + i m_y) \sin i\psi$$

$$e'_y + i m'_y = -(e_x + i m_x) \sin i\psi + (e_y + i m_y) \cos i\psi$$

$$e'_z + i m'_z = e_z + i m_z$$

et nous pouvons remarquer de plus que si  $\varphi$  désigne un angle réel quelconque, on peut déduire de là les combinaisons:

$$(8) \quad (e'_x + i m'_x) \cos \varphi + (e'_y + i m'_y) \sin \varphi = (e_x + i m_x) \cos(\varphi + i\psi) + (e_y + i m_y) \sin(\varphi + i\psi)$$

$$(9) \quad -(e'_x + i m'_x) \sin \varphi + (e'_y + i m'_y) \cos \varphi = -(e_x + i m_x) \sin(\varphi + i\psi) + (e_y + i m_y) \cos(\varphi + i\psi)$$

#### 4 - Transformations de Lorentz particulières

Le rôle que joue la direction  $Oz$  dans la transformation (4) peut être joué par une direction quelconque, puisque les systèmes d'axes  $x, y, z$  et  $x', y', z'$  peuvent être tournés d'un angle quelconque. Ceci nous conduit à une loi plus générale.

Soit  $\vec{v}$  un vecteur de composantes  $x, y, z$  et de grandeur  $q < 1$ . Soit  $\vec{v}$  une direction quelconque  $\perp \vec{v}$ ; les composantes d'un vecteur  $\vec{r}$  suivant  $\vec{v}$  ou  $\vec{v}$  seront  $r_v$  et  $r_{\vec{v}}$ .

Au lieu de  $x, y, z, t$  introduisons  $x', y', z', t'$ , définis de la manière suivante: Soit  $\vec{r}$  le vecteur de composantes  $x, y, z$  et  $\vec{r}'$  le vecteur de composantes  $x', y', z'$ ; on aura pour la direction de  $\vec{v}$ :

$$(10) \quad r'_v = \frac{r_v - q t}{\sqrt{1 - q^2}}$$

et pour toute direction perpendiculaire:

$$(11) \quad r'_{\vec{v}} = r_{\vec{v}}$$

de plus:

$$(12) \quad t' = \frac{t - q r_v}{\sqrt{1 - q^2}}$$

Les symboles  $r'_v$  et  $r'_{\vec{v}}$  sont tels que les directions  $\vec{v}$  et  $\vec{v}$  correspondent aux mêmes cosinus directeurs dans les systèmes  $x, y, z$  et  $x', y', z'$ .

Une transformation définie par (10), (11), (12) avec la condition  $0 < q < 1$  est une transformation de Lorentz particulière.



généralisée,  $\vec{v}$  est le vecteur et la grandeur de  $\vec{v}$  le Moment de la transformation.  
 Les quantités  $\rho'$ ,  $\vec{w}'$ ,  $\vec{e}'$ ,  $\vec{m}'$  sont définies dans le système  $x', y', z'$  par :

$$(13) \quad \rho' = \frac{\rho(1 - q w_v)}{\sqrt{1 - q^2}}$$

$$(14) \quad \rho' w'_v = \frac{\rho(w_v - q)}{\sqrt{1 - q^2}} \quad \rho' w'_{\vec{v}} = \rho w_{\vec{v}}$$

$$(15) \quad (e' + i m')_{\vec{v}} = \frac{[(e + i m) - i(\vec{v} \times \vec{e} + i \vec{m})]_{\vec{v}}}{\sqrt{1 - q^2}}$$

$$(e' + i m')_v = [(\vec{e} + i \vec{m})_{\vec{v}} - i(\vec{v} \times \vec{e} + i \vec{m})]_v$$

Les équations (I) — (IV) se transforment dans les équations analogues (I') — (IV') entre les grandeurs accentuées.

La résolution des équations (10), (11), (12) conduit à :

$$(16) \quad r_v = \frac{r'_v + q t'}{\sqrt{1 - q^2}} \quad r_{\vec{v}} = r'_{\vec{v}} \quad t = \frac{t' + q r'_v}{\sqrt{1 - q^2}}$$

Ajoutons une remarque importante pour la suite sur la relation entre les vecteurs  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$ . Comme une rotation autour de l'axe des  $z$ , la transformation (4) aussi bien que la transformation plus générale (10), (11), (12) est une transformation linéaire de déterminant +1, de sorte que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + z^2 - t^2$$

se transforme en :

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \quad \text{ou} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2$$

De même, en vertu des relations (13) et (14)

$$-(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2) = \rho^2(1 - w_x^2 - w_y^2 - w_z^2) = \rho^2(1 - w^2)$$

se transforme en

en d'autres termes,  $\rho \sqrt{1 - w^2}$  est un invariant de la transformation de Lorentz.

En divisant  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  par cette quantité, nous obtenons les quatre quantités :

$$w_1 = \frac{w_x}{\sqrt{1-w^2}} \quad w_2 = \frac{w_y}{\sqrt{1-w^2}} \quad w_3 = \frac{w_z}{\sqrt{1-w^2}} \quad w_4 = \frac{i}{\sqrt{1-w^2}}$$

entre lesquelles on a la relation :

$$(19) \quad w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

Ces quatre quantités sont déterminées entièrement par le vecteur  $\vec{w}$  et inversement, quatre quantités  $w_1, w_2, w_3, w_4$  dont les trois premières sont réelles, et  $-i w_4$  réelle et positive, déterminent entièrement un vecteur  $\vec{w}$  de grandeur inférieure à l'unité.

La signification de  $w_1, w_2, w_3, w_4$  est que ce sont là les rapports de  $dx_1, dx_2, dx_3, dx_4$  à :

$$(20) \quad \sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)} = dt \sqrt{1-w^2}$$

pour la matière qui se trouve au point  $x_1, x_2, x_3, x_4$  dans le mouvement de cette matière. Si nous appliquons les équations (10), (11), (12) aux différentielles  $dx, dy, dz, dt$  et  $dx', dy', dz', dt'$ , on obtient :

$$-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) = -(dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2)$$

Dans le nouveau système, la vitesse  $\vec{w}'$  de la matière a pour composantes  $\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}$ .

De plus il est visible que le système de valeurs :

$$x_1 = w_1 \quad x_2 = w_2 \quad x_3 = w_3 \quad x_4 = w_4$$

se transforme dans le nouveau système :

$$x_1' = w_1' \quad x_2' = w_2' \quad x_3' = w_3' \quad x_4' = w_4'$$

quand on lui applique la transformation (10) (11) (12).

Si en particulier le vecteur  $\vec{v}$  est égal à la vitesse  $\vec{w}$  de la matière au point  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , il résulte de (10)(11)(12)

$$w_1' = 0 \quad w_2' = 0 \quad w_3' = 0 \quad w_4' = i$$

On obtient ainsi  $\vec{W}' = 0$  pour la vitesse transformée. La transformation considérée a ramené au repos le point  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  d'invariant  $\rho \sqrt{1 - W^2}$  est la densité au repos.

## 5. Vecteurs espace-temps de 1<sup>re</sup> et de 2<sup>e</sup> espèce

Nous avons obtenu le théorème général de relativité en déduisant la propriété principale de la transformation de Lorentz ~~généralisée~~ du fait que les systèmes (A) et (B) sont covariants pour une rotation quelconque des axes de coordonnées autour de l'origine.

Pour les formules de manière simple, il est commode de introduire certaines expressions abrégées, en même temps que nous continuerons à employer des grandeurs complexes pour mettre en évidence certaines symétries.

Une transformation linéaire homogène :

$$(21) \quad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11} x'_1 + \alpha_{12} x'_2 + \alpha_{13} x'_3 + \alpha_{14} x'_4 \\ x_2 &= \alpha_{21} x'_1 + \alpha_{22} x'_2 + \alpha_{23} x'_3 + \alpha_{24} x'_4 \\ x_3 &= \alpha_{31} x'_1 + \alpha_{32} x'_2 + \alpha_{33} x'_3 + \alpha_{34} x'_4 \\ x_4 &= \alpha_{41} x'_1 + \alpha_{42} x'_2 + \alpha_{43} x'_3 + \alpha_{44} x'_4 \end{aligned}$$

de déterminant 1, dans laquelle tous les coefficients sans indice 4 sont réels, tandis que  $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$  sont purement imaginaires, enfin où  $\alpha_{44}$  est réel, et  $> 0$ , et qui transforme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad \text{en} \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

s'appellera en général une transformation de Lorentz

Si on pose :

$$x'_1 = x' \quad x'_2 = y' \quad x'_3 = z' \quad x'_4 = it'$$

on obtient une transformation de  $x, y, z, t$  en  $x', y', z', t'$  avec des coefficients tous réels qui transforme l'expression

$$-x^2 - y^2 - z^2 + t^2 \quad \text{en} \quad -x'^2 - y'^2 - z'^2 + t'^2$$

et dans laquelle à une valeur positive de  $t$  correspond une valeur positive de  $t'$  si l'expression précédente est elle-même positive.

La dernière colonne verticale du tableau des coefficients doit satisfaire à

$$(22) \quad \alpha_{14}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1$$

Si  $\alpha_{14} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = 0$ ,  $\alpha_{44} = 1$ , la transformation de Lorentz se réduit à une simple rotation des axes de coordonnées autour de l'origine.  
 Si  $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}$  ne sont pas tous nuls, et si l'on pose :

$$\alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} : \alpha_{44} = v_x : v_y : v_z : 1$$

on déduit de (22) :

$$q = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} < 1$$

D'autre part, on peut, pour tout système de valeurs  $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}$  qui remplit la condition (22) et donne des valeurs réelles de  $v_x, v_y, v_z$ , on obtient une transformation particulière de Lorentz (16) avec  $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{44}$  dans la dernière colonne et une transformation quelconque de Lorentz avec cette même dernière colonne peut être envisagée comme résultant de la combinaison de cette transformation particulière avec une rotation quelconque des axes autour de l'origine.  
 L'ensemble de toutes les transformations de Lorentz constitue un Groupe.

Un vecteur espace-temps de 1<sup>re</sup> espèce est un système de quatre grandeurs,  $p_1, p_2, p_3, p_4$  soumis à la condition de se remplacer dans la transformation de Lorentz (21) par un système  $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4$  lié à  $p_1, p_2, p_3, p_4$  comme  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  le sont à  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Considérons avec le vecteur de 1<sup>re</sup> espèce  $x_1, x_2, x_3, x_4$  un autre vecteur de même espèce  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , et considérons la combinaison bilinéaire :

$$(23) \quad f_{23}(x_2 u_3 - x_3 u_2) + f_{31}(x_3 u_1 - x_1 u_3) + f_{12}(x_1 u_2 - x_2 u_1) \\ + f_{14}(x_1 u_4 - x_4 u_1) + f_{24}(x_2 u_4 - x_4 u_2) + f_{34}(x_3 u_4 - x_4 u_3)$$

avec six coefficients  $f_{23}, \dots, f_{34}$ .

Cette expression peut s'écrire en notation vectorielle à partir des quatre vecteurs

$$x_1, x_2, x_3; \quad u_1, u_2, u_3; \quad f_{23}, f_{31}, f_{12}; \quad f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

et des deux constantes  $x_4$  et  $u_4$ ; elle est d'autre part symétrique par rapport aux indices 1, 2, 3, 4. Si nous appliquons simultanément aux  $x$  et aux  $u$  la transformation de Lorentz (21), l'expression (23) prend la forme

$$(24) \quad f'_{23}(x'_2 u'_3 - x'_3 u'_2) + f'_{31}(x'_3 u'_1 - x'_1 u'_3) + f'_{12}(x'_1 u'_2 - x'_2 u'_1) \\ + f'_{14}(x'_1 u'_4 - x'_4 u'_1) + f'_{24}(x'_2 u'_4 - x'_4 u'_2) + f'_{34}(x'_3 u'_4 - x'_4 u'_3)$$



où les six coefficients  $f'$  dépendent des 6 coefficients  $f$  et des 16  $\alpha$ .

Un vecteur espace-temps de 2<sup>e</sup> espèce est un système de 6 grandeurs  $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$  qui est changé par la transformation de Lorentz en un système  $f'$  comme l'indique le passage de la forme (23) à la forme (24).

Le théorème général de relativité pour les équations fondamentales relatives à l'éther s'exprime de la manière suivante:

Si  $x, y, z, it$  subissent une transformation de Lorentz, si  $(W_x, W_y, W_z, i\varphi)$  se transforme comme un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce,  $m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z$  comme un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce, les équations (I) — (IV) se transforment dans les équations correspondantes en fonction des nouvelles grandeurs.

On peut dire encore:

$(\vec{W}, i\varphi)$  est un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce,  $\vec{m}, -i\vec{e}$  un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce.

Introduisons encore quelques remarques pour compléter la notion du vecteur de 2<sup>e</sup> espèce. Les expressions:

$$(25) \quad m^2 - e^2 = f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 + f_{14}^2 + f_{24}^2 + f_{34}^2$$

$$(26) \quad \vec{m} \cdot \vec{e} = i (f_{23} f_{14} + f_{31} f_{24} + f_{12} f_{34})$$

sont des invariants pour le vecteur  $(\vec{m}, -i\vec{e})$  dans le groupe des transformations de Lorentz.

Un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce  $(\vec{m}, -i\vec{e})$  où  $\vec{m}$  et  $\vec{e}$  sont des vecteurs réels sera dit singulier lorsque le produit scalaire  $(m - ie)^2 = 0$  c'est-à-dire lorsque  $m^2 - e^2 = 0$  et  $\vec{m} \cdot \vec{e} = 0$ , c.à.d. lorsque les vecteurs  $\vec{m}$  et  $\vec{e}$  sont de même grandeur et perpendiculaires l'un à l'autre. Quand il en est ainsi, cette propriété se conserve dans toutes les transformations de Lorentz.

Si le vecteur de 2<sup>e</sup> espèce  $\vec{m}, -i\vec{e}$  n'est pas singulier, nous pouvons tourner les axes de coordonnées de manière que le produit vectoriel  $\vec{m} \times \vec{e}$  coïncide avec l'axe des  $z$ , c.à.d. que  $m_z = 0, e_z = 0$  on a alors  $(m_x - ie_x)^2 + (m_y - ie_y)^2 \geq 0$ ; donc  $\frac{e_y + im_y}{e_x + im_x}$  est différent de  $\pm i$  et nous pouvons définir un argument complexe  $\varphi + i\psi$  tel que:

$$\text{tg}(\varphi + i\psi) = \frac{e_y + im_y}{e_x + im_x}$$

Il résulte des équations (9) que la transformation (1) correspondant à  $\psi$  suivie d'une rotation  $\varphi$  autour de l'axe des  $z$  donne  $e_y = 0, m_y = 0$ .



et par suite  $\vec{m}$  et  $\vec{e}$  sont dirigés tous deux suivant le nouvel axe des  $x$ , leurs grandeurs sont déterminées par les invariants  $m^2 - e^2$  et  $\vec{m} \cdot \vec{e}$ ; on verra plus loin comment déterminer s'ils sont de même sens ou de sens opposés.

## 6 - La notion de temps

La transformation de Lorentz met en évidence certaines particularités de la notion de temps. En particulier on ne peut pas parler de manière absolue de la simultanéité de deux événements. L'emploi de cette notion suppose simplement que sur les 6 paramètres qui fixent un système de référence dans l'espace et dans le temps, nous en fixons trois à l'avance. C'est seulement parce que nous avons l'habitude d'introduire cette limitation de manière à peu près implicite, que nous considérons comme ayant une signification absolue la notion de simultanéité de deux événements.

En réalité on peut réaliser les conditions suivantes:

Soit un système particulier  $x, y, z, t$ . Si nous comparons un point  $A(x_0, y_0, z_0)$  au temps  $t_0 = 0$  avec un autre point  $P(x, y, z)$  à un autre instant  $t$ , et si la différence  $t - t_0$  est plus petite que la distance  $AP$ , c.à.d. que le temps mis par la lumière pour aller de  $A$  en  $P$ , et si  $q$  est le quotient  $\frac{t - t_0}{AP} < 1$ , on peut, par la transformation particulière de Lorentz ayant  $AP$  pour axe et  $q$  pour moment, introduire un nouveau temps  $t'$  qui prendra la même valeur pour les deux points  $(A, t_0)$  et  $(P, t)$  c.à.d. réaliser la simultanéité des deux événements.

Prendons trois points  $A, B, C$  non en ligne droite au même instant  $t_0 = 0$  et comparons les à un point  $P$  extérieur au plan  $ABC$  à un instant  $t$  tel que  $t - t_0$  soit plus petit que le temps mis par la lumière pour aller du point  $P$  au plan et si  $q$  est le quotient des deux temps, on pourra en prenant pour axe d'une transformation particulière de moment  $q$  la perpendiculaire abaissée de  $P$  sur le plan, réaliser la simultanéité des quatre événements  $(A, t_0), (B, t_0), (C, t_0), (P, t)$ .

Enfin si quatre points non dans un même plan, sont considérés au même instant, il n'existe aucune transformation particulière différente de 0 qui conserve cette simultanéité.

## 2<sup>e</sup> Partie — Les phénomènes électromagnétiques.

### 7. Les équations fondamentales pour les corps en repos

Après ces indications préliminaires que nous avons développées pour le cas limite  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  à cause de la facilité des calculs, étudions les lois des phénomènes électromagnétiques dans la matière. Nous cherchons les relations qui permettent, sous certaines conditions initiales données, de trouver en fonction de  $x, y, z, t$  les vecteurs  $\vec{E}$  force électrique,  $\vec{M}$  induction magnétique,  $\vec{E}$  induction électrique,  $\vec{m}$  champ magnétique, la densité électrique  $\rho$ , le vecteur courant électrique  $\vec{s}$ , enfin le vecteur  $\vec{w}$  vitesse de la matière.

Les relations cherchées sont de deux sortes :

1° Celles ~~dans lesquelles~~ <sup>qui permettent</sup> le mouvement de la matière étant donné ( $\vec{w}$  en fonction de  $x, y, z, t$ ) de déterminer les autres grandeurs. Ce sont les équations fondamentales.

2° Les expressions des forces pondéromotrices qui permettent, par application des lois de la Mécanique, de déterminer  $\vec{w}$  en fonction de  $x, y, z, t$ .

Pour le cas des corps en repos,  $\vec{w}(x, y, z, t) = 0$ , les théories de Maxwell (Heaviside) et de Lorentz conduisent aux mêmes équations :

1° Les équations différentielles qui ne renferment aucune constante spéciale à la matière :

$$(I) \quad \text{curl } \vec{m} - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \vec{s}$$

$$(II) \quad \text{div } \vec{e} = \rho$$

$$(III) \quad \text{curl } \vec{E} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = 0$$

$$(IV) \quad \text{div } \vec{M} = 0$$

2° les relations qui déterminent l'influence de la matière ; pour les corps isotropes elles prennent la forme :

$$(V) \quad \vec{e} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{M} = \mu \vec{m} \quad \vec{s} = \sigma \vec{E}$$

$\epsilon, \mu, \sigma$  sont donnés comme fonctions de  $x, y, z, t$ ,  $\sigma$  est le courant de conduction.

On peut donner à ces équations une forme plus symétrique par l'introduction de notations convenables.

Pasons comme précédemment :

et écrivons :  $x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z \quad x_4 = it$

pour :  $S_1, S_2, S_3, S_4$

puis :  $S_x, S_y, S_z, ie$

pour :  $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$

et  $m_x, m_y, m_z, -ie_x, -ie_y, -ie_z$

pour  $F_{23}, F_{31}, F_{12}, F_{14}, F_{24}, F_{34}$

On aura de plus :  $M_x, M_y, M_z, -iE_x, -iE_y, -iE_z$

$$f_{kh} = -f_{hk}$$

$$F_{kh} = -F_{hk}$$

Les équations (I) (II) s'écrivent :

$$(A) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} &= S_1 \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_3} &= S_2 \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_3} &= S_3 \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} &= S_4 \end{aligned}$$

et les équations (III) (IV) prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} &= 0 \\ \frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$



## 8 - les équations fondamentales pour les corps en mouvement

Nous allons maintenant obtenir les équations pour des corps en mouvement quelconque en partant des trois axiomes suivants :

Le premier axiome sera :

Quand une région donnée de la matière est en repos à un moment donné, quand le vecteur  $\vec{W}$  est nul pour un système  $(x, y, z, t)$  — les régions voisines pouvant être en mouvement quelconque — les équations (A) (B) (V) entre  $x, y, z, t, \rho, \vec{S}, \vec{E}, \vec{M}, \vec{E}, \vec{M}$  doivent être satisfaites comme si toute la matière était en repos.

Le deuxième axiome sera :

La vitesse de la matière est toujours  $< 1$ , c. a. d. inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide.

Le troisième axiome sera :

Les équations fondamentales sont telles que si l'on fait subir à  $x, y, z, t$ , une transformation de Lorentz quelconque, et si  $\vec{M} - i\vec{E}$  d'une part,  $\vec{M} - i\vec{E}$  d'autre part se transforment comme des vecteurs de 2<sup>e</sup> espèce, et  $\vec{S}, i\rho$  comme un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce, les équations se transforment conservant la même forme par rapport aux nouvelles grandeurs.

Ce troisième axiome peut s'énoncer de la manière suivante :

$\vec{M} - i\vec{E}$  et  $\vec{M} - i\vec{E}$  sont chacun un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce,  $\vec{S}, i\rho$  un vecteur de première espèce.

Cet axiome énonce le principe de relativité.

Ces trois axiomes conduisent des équations pour les corps en repos aux équations pour les corps en mouvement.

D'après le deuxième axiome, la grandeur du vecteur  $\vec{W}$  est  $< 1$ . Nous pouvons donc en déduire les quatre grandeurs :

$$W_1 = \frac{W_x}{\sqrt{1-W^2}} \quad W_2 = \frac{W_y}{\sqrt{1-W^2}} \quad W_3 = \frac{W_z}{\sqrt{1-W^2}} \quad W_4 = \frac{i}{\sqrt{1-W^2}}$$

entre lesquelles on a la relation :

$$W_1^2 + W_2^2 + W_3^2 + W_4^2 = -1$$

Il résulte des propriétés indiquées à la fin de 4 que ces quatre quantités représentent un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce et nous appellerons leur ensemble le vecteur vitesse.

Considérons un point  $x, y, z$  de la matière à l'instant  $t$ . Si  $W=0$ , on a en ce point les relations indiquées par (A) (B) (V) du § 7. Si  $W \neq 0$ , il existe puisque  $W < 1$  une transformation particulière de Lorentz de vecteur  $\vec{v} = \vec{W}(x, y, z, t)$  qui nous conduit à

un nouveau système de coordonnées  $x', y', z', t'$  - Pour le point considéré, il vient :

$$(28) \quad w'_1 = 0 \quad w'_2 = 0 \quad w'_3 = 0 \quad w'_4 = i$$

Donc  $\vec{w}' = 0$  et le point considéré est ramené au repos.

D'après le troisième axiome, aux équations pour  $x, y, z, t$ , doivent correspondre pour  $x', y', z', t'$  entre les grandeurs  $w', e', \vec{s}', \vec{e}', \vec{m}', \vec{E}', \vec{M}'$ , puisque  $\vec{w}' = 0$  :

- 1) les équations (A') (B') qui se déduisent de (A) et (B) par accentuation de toutes les quantités.
- 2) les équations :

$$(V') \quad \vec{e}' = \varepsilon \vec{E}' \quad \vec{M}' = \mu \vec{m}' \quad \vec{s}' = \sigma \vec{E}'$$

En revenant maintenant aux variables primitives, nous obtiendrons les équations pour la matière en mouvement avec la vitesse  $\vec{w}$ .

Il résulte des §§ 4 et 5 que les équations (A) et (B) sont covariantes pour la transformation de Lorentz.

Donc les équations fondamentales pour les corps en mouvement ont exactement la même forme que pour les corps en repos. La vitesse de la matière n'intervient pas dans ces équations.

$$(I) \quad \text{curl } \vec{m} - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \vec{s}$$

$$(II) \quad \text{div } \vec{e} = \rho$$

$$(III) \quad \text{curl } \vec{E} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = 0$$

$$(IV) \quad \text{div } \vec{M} = 0$$

La vitesse de la matière intervient uniquement dans les relations supplémentaires qui déterminent l'influence de la matière par l'intermédiaire des quantités  $\varepsilon, \mu, \sigma$ . ~~Ensuite~~ Ramenons ces relations (V') au système initial  $x, y, z, t$ .

D'après la formule (15) du § 4 la composante de  $\vec{e}'$  suivant  $\vec{w}$  est la même que celle de  $\vec{e} + (\vec{w} \times \vec{m})$  et celle de  $\vec{m}'$  est la même que celle de  $\vec{m} - (\vec{w} \times \vec{e})$ ; pour toute direction perpendiculaire à  $\vec{w}$  les composantes de  $\vec{e}'$  et  $\vec{m}'$  sont respectivement celles de  $\vec{e} + (\vec{w} \times \vec{m})$  et  $\vec{m} - (\vec{w} \times \vec{e})$  multipliées par  $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ . D'autre part  $\vec{E}'$  et  $\vec{M}'$  sont reliés à  $\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{M})$  et  $\vec{M} - (\vec{w} \times \vec{E})$  comme  $\vec{e}'$  et  $\vec{m}'$  à  $\vec{e} + (\vec{w} \times \vec{m})$  et  $\vec{m} - (\vec{w} \times \vec{e})$ .



$$\vec{b} + (\vec{v} \times \vec{H}) = \epsilon [\vec{h} + (\vec{v} \times \vec{B})]$$

$$\vec{B} - (\vec{v} \times \vec{h}) = \mu [\vec{H} - (\vec{v} \times \vec{b})]$$

$$\vec{H} = 0$$

$$\vec{b} = \epsilon [\vec{h} + (\vec{v} \times \vec{B})]$$

$$\vec{B} - (\vec{v} \times \vec{h}) = -\mu (\vec{v} \times \vec{b})$$

$$\vec{B} = (\vec{v} \times \vec{h}) - \mu (\vec{v} \times \vec{b}) = (1 - \mu\epsilon)(\vec{v} \times \vec{h}) - \mu\epsilon \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$v_z = v$$

$$h_z = h_2 = 0$$

$$b_y = \epsilon (h_y - v\beta_2)$$

$$B_z - v h_y = -\mu v b_y = -\mu\epsilon v (h_y - v\beta_2)$$

$$\beta_2 (1 - \mu\epsilon v^2) = v h_y (1 - \mu\epsilon)$$

$$\beta_2 = \frac{v h_y (1 - \mu\epsilon)}{1 - \mu\epsilon v^2}$$

$$h_y - v\beta_2 = h_y \left[ 1 - \frac{v^2 (1 - \mu\epsilon)}{1 - \mu\epsilon v^2} \right] = h_y \frac{1 - v^2}{1 - \mu\epsilon v^2}$$

La relation  
devient donc :

$$\vec{E}' = \epsilon \vec{E}$$

$$(C) \quad \vec{E} + (\vec{w} \times \vec{m}) = \epsilon [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{M})]$$

La relation  
devient de même :

$$\vec{M}' = \mu \vec{m}$$

$$(D) \quad \vec{M} - (\vec{w} \times \vec{E}) = \mu [\vec{m} - (\vec{w} \times \vec{E})]$$

De plus, d'après les équations (12), (10), (11) du § 4 où  
 $q, r, r', t, r', r', t'$  sont à remplacer par  $w, s_w, s_{tw}, \epsilon,$   
 $s'_w, s'_{tw}, \epsilon'$  :

$$\epsilon' = \frac{\epsilon - w s_w}{\sqrt{1-w^2}} \quad s'_w = \frac{s_w - w \epsilon}{\sqrt{1-w^2}} \quad s'_{tw} = s_{tw}$$

et de  $\vec{S}' = \sigma \vec{E}'$  il résulte :

$$(E) \quad \frac{s_w - w \epsilon}{\sqrt{1-w^2}} = \sigma [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{M})]_w$$

$$s_{tw} = \frac{\sigma [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{M})]_{tw}}{\sqrt{1-w^2}}$$

Le vecteur ~~de composantes~~  $\vec{S} - \epsilon \vec{w}$  de composantes  $s_w - \epsilon w$  dans la direction  
de la vitesse et  $s_{tw}$  dans une direction  $\perp$  quelconque s'appellera  
le courant de conduction -

Remarquons que pour  $\epsilon = 1, \mu = 1$  les équations  $\vec{E}' = \vec{E}$  et  
 $\vec{m}' = \vec{m}$  conduisent à  $\vec{E} = \vec{E}$  et  $\vec{m} = \vec{m}$  et pour  $\sigma = 0$   
l'équation  $\vec{S}' = 0$  conduit à  $\vec{S} = \epsilon \vec{w}$  de telle sorte que pour  
le cas limite  $\epsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$  les relations obtenues ici redon-  
nent les équations admises au § 2 pour l'éther.

## 9 - Les équations fondamentales dans la théorie de Lorentz.

Cherchons maintenant dans quelle mesure les équations admises  
par Lorentz satisfont au principe de relativité - Ces équations sont,  
d'après l'Encyclopédie :

$$(III''') \quad \text{Curl} (\vec{H} - (\vec{w} \times \vec{E})) = \vec{I} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{w} \text{ div } \vec{D} - \text{curl} (\vec{w} \times \vec{D})$$

$$(I'') \quad \text{div } \vec{D} = \epsilon$$

$$(IV'') \quad \text{curl } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(V'') \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Pour les corps non magnétiques, Lorentz pose  $\mu = 1$   $\vec{B} = \vec{H}$  et introduit la constante diélectrique  $\epsilon$  et la conductibilité  $\sigma$  par :

$$\vec{D} - \vec{E} = (\epsilon - 1) [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})]$$

$$\vec{I} = \sigma [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})]$$

Les trois dernières des équations différentielles coïncident avec nos équations (II), (III), (IV) ; ~~la~~ la première équation, en remplaçant  $\vec{I}$  par notre courant de conduction  $\vec{S} - \vec{w} \rho$  devient :

$$(29) \quad \text{Curl} [\vec{H} - (\vec{w} \times \vec{E})] = \vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{curl} (\vec{w} \times \vec{D})$$

et se montre différente de notre équation (1)

Les équations différentielles de Lorentz ne satisfont donc pas au principe de relativité.

La forme indiquée par le principe de relativité pour la relation de non magnétisme,  $\mu = 1$  ne correspond pas à la forme de Lorentz  $\vec{B} = \vec{H}$  mais à :

$$(30) \quad \vec{B} - (\vec{w} \times \vec{E}) = \vec{H} - (\vec{w} \times \vec{D}) \text{ ou } \vec{M} - (\vec{w} \times \vec{E}) = \vec{H} - (\vec{w} \times \vec{D})$$

Si maintenant dans l'équation (29) nous faisons  $\vec{B} = \vec{H}$ , il vient en tenant compte de (30), précisément notre équation (1). Les équations différentielles de Lorentz satisfont donc pour  $\mu = 1$  au principe de relativité par compensation mutuelle de deux contradictions à ce principe.

Si, pour les corps non magnétiques, nous écrivons (30) sous la forme :

$$\vec{H} = \vec{B} + [\vec{w} \times (\vec{D} - \vec{E})]$$

et substituons dans (C) du § 8 il vient :

$$\epsilon [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] = \vec{D} + (\vec{w} \times \vec{B}) + \vec{w} \times [\vec{w} \times (\vec{D} - \vec{E})]$$

$$(\epsilon - 1) [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] = \vec{D} - \vec{E} + \vec{w} \times [\vec{w} \times (\vec{D} - \vec{E})]$$

Cette relation donne, pour la direction de  $\vec{w}$  :

$$(\epsilon - 1) [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})]_w = (\vec{D} - \vec{E})_w$$

identique à l'équation admise par Lorentz



et pour une direction  $\vec{w}$  perpendiculaire à  $\vec{w}$ ,

$(\epsilon - 1) [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] = (1 - w^2) (\vec{D} - \vec{E})_{\vec{w}}$   
 que concorde avec l'équation admise par Lorentz aux termes en  $w^2$  près.

Au même ordre d'approximation, la formule donnée par Lorentz pour  $\vec{I}$  concorde avec la relation (E) du § 8. - elle en diffère par les facteurs  $\sqrt{1-w^2}$  et  $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$  suivant qu'il s'agit des composantes  $w$  ou  $\vec{w}$ .

### 10. Les équations fondamentales d'après E. Cohn.

E. Cohn (Ann. d. Phys. 7 (4) 1902 p. 29) admet les équations :

$$(31) \quad \begin{aligned} \text{curl} [\vec{H} + (\vec{w} \times \vec{D})] &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{I} + \vec{w} \text{div} \vec{B} \\ - \text{curl} [\vec{E} - (\vec{w} \times \vec{B})] &= \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{w} \text{div} \vec{B} \end{aligned}$$

$$(32) \quad \vec{I} = \sigma \vec{E} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} - (\vec{w} \times \vec{H}) \quad \vec{B} = \mu \vec{H} + (\vec{w} \times \vec{E})$$

On peut admettre  $\text{div} \vec{B} = 0$  s'il n'y a pas de magnétisme libre. Une objection contre ces équations est que pour  $\epsilon = 1, \mu = 1$  les champs et inductions ne se confondent pas.

Si cependant nous remplaçons  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  par  $\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})$  et  $\vec{H} - (\vec{w} \times \vec{D})$  les équations de Cohn (31) se transforment dans les nôtres - et les équations (32) deviennent :

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \sigma [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] \quad \vec{D} + \vec{w} \times [\vec{H} - (\vec{w} \times \vec{D})] = \epsilon [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] \\ \vec{B} - \vec{w} \times [\vec{E} + (\vec{w} \times \vec{B})] &= \mu [\vec{H} - (\vec{w} \times \vec{D})] \end{aligned}$$

qui ne diffèrent des nôtres qu'aux termes en  $w^2$  près.

Enfin les équations admises par Hertz

$$(33) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{I} = \sigma \vec{E}$$

ne peuvent d'aucune manière s'accorder avec le principe de relativité aux termes en  $w^2$  près.



## 11. Forme abrégée des équations fondamentales

La forme de nos équations fondamentales a été déterminée par la condition de covariance pour la transformation générale de Lorentz. Il nous reste à étudier les actions pondéromotrices et les transformations de l'énergie, il n'est pas douteux que la solution de cette question doit s'obtenir par l'intermédiaire des expressions les plus simples liées aux équations fondamentales, et satisfaisant elles-mêmes à la condition de covariance.

Pour obtenir ces expressions, nous allons tout d'abord mettre les équations fondamentales sous une forme abrégée qui met en évidence leur covariance pour le groupe de Lorentz. Je me servirai dans ce but d'un procédé de calcul qui permet d'opérer de manière abrégée sur les vecteurs de première et de deuxième espèce et dont je vais donner d'abord les notations et les règles dans la mesure où elles nous seront utiles.

1° Un système de grandeurs :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & \dots & a_{pq} \end{vmatrix}$$

disposées en  $p$  lignes et  $q$  colonnes s'appelle une Matrice d'ordre  $pq$  et sera désignée par une seule lettre,  $A$ , par exemple.

Si toutes les grandeurs  $a_{hk}$  sont multipliées par un même facteur  $c$ , la matrice formée par les quantités  $c a_{hk}$  sera désignée par  $cA$ .  
Si les lignes et les colonnes sont interverties, la matrice d'ordre  $qp$  obtenue est la transposée de  $A$  et est désignée par  $\bar{A}$ .

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1q} & \dots & a_{pq} \end{vmatrix}$$

Si l'on a une deuxième matrice  $B$  avec les mêmes nombres  $p$  et  $q$  que  $A$ ,

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{vmatrix}$$

$A+B$  désignera la matrice d'ordre  $pq$  et d'éléments  $a_{hk} + b_{hk}$ .

2° Si l'on a deux matrices

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & \dots & b_{qr} \end{vmatrix}$$

pour lesquelles le nombre des lignes de la deuxième est égal au nombre des colonnes de la première, on appellera produit  $AB$  la matrice :

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \dots & c_{pr} \end{vmatrix}$$

dont les éléments s'obtiennent par combinaison des lignes de  $A$  avec les colonnes de  $B$  de la manière suivante :

$$c_{hk} = a_{h1}b_{1k} + \dots + a_{hp}b_{pk} \quad \left. \begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, r \end{array} \right\}$$

Pour un tel produit, on a le théorème d'associativité :

$$(AB)S = A(BS)$$

où  $S$  est une troisième matrice ayant autant de lignes que  $B$  (et par conséquent  $AB$ ) a de colonnes.

Pour la transposée de  $C = AB$ , on a  $\bar{C} = \bar{B}\bar{A}$

3° On n'utilisera ici que des matrices ayant au plus quatre lignes et quatre colonnes.

La matrice unité (représentée par 1) est la matrice d'ordre  $4 \times 4$  :

$$(34) \quad \begin{vmatrix} e_{11} & \dots & e_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{41} & \dots & e_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Le multiple  $C.1$  de la matrice unité sera désigné par  $C$ .

Pour une matrice  $A$  d'ordre  $4 \times 4$ ,  $\text{Det } A$  représentera le déterminant formé des éléments de la matrice. Si  $\text{Det } A \neq 0$ , il correspond à  $A$  une matrice reciproque  $A^{-1}$  telle que  $A^{-1}A = 1$ .

Une matrice :

$$f = \begin{vmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14}^E \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

où les éléments satisfont à la condition  $f_{kh} = -f_{hk}$ , est une matrice alternée. Cette condition implique  $f = -f^T$ .

Nous désignerons par  $f^x$  la matrice associée de  $f$ , formée de la manière suivante :

$$(35) \quad f^* = \begin{vmatrix} 0 & f_{34} & f_{42} & f_{23} \\ f_{43} & 0 & f_{14} & f_{31} \\ f_{24} & f_{41} & 0 & f_{12} \\ f_{32} & f_{13} & f_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

Il résulte de là :

$$(36) \quad f^* f = f_{32} f_{14} + f_{13} f_{24} + f_{21} f_{34}$$

c.a.d. une matrice d'ordre  $4 \times 4$  dont tous les éléments en dehors de la diagonale principale sont nuls et dont tous les éléments de cette diagonale sont égaux à la combinaison (36) des éléments de  $f$ . Le déterminant de  $f$  est égal au carré de cette combinaison et nous poserons :

$$(37) \quad \text{Det } f = f_{32} f_{14} + f_{13} f_{24} + f_{21} f_{34}$$

4° Une transformation linéaire :

$$(38) \quad x_h = \alpha_{h1} x'_1 + \alpha_{h2} x'_2 + \alpha_{h3} x'_3 + \alpha_{h4} x'_4 \quad h = (1, 2, 3, 4)$$

est caractérisée par la matrice d'ordre  $4 \times 4$  :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

et s'appellera la transformation  $A$ . L'expression :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

se transforme en :

$$\sum a_{hk} x'_h x'_k \quad (h, k = 1, 2, 3, 4)$$

où :

$$a_{hk} = \alpha_{1h} \alpha_{1k} + \alpha_{2h} \alpha_{2k} + \alpha_{3h} \alpha_{3k} + \alpha_{4h} \alpha_{4k}$$

si la matrice symétrique d'ordre  $4 \times 4$  des coefficients  $a_{hk}$  est le produit  $\bar{A}A$  de la transposée de  $A$  par  $A$ . Si la transformation doit donner :

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$$

on doit avoir :

$$(39) \quad \bar{A}A = 1$$

$A$  doit satisfaire à cette relation si (38) est une transformation de Lorentz.

Il résulte de (39) que :

$$(\text{Det } A)^2 = 1 \quad \text{Det } A = \pm 1$$



La condition  $A f' = f A$  ou  $f' = A^{-1} f A$  résulte immédiatement de la nécessité d'invariance des équations (A) § 2.



la condition (39) équivaut à :

$$(40) \quad A^{-1} = \bar{A}$$

La matrice réciproque de  $A$  se confond avec la transposée de  $A$ .  
Pour que  $A$  soit une transformation de Lorentz, nous ajouterons les conditions suivantes :  $\text{Det } A = +1$ ,  $\alpha_{14}, \alpha_{24}, \alpha_{34}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43}$  sont imaginaires purs, les autres éléments sont réels et  $\alpha_{44} > 0$ .

5° - Un vecteur de première espèce,  $s_1, s_2, s_3, s_4$  sera représenté par la matrice d'ordre  $1 \times 4$  de ses composantes :

$$(41) \quad s = | s_1, s_2, s_3, s_4 |$$

et est remplacé par  $sA$  dans une transformation de Lorentz.

Un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce de composantes  $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$  sera représenté par la matrice :

$$(42) \quad f = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

et doit (suivant la règle posée dans (23) et (24) du § 5) être remplacé dans la transformation de Lorentz par  $\bar{A}fA$  ou  $A^{-1}fA$ .  
On a d'ailleurs identiquement :

$$\text{Det}^{\frac{1}{2}}(\bar{A}fA) = \text{Det } A \text{ Det}^{\frac{1}{2}}f = \text{Det}^{\frac{1}{2}}f$$

Donc  $\text{Det}^{\frac{1}{2}}f$  est un invariant de la transformation de Lorentz.  
Pour la matrice associée  $f^*$ , il résulte de (36) :

$$(A^{-1}f^*A)(A^{-1}fA) = A^{-1}f^*fA = \text{Det}^{\frac{1}{2}}f A^{-1}A = \text{Det}^{\frac{1}{2}}f$$

Donc l'associée de la transformée est la transformée de l'associée. La matrice associée ~~est donc~~ d'un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce est donc aussi un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce ; la matrice  $f^*$  de composantes  $f_{14}, f_{24}, f_{34}, f_{23}, f_{31}, f_{12}$  est le vecteur associé de  $f$ .

6° - Si  $w$  et  $s$  sont deux vecteurs de 1<sup>re</sup> espèce, on représentera par  $w\bar{s}$  ou  $s\bar{w}$  la combinaison :

$$(43) \quad w_1s_1 + w_2s_2 + w_3s_3 + w_4s_4$$

Par une transformation de Lorentz  $A$ ,  $w\bar{s}$  devient  $(wA)(\bar{A}s) = w\bar{s}$

Cette combinaison est donc un invariant - Si  $W\bar{S} = 0$ ,  $W$  et  $S$  sont des vecteurs normaux l'un à l'autre.

Deux vecteurs de première espèce  $W, S$  fournissent la matrice d'ordre  $2 \times 4$  :

$$\begin{vmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix}$$

On voit facilement que le système des six grandeurs :

$$(44) \quad W_2 S_3 - W_3 S_2, \quad W_3 S_1 - W_1 S_3, \quad W_1 S_2 - W_2 S_1, \quad W_1 S_4 - W_4 S_1, \quad W_2 S_4 - W_4 S_2, \quad W_3 S_4 - W_4 S_3$$

se comporte comme un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce. Ce vecteur sera représenté par  $[W, S]$ . On voit facilement que  $\text{Det}^\varepsilon [W, S] = 0$ . Le vecteur associé de  $[W, S]$  s'écrit  $[W, S]^*$ .

Si  $W$  est un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce et  $f$  un vecteur de 2<sup>e</sup>,  $Wf$  représente une matrice d'ordre  $4 \times 4$ . Comme par la transformation de Lorentz  $A$ ,  $W$  devient  $W' = WA$  et  $f$  devient  $f' = A^{-1}fA$ ,  $Wf$  devient  $WAA^{-1}fA = (Wf)A$ . Cette matrice se transforme donc comme un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce.

Si  $W$  est un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce et  $f$  un vecteur de 2<sup>e</sup>, on vérifie facilement l'identité :

$$(45) \quad [W, Wf] + [W, Wf^*]^* = (W\bar{W})f$$

En effet, pour  $W_1 = 0, W_2 = 0, W_3 = 0, W_4 = i$  on a :

$$Wf = \begin{vmatrix} if_{41} & if_{42} & if_{43} & 0 \end{vmatrix} \quad Wf^* = \begin{vmatrix} if_{32} & if_{13} & if_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

$$[W, Wf] = 0, 0, 0, f_{41}, f_{42}, f_{43} \quad [W, Wf^*]^* = 0, 0, 0, f_{32}, f_{13}, f_{21}$$

La relation (45) est donc évidente dans ce cas particulier, et est générale puisqu'elle est de forme covariante pour le groupe de Lorentz et homogène en  $W_1, W_2, W_3, W_4$ .

Après ces préliminaires, occupons-nous d'abord des équations (C)(D)(E) qui introduisent les constantes  $\varepsilon, \mu, \bar{v}$  :

Au lieu du vecteur  $\bar{W}$ , vitesse de la matière, introduisons le vecteur de 1<sup>re</sup> espèce  $W$  avec les quatre composantes :

$$W_1 = \frac{W_x}{\sqrt{1-W^2}} \quad W_2 = \frac{W_y}{\sqrt{1-W^2}} \quad W_3 = \frac{W_z}{\sqrt{1-W^2}} \quad W_4 = \frac{i}{\sqrt{1-W^2}}$$

Il résulte de là :

$$w \bar{w} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1 \quad \text{avec} \quad -i w_4 > 0$$

Nous désignons par  $F$  et  $f$  les deux vecteurs de 2<sup>e</sup> espèce,  $(\vec{M}, i\vec{E})$  et  $(\vec{m}, -i\vec{e})$

$\Phi = -wF$  est un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce de composantes :

$$\Phi_1 = w_2 F_{12} + w_3 F_{13} + w_4 F_{14}$$

$$\Phi_2 = w_1 F_{21} + w_3 F_{23} + w_4 F_{24}$$

$$\Phi_3 = w_1 F_{31} + w_2 F_{32} + w_4 F_{34}$$

$$\Phi_4 = w_1 F_{41} + w_2 F_{42} + w_3 F_{43}$$

Les trois premières quantités  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , sont les composantes du vecteur :

$$(47) \quad \frac{\vec{E} + \vec{w} \times \vec{M}}{\sqrt{1-w^2}}$$

on a, de plus,

$$(48) \quad \Phi_4 = \frac{i(\vec{w} \cdot \vec{E})}{\sqrt{1-w^2}}$$

Comme la matrice  $F$  est alternée, on a d'ailleurs :

$$(49) \quad w\bar{\Phi} = w_1\Phi_1 + w_2\Phi_2 + w_3\Phi_3 + w_4\Phi_4 = 0$$

Le vecteur  $\Phi$  est donc normal à  $w$  ; on peut encore écrire cette relation :

$$(50) \quad \Phi_4 = i(w_2\Phi_1 + w_3\Phi_2 + w_4\Phi_3)$$

Le vecteur de première espèce  $\Phi$  s'appellera le Champ électrique au repos.

Des relations analogues existent entre  $-wf, \vec{e}, \vec{m}, \vec{w}$  et entre  $-wF, \vec{E}, \vec{M}, \vec{w}$  ; en particulier  $-wf$  est normal à  $w$ . La relation (C) peut se mettre sous la forme :

$$[C] \quad wf = \epsilon wF$$



qui résume quatre équations dont la quatrième, en vertu de (50) est une conséquence des trois premières.

Formons le vecteur de 1<sup>re</sup> espèce  $\Psi = i w f^*$  dont les composantes sont :

$$\Psi_1 = -i (w_2 f_{34} + w_3 f_{42} + w_4 f_{23})$$

$$\Psi_2 = -i (w_1 f_{43} + w_3 f_{14} + w_4 f_{31})$$

$$\Psi_3 = -i (w_1 f_{24} + w_2 f_{41} + w_4 f_{12})$$

$$\Psi_4 = -i (w_1 f_{32} + w_2 f_{23} + w_3 f_{21})$$

Les trois premières quantités  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  sont les composantes du vecteur :

$$(51) \quad \frac{\vec{m} - \vec{w} \times \vec{e}}{\sqrt{1-w^2}}$$

de plus :

$$(52) \quad \Psi_4 = \frac{i \vec{w} \cdot \vec{m}}{\sqrt{1-w^2}}$$

Entre ces quantités, on a les relations :

$$(53) \quad w \bar{\Psi} = w_1 \Psi_1 + w_2 \Psi_2 + w_3 \Psi_3 + w_4 \Psi_4 = 0$$

ou

$$(54) \quad \Psi_4 = i (w_1 \Psi_1 + w_2 \Psi_2 + w_3 \Psi_3)$$

Le vecteur  $\Psi$  est donc aussi normal à  $w$  ; on l'appellera le Champ magnétique au repos.

On a entre  $i w F^*$ ,  $M$ ,  $E$ ,  $w$  des relations analogues à celles qui existent entre  $i w f^*$ ,  $\vec{m}$ ,  $\vec{e}$ ,  $\vec{w}$  et la relation (D) peut s'écrire :

$$[D] \quad w F^* = \mu w f^*$$

On peut résoudre les équations (C) et (D) pour exprimer  $f$  et  $F$  en fonction de  $\Phi$  et  $\Psi$ . On a :

$$w F = -\Phi \quad w F^* = i \mu \Psi \quad w f = -\varepsilon \Phi \quad w f^* = -i \Psi$$

La règle (45) donne, en tenant compte de (46) :

$$(55) \quad F = [w, \Phi] + i \mu [w, \Psi]^*$$

$$(56) \quad f = \varepsilon [w, \Phi] + i [w, \Psi]^*$$



c'est à dire :

$$F_{12} = (w_1 \bar{\Phi}_2 - w_2 \bar{\Phi}_1) + i\mu (w_3 \psi_4 - w_4 \psi_3) \quad \text{etc.}$$

$$f_{12} = \varepsilon (w_1 \bar{\Phi}_2 - w_2 \bar{\Phi}_1) + i (w_3 \psi_4 - w_4 \psi_3)$$

Considérons maintenant le vecteur de 2<sup>e</sup> espèce  $[\Phi, \Psi]$  de composantes :

$$\begin{array}{lll} \Phi_2 \psi_3 - \Phi_3 \psi_2 & \Phi_3 \psi_1 - \Phi_1 \psi_3 & \Phi_1 \psi_2 - \Phi_2 \psi_1 \\ \Phi_1 \psi_4 - \Phi_4 \psi_1 & \Phi_2 \psi_4 - \Phi_4 \psi_2 & \Phi_3 \psi_4 - \Phi_4 \psi_3 \end{array}$$

Le vecteur correspondant de 1<sup>re</sup> espèce :

$$w [\Phi, \Psi] = - (w \bar{\Psi}) \bar{\Phi} + (w \bar{\Phi}) \bar{\Psi}$$

S'annule identiquement à cause de (49) et (53).  
Le vecteur de première espèce :

$$(57) \quad \Omega = i w [\Phi, \Psi]^*$$

de composantes :

$$\Omega_1 = -i \begin{vmatrix} w_2 & w_3 & w_4 \\ \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

donne, par application de la règle (45).

$$(58), \quad [\Phi, \Psi] = i [w, \Omega]^*$$

c. à d. :

$$\Phi_1 \psi_2 - \Phi_2 \psi_1 = i (w_3 \Omega_4 - w_4 \Omega_3) \quad \text{etc.}$$

Le vecteur  $\Omega$  satisfait évidemment à :

$$(59) \quad (w \bar{\Omega}) = w_1 \Omega_1 + w_2 \Omega_2 + w_3 \Omega_3 + w_4 \Omega_4 = 0$$

ou :

$$\Omega_4 = i (w_1 \Omega_2 + w_2 \Omega_3 + w_3 \Omega_4) \quad \text{Si } \vec{w} = 0 \text{ on a } \Phi_4 = 0 \quad \psi_4 = 0 \quad \Omega_4 = 0 \text{ et}$$

$$(60) \quad \Omega_1 = \Phi_2 \psi_3 - \Phi_3 \psi_2 \quad \Omega_2 = \Phi_3 \psi_1 - \Phi_1 \psi_3 \quad \Omega_3 = \Phi_1 \psi_2 - \Phi_2 \psi_1$$

Le vecteur de première espèce  $\Omega$  sera le rayonnement au repos.

Pour ce qui concerne la relation (E) par laquelle s'introduit la conductibilité  $\sigma$ , on reconnaît tout d'abord que :

$$-W\bar{S} = -(w_1s_1 + w_2s_2 + w_3s_3 + w_4s_4) = \frac{\rho - wS_w}{\sqrt{1-w^2}} = \rho'$$

représente la densité au repos de l'électricité.

La quantité :

$$(61) \quad S + (W\bar{S})w$$

est un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce qui s'appellera le courant au repos, et qui est normal à  $w$  à cause de  $w\bar{w} = -1$ . Si nous considérons comme un vecteur ordinaire les trois premières composantes de ce vecteur de première espèce, la composante de celui-ci dans la direction de  $w$  est :

$$S_w - \frac{\rho'w}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{S_w - \rho w}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{I_w}{1-w^2}$$

et la composante dans une direction perpendiculaire à  $w$  est :

$$S_{\bar{w}} = I_{\bar{w}}$$

où  $\bar{I} = \bar{S} - \rho\bar{w}$  est le courant de conduction défini au § 8

Par comparaison avec  $\Phi = -wF$ , la relation (E) peut s'écrire :

$$[E] \quad S + (W\bar{S})w = -\sigma wF$$

Cette formule équivaut à quatre équations dont la dernière est une conséquence des trois premières puisqu'il s'agit de vecteurs normaux à  $w$ .

Il reste enfin à mettre sous forme abrégée les équations différentielles (A) et (B).

## 12. L'opérateur différentiel lor.

Une matrice d'ordre  $4 \times 4$  :

$$(62) \quad S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = |S_{kk}|$$

Satisfaisant à la condition d'être remplacée dans la transformation de

Lorentz par  $\bar{A}SA$  s'appellera une matrice de 2<sup>e</sup> espèce. On obtient en particulier de semblables matrices :

Dans la matrice alternée  $f$  qui correspond à un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce.

Dans le produit  $fF$  de deux semblables matrices, qui est remplacé dans la transformation par  $(A^{-1}fA)(A^{-1}FA) = A^{-1}fFA$

Si  $w_1, w_2, w_3, w_4, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$  sont deux vecteurs de 1<sup>re</sup> espèce, dans la matrice des  $4 \times 4$  éléments  $S_{hk} = w_h \Omega_k$

Enfin dans un multiple  $I$  de la matrice unité, c'est-à-dire dans une matrice d'ordre  $4 \times 4$  où tous les éléments de la diagonale principale ont une même valeur  $I$  et où tous les autres éléments sont nuls.

Nous avons toujours à nous occuper de fonctions de  $x, y, z, t$ , et nous pouvons considérer utilement la matrice d'ordre  $1 \times 4$  composée de symboles de différentiation :

$$\text{ou : } \text{lor} = \left| \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t} \right|$$

$$\text{lor} = \left| \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right|$$

Si  $S$  est une matrice de 2<sup>e</sup> espèce, on représentera par  $\text{lor } S$  la matrice d'ordre  $1 \times 4$  :

$$\left| K_1, K_2, K_3, K_4 \right|$$

où :

$$(64) \quad K_h = \frac{\partial S_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2h}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3h}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4h}}{\partial x_4} \quad h = (1, 2, 3, 4)$$

Si l'on introduit, par transformation de Lorentz, un nouveau système de référence  $x', y', z', t'$  ou  $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$  on aura :

$$\text{lor}' = \left| \frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3}, \frac{\partial}{\partial x'_4} \right|$$

$S$  se transformant en  $S' = A^{-1}SA$  on représentera par  $\text{lor}' S'$  la matrice d'ordre  $1 \times 4$  formée à partir de :

$$K'_h = \frac{\partial S'_{1h}}{\partial x'_1} + \frac{\partial S'_{2h}}{\partial x'_2} + \frac{\partial S'_{3h}}{\partial x'_3} + \frac{\partial S'_{4h}}{\partial x'_4} \quad h = (1, 2, 3, 4)$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{\partial}{\partial x'_h} = \alpha_{1h} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_{2h} \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_{3h} \frac{\partial}{\partial x_3} + \alpha_{4h} \frac{\partial}{\partial x_4}$$



D'où:

$$\text{lor}' = \text{lor} \cdot A$$

Il en résulte:

$$\text{lor}' S' = \text{lor} A A^{-1} S A = \text{lor} (S A) = (\text{lor} S) A$$

Donc si  $S$  représente une matrice de 2<sup>e</sup> espèce,  $\text{lor} S$  se comporte comme un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce.

En particulier, si  $I$  est un multiple de la matrice unité,  $\text{lor} I$  représente la matrice des éléments:

$$(66) \quad \left| \frac{\partial L}{\partial x_1}, \frac{\partial L}{\partial x_2}, \frac{\partial L}{\partial x_3}, \frac{\partial L}{\partial x_4} \right|$$

Si  $S = |s_1, s_2, s_3, s_4|$  est un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce, on aura:

$$(67) \quad \text{lor } \bar{S} = \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_3}{\partial x_3} + \frac{\partial S_4}{\partial x_4}$$

Si une transformation de Lorentz introduit  $\text{lor}'$  et  $S'$  pour  $\text{lor}$  et  $S$  on a:

$$\text{lor}' \bar{S}' = (\text{lor} A) (\bar{A} \bar{S}) = \text{lor } \bar{S}$$

$\text{lor } \bar{S}$  est donc un invariant de la transformation de Lorentz.

Dans toutes ces relations, le symbole  $\text{lor}$  joue le rôle d'un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce.

Si  $f$  est un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce,  $-\text{lor} f$  représente le vecteur de première espèce de composantes:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} \\ & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_3} \\ & \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_3} \\ & \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Le système des équations différentielles (A) se met donc sous la forme abrégée:

Le système des équations [A]  $\text{lor} f = -s$  s'écrit de la même manière:

$$[B] \quad \text{lor } F^* = 0$$



Les expressions  $\text{lor}(\overline{\text{lor } f})$  et  $\text{lor}(\overline{\text{lor } F^*})$  s'annulent identiquement. Il en résulte pour le courant  $S$  la condition:

$$(68) \quad \text{lor } \bar{S} = \frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S_3}{\partial x_3} + \frac{\partial S_4}{\partial x_4} = 0$$

tandis que la relation

$$(69) \quad \text{lor}(\overline{\text{lor } F^*}) = 0$$

signifie que sur les quatre équations contenues dans [B], trois seulement sont indépendantes.

On peut résumer ces résultats de la manière suivante:

Si  $W$  représente le vecteur de première espèce  $\frac{\vec{W}}{\sqrt{1-W^2}}$ ,  $\frac{i}{\sqrt{1-W^2}}$ ,  $F$  le vecteur de 2<sup>e</sup> espèce  $\vec{M}$ ,  $-i\vec{E}$ ,  $f$  le vecteur de 2<sup>e</sup> espèce  $\vec{m}$ ,  $-i\vec{e}$ ,  $S$  le vecteur de 1<sup>re</sup> espèce  $\vec{S}$ ,  $ip$  ( $\rho$  densité électrique,  $\vec{S} = \rho \vec{W}$  courant de conduction)  $\epsilon$  la constante diélectrique,  $\mu$  la perméabilité,  $\sigma$  la conductibilité, les équations fondamentales pour les phénomènes électromagnétiques dans les corps en mouvement s'écrivent:

$$[A] \quad \text{lor } f = -S$$

$$[B] \quad \text{lor } F^* = 0$$

$$[C] \quad wf = \epsilon w F$$

$$[D] \quad w F^* = \mu w f^*$$

$$[E] \quad S + (w\bar{S})w = -\sigma w F$$

$w\bar{w} = -1$ ; les vecteurs de 1<sup>re</sup> espèce  $wF$ ,  $wf$ ,  $wF^*$ ,  $wf^*$ ,  $S + (w\bar{S})w$  sont tous normaux à  $W$ . et enfin les équations contenues dans [B] sont liées par la condition:

$$\text{lor}(\overline{\text{lor } F^*}) = 0$$

En tenant compte des conditions imposées, on voit que ces relations fournissent le nombre d'équations nécessaires pour déterminer les phénomènes correspondant à des conditions initiales données lorsque le mouvement de la matière est donné ( $\vec{W}$  donné en fonction de  $x, y, z, t$ )

### 13 - Le produit de vecteurs $fF$

Cherchons enfin les relations qui déterminent le vecteur  $w$  en fonction de  $x, y, z, t$ . Dans cette recherche, le rôle essentiel est joué par le produit des deux matrices alternées :

$$f = \begin{pmatrix} 0 & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & 0 & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & 0 & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

Envions :

$$fF = \begin{pmatrix} S_{11} - I_1 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} - L & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - L & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} - L \end{pmatrix}$$

de telle façon que :

$$S_{11} + S_{22} + S_{33} + S_{44} = 0$$

De cette façon,  $I_1$  représente la combinaison symétrique par rapport aux indices 1, 2, 3, 4 :

$$(72) \quad I_1 = \frac{1}{2} [f_{23} F_{23} + f_{31} F_{31} + f_{12} F_{12} + f_{14} F_{14} + f_{24} F_{24} + f_{34} F_{34}]$$

et l'on a :

$$S_{11} = \frac{1}{2} [f_{23} F_{23} + f_{34} F_{34} + f_{42} F_{42} - f_{12} F_{12} - f_{13} F_{13} - f_{14} F_{14}]$$

$$S_{12} = f_{13} F_{32} + f_{14} F_{42}$$

Pour mettre en évidence les caractères de réalité écrivons :

$$(74) \quad S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & X_y & Z_x & -iT_x \\ X_y & Y_y & Z_y & -iT_y \\ X_z & Y_z & Z_z & -iT_z \\ -iX_t & -iY_t & -iZ_t & T_t \end{pmatrix}$$

où :

$$X_x = \frac{1}{2} (m_x M_x + m_y M_y - m_z M_z + e_x E_x - e_y E_y - e_z E_z)$$

$$X_y = m_x M_y + e_x E_y \quad Y_x = m_y M_x + e_y E_x$$

(75)

$$X_z = e_y M_z - e_z M_y$$

$$T_x = m_z E_y - m_y E_z$$

$$T_t = \frac{1}{2} (m_x M_x + m_y M_y + m_z M_z + e_x E_x + e_y E_y + e_z E_z)$$

et :

$$(76) \quad \bar{L} = \frac{1}{2} (m_x M_x + m_y M_y + m_z M_z - e_x E_x - e_y E_y - e_z E_z)$$

sont des quantités toutes réelles. Dans les équations pour les corps en repos, les combinaisons  $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, T_x, T_y, T_z$  sont les tensions de Maxwell,  $T_x, T_y, T_z$  les composantes du vecteur de Poynting,  $T_t$  la densité de l'énergie par unité de volume et  $\bar{L}$  la fonction de Lagrange -

se produit dans l'ordre inverse des matrices associées à  $f$  et  $F$  donne :

$$(77) \quad F^* f^* = \begin{pmatrix} -S_{11} - \bar{L} & -S_{12} & -S_{13} & -S_{14} \\ -S_{21} & -S_{22} - \bar{L} & -S_{23} & -S_{24} \\ -S_{31} & -S_{32} & -S_{33} - \bar{L} & -S_{34} \\ -S_{41} & -S_{42} & -S_{43} & -S_{44} - \bar{L} \end{pmatrix}$$

On peut écrire :

$$(78) \quad f F = S - \bar{L} \quad F^* f^* = -S - \bar{L}$$

$\bar{L}$  représentant le produit par  $\bar{L}$  de la matrice unité, c'est-à-dire la matrice des éléments :

$$(\bar{L} e_{hk}) \quad (e_{hh} = 1 \quad e_{hk} = 0 \quad h \neq k)$$

Nous déduisons de là, puisque  $SL = \bar{L}S$  :

$$F^* f^* f F = (-S - \bar{L})(S - \bar{L}) = -SS + \bar{L}^2$$

et comme :

$$f^* f = \text{Det } f \quad F^* F = \text{Det } F$$

$$SS = \bar{L}^2 - \text{Det } f \text{ Det } F$$

Donc, le produit de la matrice  $S$  par elle-même est un multiple de l'unité



On a donc les relations :

$$(80) \quad S_{h1} S_{1k} + S_{h2} S_{2k} + S_{h3} S_{3k} + S_{h4} S_{4k} = 0 \quad \text{pour } h \neq k$$

$$(81) \quad S_{h1} S_{1h} + S_{h2} S_{2h} + S_{h3} S_{3h} + S_{h4} S_{4h} = I_1 - \text{Det}^{\frac{1}{2}} f \text{Det}^{\frac{1}{2}} F$$

Si nous remplaçons  $f$  et  $F$  par leurs expressions en fonction du  $\frac{1}{2}$  champ électrique au repos  $\Phi$ , du champ magnétique au repos  $\Psi$  et du rayonnement au repos  $\Omega$ , nous obtenons :

$$(82) \quad I_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon \Phi \bar{\Phi} + \frac{1}{2} \mu \Psi \bar{\Psi}$$

$$(83) \quad S_{hk} = -\frac{1}{2} \varepsilon \Phi \bar{\Phi} e_{hk} - \frac{1}{2} \mu \Psi \bar{\Psi} e_{hk} + \varepsilon (\Phi_h \bar{\Phi}_k - \Phi \bar{\Phi} w_h w_k) + \mu (\Psi_h \bar{\Psi}_k - \Psi \bar{\Psi} w_h w_k) - \Omega_h w_k - \varepsilon \mu w_h \Omega_k$$

où l'on doit poser :

$$\Phi \bar{\Phi} = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2 \quad \Psi \bar{\Psi} = \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \Psi_3^2 + \Psi_4^2$$

$$e_{hk} = 0 \quad (h \neq k) \quad e_{hh} = 1$$

$I_1$  est un invariant de la transformation de Lorentz et la matrice  $S$  est une matrice de 2<sup>e</sup> espèce ( $S = f\bar{F} + I_1$ ) comme ~~différence~~ somme de deux matrices de 2<sup>e</sup> espèce.

Le deuxième membre de (81) peut s'écrire :

$$I_1 - \text{Det}^{\frac{1}{2}} f \text{Det}^{\frac{1}{2}} F = \left[ \frac{1}{2} (\vec{w} \vec{M} - \vec{E} \vec{E}) \right]^2 + (\vec{E} \vec{w})(\vec{E} \vec{M})$$

et, sous cette forme, se montre essentiellement  $> 0$ , la racine carrée peut s'écrire  $\text{Det}^{\frac{1}{4}} S$

Comme  $\bar{F} = -F$ ,  $\bar{f} = -f$ , on a :

$$(84) \quad Ff = \bar{S} - I \quad f^* F^* = -\bar{S} - I$$

$S - \bar{S} = |S_{hk} - S_{kh}|$  est une matrice alternée et représente un vecteur de 2<sup>e</sup> espèce. On déduit immédiatement de (83) :

$$(85) \quad S - \bar{S} = -(\varepsilon\mu - 1) [w, \Omega]$$

d'où, d'après (57)(58) :

$$(86) \quad w (S - \bar{S})^* = 0$$

$$(87) \quad w (S - \bar{S}) = (\varepsilon\mu - 1) \Omega$$



Lorsqu'on pour un point  $(x, y, z, t)$  la matière est en repos ( $\vec{w}=0$ ), la relation (86) signifie que :

$$Z_y = Y_z \quad X_z = Z_x \quad Y_x = X_y$$

On a, de plus, d'après (83) :

$$T_x = \Omega_1 \quad T_y = \Omega_2 \quad T_z = \Omega_3$$

$$X_t = \varepsilon\mu\Omega_1 \quad Y_t = \varepsilon\mu\Omega_2 \quad Z_t = \varepsilon\mu\Omega_3$$

Par une rotation des axes autour de l'origine, on peut faire en sorte que :

$$\text{d'après (71) on a :} \quad Z_y = Y_z = 0 \quad X_z = Z_x = 0 \quad Y_x = X_y = 0$$

$$(88) \quad X_x + Y_y + Z_z + T_t = 0 \quad \text{avec } T_t > 0$$

Dans le cas particulier où  $\Omega$  est nul, on a :

$$X_x^2 = Y_y^2 = Z_z^2 = T_t^2 = (\text{Det}^{\frac{1}{2}} S)^2$$

$T_t$  et l'une des trois autres grandeurs vaut  $+\text{Det}^{\frac{1}{2}} S$  et les deux autres valent  $-\text{Det}^{\frac{1}{2}} S$ .

Si  $\Omega$  ne s'annule pas, si par exemple  $\Omega_3 \neq 0$ , on a d'après (80)

$$T_z X_t = 0 \quad T_z Y_t = 0 \quad Z_z T_z + T_z T_t = 0$$

on en déduit  $\Omega_1 = 0 \quad \Omega_2 = 0 \quad Z_z = -T_t$ . Il résulte de (81) et (88) :

$$X_x = -Y_y = \pm \text{Det}^{\frac{1}{2}} S$$

$$-Z_z = T_t = \sqrt{\text{Det}^{\frac{1}{2}} S + \varepsilon\mu\Omega_3^2} > \text{Det}^{\frac{1}{2}} S$$

L'expression  
(89)

$$K = \text{lor } S$$

qui est un vecteur de 1<sup>re</sup> espèce, a une importance particulière et peut se mettre sous une forme intéressante.

D'après (78) on a  $S = I + fF$  d'où :

$$\text{lor } S = \text{lor } I + \text{lor } fF$$

Le symbole  $\text{lor}$  correspond à une différentiation qui porte sur des produits de composantes de  $f$  par des composantes de  $F$ .  $\text{lor } fF$  se décompose donc en une somme de deux parties dont la première est  $(\text{lor } f)F$  où  $\text{lor } f$  est une matrice d'ordre  $1 \times 4$ . Dans la seconde partie figurent uniquement les dérivées de  $F$ . D'ailleurs d'après (78)

$$fF = -F^* f^* - 2I$$

cette deuxième partie est  $-(\text{lor } F^*) f^* +$  la partie de  $-2 \text{lor } I$  qui contient les dérivées de  $F$ . Donc:

$$\text{lor } S = (\text{lor } f)F - (\text{lor } F^*) f^* + N$$

où  $N$  est un vecteur de composantes:

$$N_h = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f_{23}}{\partial x_h} F_{23} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x_h} F_{31} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x_h} F_{12} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_h} F_{14} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_h} F_{24} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_h} F_{34} - f_{23} \frac{\partial F_{23}}{\partial x_h} - f_{31} \frac{\partial F_{31}}{\partial x_h} - f_{12} \frac{\partial F_{12}}{\partial x_h} - f_{14} \frac{\partial F_{14}}{\partial x_h} - f_{24} \frac{\partial F_{24}}{\partial x_h} - f_{34} \frac{\partial F_{34}}{\partial x_h} \right) \quad h=(1,2,3,4)$$

des relations [A] et [B] donnent:

$$(91) \quad \text{lor } S = -S F' + N$$

Dans le cas particulier  $\varepsilon = 1$   $\mu = 1$  où  $f = F$ ,  $N$  s'annule identiquement. On obtient, d'ailleurs les expressions suivantes pour les composantes de  $N$

$$(92) \quad N_h = -\frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \Psi \bar{\Psi} \frac{\partial \mu}{\partial x_h} + (\varepsilon \mu - 1) \left( \Omega_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_h} + \Omega_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_h} + \Omega_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_h} + \Omega_4 \frac{\partial w_4}{\partial x_h} \right)$$

En faisant usage de (59) et en désignant par  $\vec{W}$  le vecteur dont  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  sont les composantes, on peut mettre la 3<sup>e</sup> partie du 2<sup>e</sup> membre de (92) sous la forme:

$$(93) \quad \frac{\varepsilon \mu - 1}{\sqrt{1 - W^2}} \left( \vec{W} \frac{\partial \vec{W}}{\partial x_h} \right)$$

#### 14 - Les forces pondéromotrices

Si nous développons la relation  $K = \text{loc } S = -sF + N$ , il vient :

$$(94) \quad K_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_4}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial z} - \frac{\partial X_t}{\partial t} = \rho E_x + s_y M_x - s_z M_y - \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{1}{2} \psi \bar{\psi} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\sqrt{1-w^2}} (\vec{W} \frac{\partial \vec{W}}{\partial x})$$

$$(95) \quad K_2 = \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_4}{\partial y} + \frac{\partial Y_2}{\partial z} - \frac{\partial Y_t}{\partial t} = \rho E_y + s_z M_x - s_x M_z - \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{1}{2} \psi \bar{\psi} \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\sqrt{1-w^2}} (\vec{W} \frac{\partial \vec{W}}{\partial y})$$

$$(96) \quad K_3 = \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_4}{\partial y} + \frac{\partial Z_2}{\partial z} - \frac{\partial Z_t}{\partial t} = \rho E_z + s_x M_y - s_y M_x - \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{2} \psi \bar{\psi} \frac{\partial \mu}{\partial z} + \frac{\varepsilon \mu - 1}{\sqrt{1-w^2}} (\vec{W} \frac{\partial \vec{W}}{\partial z})$$

$$(97) \quad \frac{1}{i} K_4 = -\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial T_4}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z} - \frac{\partial T_t}{\partial t} = s_x E_x + s_y E_y + s_z E_z + \frac{1}{2} \Phi \bar{\Phi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{2} \psi \bar{\psi} \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\varepsilon \mu - 1}{\sqrt{1-w^2}} (\vec{W} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t})$$

Je dis que les actions exercées sur la matière pondérable ont pour composantes les trois premières composantes du vecteur de l'espace normal à  $w$  :

$$(98) \quad K + (w \bar{K}) w$$

et que le principe de conservation de l'énergie est exprimé par la relation (97).

Pour le cas limite  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $N = 0$ ,  $\vec{S} = \rho \vec{w}$ ; on a donc  $w \bar{K} = 0$  les expressions obtenues pour la force se réduisent à celles admises dans la théorie des électrons.



## Appendice

### La Mécanique et le Postulat de relativité.

Il est tout-à-fait improbable que la nouvelle conception du temps, introduite par la possibilité d'une transformation de Lorentz, soit applicable à une seule portion de la Physique.

On considère souvent que la Mécanique classique est en contradiction avec le postulat de relativité sous la forme exigée par les phénomènes électromagnétiques.

Pour nous fixer à ce sujet, considérons une transformation particulière de Lorentz, représentée par (10) (11) (12) avec un vecteur  $\vec{v}$  différent de 0 et de direction quelconque, avec une grandeur  $q < 1$ . Pour n'introduire aucune convention sur les unités de longueur et de temps, nous devons dans ces équations, au lieu de  $t, t', q$ , écrire  $ct, ct', \frac{q}{c}$ , où  $c$  est une constante positive quelconque et où l'on doit avoir  $q < c$ . Les relations prennent la forme:

$$\vec{r}'_{\vec{v}} = \vec{r}_{\vec{v}} \quad \vec{r}'_v = \frac{c(\vec{r}_v - qt)}{\sqrt{c^2 - q^2}} \quad t' = \frac{-q\vec{r}_v + c^2 t}{c\sqrt{c^2 - q^2}}$$

où, comme précédemment,  $\vec{r}$  représente le vecteur  $(x, y, z)$  et  $\vec{r}'$  le vecteur  $(x', y', z')$ .

Conservant à  $\vec{v}$  une grandeur fixe, passons au cas limite où  $c = \infty$ , il vient:

$$\vec{r}'_{\vec{v}} = \vec{r}_{\vec{v}} \quad \vec{r}'_v = \vec{r}_v - qt \quad t' = t$$

Ces nouvelles relations correspondent au passage d'un système  $x, y, z$  à un autre système, d'axes parallèles aux premiers et dont l'origine se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme, tandis que le temps reste le même dans les deux systèmes.

Grâce à cette remarque, on peut dire:

La mécanique classique admet une covariance de ses relations pour le groupe des transformations linéaires et homogènes de l'expression:

$$(1) \quad -x^2 - y^2 - z^2 + c^2 t^2$$

avec la condition  $c = \infty$ .

Il serait évidemment absurde d'admettre dans une partie de la physique la covariance des lois pour la transformation de (1) avec



c fini et dans une autre partie avec c infini.

Quand on modifie la mécanique newtonienne en admettant pour c une valeur finie, l'édifice axiomatique de la Mécanique semble devenir beaucoup plus parfait.

Supposons les unités choisies de manière que le postulat de relativité soit admis pour  $c = 1$ .

Pour utiliser les images géométriques dans la multiplicité  $(x, y, z, t)$ , il est commode de ne pas considérer y et z et de prendre x et t pour coordonnées obliques quelconques dans un plan.

Un origine O.  $(x, y, z, t = 0, 0, 0, 0)$  sera conservée dans la transformation de Lorentz; la courbe:

$$(2) \quad -x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1 \quad t > 0$$

ou enveloppe hyperboloi'dique comprend le point A  $(x, y, z, t = 0, 0, 0, 1)$  et tous les points A' qui après une transformation de Lorentz se changent en  $x', y', z', t' = 0, 0, 0, 1$ .

La direction d'un rayon vecteur OA' de O vers un point A' de (2) et les directions tangentes en A' à (2) sont dites normales.

Suivons une portion déterminée de matière dans son mouvement aux différents instants. L'ensemble des points  $(x, y, z, t)$  qui occupent la matière aux différents instants constitue une ligne (espace-temps).

Pour déterminer le mouvement de la matière il faut déterminer en chaque point la direction de la ligne.

Un point P est ramené au repos lorsque, par une transformation de Lorentz on introduit un nouveau système  $x', y', z', t'$  dont l'axe  $t'$ , OA' a pour direction celle de la ligne au point P. L'espace  $t' = ct$  qui passe par le point P est normal à la ligne en ce point. L'accroissement  $dt$  du temps à partir de P correspond à l'accroissement:

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = dt \sqrt{1 - w^2} = \frac{dx_4}{w_4}$$

du nouveau paramètre,  $t'_4$ .

La valeur de l'intégrale:

$$\int d\tau = \int \sqrt{-(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2)}$$

prise le long de la ligne à partir d'une origine quelconque  $P_0$  jusqu'au point variable P s'appelle le temps propre de la portion considérée de matière au point P. (C'est là une générali-

sation du temps local introduit par M. Lorentz dans le cas du mouvement rectiligne et uniforme.

Si nous considérons un corps  $R$  étendu dans l'espace à un instant déterminé  $t_0$ , le domaine de toutes les lignes passant par les points  $R_0, t_0$  s'appelle un tube.

Si nous considérons une expression analytique  $\Theta(x, y, z, t)$  telle que  $\Theta(x, y, z, t) = 0$  soit rencontrée en un point par chaque ligne du tube, de façon que :

$$-\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t}\right)^2 > 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} > 0$$

l'ensemble des points de rencontre sera une section du tube.

En chaque point  $P(x, y, z, t)$  d'une telle section, nous pouvons par une transformation de Lorentz introduire un nouveau système  $x', y', z', t'$  tel que :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x'} = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y'} = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z'} = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t'} > 0$$

La direction ainsi déterminée de l'axe  $t'$  est la normale extérieure à la section au point  $P$  et l'expression :

$$dJ = \iiint dx' dy' dz'$$

étendue au voisinage de  $P$  est un élément du contenu de la section.

En ce sens,  $(R_0, t_0)$  est une section du tube normale à l'axe des  $t$ ,  $t = t_0$  est le volume du corps  $R_0$  est le contenu de cette section.

Si nous supposons que le volume  $R_0$  se contracte indéfiniment, nous constituons un tube infiniment petit. Dans celui-ci nous pouvons considérer une ligne comme ligne principale et prendre comme temps propre du tube celui qui correspond à cette ligne - et comme section normale du tube celle fournie par l'espace normal à la ligne en un point.

Formulons maintenant le Principe de conservation de la Masse :

À chaque espace  $R$  à l'instant  $t$  correspond une grandeur positive, la masse dans  $R$  à l'instant  $t$ . Si  $R$  se contracte autour d'un point, le quotient de cette masse par le volume contenu dans  $R$  tend vers une limite  $\mu(x, y, z, t)$  la densité au point  $x, y, z, t$ .

Le principe de conservation de la masse s'énonce :

Pour un tube infiniment petit, le produit  $\mu dJ$  de la densité en un point par le contenu  $dJ$  de la section normale à l'axe des  $t$  reste constant tout le long du tube.

D'ailleurs, le contenu  $dJ_n$  de la section normale au tube en  $(x, y, z, t)$  est :

$$\boxed{dJ_n d\tau = dJ dt} \quad (4) \quad dJ_n = \frac{dJ}{\sqrt{1-w^2}} = -i w_4 dJ = \frac{dt}{d\tau} dJ$$

Soit :

$$(5) \quad v = \mu \frac{dJ}{dJ_n} = \frac{\mu}{-i w_4} = \mu \sqrt{1-w^2} = \mu \frac{d\tau}{dt}$$

la densité au repos en  $x, y, z, t$ . Le principe de conservation de la masse peut encore s'énoncer :

Pour un tube infiniment petit, le produit de la densité au repos par le contenu de la section normale reste constant le long d'un même tube.

Dans un tube quelconque, considérons une première section  $Q_0$  et une deuxième  $Q_1$  ayant en commun avec la première les points situés sur le pourtour du tube et ceux-là seulement - et telle que  $t$  ait sur une ligne intérieure au tube une valeur plus grande sur  $Q_1$  que sur  $Q_0$ . Le domaine limité par  $Q_0$  et  $Q_1$  s'appellera un croissant dont  $Q_0$  est la limite inférieure et  $Q_1$  la limite supérieure.

Imaginons le tube décomposé en tubes élémentaires - à chaque entrée d'un tel tube à travers la limite inférieure du croissant, correspond une sortie à travers la limite supérieure pour lesquelles le produit  $v dJ_n$  a la même valeur. La différence des intégrales  $\int v dJ_n$  prises sur les deux limites inférieure et supérieure du croissant est donc nulle. D'après un théorème connu de calcul intégral, cette différence a pour valeur :

$$\iiint \text{lor } v \bar{w} \, dx \, dy \, dz \, dt$$

étendue à tout le domaine du croissant où :

$$\text{lor } v \bar{w} = \frac{\partial v w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v w_4}{\partial x_4}$$

Si le croissant se contracte autour du point  $x, y, z, t$ , on obtient l'équation différentielle :

$$(6) \quad \text{lor } v \bar{w} = 0$$

c'est l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \mu w_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu w_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu w_3}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

Considérons maintenant l'intégrale suivante, étendue à tout le domaine du croissant :

$$(7) \quad N = \iiint v \, dx \, dy \, dz \, dt$$



← Si on introduit la notation des indices, on a:

$$(9) \quad d(x_k + \delta x_k) = dx_k + \sum_{l,k} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} dx_l + \frac{\partial x_k}{\partial \theta} d\theta$$

$$h = 1, 2, 3, 4$$

$$k = 1, 2, 3, 4$$

(10)

Décomposons le croissant en tubes élémentaires, et chacun de ceux-ci en éléments correspondants à des éléments  $d\tau$  de son temps propre, supposés grands par rapport aux dimensions de la section normale du tube. Si  $dm = \nu dJ_n$  est la masse du tube, et si  $\tau_0$  et  $\tau_1$  sont les valeurs du temps propre aux limites inférieure et supérieure du croissant pour le tube considéré, on peut écrire l'intégrale (7):

$$N = \iint \nu dJ_n d\tau = \int (\tau_1 - \tau_0) dm$$

cette dernière étant étendue aux divers tubes élémentaires.

Considérons maintenant les lignes à l'intérieur d'un croissant comme des fils matériels composés de points matériels et faisons leur subir une déformation continue à l'intérieur du croissant sous les conditions suivantes: Une ligne doit se déplacer de manière que ses extrémités sur les bords inférieur et supérieur du croissant restent fixes, et que chacun de ses points se déplace normalement à la direction de la ligne.

Cette variation sera représentée par le paramètre  $\theta$  et la valeur  $\theta = 0$  correspond à la configuration réelle des lignes à l'intérieur du croissant. Cette variation s'appellera un déplacement virtuel dans le croissant.

Le point situé en  $x, y, z, t$  pour  $\theta = 0$  sera pour la valeur  $\theta$  venu en  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t$  où les variations sont des fonctions de  $x, y, z, t, \theta$ . Si nous considérons un tube infiniment petit de section normale  $dJ_n$  et après variation  $dJ_n + \delta dJ_n$  le principe de conservation de la masse conduit à écrire pour la densité au repos  $\nu + \delta \nu$  telle que:

$$(\nu + \delta \nu)(dJ_n + \delta dJ_n) = \nu dJ_n = dm$$

L'intégrale (7) varie, pendant le déplacement, comme une fonction de  $\theta$ ,  $N + \delta N$  et cette fonction sera l'action de masse pendant le déplacement virtuel.

On voit immédiatement d'après les relations précédentes que:

$$(10) \quad N + \delta N = \iiint \nu \frac{d(\tau + \delta \tau)}{d\tau} dx dy dz dt$$

où: l'intégrale étant étendue au croissant - déplus,

$$\text{où:} \quad d(\tau + \delta \tau) = \sqrt{-(dx_1 + \delta dx_1)^2 - (dx_2 + \delta dx_2)^2 - (dx_3 + \delta dx_3)^2 - (dx_4 + \delta dx_4)^2}$$

$$dx_1 = w_1 d\tau \quad dx_2 = w_2 d\tau \quad dx_3 = w_3 d\tau \quad dx_4 = w_4 d\tau \quad d\theta = 0$$

donc;

$$(41) \quad \frac{d(\tau + \delta\tau)}{d\tau} = \sqrt{-\sum_h (w_h + \sum_k \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h} w_k)^2} \quad \begin{matrix} h=1,2,3,4 \\ k=1,2,3,4 \end{matrix}$$

Nous allons transformer la valeur de la dérivée :

$$(42) \quad \frac{d(N + \delta N)}{d\theta} \Big|_{\theta=0}$$

Comme chaque  $\delta x_h$  s'annule pour  $\theta=0$ , on a  $\frac{\partial \delta x_h}{\partial x_k} = 0$  pour  $\theta=0$ .  
Posons :

$$(13) \quad \left( \frac{\partial \delta x_h}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = \xi_h \quad h=1,2,3,4$$

Il résulte de (10) et (41) pour l'expression de (42) :

$$- \iiint \gamma \sum_h w_h \left( \frac{\partial \xi_h}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_2} w_2 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_3} w_3 + \frac{\partial \xi_h}{\partial x_4} w_4 \right) dx dy dz dt$$

Pour les systèmes  $x_1, x_2, x_3, x_4$  aux limites du croissant, les  $\delta x_i, \delta x_j$  s'annulent pour toutes les valeurs de  $\theta$ , donc les  $\xi$  sont nuls, et on obtient en intégrant par parties :

$$\iiint \sum_h \xi_h \left( \frac{\partial v w_h w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v w_h w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v w_h w_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v w_h w_4}{\partial x_4} \right) dx dy dz dt$$

L'expression entre parenthèses est :

$$w_h \sum_i \frac{\partial v w_h}{\partial x_i} + v \sum_i w_i \frac{\partial w_h}{\partial x_i}$$

La première  $\sum_i$  est nulle en vertu du théorème de continuité (6) donc la deuxième peut s'écrire :

$$\frac{\partial w_h}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \frac{\partial w_h}{\partial x_2} \frac{dx_2}{d\tau} + \dots = \frac{dw_h}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dx_h}{d\tau} \right)$$

où  $\frac{d}{d\tau}$  représente la dérivée prise le long d'une ligne. On obtient donc pour (42) :

$$(44) \quad \iiint \gamma \left( \frac{dw_1}{d\tau} \xi_1 + \frac{dw_2}{d\tau} \xi_2 + \frac{dw_3}{d\tau} \xi_3 + \frac{dw_4}{d\tau} \xi_4 \right) dx dy dz dt$$

Nous avons, de plus, imposé au déplacement virtuel la condition que chaque point se déplace normalement à sa ligne. Donc, pour  $\theta=0$ , les  $\xi$  doivent satisfaire à la condition

$$(15) \quad w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 + w_3 \xi_3 + w_4 \xi_4 = 0$$



Considérons maintenant un système de tensions analogues à celles de Maxwell en électrodynamique,  $S_{11}, S_{12} \dots S_{hk}$ , le travail de ces tensions dans une déformation infiniment petite  $\delta$  est:

$$\sum_{hk} S_{hk} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h}$$

Si nous prenons le tableau des tensions :

$$(16) \quad S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x & -iT_x \\ X_y & Y_y & Z_y & -iT_y \\ X_z & Y_z & Z_z & -iT_z \\ -iX_t & -iY_t & -iZ_t & T_t \end{vmatrix}$$

Nous poserons:

$$\delta W = \iiint \left( \sum_{hk} S_{hk} \frac{\partial \delta x_k}{\partial x_h} \right) dx dy dz dt$$

tendue au domaine du croissant; ce sera l'action des tensions pour le déplacement virtuel.

Nous admettrons le principe suivant:

Pour un croissant quelconque, la somme des variations de l'action de masse et de l'action des tensions pendant un déplacement virtuel quelconque est toujours nulle.

$$\left( \frac{d(\delta N + \delta W)}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 0$$

En tenant compte, par l'intermédiaire d'un facteur de Lagrange  $\lambda$  de la condition (15), il vient:

$$(19) \quad \text{ou:} \quad \gamma \frac{d w_h}{d\bar{t}} = K_h + \lambda w_h \quad (h=1,2,3,4)$$

$$(20) \quad K_h = \frac{\partial S_{1h}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{2h}}{\partial x_2} + \frac{\partial S_{3h}}{\partial x_3} + \frac{\partial S_{4h}}{\partial x_4}$$

Les  $K$  sont des composantes du vecteur  $\text{lor } S$ . Pour déterminer  $\lambda$ , multiplions (19) par  $w_h$  et ajoutons les quatre équations ( $h=1,2,3,4$ ). En tenant compte de  $w\bar{w} = -1$  il vient:

$$\lambda = K\bar{w} \quad \text{et} \quad K + (K\bar{w})w \quad \text{est un}$$

On peut déduire de l'équation de l'énergie  $m \frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{d\tau} - 1 \right) = w_x R_x \frac{d\tau}{dt} + w_y R_y \frac{d\tau}{dt} + w_z R_z \frac{d\tau}{dt}$   
 que la force ordinairement considérée a pour composantes :

$$F_x = R_x \frac{d\tau}{dt} = R_x \sqrt{1-w^2} \quad F_y = R_y \frac{d\tau}{dt} = R_y \sqrt{1-w^2} \quad F_z = R_z \sqrt{1-w^2}$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{d\tau} \right) = F_x \quad m \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{d\tau} \right) = F_y \quad m \frac{d}{dt} \left( \frac{dz}{d\tau} \right) = F_z$$

ou en remplaçant  $d\tau$  par  $dt \sqrt{1-w^2}$  :

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{m}{\sqrt{1-w^2}} \left( \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{w}{1-w^2} \frac{dx}{dt} \frac{dw}{dt} \right) = F_x \quad \text{etc.}$$

Pour avoir l'équation du mouvement longitudinal on multiplie par  $\frac{1}{w} \frac{dw}{dt}$  et on ajoute aux équations analogues :

$$\frac{m}{\sqrt{1-w^2}} \frac{dw}{dt} \left( 1 + \frac{w^2}{1-w^2} \right) = F_w \quad \frac{m}{(1-w^2)^{3/2}} \gamma_w = F_w \quad m_e = \frac{m}{(1-w^2)^{3/2}}$$

la même chose s'obtient directement à partir de l'équation de l'énergie  $\rightarrow$  (page suiv.)

vecteur de 1<sup>re</sup> espèce normal à  $w$ .

Ecrivons  $X, Y, Z, iT$  pour les composantes de ce vecteur; il vient

$$(21) \quad \begin{aligned} v \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} &= X \\ v \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} &= Y \\ v \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} &= Z \\ v \frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= T \end{aligned}$$

avec:

$$\text{et:} \quad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - 1$$

$$X \frac{dx}{d\tau} + Y \frac{dy}{d\tau} + Z \frac{dz}{d\tau} = T \frac{dt}{d\tau}$$

Par suite de ces relations, la dernière des équations (21) se présente comme une conséquence des trois premières.

De (21) nous pouvons déduire les lois du mouvement d'un point matériel, c. à d. du parcours d'un tube élémentaire.

Soit  $x, y, z, t$  un point d'une ligne quelconque du tube. Ecrivons les équations (21) pour les différents points d'une section normale et intégrons dans le contenu élémentaire de cette section. Si les intégrales des seconds membres sont  $R_x, R_y, R_z, R_t$  et si la masse constante du tube, il vient

$$(22) \quad \begin{aligned} m \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} &= R_x \\ m \frac{d}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} &= R_y \\ m \frac{d}{d\tau} \frac{dz}{d\tau} &= R_z \\ m \frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} &= R_t \end{aligned}$$

$R$  est un vecteur de composantes  $R_x, R_y, R_z, iT_t$  (4<sup>re</sup> espèce) normal à  $w$ .  $R$  est la force motrice.

Si au lieu d'intégrer sur une section normale du tube, nous intégrons sur une section normale à l'axe des  $t$ , il vient

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) = w_x R_x \frac{d\tau}{dt} + w_y R_y \frac{d\tau}{dt} + w_z R_z \frac{d\tau}{dt}$$



$$\frac{m w}{(1-w^2)} \frac{dw}{dt} F_x w_x + F_y w_y + F_z w_z$$

$$F_w = \frac{m}{(1-w^2)^{3/2}} \frac{dw}{dt}$$

Pour avoir la masse transversale on projetera les équations du mouvement sur une direction  $\perp$  à  $w$  il vient :

$$\frac{m}{\sqrt{1-w^2}} \gamma_{\vec{w}} = F_{\vec{w}}$$

On peut écrire sous forme vectorielle :

$$\frac{m}{\sqrt{1-w^2}} \left( \vec{\gamma} + \frac{w}{1-w^2} \frac{dw}{dt} \vec{w} \right) = \vec{F}$$

Cette équation (équivalente à la dernière des équations (22)) exprime la loi de conservation de l'énergie - d'expression :

$$m \left( \frac{dt}{d\tau} - 1 \right) = m \left( \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} - 1 \right) = m \left( \frac{1}{2} w^2 + \frac{3}{8} w^4 + \dots \right)$$

Correspond à l'énergie cinétique.

Comme on a toujours  $dt > d\tau$ , on peut considérer  $\frac{dt-d\tau}{d\tau}$ . Comme l'avance du temps par rapport au temps propre - et  $\frac{dt-d\tau}{d\tau}$  est l'énergie cinétique d'un point matériel est le produit de la masse par l'avance du temps sur son temps propre.

L'ensemble des quatre équations (22) possède la symétrie complète en  $x, y, z, t$ , et exigée par le postulat de relativité - et la 4<sup>e</sup> équation comme partant en électrodynamique présente un degré d'évidence physique plus grand que les autres. Par suite de la nécessité de cette symétrie, l'obtention de cette dernière équation implique celle des autres. On peut donc dire que si l'on met le postulat de relativité à la base de la Mécanique, les équations du mouvement résultent de la conservation de l'énergie.

Je voudrais encore montrer qu'aucune contradiction n'est à prévoir entre les phénomènes de gravitation et le postulat de relativité.

Si  $B_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$  est un point fixe, le domaine de tous les points  $B(x, y, z, t)$  tels que :

$$(23) \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = (t-t_0)^2 \quad t-t_0 \geq 0$$

est l'image rayonnée du point  $B$ .

Cette image ne rencontre une ligne quelconque qu'en un seul point  $B$  (à cause de la condition  $w < 1$ ).  $B_0$  est un point de lumière de  $B$ .

Si dans (23) on suppose  $x, y, z, t$  fixe et  $x_0, y_0, z_0, t_0$  variable on obtient le lieu de tous les points de lumière de  $B$ . Ce lieu ne rencontre une ligne quelconque qu'en un seul point.

Supposons qu'un point matériel  $F$  <sup>de masse  $m$</sup>  subisse de la part d'un autre point matériel  $F_0$  de masse  $m_0$  une action motrice déterminée de la manière suivante. Considérons les tubes élémentaires de  $F$  et  $F_0$  avec une ligne principale dans chacun. Soit  $BC$  un élément de la ligne principale de  $F$ ,  $B_0$  le point de lumière de  $B$  sur la ligne principale de  $F_0$  et  $C_0$  le point de lumière de  $C$  sur cette même ligne. Soit  $OA'$  le rayon vecteur de l'enveloppe hyperboloïdique parallèle à  $B_0C_0$  et  $D_0$  le point d'intersection de la droite  $B_0C_0$  avec l'espace normal.

à cette droite mené par le point B.

La force motrice exercée sur le point matériel T sera le vecteur de 1<sup>re</sup> espèce normal à BC composé du vecteur:

$$(24) \quad m m_0 \left( \frac{OA'}{B_0 D_0} \right)^3 B D_0$$

dans la direction de  $B D_0$  et du vecteur nécessaire dans la direction  $B_0 C_0$ .

$\frac{OA'}{B_0 D_0}$  est le rapport des deux vecteurs parallèles considérés.

Il est certain que cette combinaison possède le caractère de covariante pour la transformation de Lorentz.

Cherchons comment se comporte le tube T lorsque le point T<sub>0</sub> possède un mouvement de translation uniforme, lorsque la ligne principale correspondante est une droite. Nous pouvons, par une transformation de Lorentz prendre cette droite comme axe des t. Si x, y, z, t représente le point B et si T<sub>0</sub> est le temps propre du point B<sub>0</sub> compte à partir de 0, notre hypothèse conduit à:

$$(25) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = - \frac{m_0 x}{(t - T_0)^3} \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = - \frac{m_0 y}{(t - T_0)^3} \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = - \frac{m_0 z}{(t - T_0)^3}$$

et:

$$(26) \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = - \frac{m_0}{(t - T_0)^2} \frac{d(t - T_0)}{dt}$$

où:

$$(27) \quad x^2 + y^2 + z^2 = (t - T_0)^2$$

et

$$(28) \quad \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 = \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1$$

Les équations (25), si l'on tient compte de (27) sont exactement les équations newtoniennes, à ceci près que le temps t y est remplacé par le temps propre  $\tau$ . La 4<sup>e</sup> équation (26) donne la relation entre le temps t et le temps propre  $\tau$ .

La trajectoire du point x, y, z pour les diverses valeurs de  $\tau$  est une ellipse avec le demi-grand axe a, l'excentricité e et l'anomalie excentrique E; si T est la variation de  $\tau$  pour une révolution complète avec  $nT = 2\pi$  on a:

$$nT = E - e \sin E$$

Si on change l'unité de temps et si c représente la vitesse de la lumière, on déduit de (28):

$$\left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 = \frac{m_0}{ac^2} \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}$$



et en négligeant les termes en  $c^{-4}$  par rapport à 1 :

$$( \quad n dt = n d\tau \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_0}{ac^2} \frac{1+e \cos E}{1-e \cos E} \right)$$

d'où, d'après (29) :

$$(31) \quad n\tau + c^t = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_0}{ac^2} \right) n\tau + \frac{m_0}{ac^2} \sin E$$

Le facteur  $\frac{m_0}{ac^2}$  est le carré du rapport à la vitesse de la lumière d'une certaine vitesse moyenne de la particule  $P$  sur sa trajectoire. Si on prend pour  $m_0$  la masse du Soleil et pour  $a$  le demi-grand axe de l'orbite terrestre, ce facteur a pour valeur  $10^{-8}$ .

Une loi d'attraction telle qu'on l'a indiquée plus haut, qui satisfait au principe de relativité et implique une propagation de l'attraction avec la vitesse de la lumière, ne correspondrait donc à aucun écart appréciable avec les résultats de la Mécanique céleste basée sur la loi de Newton.

