



**HAL**  
open science

# Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires

Corinne Berzin

► **To cite this version:**

Corinne Berzin. Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1988, 306, pp.291-294. hal-00319509

**HAL Id: hal-00319509**

**<https://hal.science/hal-00319509>**

Submitted on 10 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comptes rendus de  
l'Académie des sciences.  
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1984-2001.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:utilisationcommerciale@bnf.fr).

## Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires

Corinne BERZIN

**Résumé** — Soit  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  un champ aléatoire gaussien centré stationnaire. Nous nous intéressons à la mesure d'aire  $(d-1)$ -dimensionnelle de l'ensemble des passages à niveau du champ régularisé par convolution.

Sous certaines hypothèses et moyennant une normalisation appropriée, cette mesure aléatoire converge dans  $L^2$  vers une limite coïncidant avec le temps local du champ  $X$ , lorsque celui-ci admet un temps local continu.

### Smoothing of paths and approximation of local time of stationary gaussian fields

**Abstract** — Let  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  be a stationary gaussian field. We are looking for the  $(d-1)$ -dimensional area measure of the intersection with the level zero of the field regularized by convolution.

Under some conditions and with an appropriated normalization, this measure converges in  $L^2$  towards a limit which is the local time, when  $X$  admits a continuous local time.

INTRODUCTION. — La théorie du temps local d'un processus stochastique  $X$  a été élaborée par P. Lévy dans le cas du mouvement brownien. Depuis de nombreuses approximations ont été proposées; en 1984, M. Wschebor [6] a proposé une construction du temps local du processus de Wiener à  $d$ -paramètres, en utilisant les régularisées de  $X$ . Le résultat principal est que : si  $X_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon * X(t)$  est une régularisation de  $X$  obtenue à l'aide de la  $C^\infty$ -approximation de l'unité  $\psi_\varepsilon$ , où

$$\psi_\varepsilon(t^1, \dots, t^d) = \prod_j \psi_\varepsilon(t^j) = (1/\varepsilon^d) \prod_j \psi(t^j/\varepsilon),$$

$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  étant une fonction  $C^\infty$ , de support inclus dans  $[-1, 1]$  et telle que :  $\int_{\mathbb{R}} \psi(s) ds = 1$ ,  $T$  un ensemble ouvert borné dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de  $(\mathbb{R}^+)^d$ , alors :

$$\sqrt{\varepsilon} \|\psi\|_2^{-1} \sigma_{d-1}(C(X_\varepsilon) \cap T) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^p} L(0, T), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

où  $\sigma_{d-1}$  désigne la mesure d'aire  $(d-1)$ -dimensionnelle,  $C(X_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}^d, X_\varepsilon(t) = 0\}$  et le temps local est défini de la façon suivante :

Soient  $A$  et  $B$  des boréliens respectifs de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mu_d$  désignant la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^d$ , la mesure d'occupation  $\mu(A, B)$  de  $X$  est définie par

$$\mu(A, B) = \mu_d \{ t \in B, X(t) \in A \}$$

et le temps local  $L(x, B)$  est caractérisé comme étant une fonction satisfaisant

$$\mu(A, B) = \int 1_A(x) L(x, B) dx.$$

L'existence de versions régulières de telles fonctions est étudiée dans [4] et [5].

J.-M. Azaïs a étendu ce résultat aux PAI stables [1]. D. Florens-Zmirou et J.-M. Azaïs ont ensuite donné une approximation similaire du temps local, pour une certaine classe de processus gaussiens stationnaires indexés par le temps [2].

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

Ils ont établi que : si  $N_{\psi, \varepsilon} ]a, b[$  désigne le nombre de passages par zéro de  $X_\varepsilon$  durant l'intervalle de temps  $]a, b[$ ,  $\lambda_{2, \varepsilon}$  le moment spectral d'ordre 2 de  $X_\varepsilon$ , alors :

$$\sqrt{\pi/2} \lambda_{2, \varepsilon}^{-1/2} N_{\psi, \varepsilon} ]a, b[ \quad \text{et} \quad (1/2\delta) \int 1_{]a, b[}(s) 1_{1-\delta, \delta[}(X_s) ds$$

convergent dans  $L^2$  vers la même limite.

Le but de cette Note est de généraliser ce résultat au cas où le processus  $X$  est multiindexé.

Plus précisément, si  $T$  est un ouvert et  $B$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$ , nous appelons « périmètre relatif de  $B$  par rapport à  $T$  »,  $Q_T(B)$ , défini par

$$Q_T(B) = \sup \left\{ \int \operatorname{div} v(t) 1_B(t) dt; v \in C_k^\infty(T)^d, \|v\| < 1 \right\}$$

où  $C_k^\infty(T)^d$  désigne l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , de classe  $C^\infty$  et à support compact inclus dans  $T$ .

Nous considérons  $A(X_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}^d, X_\varepsilon(t) < 0\}$ ; lorsque  $X_\varepsilon$  est à trajectoires continues, presque sûrement  $X_\varepsilon$  n'a pas de points critiques de valeur zéro et  $Q_T(A(X_\varepsilon))$  n'est alors que la mesure d'aire  $(d-1)$ -dimensionnelle de  $C(X_\varepsilon) \cap T$ ; nous montrons alors, sous certaines hypothèses, qu'il existe une normalisation  $d(\varepsilon)$  strictement positive, telle que si  $X$  admet une version continue du temps local, alors :

$$\sqrt{d(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T)$$

et de façon plus générale :

$$\sqrt{d(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) \quad \text{et} \quad (1/2\delta) \int 1_{\{|X(t)| < \delta\}}(t) 1_{\{t \in T\}} dt$$

convergent dans  $L^2$  vers la même limite.

Il est à noter que lorsque  $d > 1$ , les hypothèses de travail sont beaucoup plus générales que dans le cas  $d = 1$ , ceci provenant du fait que  $u \rightarrow 1/\|u\|$  est intégrable au voisinage de  $u = 0$ .

NOTATIONS ET HYPOTHÈSES. — Soit  $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$  un champ aléatoire gaussien centré stationnaire de covariance  $r(t)$  continue en zéro, et de mesure spectrale  $F(d\lambda)$  supposée non nulle sur les quadrants ouverts de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose  $d > 1$ .

On note  $D^i = \partial/\partial t^i$ .

Soit  $\psi$  un noyau de convolution de classe  $C^1$  vérifiant :

$$\psi(u) \leq 1/\|u\|^{d+1}, \quad |D^i \psi(u)| \leq 1/\|u\|^{d+1}, \quad |D^i \psi(\cdot)| \in L^1(d\lambda),$$

$\forall i \in [1, d], \forall u \in (\mathbb{R}^*)^d$ . On note  $\hat{\psi}$  la transformée de Fourier de  $\psi$ . On définit  $\psi_\varepsilon$  par :  $\psi_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-d} \psi(u/\varepsilon)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^d$ , et  $X_\varepsilon$  par :  $X_\varepsilon = \psi_\varepsilon * X$ .

Soient  $\Lambda^1(\varepsilon) \geq \dots \geq \Lambda^d(\varepsilon)$  les valeurs propres de la matrice de covariance de  $\dot{X}_\varepsilon(0)$ .

Soit  $T$  un cube ouvert borné dans  $\mathbb{R}^d$  dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Soit  $r_{\varepsilon, \psi}(t) = E(X_\varepsilon(t) X_\varepsilon(0))$  noté encore  $r_\varepsilon(t)$ .

$\delta_{i,j}$  désigne le symbole de Kronecker.

HYPOTHÈSE H1. — La fonction de covariance  $r$  vérifie :

(a) Les dérivées partielles premières et secondes de  $r$  existent en dehors de l'origine, et sont bornées à l'infini. Les dérivées partielles premières de  $r$  sont à variation bornée autour de l'origine.

(b) On pose  $H(i) = \int |x^i|^2 dF(x)$ ,  $\forall i \in [1, d]$ ; on suppose qu'il existe une direction  $i_0$  pour laquelle  $H(i_0)$  est infinie.

HYPOTHÈSE H2. — On suppose que l'on peut appliquer les formules de type Rice adaptées à notre problème.

HYPOTHÈSE H3. — Soit  $c(\varepsilon) = (\Lambda^1(\varepsilon))^{-1}$ ; on suppose que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) \Lambda^i(\varepsilon) = \Lambda^i, \quad \forall i \in [1, d].$$

Soit  $\Lambda = [(\Lambda_{i,j})]_{i,j}$  où  $\Lambda_{i,j} = \delta_{i,j} \Lambda^i$ ; on note  $r$  le rang de  $\Lambda$ . On considère  $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$  où les  $X_i$  sont des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes, de variance  $\Lambda^i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , et  $\theta = E(\|X\|_r)$ .

Nous démontrons alors :

THÉORÈME. — Sous les hypothèses H1, H2 et H3, les variables aléatoires

$$\xi_\varepsilon = \sqrt{c(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) \quad \text{et} \quad \eta^\delta = \theta/2 \delta \int 1_T(t) 1_{\{|X(t)| < \delta\}}(t) dt$$

convergent au sens de  $L^2$ , pour  $\varepsilon$  et  $\delta$  tendant vers zéro, vers une même limite.

COROLLAIRE. — Sous les hypothèses H1, H2 et H3 et si  $X$  admet un temps local  $L(u, T)$  continu en  $u$  au point zéro, alors :

$$\sqrt{c(\varepsilon)} \theta^{-1} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T).$$

Commentaires. — Deux cas particuliers sont intéressants lorsque  $r$  vérifie H1 et H2 :

1°  $X$  est isotrope ( $r(t) = g(\|t\|)$ ) et  $\psi$  est invariante par les transpositions et par symétrie par rapport aux axes de coordonnées. Dans ce cas

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = \int |\hat{\psi}|^2(\varepsilon x) x^i x^j dF(x) = 0 \quad \text{pour } i \neq j \text{ et } \lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = \lambda_{2,\varepsilon}^{j,j}, \quad \forall (i, j) \in [1, d].$$

En particulier si  $g'(x) = x^\beta f(x)$ , pour  $x \geq 0$ , où  $-1 < \beta$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ ,  $a \neq 0$ ,  $|f(x)| < M$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ , alors :  $c(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta} K_\psi^{-1}$ , où  $K_\psi$  supposée non nulle est définie par

$$K_\psi = -a \int \psi(u) h^1 \|h\|^{\beta-1} D^1 \psi(u-h) du dh,$$

$\theta = E(\|X\|_d)$  où  $X \rightarrow N(0, I)$ , et sous les hypothèses du corollaire :

$$\theta^{-1} (\sqrt{K_\psi})^{-1} (\sqrt{\varepsilon})^{1-\beta} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T).$$

Exemple 1. —  $r(t) = e^{-\|t\|^\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 2$ ,  $\beta = \alpha - 1$ .

2°  $r(t) = \prod_i r^i(t^i)$ ,  $r^i(0) > 0$ ,  $F(d\lambda) = \prod_i F_i(d\lambda^i)$ ,  $\psi(t) = \prod_i \psi_i(t^i)$ ,  $\psi_i(x) = \psi_i(-x)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_i(t) dt = 1, \quad \psi_{i,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \psi_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall i \in [1, d], \quad \forall t \in \mathbb{R}^d \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas  $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = 0$ , pour  $i \neq j$ ,  $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = \lambda_{2,\varepsilon}^i g_i(\varepsilon)$ , où  $g_i(\varepsilon) = \prod_{j \neq i} r_{j,\varepsilon}^j(0)$  converge vers  $\prod_{j \neq i} r^j(0)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et  $\lambda_{2,\varepsilon}^i$  est le moment spectral d'ordre deux d'un processus à un

indice de covariance  $r_{\psi_i, \varepsilon}^i$ . Si  $\lambda_{2, \varepsilon}^j / \sup_i (\lambda_{2, \varepsilon}^i) \rightarrow a_j$  et  $r = \text{rg}(a_j \delta_{ij})_{i, j=1, \dots, d}$ , et si  $\lambda_{2, \varepsilon}^{i, i} \geq \lambda_{2, \varepsilon}^{j, j}$  pour  $1 \leq i \leq j \leq d$ , alors sous les hypothèses du corollaire on a :

$$\theta^{-1} \sqrt{c(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T)$$

où  $\theta = E(\|X\|_r)$  et  $X \rightarrow N(0, (a_i/a_1 r_1(0)/r_i(0) \delta_{i, j})_{i, j=1, \dots, r})$ .

*Exemple 2.* —  $r_i = r_0$  et  $\psi_i = \psi_0$  où  $r_0$  vérifie H1 (traduit pour  $d=1$ ), alors  $a_i = 1$ ,  $\forall i \in [1, d]$ .

*Remarque.* — Si on suppose par exemple que  $X$  (resp.  $X_\varepsilon$ ) est à trajectoires continues (resp. de classe  $C^4$ ), alors sous l'hypothèse H1 le cas particulier 1 et l'exemple 2 vérifient H2 [6]; ce dernier permet donc d'obtenir un sous-ensemble de la classe des processus à un indice, stationnaires, de moment spectral d'ordre deux infini, qui contient une partie de la classe exhibée dans le cas  $d=1$  par [2].

Note reçue et acceptée le 23 novembre 1987.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J.-M. AZAÏS, *Conditions for convergence of number of crossings to the local time. Application to stable processes with independent increments and to gaussian processes* (à paraître).
- [2] J.-M. AZAÏS et D. FLORENS-ZMIROU, *Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires* (à paraître).
- [3] S. M. BERMAN, *Local non determinism and local times of gaussian processes*, *Indiana University Mathematics Journal*, 23, n° 1, 1973, p. 69-94.
- [4] Y. A. DAVYDOV, *Local times for multiparameter random processes*, *Theory of probability and its applications*, 23, n° 3, 1978, p. 573-583.
- [5] W. EHM, *Sample properties of multiparameter stable processes*, *Zeit. für Wahr. und verw. G.*, 56, 1981, p. 195-228.
- [6] M. WSCHEBOR, *Surfaces aléatoires : mesure géométrique des ensembles de niveau*, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 1147, Springer-Verlag, 1985.

Université Paris-XI, U.A. n° 743, Statistique appliquée,  
Bat. n° 425, Mathématiques, 91405 Orsay Cedex.