Site mathématiques d'une ROC : une nouvelle façon d'interroger un exercice ?

Christian Silvy, Antoine Delcroix

Site mathématiques d'une ROC : une nouvelle façon d'interroger un exercice ?

Christian Silvy[(1)], **Antoine Delcroix**[(1,2)]

(1) CRREF
IUFM de la Guadeloupe
Morne Ferret, BP 517, 97178 Abymes Cedex

(2) Laboratoire AOC
UFR Sciences exactes et naturelles
Campus de Fouillole, Université Antilles-Guyane
97159 Pointe à Pitre Cedex

Résumé :

L'introduction des restitutions organisées de connaissances (ROC) dans les épreuves du baccalauréat, à partir de 1995, est une réponse de l'institution à la volonté de rendre plus efficace l'enseignement en cycle terminal. Cet article s'appuie sur l'analyse de la ROC du sujet Antilles Guyane session 2006 par une approche anthropologique en proposant la construction de son « site mathématique ». Au travers de cet exemple sont interrogées certaines caractéristiques du concept ROC comme sa cohérence (notamment institutionnelle) et sa transparence de cette évaluation.

Mots clés : site mathématique, restitution, ROC, Descartes, habiletés, connaissances, savoirs, pré-requis, réorganisation, méthode, baccalauréat, CAPES, CAPLP, évaluation.

1. Introduction

L'introduction, dans le cadre des épreuves du baccalauréat 2005, d'exercices novateurs, dont un pilier est la restitution organisée de connaissances (ROC), est une réponse proposée par l'institution à la nécessité de rendre plus efficace l'enseignement en cycle terminal. L'idée sous jacente est que l'on peut contribuer à atteindre cet objectif en agissant en amont, par le moyen de l'évaluation certificative. L'affirmation selon laquelle *" le baccalauréat pilote l'enseignement du cycle terminal "* [direction Bernard David, 2000] ou bien celle qui stipule que *" le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité "* (selon une déclaration d'André Périssol à l'assemblée Nationale en 2005) illustrent ce postulat.

Cet article, qui fait état de recherches effectuées pour un travail de thèse, s'appuie sur une étude de la ROC du sujet Antilles-Guyane session 2006 dans le cadre de la théorie Anthropologique du Didactique formulée par Y. Chevallard en 1989. L'article construit le site mathématique de la ROC étudiée [P. Duchet , K. Erdogan, 2005] : nous postulons en effet que la construction du site mathématique local d'une ROC permet d'appréhender par niveau de praxéologie croissant, les connaissances ou les coutumes mathématiques à enseigner pour préparer les élèves à devenir des résolveurs [C. Castela 2008].

Nous partons d'une première analyse situant la ROC selon les points de vue, historique/ institutionnel/ des pratiques (à l'oral du baccalauréat)/ mathématiques. Nous poursuivons notre étude par l'explicitation des méthodes de résolution, permettant de préciser son écologie didactique. L'ensemble de ces éléments permet alors la construction du site.

L'orientation choisie permet d'interroger au travers de cet exemple, certaines caractéristiques du concept de ROC, notamment celles liées à l'introduction de pré-requis dans une épreuve de baccalauréat. Dans cet ordre d'idées, montrons que contrairement à son acronyme ROC elle n'évalue pas seulement que des connaissances mathématiques. Nous testerons également la cohérence du concept, tant au niveau institutionnel qu'au niveau des connaissances requises. L'ensemble de ces questionnements permet de montrer que la ROC n'est probablement pas un mode d'évaluation à rejeter même si elle ne constitue pas une réponse parfaite aux différentes fonctions qui lui ont été assignées par l'institution.

2. Premières analyses de la ROC

2.1 Première lecture

Voici le sujet tel qu'il fut proposé aux candidats, à la session 2006 du Baccalauréat série S Antilles Guyane :

Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur]0 ; +∞ [et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$

- ln(1)=0

Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x,

ln(ax) = ln(a)+ln(x)

Un élève résolveur [C. Castela, 2008] qui lit pour la première fois le sujet remarque deux codages de natures différentes qu'on peut considérer comme relevant du champ protomathématique [Y. Chevallard, 1985].

Le premier codage consiste à noter *ln(x)* à la place du plus habituel *lnx.* Ce code fait référence à la valeur de la fonction *ln* prise au point *x*, comme il référerait à une fonction *f* non précisée prise au point *x*. L'ostensif *(x)* est d'un usage commun. Il s'emploie dans la classe à partir de la seconde. Ainsi, après trois occurrences du mot « fonction » dans les pré-requis, ce codage situe bien la ROC dans le champ des « fonctions ».

Le deuxième code est le choix des lettres *a* et *x*. Traditionnellement les lettres *a, b, c* désignent dans un contexte mathématiques des constantes inconnues tandis que *x, y* et *t* sont des variables. L'auteur suggère au résolveur que *x* sera traité comme une variable et *a* comme une constante.

Remarquons également que le concepteur a choisi de donner comme pré-requis non une définition de la fonction *ln* mais une propriété de celle-ci. En effet il aurait pu choisir d'écrire « *La fonction logarithme népérien est la primitive définie sur]0 ; + ∞[de la fonction inverse* $(x \mapsto 1/x)$ *qui s'annule en 1* ». Ce choix dans l'évaluation finale indique, par son caractère inhabituel, un objet précis : la dérivation. Dans le même ordre d'idées le concepteur n'introduit pas l'objet du problème en le citant comme étant une propriété ni une relation fonctionnelle mais simplement une démonstration.

Ainsi dans l'énoncé de cette ROC, l'implicite occupe une place première. Pour reconnaître les concepts protomathématiques, paramathématiques[1] ou mathématiques l'élève résolveur doit montrer une « habileté de lecture mathématique », habileté au sens du mot latin « habilis » : "*qui ont des habitudes, qui « savent y faire ». C'est la notion anglaise de « craft », de « clever » (adresse et présence d'esprit et habitude), c'est l'habileté à quelque chose. Encore une fois nous sommes bien dans le domaine technique.* " [M. Mauss, 1950] En conséquence une lecture attentive du sujet permet à cet « expert » de décoder et donc de choisir les techniques [Y. Chevallard, 1989], la variable et la stratégie.

2.2 Panorama général

Point de vue historique

Sans entrer dans un long développement[2], mentionnons qu'après la découverte des logarithmes par une approche cinématique, leur reconnaissance mathématique découle du fait qu'ils sont une réponse aux calculs longs et difficiles en astronomie. Les calculs de multiplication ou de division sont remplacés par deux correspondances dans une table et une addition. C'est au début du XVII° siècle que John NAPIER publie son traité *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, où il donne des tables de correspondances. Nous pouvons donc dire que la propriété énoncée dans la ROC est à la base du concept logarithme. Cette naissance, si elle ne dépend pas des exponentielles, est cependant liée à la suite des puissances d'un nombre et de celle de ses exposants. En effet la suite $q, q^2, .. q^n$ peut être mise en relation avec 1,2 ,…n. Nous retrouvons alors la propriété qui fonde notre exercice, un produit $q^p q^r$ est en relation avec p+r grâce à la propriété des puissances.

Point de vue institutionnel (évolution des programmes)

[1] Dans cet article nous confondons le protomathématique et le paramathématique.

[2] Nous invitons le lecteur à se reporter à *Histoires de logarithmes*, Ellipses, Evelyne Barbin *et alii*. Collection : IREM - Histoire des mathématiques. Ellipses, Paris, 2006.

Dans les programmes antérieurs à 2002 les logarithmes introduisent les nouvelles fonctions de terminale. Elles sont donc vues comme fondement de la fonction exponentielle. Dans le programme de 1971 par exemple « *La fonction logarithme népérien est définie sur* $\boldsymbol{R}^{*+}$ *par* $Log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$*; la fonction exponentielle sera obtenue comme réciproque de la fonction logarithme népérien. On justifiera les règles de calcul et l'isomorphisme ainsi établi entre le groupe additif* $(IR^{*+}, +)$ *et le groupe multiplicatif* $(IR^{*+}, \times)$ *»*[3]. Cette introduction est conservée dans les années 1980.

Le programme des années 1990 n'impose plus *« le mode d'introduction des fonctions ln et exp* » [BO du 13 juin 1997, p18]. « *L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises. En revanche, les propriétés des fonctions ln et exp feront l'objet de démonstrations* »
Le programme de 2002 marque une rupture avec les précédents pour l'introduction de la fonction ln. La fonction exp est introduite le plus tôt possible avant celle de logarithme. Elle doit occuper une place centrale. La fonction logarithme népérien n'est plus la première fonction « transcendante » étudiée en classe de terminale. Elle perd ainsi sa place dans la progression au profit de la fonction exponentielle.

Document 1[4]
Étude des fonctions logarithmes et exponentielles

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN OEUVRE	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien; notation ln. Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée; comportement asymptotique.	On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \ln(1+h)$	Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut, pour l'introduire : - soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ; - soit poser le problème des fonctions dérivables sur IR_+^* telles que $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ et admettre l'existence de primitives pour la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$; - soit traiter le logarithme après l'intégration.

Ce programme (voir document 1) propose trois introductions au logarithme. Le professeur, habitué aux programmes antérieurs à 2002 aura tendance, par habitude, à privilégier la troisième approche.
En revanche, pour l'élève dont l'enseignant aura choisi une des deux premières approches, cette ROC peut constituer une démonstration nouvelle (une interview de professeur corrobore ce fait).

Point de vue des pratiques de l'oral du baccalauréat.

[3] Mathématiques, classes de second cycle, Ministère de l'Education Nationale, Horaires, Programmes, Instructions, INRDP, FABREGUE, 4è trimestre 1971.
[4] Extrait du Cédérom mathématiques 2002, accompagnement des programmes, Mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale, Ministère jeunesse éducation recherche, imprimerie nationale juillet 2002.

Dans les années 1980 les professeurs utilisaient les contenus mathématiques de cette ROC dans l'oral du baccalauréat pour sélectionner les candidats. Ce sujet était alors, dans la pratique, reconnu comme étant difficile.
Dans la décennie 90, le professeur choisit souvent le mode de fonctionnement induite par cette ROC pour introduire la fonction *ln*. Il procède en définissant *ln* par la primitive définie sur]0, + ∞[de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Après une étude succincte de la fonction *ln*, il est amené à en déduire la propriété « fondamentale » :

- soit par une question : « Soit a un réel strictement positif et soit la fonction g définie par $g(x)=ln(ax)$ pour $x>0$; Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ .En déduire que $ln(ax) = lnx + lna$ pour tout $x>0$ » ;
- soit en la démontrant directement dans son cours.

Point de vue mathématique

Les relations fonctionnelles restent un sujet délicat en mathématiques. Cependant, classiquement, celles présentes dans le curriculum du professeur (certifié, agrégé) de lycée sont au nombre de quatre, avec des hypothèses de régularité sur la fonction inconnue adaptées au niveau de formation :
- équation fonctionnelle des fonctions linéaires de la variable réelle : $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- équation fonctionnelle des fonctions logarithmes : $f(x\,y) = f(x) + f(y)$,
- équation fonctionnelle des fonctions exponentielles : $f(x + y) = f(x)f(y)$,
- équation fonctionnelle des fonctions puissances : $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$,

La résolution des trois dernières peut, par exemple, s'obtenir à partir de la résolution de la première, la plus élémentaire. Dans l'expérience des auteurs, cela reste un sujet d'oral 1 assez difficile pour les étudiants préparant le CAPES.

Au niveau des programmes du secondaire, l'élève apprend (ou démontre partiellement) que les fonctions précitées vérifient l'équation fonctionnelle correspondante. C'est ce qui est demandé dans la ROC étudiée. Dans son cursus, il peut cependant être amené à résoudre ces équations fonctionnelles avec des hypothèses de régularité fortes.

3. Méthodes de résolution

Nous allons rédiger quelques réponses possibles à cette ROC en les appelant méthode dans le sens ordinaire de ce mot. Nous ne choisissons pas une rédaction la plus économique possible pour expliciter quelques concepts protomathématiques ou paramathématiques et par voie de conséquence, pouvoir construire effectivement le site mathématique.

Première méthode

Les pré-requis peuvent faire penser à la définition de ln à partir de l'intégrale : $lnx = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

Nous avons donc à démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x,

$$\int_1^{ax} \frac{1}{t}dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_1^{x} \frac{1}{t}dt .$$

En utilisant la relation de Chasles, nous obtenons

$$\int_1^{ax} \frac{1}{t}dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}dt + \int_a^{ax} \frac{1}{t}dt .$$

Ces deux égalités précédentes sont identiques si, et seulement si, $\int_a^{ax}\frac{1}{t}dt = \int_1^{x}\frac{1}{t}dt$.

Or pour démontrer cette égalité, il faut effectuer un changement de variable affine *u=at*.
Rappelons le théorème : « Soit une fonction f continue sur un intervalle I contenant ma+p et mb+p (m,p,a,b réels, $m \neq 0$) alors $\int_a^b f(mt+p)dt = \frac{1}{m}\int_{ma+p}^{mb+p} f(u)du$ »[5].

Or $\int_a^{ax}\frac{1}{t}dt = \frac{1}{a}\int_a^{ax}\frac{1}{\frac{1}{a}.t}dt$.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{at}$. La fonction *f* est continue sur **R,** *ainsi* nous pouvons appliquer le théorème

$a\int_a^{ax} f(\frac{1}{a}t))dt = a \times \frac{1}{a}\int_1^{x}\frac{1}{u}du$..

Deuxième méthode

Nous utilisons la fonction exponentielle, fonction qui dans la programmation de la classe se situe avant la fonction ln. Nous remarquons qu'un professeur peut choisir d'utiliser cette méthode en cours pour démontrer la propriété du logarithme présente en suivant les directives prescrites par l'institution.

En utilisant, la propriété « $\forall x \in IR^{*+}$, *exp(lnx)=x* » nous obtenons que *exp (ln(ax))= ax*.
D'autre part : *exp(ln(a)+ln(x))= exp(ln(a))*$\times$ *exp(ln(x))=ax.*
Ainsi *exp (ln(ax))= exp(ln(a)+ln(x))*
Or la fonction *exp* est une bijection de *IR* dans *]0 ;+∞[* donc *ln(ax)=ln(a)+ln(x)*.

Troisième méthode

Nous utilisons l'indication de l'auteur, qui a mis intentionnellement les parenthèses dans le sujet *ln(ax)=ln(a)+ln(x))* pour les raisons indiquées dans les remarques introductives.
Cette méthode a pour base l'équivalence entre la relation fonctionnelle et la constance (ou la nullité) d'une certaine fonction. Elle repose ainsi sur le choix d'une fonction constante à partir de la relation fonctionnelle.

Pour déterminer la fonction nous procédons par équivalence à partir de la relation fonctionnelle.
Un premier choix consiste à écrire que, pour tous réels strictement positifs *a* et *x*, la proposition *ln(ax)=ln(a)+ln(x)* est équivalente à *ln(ax) - ln(a) - ln(x)= 0*. Nous obtenons ainsi une première fonction *f(x)= ln(ax)-ln(a)-ln(x)* dont on doit montrer qu'elle est identiquement nulle. On peut procéder en trois étapes :

- *f* est la somme de fonctions dérivables (d'après le pré-requis). Elle est donc dérivable sur *]0 ;+∞[* et $f'(x) = 0$ d'après la propriété de dérivation d'une fonction composée ; ainsi *f* est une fonction constante, *i.e.* il existe un nombre réel *c* tel que pour tout *x* de *]0 ;+∞[, f(x)= c ;*
- on a *f(1)=0* (pré-requis) ;
- donc la constante *c* est nulle et *f* est nulle.

On peut également remplacer l'égalité *ln(ax)=ln(a)+ln(x)* par *ln(ax)-ln(x) = ln(a)* et cela nous indique une deuxième fonction possible : soit *g* la fonction définie et dérivable sur *I=]0 ;*

[5] Mathématiques cours et exercices Analyse A. Warusfel, P Attali, M. Collet, C. Gautier, S. Nicolas Vuibert 2002 : « nous aimerions que ce cours puisse rester l'ouvrage de référence du bachelier scientifique.

$+\infty[$ par $g(x) = ln(ax) - ln(x)$. On a $g'(x) = 0$, comme pour f ci-dessus. Ainsi, g est constante sur $]0\,;+\infty[$, égale à c. Puis $g(1) = ln(a)+ln(1)$. Comme, d'après le pré-requis $ln1=0$, on a $g(1) = ln(a)$. Donc la constante c vaut lna. D'où, pour tous x et a réels strictement positifs, $g(x)= ln(ax)-ln(x) = ln(a)$. C'est à dire $ln(ax)= ln(x) +ln(a)$.

Quatrième méthode

Soit la fonctions h définie avec $h(x) = ln(ax)$ et h est la composée de fonctions dérivables (pré-requis) est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $h'(x)=\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}$.

La fonction h est une primitive sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ comme la fonction ln (pré-requis) . Ces deux fonctions diffèrent d'une constante. Or pour $x=1$ on a $h(1)=ln(a)$ donc $h(x)=ln(x)+ln(a)$.

Cette méthode utilise le concept de primitive mais elle est fondée sur le même théorème, la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée. Nous soulignons que cette méthode utilise bien les deux composantes du pré-requis, même si elle n'est pas a priori attendue par le concepteur du sujet.

4. Ecologie didactique : outils- concepts

Concept de pré-requis

Toute ROC débute par un pré-requis qui organise la restitution. Il établit ainsi un contrat d'évaluation. Mais de quel contrat s'agit-il ? Est-il déjà utilisé dans d'autre(s) pratique(s) ?
Pour la plupart des professeurs de terminale S, le résolveur a l'obligation de l'utiliser dans sa démonstration. Ainsi le pré-requis ne se réduit pas à une hypothèse (surabondante ou pas), ni à une définition ou propriété qu'on admet. Il est plus proche du contrat implicite classique présent dans un enchaînement de questions dont la dernière question débute par « en déduire » : le contrat de la ROC est, de ce point de vue, quasiment identique à celui proposé à l'élève qui aborderait cette dernière question en admettant les résultats précédents.

Mais cette caractéristique est plus qu'une modification c'est une rupture de contrat didactique. En effet dans le secondaire les élèves ont l'habitude de pouvoir utiliser tous les résultats de cours pour répondre à un exercice : le « réservoir » de leurs connaissances est leur corpus personnel de pré-requis. Le résolveur doit être conscient d'une nouvelle règle, d'un jeu un peu formel, qui modifie le contrat d'évaluation. Probablement, cette rupture demande un entraînement préalable, mais nous laisserons cet aspect pour des travaux ultérieurs.

Notons que la première méthode utilise la technique du changement de variable affine qui n'est pas au programme du cycle terminal. Remarquons que la deuxième méthode proposée ci-dessus fonctionne au niveau de la classe de terminale, mais en exploitant les propriétés fonctionnelles de l'exponentielle, elle n'utilise pas les pré-requis, elle est donc hors contrat d'évaluation. Mais cette propriété est plus qu'une modification de contrat c'est une rupture. Nous rappelons que cette rupture de contrat didactique due à l'introduction du pré-requis nécessite une modification des « réflexes » acquis lors de l'apprentissage. En effet, l'élève résolveur ne doit pas nécessairement puiser dans tout son stock de connaissances pour résoudre une ROC. Le nouveau contrat didactique fonctionne ainsi : « tout pré-requis doit être utilisé pour répondre à l'exercice ». L'obligation d'utiliser les pré-requis condamne le résolveur à laisser de côté la deuxième méthode et ainsi referme la ROC.

Face à cette ROC, mais nous avons constaté que cela était assez général, l'élève résolveur se trouve en fait soit devant un exercice qu'il a déjà rencontré, soit devant une question nouvelle. Tout dépend des choix didactiques de son enseignant de terminale, comme le montre l'analyse des programmes présentée plus haut.
Dans le premier cas, il doit reconstruire une démonstration. Cela devrait impliquer de nier la connaissance acquise pour pouvoir se mettre dans la condition de la restitution au sens étymologique du terme c'est-à-dire « remettre en son état premier le texte du savoir ». Le pré-requis a cette vocation, nier l'appropriation du savoir par l'élève et remettre en oeuvre la dialectique « outil objet » [R. Douady, 1986] à son origine. Mais le pré-requis fonctionne plutôt comme un palliatif à l'altération ou à l'oubli des souvenirs au sens donné par Y. Matheron (2000) : " *La raison de* ***l'oubli des souvenirs*** *tient dans le fait qu'ils ne peuvent être restitués à l'identique, comme s'ils étaient stockés sans altération dans « un entrepôt du cerveau », mais qu'ils doivent être reproduits. Or,* ***reproduire n'est pas retrouver****, mais* ***reconstruire****. Mais l'univers cognitif des élèves a changé ; la venue de nouveaux ostensifs et non ostensifs* " a modifié l'univers de l'élève. Ainsi il est nécessaire d'organiser la restitution par le pré-requis, pour redonner de l'autonomie à l'élève.
Dans l'autre cas, l'élève doit partir du pré-requis pour construire sa démonstration. Il doit reconstruire son savoir autour de la question, c'est une des caractéristiques de la Méthode de Descartes comme le montre A. Mercier (2001). Cette caractéristique répond au principe de Papert de M. Minsky (1988) : « *certaines étapes les plus cruciales du développement mental sont fondées non pas seulement sur l'acquisition de nouvelles compétences mais sur de nouveaux processus administratifs de ce que nous connaissons déjà »* Nous posons alors la même question que celle de C. Silvy[6] « la ROC ne serait-elle pas essentiellement une procédure d'évaluation formative introduite dans une épreuve sommative ? »

Cependant dans ces deux cas, le pré-requis permet au résolveur d'être dans les conditions d'une *pratique cartésienne* avec un minimum de pas de raisonnement à effectuer. Cette organisation rend (en principe) la ROC « comestible », au niveau du temps et de la difficulté, pour un élève candidat au baccalauréat.

Par ailleurs, sans vouloir être exhaustifs, les pré-requis sont largement utilisés dans les pratiques d'évaluation en sciences. Pour se limiter aux mathématiques, cette notion de pré-requis est actuellement utilisée dans les écrits des concours et notamment du CAPES. La première partie de la première épreuve de CAPES 2006 en est un exemple : « *Dans cette partie, le candidat utilisera uniquement les connaissances faisant partie du programme de Terminale S. »* A l'évidence, ce cadrage s'impose au candidat. A l'inverse, au premier oral du CAPES externe ou du CAPLP mathématiques-sciences physiques, le candidat est amené à faire un choix de pré-requis, qui le place dans un contrat analogue à celui de la ROC.

Notion de site mathématique

Nous partons de la notion de site mathématique proposée par P. Duchet et K. Erdogan (2005, 2006) : « *le champ des objets mathématiques dont l'étude se révèle pertinente ou est supposée telle pour la connaissance d'un objet scientifique donné, O, peut être considéré comme un réseau d'objets et de relation, le site mathématique de O. Certains de ces objets et relations sont visibles, d'autres sont cachés. » [P. Duchet et K. Erdogan, 2005]* Pour chaque sujet en position résolveur, le site mathématique se présente sous forme d'un champ de signification,

[6] 14ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, ARDM, 2006, Sainte Livarde.

d'investigation et d'expérience qui doit être suffisamment stable, a son échelle, pour conférer à son étude un référentiel fiable.
Pour nous, un site mathématique s'organise autour de cinq champs d'analyse. Les deux premiers sont donnés par une simple lecture du sujet. Nous les subdiviserons à leur tour, en deux catégories :

- les uns sont des « substrats» qui sont des implicites, naturalisés, préconstruits, des notions protomathématiques ou paramathématiques pour le niveau étudié ; elles peuvent relever du vocabulaire (non forcément explicité au niveau étudié) de la logique, de la théorie des ensembles ou bien des codages usuels en mathématiques ; par exemple, dans la ROC étudiée, l'égalité, les quantificateurs en font indiscutablement partie ; elles peuvent relever, également, de méthodes (au sens usuels) ou de stratégies de démonstration . Ainsi les substrats n'appellent pas de mathématisation pensable, dans l'institution concernée.
- les autres sont des objets mathématiques, des ostensifs : *« Nous avons utilisé le mot « objet » surtout pour désigner les concepts mathématiques qui font l'objet d'étude,(...)De cette manière nous pouvons penser qu'un site mathématique est constitué d'abord des objets principaux dont l'étude fait appel à une multiple de concepts. » [K. Erdogan, 2006*] ; ainsi, les nombres réels, la fonction logarithme constituent des objets de la ROC sujet de notre étude.
- les techniques viennent ensuite. Elles sont *les manières* de faire permettant d'utiliser les objets comme des outils. Elles sont entendues ici au sens de propriété mathématique, théorème en général, figurant éventuellement dans les pré-requis, justifiant une étape de la démonstration demandée dans la ROC étudiée. Elles sont des méthodes routinières efficaces et peuvent varier dans les différentes solutions.
- nous distinguerons enfin, dans cette ROC, deux niveaux d'analyse conceptuelle. Les *concepts 1* permettent de justifier les techniques. C'est la technologie au sens de [Y. Chevallard, 1989]. Elles constituent le premier niveau de théorèmes justifiant les techniques.
- les *concepts 2* constituent le deuxième niveau de notions ou de théorèmes justifiant les concepts 1.

Pour expliciter ces trois derniers champs d'analyse, et dans un contexte voisin de cette ROC, la technique justifiant l'étude du sens de variation d'une fonction par le signe de la dérivée pourrait être le théorème des accroissements finis (TAF), bien que ce ne soit pas la seule approche possible. Alors, une des technologies associées (ou concepts 1) pourrait être le théorème de Rolle, pourtant équivalent au TAF, mais que la chronogenèse place avant. Nous pourrions aussi considérer qu'une des propriétés des fonctions continues sur les segments, atteindre leurs extrema, est une technologie associée, tant le théorème de Rolle en découle immédiatement. Les concepts 2 seraient ceux plus généraux, englobant les champs mathématiques questionnés, comme la notion de continuité ou de compacité.

Remarque : au niveau d'analyse considéré, nous avons choisi de ne pas reprendre dans les concepts, certaines des « substrats», par souci de lisibilité. Mais, nous restons conscients que, par exemple, le vocabulaire de la logique présenté ici comme « substrat» pourrait devenir concept dans une analyse plus fine qui viserait les méthodes de démonstration en la situant dans la théorie formelle des propositions.

Construction du site mathématique de la ROC

Nous avons rejeté la première méthode de résolution par manque de connaissances de la part des élèves au niveau d'étude considéré et la deuxième pour rupture de contrat d'évaluation du concept ROC. En conséquence, nous limiterons notre analyse aux deux dernières méthodes.

Les « substrats» de cette ROC, déjà présentées pour l'essentiel dans la première lecture du sujet, relèvent du champ de la logique (égalité, équivalence, quantificateurs), des codages usuels mentionnés, (notation d'une fonction et usage de l'alphabet en mathématiques), qui suggèrent une stratégie de démonstration. L'égalité « pour tous réels strictement positifs a et x, $ln(ax)=ln(a)+ln(x)$ » fait intervenir deux objets différents. L'un étant une propriété de la fonction ln, objet spécifique, l'autre celui des relations fonctionnelles, objet plus général, champ d'investigation en mathématiques.
Nous remarquons que la relation « pour tous réels strictement positifs x et y, $ln(xy)=ln(x)+ln(y)$ » a été remplacée par « pour tous réels strictement positifs a et x, $ln(ax)=ln(a)+ln(x)$ ». Comme nous l'avons déjà écrit dans la première partie, ce changement est un indice pour le résolveur. Cette modification de l'énoncé de la propriété de la fonction ln ou de la relation fonctionnelle permet de passer de deux variables à une variable et une constante. Elle indique que la clef du problème réside dans l'étude d'une fonction. Cela met en évidence de nouveaux objets, la somme et la composée de fonctions.
En rappelant que la fonction ln est dérivable, le pré-requis indique un autre objet, la dérivation, outil générique de traitement des fonctions.
Enfin la notion d'intervalle et les nombres réels sont les derniers objets. Ils sont plus difficiles à voir car ils ne sont pas très présents dans le sujet (une seule fois). Pourtant ces objets sont fondamentaux dans la justification de la technique. Les nombres présents dans cette ROC sont soit des constantes spécifiées (1 par exemple), soit des constantes quelconques positives (a par exemple), soit des variables (x par exemple). Nous notons que certains de ces objets sont issus du cycle terminal, donc des objets récents pour le résolveur [C. Castela, 2008].

Les deux dernières méthodes font appel à la même technique principale, de manière directe pour la troisième méthode et indirecte pour la quatrième. Nous pouvons l'énoncer ainsi : « soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. La fonction f est constante sur I si, et seulement si, f est dérivable et f' est la fonction nulle sur I ». C'est une caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée.
Pour atteindre cette technique, la troisième méthode passe par la mise en relation de plusieurs des objets : dérivabilité, dérivation de somme et de composée de fonctions. Les propriétés algébriques des fonctions dérivables (dérivabilité de la somme de fonctions dérivables, dérivabilité d'une fonction composée et calcul de ses dérivées) sont ainsi les principales justifications des hypothèses de la technique principale.

Remarquons que la justification principale de cette technique est un théorème admis. En effet, le fait que « toute fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle non réduit à un point est constante », n'est pas justifiable en 1ère S depuis le changement de programme 2002. En terminale elle n'est pas, à notre connaissance, enseignée depuis la disparition du théorème des accroissements finis (programme 1991). Nous avons cherché une démonstration possible en terminale S, en contournant les propriétés d'accroissements finis. (Voir annexe 1 et [C. Silvy, A. Delcroix, 2008] pour une analyse plus complète.) Une des démonstrations possibles est issue d'un exercice dans le cours d'un professeur de classe préparatoire de première année. À ce niveau, le cours du professeur est un « texte du savoir » bien réglé. La ROC étudiée ici se situe donc à la frontière entre deux types de cours : un premier type, construit à partir de problèmes ou d'activités pas toujours justifiés, l'autre type plus « naturel » plus proche d'un cours « ouvrage fini » bien justifié. Les sites Internet ou des entretiens avec des professeurs

de terminale permettent de dire que pour eux, le texte de leur cours reste un élément important mais il n'est pas aussi « travaillé » que celui du professeur de classe préparatoire.
Cette démonstration utilise un principe de dichotomie, ce qui est équivalent à la propriété des segments emboîtés ou axiome de Cantor dans l'ensemble des réels :
(IE) Soit *[a_n, b_n]* une suite d'intervalles emboîtés telle que $\forall n \in IN\ a_n \leq a_{n-1}$ et $b_{n-1} \leq b_n$. Donc *[a_{n-1}, b_{n-1}]* $\subset$ *[a_n, b_n]*. Alors $\bigcap_{n \in IN} [a_n, b_n]$ est un ensemble non vide),
équivalente à l'une des 4 suivantes :
(BS) propriété de la borne supérieure : toute partie de R non vide majorée admet une borne supérieure ;
(MB) convergence des suites monotones bornées : toute suite réelle monotone bornée est convergente ;
(CC) complétude séquentielle : toute suite réelle de Cauchy est convergente ;
(BW) propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.
Une autre démonstration de ce théorème de caractérisation utilise le principe de Lagrange, (liant le sens de variation par le signe de la dérivée) ou le théorème de l'inégalité des accroissements finis généralisés ou simple sans valeur absolue.

En se souvenant des preuves des propriétés des accroissements finis, qui reposent notamment sur l'axiome de la borne supérieure ou sur la propriété de Bolzano-Weierstrass, on voit que toutes les démonstrations du théorème de caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée ont pour concept associé une de ces cinq propriétés. Ainsi, les *concepts (2)* associés à la justification principale évoquée ci-dessus, à savoir certaines propriétés caractéristiques du corps des réels, restent inaccessibles au niveau considéré.
Actuellement, dans la programmation des programmes du supérieur, ce théorème de caractérisation se situe après les fonctions continues, au moment de l'étude des fonctions dérivables comme corollaire du théorème des accroissements finis. Ce théorème est équivalent au théorème de Rolle. Dans les programmes du secondaire précédant les années 1960, l'habitat de la notion de dérivée n'était pas le même : il était placé entre l'étude des variations des fonctions dites aujourd'hui de référence (monôme de degré au plus trois, fonction racine et homographique) et la notion de mouvement. En effet, la justification des variations des fonctions de référence ne nécessite pas l'utilisation du concept de dérivée.
La dernière méthode est une variante de la troisième méthode, basée sur la notion de primitive. La technique principale est remplacée par l'assertion suivante « 2 primitives d'une même fonction sur un intervalle I diffèrent d'une constante ». En effet, par définition, deux primitives F et G ont même dérivée. La fonction F-G a alors pour dérivée la fonction nulle. En appliquant la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée, on obtient le résultat voulu. Dans cette méthode, la technique principale s'appuie donc sur la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée, qui en devient la technologie.

Derrière ces technologies, on trouve les propriétés algébriques des espaces vectoriels ou des algèbres de fonctions, bien sûr hors programme du secondaire. La relation fonctionnelle de la fonction ln est la définition d'un homomorphisme du groupe (IR^{*+},$\times$) vers le groupe (IR, +) appelé « isomorphisme fondamental du groupe multiplicatif IR^{*+} dans le groupe additif de IR[7] ». Comme la fonction ln est dérivable sur I, de dérivée une fraction rationnelle ne s'annulant pas sur I comme l'indique ces pré-requis, un raisonnement par récurrence permet aisément de montrer qu'elle est de classe C^{∞}. Nous sommes donc en présence d'un difféomorphisme de classe C^{∞} qui est donc un des concepts (2) de cette ROC.

[7] Eléments d'algèbre moderne A. Lentin et J Rivaud Vuibert 3 trimestre 1958

Remarque : Nous mettons en doute « la transparence du savoir enseigné » par la difficulté à obtenir une preuve de ce théorème de caractérisation. En effet les mathématiques au programme du cycle secondaire ne constituent pas une partie autonome des mathématiques. Elles dépendent de nombreux théorèmes de cours du premier cycle universitaire. Un élève expert risque de se poser la question de la validation de ce théorème, au contraire d'un élève non expert qui n'aura pas de remords à appliquer ce théorème admis.

Le site mathématique de la ROC [8]

Substrats	Objets	Techniques	Concepts (2)	Concepts(3)
Equivalence Quantificateur Code : notation fonction Code usage de l'alphabet en mathématiques **Démonstration** Egalité	Intervalle Nombres réels **Propriété de la fonction ln** **Relation fonctionnelle**		connexité, propriété de la borne supérieure	Homéomorphisme de groupe difféomorphisme de classe C
		Caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée.	Dichotomie Axiome de Cantor	*Propriétés de R*
			Th.des accroissements finis	Fonction continue de la variable réelle **Th de Rolle**
Stratégie			Principe de Lagrange	
			Inégalité des accroissements finis	
	Somme et composée de fonctions Dérivation	Somme et composée de fonctions dérivables		Espace vectoriel des fonctions dérivables
		2 primitives d'une même fonction sur un intervalle I diffèrent d'une constante	Caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée	

5. Discussion et conclusion

La construction d'un site mathématique d'un exercice passe nécessairement par une phase d'interrogation. Dans ce cas particulier, nous évoquions dans l'introduction la question de « la transparence » de l'évaluation par les ROC et plus particulièrement par celle objet de notre étude. Nous avons montré que le terme « organisée » de cette restitution possède deux

[8] Nous présentons le tableau de synthèse du site mathématique de cette ROC. Seuls les éléments principaux ont été représentés dans un souci de clarté.
Les flèches indiquent les liens d' « inclusion » dans la justification (« *à interpréter à peu près comme « pertinent pour » »* [P. Duchet, K. Erdogan, 2005]). Les éventuelles flèches joignant des concepts d'une même colonne n'ont pas été marquées.
Les mots en gras sont substrat, objets, technique, concepts attendus par l'institution. Nous invitons le lecteur, qui désire « fouiller » davantage le site, à lire C. Silvy A. Delcroix « fonction constante et dérivée nulle : résultat si trivial… ».

niveaux, l'un mathématique, l'autre constituant « une mise en scène » du texte de l'énoncé. Le premier niveau montre l'importance de cette ROC au niveau mathématique, au centre des propriétés des fonctions de la variable réelle, dont elle exige une bonne maîtrise. Le deuxième niveau est destiné à aider les élèves : il évoque des habiletés mathématiques pour reconnaître l'usage du a et du x, de la notation $\ln(x)$ ainsi que des autres notions protomathématiques et paramathématiques de l'énoncé. L'évaluation porte donc à la fois sur la solidité des savoirs : *" une partie de restitution organisée des connaissances qui permet d'évaluer la solidité des savoirs scientifiques"* [9] et sur l'habilité mathématique du candidat.
Nous nous questionnons sur l'enseignement des habiletés mathématiques. Se font-ils par monstration ?, par l'exemple ?, ou par ostension ? Où sont-ils non enseignés ? Dans ce dernier cas les habiletés sont prises dans le sens « métis », mot grec qui signifie la ruse et nous pouvons affirmer que la réponse attendue à cette ROC passe nécessairement par cette ruse.

Par ailleurs, les caractéristiques de la ROC évoquée dans cet article sont au nombre de trois. En premier lieu, la ROC se situe à la fin de l'apprentissage, au moment où l'élève peut réécrire partiellement *un texte du savoir* : la « restitution des connaissances ». Traditionnellement, le cours écrit du professeur constitue le texte du savoir de la classe. Au XIX^e siècle ou au début du XX^e, le cours est typographié en écriture manuelle, composé d'une suite de théorèmes et comporte de nombreux commentaires : c'est un discours. Dans les années 2000, le cours n'est pas toujours transmis en totalité. Sa construction, se faisant en partie au travers d'activités, devient partiellement du domaine privé, appartenant à l'élève. Ainsi, une ROC peut tendre à faire ressurgir ce souffle du discours, le « logos ».
Le nouveau contrat d'évaluation engendré par le pré-requis est la deuxième caractéristique de cette ROC. Ce contrat en induit la dernière, en permettant au résolveur d'être dans les conditions d'une certaine « pratique cartésienne ». Celle-ci est obtenue par reconstruction, soit par *"oubli des souvenirs",* soit par réorganisation *" des savoirs connus de l'élève autour de ce problème ".* C'est une méthode qu'on peut rapprocher de celle de Descartes, comme le montre A. Mercier (2001) : *« Le rapprochement entre les deux textes de Descartes montre que la réorganisation des connaissances qu'il mène selon la méthode, lui permet de produire des réponses - inconnues jusqu'alors - aux problèmes mathématiques qu'il se pose : la méthode cartésienne décrit <u>la manière de s'enseigner soi-même</u> ce que l'on ignore, <u>dès lors que l'on peut comprendre son ignorance dans le cadre de pensée des savoirs existants, réorganisé à cet effet</u>. »*

Enfin, au travers de la construction du « site mathématique », nous voyons que l'objet ROC peut répondre, au moins partiellement, aux attentes de l'institution. D'une part, il peut induire une modification des pratiques en introduisant obligatoirement davantage de démonstrations dans le cours du professeur. D'autre part, il peut permettre un certain dépaysement du programme par une autre entrée. Du point de vue des élèves, un enseignement qui lèverait une partie du voile implicite de certaines habiletés leur permettrait de ne plus prendre l'acronyme ROC au sens de « dur comme du rocher » mais au sens de « ROC, cœur du raisonnement ». La cohérence institutionnelle de l'objet ROC nous semble donc réelle. Cependant, le caractère étranger au programme de la technologie justificative de la ROC étudiée ici montre qu'elle vise à faire exister au niveau n des théorèmes de l'année n+1, ce que certains pourraient voir comme une limitation de cette cohérence. En effet nous avons montré que deux démonstrations cohabitent, l'une absente, et l'autre faible dans « l'écotone » secondaire-universitaire avec des conditions d'existences fragiles.

9 Rapport-n°2007-090 Novembre 2007, inspection générale de l'administration, l'Éducation nationale et de la Recherche. La série scientifique au cycle terminal du lycée : articulation avec le cycle de détermination et orientation vers les études supérieures.

Nous espérons, au travers de l'exemple étudié ici, avoir montré que la construction effective d'un site mathématique permet (en particulier pour les étudiants préparant le CAPES ou le CAPLP dans le cadre des épreuves d'oral 2) de réinterroger un exercice ou une activité, en donnant à l'étude un cadre de référence pertinent, permettant de la resituer dans son « écosystème » mathématique.

Bibliographie

CASTELA C. (2008). *Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes dans Perspective en didactique des mathématiques, Cours de la XIII ème École d'été de didactique de mathématiques,* André Rouchier et Isabelle Bloch(Editeurs) La Pensée Sauvage, Grenoble, p 89-114

CHEVALLARD Y. (1985-1998). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*..

DOUADY. R. (1986). *« Jeux de cadres et dialectique outil - objet ».* Recherche en Didactique des Mathématiques, N°7.2. La pensée sauvage, Grenoble.

DAVID B. (2000). *Equité et arrangements évaluatifs. Certifier en E.P.S.*. Paris INRP, http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/documents-travaux-recherche-education/david/equite/accueil.html

DUCHET P. ERDOGAN K. (2005). *La construction du diagnostic d'un enseignement à partir d'une analyse épistémologique en termes de « site mathématique ». In* Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, 17-21 février 2005. Publication électronique 2006.

ERDOGAN K. (2006). *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques.* Thèse, université de Paris VII.

MAUSS M. (1950). *Sociologie et anthropologie.* Quadrige/Presse Universitaires de France, Paris. Septième édition : 1997.

MATHERON Y. (2000). Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée quelques exemples. Thèse, université de Provence, Aix Marseille 1.

MERCIER A. (2001). *Descartes : le temps de la construction du savoir.* L'Ouvert, n°103. p.14-24. IREM de Strasbourg.

MERCIER A. (2003). *Evaluer et comprendre les effets des pratiques pédagogiques. Conférence au PIREF* (UMR adef1)
http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/form_formateur/documents/Piref_Mercier.pdf

MINSKY M. (1998). *La société de l'esprit.* Inter Editions Paris

PÉRISSOL P.A. (2005). *Rapport d'information déposé en application de l'article 145 du règlement par la commission des affaires culturelles, familiales et sociales sur la définition des savoirs enseignés à l'école* (Enregistré à la Présidence de l'Assemblée nationale le 13 avril 2005).