



**HAL**  
open science

# Convergence de mesures géométriques normalisées d'ensembles de niveau des surfaces aléatoires vers le temps local

Corinne Berzin

► **To cite this version:**

Corinne Berzin. Convergence de mesures géométriques normalisées d'ensembles de niveau des surfaces aléatoires vers le temps local. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique*, 1990, 311, pp.373-377. hal-00319500

**HAL Id: hal-00319500**

**<https://hal.science/hal-00319500>**

Submitted on 10 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comptes rendus de  
l'Académie des sciences.  
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1990/06-1990/12.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:utilisationcommerciale@bnf.fr).

## Convergence de mesures géométriques normalisées d'ensembles de niveau des surfaces aléatoires vers le temps local

Corinne BERZIN

**Résumé** — Nous proposons une approximation  $L^2$  du temps local évalué en  $u$  d'un champ  $X$ , gaussien stationnaire indexé dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ .

Cette approximation est définie à l'aide d'une intégrale stochastique par rapport à la mesure géométrique de l'ensemble de niveau  $u$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , du champ régularisé, obtenu par la composition d'une convoluée de  $X$ , soit  $X_\varepsilon$ , et d'une normalisation matricielle contenant une partie de l'information de la matrice des moments spectraux d'ordre deux de  $X_\varepsilon$ .

### Convergence to the local time of the normalized geometric measures of the level-sets of random fields

**Abstract** — An  $L^2$ -approximation of the local time at  $u$  of a stationary Gaussian process  $X$  with a  $d$ -dimensional parameter is proposed ( $d \geq 2$ ).

This approximation is defined as a stochastic integral with respect to the geometric measure of the set of level  $u$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , of the regularized field obtained by composition of a convolution of  $X$ , say  $X_\varepsilon$ , with a matrix normalization which contains a part of the information in the matrix of second order spectral moments of  $X_\varepsilon$ .

**Abridged English Version** — The aim of this Note is to study certain local properties of the trajectories of  $X$ , where  $X$  is a gaussian process with a  $d$ -dimensional parameter,  $d \geq 2$ , near the level  $u$ , that are closely related with the geometry of the level-set  $C_u(X)$ , where  $C_u(X) = \{t, X(t) = u\}$ . We will use the smoothed paths of  $X$ , say  $X_\varepsilon$ , obtained by convolution of  $X$  with a kernel  $\Psi_\varepsilon$ ,  $X_\varepsilon = \Psi_\varepsilon * X$ , and we will look at the  $(d-1)$ -area measure, say  $\sigma_{d-1}$ , of the set of level  $u$  of the process  $X_\varepsilon$  suitably normalized, to approximate the local time of  $X$  at  $u$ .

I. HYPOTHESES AND NOTATIONS. — Let  $\{X(t, \omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega\}$ ,  $d \geq 2$ , be a centered real-valued stationary Gaussian process with continuous paths.

The covariance  $R$  of the process  $X$  is supposed to be  $C^2$  outside a set  $A$  and we shall suppose that the support of its spectral measure denoted  $dF_X$  is not contained in an linear subspace of  $\mathbb{R}^d$ .

Let  $X_\varepsilon$  be the convolution of  $X$  with the  $C^1$ -approximation of unity  $\Psi_\varepsilon$ , i.e.  $X_\varepsilon = \Psi_\varepsilon * X$ ,  $\varepsilon > 0$ , where  $\Psi_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^d \Psi(t/\varepsilon)$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ ,  $\Psi > 0$ ,  $C^1$ ,  $\|\Psi\|_1 = 1$ , with sufficiently decaying tails. We denote  $R_\varepsilon(t) = E(X_\varepsilon(t) X_\varepsilon(0))$ ,  $t \in \mathbb{R}^d$ .

Let  $S$  be the  $s$ -dimensional subspace:  $S = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \left/ \int_{\mathbb{R}^d} \langle v, x \rangle^2 dF(x) < \infty \right. \right\}$  with  $0 \leq s < d$ .

We shall be using an orthonormal basis in  $S \times S^\perp$ ,  $(u_1, u_2, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_d)$ , where  $u_i \in S$ ,  $(i=1, s)$ . We denote  $B(\varepsilon)$ ,

$$B(\varepsilon) = ((-\partial^2 R_\varepsilon / \partial u_i \partial u_j)(0))_{i, j=s+1, d}$$

$B(\varepsilon) = P(\varepsilon) \Lambda(\varepsilon) P'(\varepsilon)$  where  $\Lambda$  is diagonal,  $P$  unitary and  $c(\varepsilon)$ ,  $c(\varepsilon) = \Lambda^{-1/2}(\varepsilon) P'(\varepsilon)$ .

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

Let  $V$  be an open set in  $\mathbb{R}^d$ , say  $\mu_d(\partial V) = 0$  ( $\mu_d$  stands for Lebesgue measure),  $V_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(V)$  where  $\varphi_\varepsilon$  is defined by:

$$\begin{aligned} S \times S^\perp &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x, y) &\rightarrow \varphi_\varepsilon(x, y) = (x, yc^{-1}(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$\theta$  denotes  $E(\|X\|)$ , where  $X$  is standard normal in  $\mathbb{R}^{d-s}$ .

*Remarks on the hypotheses.* — The set  $A$  must contain  $\{0\}$  since otherwise,  $R$  is  $C^2$  and we are interested in the case where the second spectral moment is infinite.

$c(\varepsilon)$  is called the “normalizing matrix”; it takes into account only the part related with  $S^\perp$  because the corresponding eigenvalues are the relevant ones for the local time of  $X$ ; we show that they converge to infinity when  $\varepsilon$  converges to zero.

## II. RESULT.

**THEOREM.** — *Under the hypothesis  $\mu_d(\bar{A} \cap \bar{V} - \bar{V}) = 0$ , the random variable  $\zeta_\varepsilon(V)$ :*

$$\zeta_\varepsilon(V) = \theta^{-1} |\det c(\varepsilon)| \int 1_{V_\varepsilon \cap C_u(X_\varepsilon(\cdot, \cdot, c(\varepsilon)))} |\cos \theta_\varepsilon(t)| d\sigma_{d-1}^{(\varepsilon)}(t),$$

converges in  $L^2(\Omega)$  to the local time of  $X$  evaluated at the point  $(u, V)$ , say  $L(u, V)$ . ( $\theta_\varepsilon(\cdot)$  is the angle between the generalized normal to the boundary of  $A_u(X_\varepsilon(\cdot, \cdot, c(\varepsilon)))$  [that coincides with the gradient of  $X_\varepsilon(\cdot, \cdot, c(\varepsilon))$  when  $X_\varepsilon$  belongs to  $C^1$ ] and its orthonormal projection on  $S^\perp$ ) ([6] et [7]).

**I. INTRODUCTION.** — Le but de cette Note est d'étudier le comportement local des trajectoires d'un processus  $X$ , à valeurs réelles, au voisinage d'un niveau  $u$ , ce qui est étroitement lié à la géométrie de  $C_u(X)$ , ensemble de niveau  $u$  de  $X$ , soit :  $C_u(X) = \{t, X(t) = u\}$ ; or le processus étant en général à trajectoires irrégulières, il n'est pas possible d'observer les passages en  $u$  de sa trajectoire. Nous considérons l'approximation du temps local du processus  $X(\cdot)$  à partir de la mesure géométrique  $\sigma_{d-1}^{(\varepsilon)}$  des ensembles de niveaux des régularisées  $X_\varepsilon$  de  $X$  avec un noyau  $\Psi_\varepsilon$  (cf. [1], [3] et [7] pour des résultats apparentés).

Ici nous avons donné une normalisation matricielle permettant l'inclusion de processus dont le comportement géométrique de la matrice des moments spectraux d'ordre deux est assez général, c'est-à-dire tel qu'on n'ait pas besoin de faire appel à des hypothèses d'isotropie approchée comme il était question dans [3].

Nous allons mesurer l'ensemble  $C_u(X_\varepsilon)$  à l'aide du périmètre relatif  $Q_V(A_u(X_\varepsilon))$  (cf. [6] et [7] pour sa définition) où  $A_u(X_\varepsilon) = \{t/X_\varepsilon(t) < u\}$  et  $V$  un ouvert borné.

Pour notre problème, lorsqu'on pourra assurer la régularité de la frontière de l'ouvert  $A_u(X_\varepsilon)$ , et aussi sa coïncidence P. p. s. avec  $C_u(X_\varepsilon)$  [ce qui est vrai lorsque l'ensemble des extrémums locaux de  $X_\varepsilon(\cdot)$  est P. p. s. vide],  $Q_V(A_u(X_\varepsilon))$  sera P. p. s. la mesure d'aire  $(d-1)$ -dimensionnelle de  $C_u(X_\varepsilon) \cap V$ .

**II. RÉSULTATS.** — Les notations et hypothèses étant les mêmes que celles du résumé en anglais ci-dessus ( $d \geq 2$ ), nous avons le :

**THÉORÈME.** — *si  $\mu_d(\bar{A} \cap \bar{V} - \bar{V}) = 0$ , la variable aléatoire  $\zeta_\varepsilon(V)$ ,*

$$\zeta_\varepsilon(V) = \theta^{-1} |\det c(\varepsilon)| \int 1_{V_\varepsilon \cap C_u(X_\varepsilon(\cdot, \cdot, c(\varepsilon)))} |\cos \theta_\varepsilon(t)| Q_{dt}(A_u(X_\varepsilon(\cdot, \cdot, c(\varepsilon))))),$$

converge dans  $L^2(\Omega)$  vers le temps local de  $X$  évalué en  $u$  et  $V$ , soit  $L(u, V)$ . ( $\theta_\varepsilon(\cdot)$  étant l'angle formé par la normale généralisée au bord de  $A_u(X_\varepsilon(\cdot, \cdot, c(\varepsilon)))$  [qui coïncide avec le gradient de  $X_\varepsilon(\cdot, \cdot, c(\varepsilon))$  quand  $X_\varepsilon$  est  $C^1$ ] avec sa projection orthogonale sur  $S^\perp$ ) (cf. [6] et [7]).

*Commentaires sur le théorème.* — La difficulté dans [3], de donner une normalisation ne favorisant pas une valeur propre de la matrice  $\wedge(\varepsilon)$ , vient du fait que la géométrie de  $\wedge(\varepsilon)$  peut varier d'une manière très compliquée lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro.

Il est à noter que ce type de résultat est plus général que celui obtenu dans [1] et dans [3], d'une part parce-que la limite obtenue est toujours le temps local et d'autre part parce-qu'aucune hypothèse n'est demandée au processus  $X$ , mis à part le fait que sa covariance  $R$  soit régulière en dehors d'un ensemble  $A$  suffisamment « mince », et en particulier aucune hypothèse croisée liant  $R$  et  $\Psi$  n'est requise.

Ajoutons pour terminer ces commentaires que dans un autre travail [4], nous donnons des estimations pour la vitesse de convergence [dans  $L^2(\Omega)$ ] établie dans l'énoncé du théorème.

Ce théorème se montre à l'aide de deux propositions qui sont utiles en elles-mêmes et qui méritent d'être énoncées ici; la première concerne le temps local de  $X$  et ses propriétés; la deuxième, la formule de Rice à l'ordre deux d'un processus gaussien stationnaire, lorsque ses trajectoires sont supposées seulement continues et différentiables en moyenne quadratique.

PROPOSITION 1. — (i) *Le temps local  $L(\cdot, V)$  de  $X$  existe P.p.s., appartient à  $L^2(\mu_1 \times P)$ , est P.p.s. continu en tant que fonction de  $x$  lorsque  $d \geq 3$ .*

(ii)  $\forall u \in \mathbb{R}, (1/2 \delta) \int_V \mathbf{1}_{\{|x(t) - u| < \delta\}} dt$  converge dans  $L^2(\Omega)$  vers  $L(u, V)$  lorsque  $\delta \rightarrow 0$ .

PROPOSITION 2. — *Soit  $\{Y(t, \omega), t \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega\}$ ,  $d \geq 2$ , un processus gaussien stationnaire et centré, à valeurs réelles sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à trajectoires continues.*

Soit  $T$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mu_d(\partial T) = 0$  et  $\Gamma$  la covariance du processus  $Y$ , supposée telle que :

$$\Gamma^2(0) - \Gamma^2(u) \neq 0 \quad \text{pour } u \neq 0 \text{ et } u \in \bar{T} - \bar{T}.$$

Notons  $dF_Y$  la mesure spectrale de  $Y$  supposée telle que  $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 dF_Y(x) < +\infty$  et  $F_Y$  non concentrée sur un espace vectoriel de dimension strictement inférieure à  $d$ .

Sous les conditions précédentes et si  $\dot{Y}$  désigne la dérivée en moyenne quadratique, on a :

$$EQ_T^2(A_u(Y)) = \int_{T \times T} E(\|\dot{Y}(t)\| \|\dot{Y}(s)\| / Y(t) = Y(s) = u) P_{Y(t), Y(s)}(u, u) dt ds < +\infty.$$

$[P_{Y(t), Y(s)}$  désigne la densité jointe du couple  $(Y(t), Y(s))$ ].

*Commentaire.* — La démonstration de cette proposition suit de très près la démonstration de [7], chap. 3.

Cette formule a l'avantage de ne pas exiger de propriétés presque sûres; seule l'existence de la dérivée en moyenne quadratique est demandée [si celle-ci n'existe pas, le premier moment de  $Q_T(A_u(Y))$  vaut déjà  $+\infty$ ] et donc elle permet de s'affranchir des hypothèses  $H_{12}$  et  $H_{22}$  de [7].

III. EXEMPLES. — 1. *Exemples de processus à spectre quasi stable symétrique et stable symétrique.* — Nous allons donner deux exemples que nous traiterons conjointement.

Soient  $0 < \alpha < 2$  et  $t \in \mathbb{R}^d$ .

$$R_1(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i \langle t, x \rangle} \Phi_\alpha(x) dx,$$

avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \Phi_\alpha(x) = 2 c_d^{-1} g_\alpha(\|x\|) \|x\|^{1-d}$$

où

$$c_d = \sigma_{d-1} \{x, \|x\| = 1\} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}_\alpha(y) = \exp(-|y|^\alpha).$$

Nous dirons qu'un processus gaussien centré de covariance  $R_1(\cdot)$  a un spectre quasi stable symétrique.

Soit  $R_2(t) = \exp(-\|t\|^\alpha)$  (processus gaussien centré de densité spectrale stable symétrique).

Dans les deux cas nous avons :  $A = \{0\}$ ,  $S = \{0\}$  et donc  $s = 0$ .

En supposant que  $\Psi$  ne dépend que de la norme, nous avons (l'indice  $k = 1, 2$  correspond à la covariance  $R_k$ ) :

$$c^{(k)}(\varepsilon) \approx e_\alpha^{(k)} \varepsilon^{1-\alpha/2} I_d \quad \text{avec} \quad e_\alpha^{(k)} = \left[ c_d d^{-1} a_\alpha^{(k)} \int_0^{+\infty} y^{1-\alpha} |\hat{\Psi}|^2(y) dy \right]^{-1/2}$$

$$a_\alpha^{(1)} = 2 c_d^{-1} \left[ \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos y) |y|^{-1-\alpha} dy \right]^{-1}$$

et

$$a_\alpha^{(2)} = \left[ \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \cos y_1) \|y\|^{-d-\alpha} dy \right]^{-1}, \quad \text{où} \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_d).$$

2. *Exemple d'un processus somme de  $n$  processus indépendants et uni-indexés.* — Soit  $X(t_1, t_2, \dots, t_d) = \sum_{i=1}^d X_i(t_i)$  où  $X_1, X_2, \dots, X_d$  sont des processus gaussiens centrés stationnaires, indépendants, à trajectoires continues;  $X_i$  est de covariance  $R_i$  de classe  $C^2$  en dehors de 0,  $\dot{R}_i$  borné à l'infini, ainsi que  $\ddot{R}_i$ ,  $|\dot{R}_i(t)| < Cte |t|^{\alpha_i-1}$ ,  $|\ddot{R}_i(t)| < Cte |t|^{\alpha_i-2}$ ,  $0 < \alpha_i < 2$ , pour  $t$  dans un voisinage de zéro (. désigne la dérivée première et .. la dérivée seconde);  $R_i$  est supposée également posséder une densité spectrale  $f_{\alpha_i}$  paire telle que :  $f_{\alpha_i}(x) \approx c_{\alpha_i} |x|^{-\alpha_i-1}$ , lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f_{\alpha_i}$  bornée,  $c_{\alpha_i} > 0$ .

On suppose que  $\Psi$  est de la forme :  $\Psi(t_1, t_2, \dots, t_d) = \prod_{i=1}^d \Psi_i(t_i)$  où  $\Psi_i$  vérifie :  $\Psi_i > 0$ ,  $C^1$ ,  $\|\Psi_i(\cdot)\|_1 = 1$ ,  $\|\Psi_i(\cdot)\|_1^{\alpha_i} \leq Cte$ ,  $\Psi_i$  et  $\dot{\Psi}_i$  « suffisamment » décroissantes à l'infini. Si  $\alpha_i = 1$ , on impose en plus :  $\|\Psi_i(\cdot)\|_1^2 \leq Cte$  et  $\Psi_i$  paire.

Sous les hypothèses et notations précédentes :  $A$  est la réunion des plans de coordonnées,  $S = \{0\}$  et par conséquent  $s = 0$ , et :

$$c(\varepsilon) \approx (C_{\Psi_i} \varepsilon^{1-\alpha_i/2} \delta_{i,j})_{i,j} \quad \text{avec} \quad C_{\Psi_i} = \left[ 2 c_{\alpha_i} \int_0^{+\infty} y^{1-\alpha_i} |\hat{\Psi}_i|^2(y) dy \right]^{-1/2}$$

( $\delta_{i,j}$  désigne le symbole de Kronecker).

IV. VITESSES. — On peut donner des majorations de vitesse pour les approximations considérées précédemment. A titre d'exemple, nous considérons ici le cas de processus à

spectre quasi stable symétrique, à spectre stable symétrique (exemple 1) et celui de processus somme de  $n$  processus d'Ornstein Uhlenbeck indépendants de paramètre 1 (cas particulier de l'exemple 2).

On note  $F_\varepsilon$ ,  $F_\varepsilon = E (\zeta_\varepsilon(V) - L(u, V))^2$ .

Pour le premier exemple. — Nous avons dans les deux cas (pour  $R_1$  et  $R_2$ ) :

$$\begin{aligned} F_\varepsilon &\leq Cte \varepsilon^\alpha && \text{si } 0 < \alpha \leq \alpha_1 \\ F_\varepsilon &\leq Cte \varepsilon^{(1-\alpha/2)(d-\alpha/2)(d+1-3/2\alpha)^{-1}} && \text{si } \alpha_1 \leq \alpha \leq 1 \\ F_\varepsilon &\leq Cte \varepsilon^{1-\alpha/2} && \text{si } 1 \leq \alpha < 2 \end{aligned}$$

avec  $\alpha_1 = 1/7 [3(d+1) - (9(d+1)^2 - 28d)^{1/2}]$ .

pour le deuxième exemple. —  $F_\varepsilon \leq Cte \varepsilon^{1/3}$ .

Note remise le 15 juin 1990, acceptée le 26 juin 1990.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. M. AZAIS et D. FLORENS, Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires, *Prob. Th. Rel. Fields.*, 76, 1987, p. 121-132.
- [2] S. M. BERMAN, Local nondeterminism and local time of gaussian processes, *Indiana Univ. Math. J.*, 23, 1973, p. 69-94.
- [3] C. BERZIN, Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires, *Prob. and. Math. Stat.*, 12, fasc. 2, 1989.
- [4] C. BERZIN et M. WSCHEBOR, *Approximation du temps local des surfaces gaussiennes*, en préparation.
- [5] D. GEMAN et J. HOROWITZ, Occupation densities, *The Ann. Prob.*, 8, n° 1, 1980, p. 1-67.
- [6] U. MASSARI et M. MIRANDA, *Minimal surfaces of codimension one*, North-Holland, Mathematics Studies, *Notas de Matemáticas*, (95), 91, 1984.
- [7] M. WSCHEBOR, Surfaces aléatoires : mesure géométrique des ensembles de niveau, *Lecture Notes in Math.*, n° 1147, Springer-Verlag, 1985.

Laboratoire de Statistique appliquée, U.A.-C.N.R.S. n° 743,  
Université de Paris-Sud, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex.