



Estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre 2 d'un champ aléatoire gaussien à l'aide des courbes de niveau

Corinne Berzin, Ileana Iribarren

► To cite this version:

Corinne Berzin, Ileana Iribarren. Estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre 2 d'un champ aléatoire gaussien à l'aide des courbes de niveau. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1988, 307, pp.915-918. <hal-00319505>

HAL Id: hal-00319505

<https://hal.science/hal-00319505v1>

Submitted on 10 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Comptes rendus de
l'Académie des sciences.
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 07/12/1988.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.
- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.
- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisationcommerciale@bnf.fr.

Estimation de la matrice des moments spectraux d'ordre 2 d'un champ aléatoire gaussien à l'aide des courbes de niveau

Corinne BERZIN et Ileana IRIBARREN

Résumé — On propose des estimateurs pour la matrice des moments spectraux du second ordre d'un champ aléatoire Gaussien bi-indexé stationnaire et centré. Les estimateurs sont définis à l'aide de fonctionnelles sur les courbes de niveau du champ. On étudie ses propriétés statistiques et on donne une expression de la matrice de covariances asymptotique.

Estimation of the spectral moments matrix of second order of a gaussian random field based on the level curves

Abstract — We propose estimators for the spectral matrix of the second order moments of a stationary and centered Gaussian bi-parametric random field. The estimators are defined as functionals over the level curves of the field. We study their statistical properties and we give an expression of the asymptotic covariance matrix.

I. INTRODUCTION. — Soit $X = \{X(t) : t \in \mathbb{R}^2\}$ un champ aléatoire gaussien, centré et stationnaire. Soit $\Gamma(t)$ sa fonction de covariance, que nous supposons deux fois différentiable et $\Gamma(0) = 1$. Si dF est la mesure spectrale associée à Γ , les moments spectraux σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ sont définis par

$$(1) \quad \sigma_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i \lambda_j dF, \quad i, j = 1, 2.$$

On notera Σ la matrice $(\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$. On suppose que X admet des trajectoires presque sûrement deux fois différentiables; le processus gradient de X , $X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t))$, où $X'_j(t) = \partial X(t) / \partial t_j$, $j = 1, 2$, admet alors comme matrice de covariances $(-\Gamma''_{ij}(0))_{i,j=1,2}$ où $\Gamma''_{ij}(t) = \partial^2 \Gamma(t) / \partial t_i \partial t_j$, $t \in \mathbb{R}^2$. D'après la relation (1) les moments spectraux σ_{ij} sont liés à la fonction Γ par la relation $\sigma_{ij} = -\Gamma''_{ij}(0)$, $i, j = 1, 2$.

Des techniques différentes ont été proposées par plusieurs auteurs pour estimer les moments spectraux. Lorsque X est un processus gaussien uni-indexé ($t \in \mathbb{R}$) Lindgren [5] a proposé des estimateurs pour le second moment spectral en utilisant les passages à niveau et Cabaña [1] les extrêmes du processus. Dans les cas où X est un processus bi-indexé, Longuet-Higgins [6] estime les moments spectraux de tous les ordres en utilisant le nombre des zéros du processus sur les droites faisant un angle donné avec l'axe horizontal.

L'objet de ce travail est de proposer des estimateurs pour la matrice Σ en utilisant des fonctionnelles définies sur les courbes de niveau de X du même type que celles qui ont été utilisées par Cabaña [2] pour estimer les paramètres d'isotropie.

L'étude générale du comportement asymptotique de ce type de fonctionnelles a été faite par Iribarren [4]; on utilisera ses résultats pour établir les propriétés des estimateurs proposés.

II. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES ESTIMATEURS DE LA MATRICE Σ . — Soient $u \in \mathbb{R}$ un niveau fixé et T un rectangle de \mathbb{R}^2 . Étant donné que X est gaussien, l'ensemble aléatoire $C_u^T = \{t \in T : X(t) = u\}$ est p. s. une courbe différentiable si les conditions suivantes sont

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

vérifiées :

H 1 : X est p. s. de classe C^2 .

H 2 : $\det \Sigma > 0$ c'est-à-dire $\Gamma''(0)$ n'est pas dégénérée.

Le processus gradient de X peut être représenté par $X'(t) = \|X'(t)\| (\cos \Theta(t), \sin \Theta(t))$ où $\|X'(t)\|$ et $\Theta(t)$, $t \in \mathbb{R}^2$, sont deux champs aléatoires réels stationnaires. Si $f: [\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, les conditions H 1 et H 2 permettent de définir p. s. les intégrales de ligne (voir [3])

$$(2) \quad \mathcal{F}_u(f, T) = |T|^{-1} \int_{C_u^T} f(\Theta) dS.$$

Notre proposition d'estimateurs se fondera sur les valeurs des intégrales

$$(3) \quad \mathcal{L}(T, u) = \mathcal{F}_u(1, T); \quad \mathcal{C}(T, u) = \mathcal{F}_u(|\cos \theta|, T); \quad \mathcal{S}(T, u) = \mathcal{F}_u(|\sin \theta|, T).$$

Les hypothèses H 1, H 2 permettent d'écrire les deux premiers moments des intégrales (2) sous la forme (voir [3])

$$(4) \quad \begin{cases} E \mathcal{F}_u(f, T) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) P_{X(0); \Theta(0)}(u; \theta) E[\|X'(0)\| / X(0)=u, \Theta(0)=\theta] d\theta \\ E \mathcal{F}_u(f, T) \mathcal{F}_v(g, T) \\ = |T|^{-2} \int_{T \times T} ds dt \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi) P_{X(s), X(t); \Theta(s), \Theta(t)}(u, v; \theta, \varphi) \\ \times E[\|X'(s)\| \|X'(t)\| / X(s)=u, X(t)=v; \Theta(s)=\theta, \Theta(t)=\varphi] d\varphi. \end{cases}$$

où $P_{X(t); \Theta(t)}(u; \theta)$ désigne la densité conjointe des variables $X(t)$ et $\Theta(t)$ au point $(u; \theta)$.

Soient λ_+ et λ_- ($\lambda_+ \geq \lambda_-$) les deux valeurs propres de la matrice Σ ; le calcul montre que

$$(5) \quad E\|X'(0)\| = \sqrt{\frac{2\lambda_+}{\pi}} \mathcal{E}\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\right) = g(\Sigma)$$

où $\mathcal{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$ est l'intégrale elliptique de second ordre.

Les formules (4) appliquées aux fonctionnelles (3) suggèrent les estimateurs suivants pour les paramètres $\gamma_1 = (\sigma_{11})^{1/2}$, $\gamma_2 = (\sigma_{22})^{1/2}$ et $\gamma_3 = g(\Sigma)$

$$(6) \quad \begin{cases} \hat{\gamma}_1(T, u) = \pi \exp(u^2/2) \mathcal{C}(T, u), & \hat{\gamma}_2(T, u) = \pi \exp(u^2/2) \mathcal{S}(T, u), \\ \hat{\gamma}_3(T, u) = (2\pi)^{1/2} \exp(u^2/2) \mathcal{L}(T, u) \end{cases}$$

lesquels ont la propriété d'être sans biais. Si on suppose que $0 < \sigma_{12}^2 < \sigma_{11} \sigma_{22}$, les valeurs propres λ_+ , λ_- de la matrice Σ sont données par la relation

$$(7) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}].$$

Soit $r = \lambda_-/\lambda_+$; la fonction $g(\Sigma)$ peut s'écrire alors comme une fonction de la variable r et des paramètres σ_{11} et σ_{22}

$$(8) \quad g(\Sigma) = \sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22}} h(r) \quad \text{où} \quad h(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1+r)}} \mathcal{E}(\sqrt{1-r})$$

et σ_{12}^2 peut s'écrire aussi comme

$$(9) \quad \sigma_{12}^2 = \frac{(1-r)^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - (1+r)^2 (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4(1+r)^2}.$$

La fonction h est une fonction strictement croissante de r , et elle est définie de l'intervalle $(0, 1)$ sur $(\sqrt{2/\pi}, \sqrt{\pi/2})$. D'après les relations (8) et (9) on peut définir les estimateurs suivants :

De r :

$$\hat{r}(T, u) = \begin{cases} h^{-1}(\hat{\alpha}(T, u)) & \text{si } \hat{\alpha} \in \text{Im } h \\ 1 & \text{si } \hat{\alpha} \notin \text{Im } h \end{cases}$$

où

$$\hat{\alpha}(T, u) = \frac{\hat{\gamma}_3(T, u)}{\sqrt{\hat{\gamma}_1^2(T, u) + \hat{\gamma}_2^2(T, u)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\mathcal{L}(T, u)}{\sqrt{\mathcal{C}^2(T, u) + \mathcal{S}^2(T, u)}}$$

$\hat{\alpha}(T, u)$ est toujours supérieur ou égale à $\sqrt{2/\pi}$, mais il peut dépasser $\sqrt{\pi/2}$, ce qui est le cas quand le champ tend à devenir isotrope ($r=1$, $\sigma_{12}^2=0$). Ce qui nous amène, en utilisant (9), à définir l'estimateur de σ_{12}^2 comme suit :

$$\hat{\sigma}_{12}^2(T, u) = \frac{(1 - \hat{r}(T, u))^2 (\hat{\gamma}_1^2(T, u) + \hat{\gamma}_2^2(T, u))^2 - (1 + \hat{r}(T, u))^2 (\hat{\gamma}_1^2(T, u) - \hat{\gamma}_2^2(T, u))^2}{4(1 + \hat{r}(T, u))^2}$$

si $\hat{r}(T, u) \neq 1$ et

$$\hat{\sigma}_{12}^2(T, u) = 0 \text{ si } \hat{r}(T, u) = 1.$$

DÉFINITION. — On dit que X satisfait une condition de ρ -mélange si

$$\sup \{ |EZ_B Z_{B'} - EZ_B EZ_{B'}| : Z_B \in \sigma(B), Z_{B'} \in \sigma(B') \} = \rho(d(B, B')) \rightarrow 0 \text{ quand } d \rightarrow \infty$$

où B et B' sont deux boréliens de \mathbb{R}^2 et $\sigma(B) = \sigma\{X(t) : t \in B\}$.

THÉORÈME. — Si les conditions H1 et H2 sont vérifiées et qu'en plus

H3 : La fonction de covariance Γ de X est telle que $\Gamma(u)$, $\Gamma'(u)$ et $\Gamma''(u)$ tendent vers zéro quand $|u| \rightarrow \infty$.

H4 : X satisfait une condition de ρ -mélange et il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^2 \rho(k)^{\delta/2 + \delta} < \infty.$$

H5 : Les moments d'ordre $2 + \delta$ de $\mathcal{L}(T, u)$ sont finis.

Alors

$$(10) \quad \lambda^2 \text{cov}(\hat{\gamma}_k(\lambda T, u), \hat{\gamma}_l(\lambda T, u)) \rightarrow V_{kl}(T), \quad k, l = 1, 2, 3.$$

quand $\lambda \rightarrow \infty$, et de plus

$$(11) \quad \lambda(\hat{\gamma}_1(\lambda T, u) - \gamma_1, \hat{\gamma}_2(\lambda T, u) - \gamma_2, \hat{\gamma}_3(\lambda T, u) - \gamma_3)$$

converge faiblement vers un processus de Wiener tri-dimensionnel $W_V(T)$ indexé par les rectangles $T \in \mathbb{R}^2$ et de matrice de covariance $V(T) = (V_{kl})_{k, l=1, 2, 3}$ dont les éléments sont donnés par les formules suivantes :

$$(12) \quad V_{kl}(T) = |T|^{-1} \exp(u^2) \int_{\mathbb{R}^2} H_{0,i}^{k,l}(u, u) dt, \quad k, l = 1, 2, 3.$$

où

$$H_{s,i}^{k,l}(u, v) = P_{X(s), X(t)}(u, v) h_{s,i}^{k,l}(u, v) - P_{X(s)}(u) P_{X(t)}(v) h_s^k(u) h_t^l(v)$$

et

$$h_{s,i}^{k,l}(u, v) = \begin{cases} \pi^2 E(|X'_k(s)| |X'_l(t)| / X(s)=u, X(t)=v), & k, l = 1, 2 \\ 2\pi E(\|X'(s)\| \|X'(t)\| / X(s)=u, X(t)=v), & k=l=3 \\ \pi \sqrt{2\pi} E(\|X'(s)\| |X'_k(t)| / X(s)=u, X(t)=v), & k=1, 2; \quad l=3 \end{cases}$$

et $h_s^k(u)h_t^l(v)$ désigne dans chaque cas le produit des espérances conditionnelles sachant $X(s)=u$ et sachant $X(t)=v$.

Remarques. — 1. Le théorème entraîne la consistance des estimateurs $\hat{\gamma}_1(\lambda T, u)$, $\hat{\gamma}_2(\lambda T, u)$, $\hat{\gamma}_3(\lambda T, u)$ et en plus leur indépendance asymptotique.

2. On déduit aussi la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs $\hat{r}(\lambda T, u)$ et $\hat{\sigma}_{12}^2(\lambda T, u)$.

Démonstration. — La démonstration découle du résultat général sur le comportement asymptotique des fonctionnelles du type (2) qui est traité dans [4].

Note reçue le 19 septembre 1988, acceptée le 26 septembre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. M. CABAÑA, *Estimation of the spectral moments, by means of extrema*, Reporte n° 84-08, Dto. de Matematicas y Ciencias de la Computacion, Universidad Simon Bolivar, Caracas, 1984.

[2] E. M. CABAÑA, Affine Processes: A Test of Isotropy based on Level Sets, *S.I.A.M. J. Appl. Math.*, 47, n° 4, 1987.

[3] E. M. CABAÑA, Esperanzas para Integrales sobre Conjuntos de Nivel Aleatorios, *Actas II Congreso Latinoamericano de Probabilidades Y Estadística Matemática (II CLAPEM)*, Caracas, 1985.

[4] I. IRIBARREN, Asymptotic behaviour of the integrals of a function on the level set of a mixing random field, *Prob. and Math. Stat.*, 10, Fasc. 1, 1988.

[5] G. LINDGREN, Spectral moments estimation by means of level crossing, *Biometrika*, 61, n° 3, 1974, p. 401.

[6] M. S. LONGUET-HIGGINS, The statistical analysis of a random moving surface, *Phil. Trans. A.*, 249, 1957, p. 321-387.

[7] M. WSCHEBOR, Surfaces aléatoires. Mesures géométriques des ensembles de niveau, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, n° 1147, 1985.

C. B. : *Laboratoire de Statistique appliquée*, Bât. n° 425, U.A. n° 743,
Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex;

I. I. : *Departamento de Matematicas, Instituto Venezolano de Investigaciones Cientificas*,
Apartado 21827, Caracas 1020-A, Venezuela.