



**HAL**  
open science

# Régularisées de processus gaussiens, franchissements et temps local

Corinne Berzin, José R. León, Joaquín Ortega

► **To cite this version:**

Corinne Berzin, José R. León, Joaquín Ortega. Régularisées de processus gaussiens, franchissements et temps local. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique, 1993, 317, pp.697-702. hal-00319489

**HAL Id: hal-00319489**

**<https://hal.science/hal-00319489>**

Submitted on 10 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comptes rendus de  
l'Académie des sciences.  
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1993/07/01-1993/12/31.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisationcommerciale@bnf.fr](mailto:utilisationcommerciale@bnf.fr).

## Régularisées de processus gaussiens, franchissements et temps local

Corinne BERZIN, José R. LEÓN et Joaquín ORTEGA

**Résumé** — Soit  $\{X_t, t \in [0, 1]\}$  un processus gaussien stationnaire centré, défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé, dont la covariance  $r$  vérifie au voisinage de zéro :  $r(t) \sim 1 - C|t|^{2\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . On définit  $X_t^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * X_t$  et  $Y^\varepsilon$  le processus réduit, où  $\varphi_\varepsilon$  est un noyau de convolution. On étudie la convergence suivant les valeurs de  $\alpha$ , de  $Z_\varepsilon(f) = \varepsilon^{-a(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} [(N^{Y^\varepsilon}(x)/c(\varepsilon)) - L_X(x)] f(x) dx$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro où  $N^{Y^\varepsilon}(x)$  représente le nombre de franchissements du niveau  $x$  par le processus  $Y^\varepsilon$  sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$ ,  $L_X(x)$  le temps local de  $X$  au point  $x$  sur  $[0, 1]$ .

### Regularized Gaussian processes, crossings and local time

**Abstract** — Let  $\{X_t, t \in [0, 1]\}$  be a stationary, centered Gaussian process defined on  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , with covariance function  $r$  satisfying:  $r(t) \sim 1 - C|t|^{2\alpha}$ ,  $0 < t < \delta$ ,  $0 < \alpha < 1$ . We define the regularized process  $X_t^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * X_t$  and  $Y^\varepsilon = X_t^\varepsilon / \sigma_\varepsilon$  where  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{var } X_t^\varepsilon$ , with  $\varphi_\varepsilon$  a kernel that approaches Dirac's delta function. We study the convergence of  $Z_\varepsilon(f) = \varepsilon^{-a(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} [(N^{Y^\varepsilon}(x)/c(\varepsilon)) - L_X(x)] f(x) dx$  when  $\varepsilon$  goes to zero,  $N^{Y^\varepsilon}(x)$  is the number of crossings for  $Y^\varepsilon$  at level  $x$  in  $[0, 1]$  and  $L_X(x)$  is the local time of  $X$  in  $x$  on  $[0, 1]$ . The limit depends on the value of  $\alpha$ .

**Abridged English Version** — Let  $X_t$  be a centered stationary Gaussian process defined on  $[0, 1]$ . We shall assume that its covariance  $r$  verifies:  $r(t) \sim 1 - C|t|^{2\alpha}$ ,  $0 < t < \delta$ ,  $0 < \alpha < 1$  and  $r$  has two continuous derivatives outside  $[0, \delta]$ . Berman [2] has shown that such a process has a continuous local time  $L_X$ . Several papers have been devoted to the study of the approximation of  $L_X$  by the number of crossings  $N^{Y^\varepsilon}$  of  $Y^\varepsilon$  where  $Y^\varepsilon = X_t^\varepsilon / \sigma_\varepsilon$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{var } X_t^\varepsilon$  and  $X_t^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * X_t$ , with  $\varphi_\varepsilon$  a kernel that approaches Dirac's delta function,  $\varphi_\varepsilon(\cdot) = (1/\varepsilon)\varphi(\cdot/\varepsilon)$  and  $\varphi \in C^1$  ([1] and [3]). Recently in [7] and [8], the authors and Wschebor consider the random variable:

$$\zeta_\varepsilon(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[ \frac{N^{Y^\varepsilon}(x)}{c(\varepsilon)} - L_X(x) \right] dx$$

with  $c(\varepsilon)$  a convenient normalization and  $f \in L^4(\phi(x) dx)$  a continuous function where  $\phi(x) dx$  is the standard Gaussian measure. In fact in [8] Wschebor shows the a. s. convergence of  $\zeta_\varepsilon$  to zero and in [7] the  $L^2$  convergence with rates was obtained. Let us now turn to describe our results. First we define  $Z_\varepsilon(f) = (1/\varepsilon^{a(\alpha)})\zeta_\varepsilon(f)$  where  $a(\alpha)$  comes from [7]. We describe the limit when  $\varepsilon$  goes to zero and we show that there exists three different types of limit depending on whether  $\alpha$  belongs to one of the following intervals:  $0 < \alpha < 1/4$ ,  $1/4 < \alpha < 3/4$ ,  $3/4 < \alpha < 1$ . Let's introduce our hypothesis and some notation.

**HYPOTHESIS-NOTATIONS.** — (H1) For the process  $X$ : The covariance function  $r$  verifies in a neighborhood of zero  $r(t) = 1 - |t|^{2\alpha} L(|t|)$ , with  $L$  a function with two continuous derivatives except at the origin,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} L(t) = C > 0$ ,  $|t|L'(|t|) = O(1)$  and  $t^2 L''(|t|) = O(1)$ ,

$0 < \alpha < 1$ ,  $r$  has two continuous derivatives outside this neighborhood. Furthermore we suppose that the process has a spectral density  $h$  when  $\alpha > 1/4$ , such that  $h(t) = M(t)/t^\gamma$ ,  $\gamma = 2\alpha + 1$  and  $M(t)$  has a limit when  $t$  goes to infinity.

Noté présentée par Jean-Pierre KAHANE.

(H2) For the kernel  $\varphi$ :  $\varphi$  is even,  $\varphi \geq 0$ ,  $\text{supp } \varphi \subseteq [-1, 1]$ ,  $\varphi$  is  $C^1$ ,  $\int_{-1}^{+1} \varphi(t) dt = 1$ . We define  $\psi = \varphi * \varphi$ .

(H3) For the function  $f$ :  $f \in L^4(\phi(x) dx)$  where  $\phi$  is the standard Gaussian density and  $f$  is continuous. Furthermore if we note  $c_n$  the Hermite coefficients of  $f$  in the Hermite's basis, orthogonal with respect to the standard Gaussian measure and with leading coefficient equal to 1, we suppose:

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{or} \quad \begin{array}{l} f' \text{ and } f'' \in L^2(\phi(x) dx) \\ \\ \exists \beta, -1 \leq \beta < 1 \text{ such that } c_n^2 n! n^2 \sim n^\beta \text{ when } n \text{ goes to infinity.} \end{array}$$

We define:  $g(x) = \sqrt{\pi/2} |x| - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} H_{2n}(x)$ ,  $\chi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\psi}(z) |z|^{2\alpha} dz$ ,  $\dot{Y}_t^\varepsilon = \dot{X}_t^\varepsilon / \dot{\sigma}_\varepsilon$  and  $\dot{\sigma}_\varepsilon^2 = \text{var } \dot{X}_t^\varepsilon$ .

RESULTS. — Let

$$Z_\varepsilon(f) = \varepsilon^{-a(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} [(N^{Y^\varepsilon}(x)/c(\varepsilon)) - L_X(x)] f(x) dx \quad \text{and} \quad c(\varepsilon) = \sqrt{2/\pi} (\dot{\sigma}_\varepsilon / \sigma_\varepsilon).$$

THEOREM 1. — Under the hypothesis H1, H2 and H3 we have

(i) If  $0 < \alpha < 1/4$ ,  $a(\alpha) = 2\alpha$ ,  $Z_\varepsilon(f)$  converges in  $L^2(\Omega)$  when  $\varepsilon$  tends to zero to

$$K_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \int_0^1 H_n(X_s) ds \quad \text{where} \quad K_\alpha = \frac{C}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) |u|^{2\alpha} du.$$

(ii) If  $1/4 < \alpha < 3/4$ ,  $a(\alpha) = 1/2$ ,  $Z_\varepsilon(f)$  converges weakly when  $\varepsilon$  tends to zero to  $Y$ ,  $Y \in L^2(\Omega)$  and the conditional distribution  $(Y/X_s, 0 \leq s \leq 1)$  is Gaussian with zero mean and random variance equal to

$$\sigma^2 \int_0^1 f^2(X_s) ds \quad \text{where} \quad \sigma^2 = 2 \sum_{l=1}^{\infty} (2l)! a_{2l}^2 \int_0^{\infty} \sigma_{2l}^2(v) dv$$

and

$$\sigma_{2l}^2(v) = \left[ \chi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\psi}(z) |v-z|^{2\alpha} dz \right]^{2l}.$$

(iii) If  $3/4 < \alpha < 1$ ,  $a(\alpha) = 2(1-\alpha)$ ,  $Z_\varepsilon(f)$  converges in  $L^2(\Omega)$  when  $\varepsilon$  tends to zero to

$$- [C \chi^2]^{-1} a_2 \left[ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_{k-2}}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} K(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \sum_{\pi \in \Pi_k} \lambda_{\pi^{-1}(k-1)} \lambda_{\pi^{-1}(k)} dZ_X(\lambda_1) \dots dZ_X(\lambda_k) \right]$$

where  $K(\lambda) = (\exp(i\lambda) - 1)/i\lambda$ ,  $\Pi_k$  is the set of permutations of  $\{1, 2, \dots, k\}$ ,  $dZ_X$  is the random spectral measure associated to  $X$  and the integral is an Itô-Wiener integral.

1. INTRODUCTION. — Une manière naturelle d'étudier une approximation du temps local  $L_X$  d'un processus  $X_t$  irrégulier est de considérer ses régularisées  $X_t^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * X_t$  où  $\varphi_\varepsilon$  est une approximation de l'unité,  $\varphi_\varepsilon(\cdot) = (1/\varepsilon) \varphi(\cdot/\varepsilon)$  où  $\varphi \in C^1$  et d'étudier le comportement asymptotique du nombre de franchissements  $N^{X^\varepsilon}(u)$  du niveau  $u$  par le processus  $X^\varepsilon$  sur l'intervalle de temps  $[0, 1]$ . Divers travaux ont été faits pour mener à bien cette étude ([1] et [3]); en général les auteurs étudient la convergence dans  $L^p$  de  $N^{X^\varepsilon}(u)$  convenablement normalisé vers le temps local  $L_X(u)$ , continu dans ce cas [2]. Cependant dans [8],

l'auteur s'intéresse à l'étude de  $\xi_\varepsilon(f) = 1/C(\varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) N^{X^\varepsilon}(x) dx$  pour  $f$  continue où  $C(\varepsilon)$  est une normalisation appropriée et  $X^\varepsilon$  une approximation du mouvement brownien.

Il montre la convergence presque-sûre de  $\xi_\varepsilon(f)$  vers  $\int_{-\infty}^{+\infty} L_X(x) f(x) dx$ . Dans le même

ordre d'idées que Wschebor, mais pour des processus gaussiens stationnaires, nous étudions la convergence en loi de la différence convenablement normalisée entre ces fonctionnelles et leur limite, soit  $Z_\varepsilon(f)$  [on considère ici le processus réduit  $Y^\varepsilon = (X^\varepsilon/\sigma_\varepsilon)$ , où  $\sigma_\varepsilon^2$  est la variance de  $X^\varepsilon$ ]. Notre cadre d'étude est celui de processus dont le comportement de la covariance au voisinage de l'origine est équivalent à :  $1 - C|t|^{2\alpha}$  pour  $0 < \alpha < 1$ . Trois types de limite sont mis en évidence en fonction des valeurs de  $\alpha$  :  $0 < \alpha < 1/4$ ,  $1/4 < \alpha < 3/4$  et  $3/4 < \alpha < 1$ . Dans le premier cas, qui correspond à celui où le processus est le plus irrégulier, la normalisation est en  $\varepsilon^{2\alpha}$  et la limite ( $L^2$ ) s'exprime, lorsque la fonction  $f$  qu'on intègre est suffisamment régulière comme :

$K_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} H f(x) L_X(x) dx$  où  $H$  est l'opérateur différentiel d'Hermite pour la mesure

gaussienne standard. Dans le deuxième cas la normalisation est  $\varepsilon^{1/2}$ , la convergence a lieu en loi et la variable limite a une distribution conditionnelle étant donnée toute la trajectoire du processus original qui est gaussienne. Enfin, pour le troisième cas, la convergence a lieu de nouveau dans  $L^2$  pour la normalisation  $\varepsilon^{2(1-\alpha)}$  et la limite s'exprime comme une intégrale stochastique multiple dans le chaos infini. Les normalisations citées précédemment proviennent d'un travail initial [7] dans lequel les auteurs ont étudié le

comportement de la variance de  $\xi_\varepsilon(f) - \int_{-\infty}^{+\infty} L_X(x) f(x) dx$ .

2. HYPOTHÈSES ET NOTATIONS. — (H1) Pour le processus  $X$  : Sa fonction de covariance  $r$  vérifiée au voisinage de zéro :  $r(t) = 1 - |t|^{2\alpha} L(|t|)$ , où  $L$  est une fonction ayant deux dérivées continues en dehors de zéro,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} L(t) = C > 0$ ,  $|t| L'(|t|) = O(1)$  et

$t^2 L''(|t|) = O(1)$ ,  $0 < \alpha < 1$  et en dehors de ce voisinage  $r$  est deux fois continûment dérivable. On supposera également pour  $\alpha > 1/4$  que le processus  $X$  possède une densité spectrale  $h$  telle que :  $h(t) = M(t)/t^\gamma$ ,  $\gamma = 2\alpha + 1$  et  $M(t)$  a une limite lorsque  $t$  tend vers l'infini.

(H2) Pour le noyau  $\varphi$  :  $\varphi$  est pair,  $\varphi \geq 0$ ,  $\text{supp } \varphi \subseteq [-1, 1]$ ,  $\varphi$  est  $C^1$ ,  $\int_{-1}^{+1} \varphi(t) dt = 1$ .

On définit  $\psi = \varphi * \varphi$ .

(H3) Pour la fonction  $f$  :  $f \in L^4(\phi(x) dx)$  où  $\phi$  est la densité gaussienne standard et  $f$  est continue. De plus, si l'on appelle  $c_n$  les coefficients de  $f$  dans la base d'Hermite orthogonale non-normalisée pour la mesure gaussienne standard, nous supposons :

$$\left| \begin{array}{l} f' \text{ et } f'' \in L^2(\phi(x) dx) \\ \text{ou} \\ \exists \beta, -1 \leq \beta < 1 \text{ tel que } c_n^2 n! n^2 \sim n^\beta \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini.} \end{array} \right.$$

Nous définissons :

$$g(x) \sqrt{\frac{\pi}{2}} |x|^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} H_{2n}(x), \quad \chi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) |z|^{2\alpha} dz$$

et  $\dot{Y}_t^\varepsilon = \dot{X}_t^\varepsilon / \dot{\sigma}_\varepsilon$  où  $\dot{\sigma}_\varepsilon^2 = \text{var } \dot{X}_t^\varepsilon$ .

3. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS. — Soit

$$Z_\varepsilon(f) = \varepsilon^{-a(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{N^{Y^\varepsilon}(x)}{c(\varepsilon)} - L_X(x) \right] f(x) dx \quad \text{où } c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\dot{\sigma}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon}.$$

THÉORÈME 1. — Sous les hypothèses H1, H2 et H3 nous avons :

(i) Si  $0 < \alpha < 1/4$ ,  $a(\alpha) = 2\alpha$ ,  $Z_\varepsilon(f)$  converge dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro vers

$$K_\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n n \int_0^1 H_n(X_s) ds \quad \text{où } K_\alpha = \frac{C}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) |u|^{2\alpha} du.$$

(ii) Si  $1/4 < \alpha < 3/4$ ,  $a(\alpha) = 1/2$ ,  $Z_\varepsilon(f)$  converge en loi lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro vers  $Y$ ,  $Y \in L^2(\Omega)$  et la loi conditionnelle de  $(Y/X_s, 0 \leq s \leq 1)$  est celle d'une loi normale centrée dont la variance est aléatoire et égale à

$$\sigma^2 \int_0^1 f^2(X_s) ds \quad \text{où } \sigma^2 = 2 \sum_{l=1}^{\infty} (2l)! a_{2l}^2 \int_0^{\infty} \sigma_{2l}^2(v) dv$$

et

$$\sigma_{2l}^2(v) = \left[ \chi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\psi}(z) |v-z|^{2\alpha} dz \right]^{2l}.$$

(iii) Si  $3/4 < \alpha < 1$ ,  $a(\alpha) = 2(1-\alpha)$ ,  $Z_\varepsilon(f)$  converge dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro vers

$$-[C\chi^2]^{-1} a_2 \left[ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_{k-2}}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} K(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \sum_{\pi \in \Pi_k} \lambda_{\pi^{-1}(k-1)} \lambda_{\pi^{-1}(k)} dZ_X(\lambda_1) \dots dZ_X(\lambda_k) \right]$$

où  $K(\lambda) = (\exp(i\lambda) - 1)/i\lambda$ ,  $\Pi_k$  est l'ensemble des permutations de  $\{1, 2, \dots, k\}$ ,  $dZ_X$  la mesure aléatoire spectrale associée à  $X$  et l'intégrale est une intégrale d'Itô-Wiener.

Remarque sur (i). — Si de plus  $f'$  et  $f''$  appartiennent à  $L^2(\phi(x) dx)$  puisque :

$$x f'(x) - f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n H_n(x)$$

nous avons que  $Z_\varepsilon(f)$  converge dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro vers :

$$K_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} H f(x) L_X(x) dx$$

où  $H f(x) = x f'(x) - f''(x)$  est l'opérateur différentiel d'Hermite.

4. ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION. — En utilisant la formule de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure  $N^{Y^\varepsilon}(x) dx$  [8], nous décomposons  $Z_\varepsilon(f)$  sous la forme :

$$Z_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon^{a(\alpha)}} \int_0^1 f(Y_s^\varepsilon) g(\dot{Y}_s^\varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon^{a(\alpha)}} \int_0^1 [f(Y_s^\varepsilon) - f(X_s)] ds = T_1 + T_2.$$

Les techniques utilisées diffèrent selon les valeurs de  $\alpha$  :  $0 < \alpha < 1/4$ ,  $1/4 < \alpha < 3/4$  et  $3/4 < \alpha < 1$ .

1<sup>er</sup> cas :  $0 < \alpha < 1/4$ ,  $a(\alpha) = 2\alpha$ . — Il est démontré dans [7] que dans ce cas le terme dominant est  $T_2$ . De plus,

$$E(T_2)^2 \rightarrow K_\alpha^2 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n^2 n! \int_0^1 (1-u) r^n(u) du \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Au vu de ces résultats, il est clair qu'il suffit de considérer  $f=H_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas, on obtient en calculant  $E(T_2 - nK_\alpha \int_0^1 H_n(X_s) ds)^2$ , que  $T_2$  converge dans  $L^2(\Omega)$  vers  $nK_\alpha \int_0^1 H_n(X_s) ds$ . Le résultat s'en déduit.

2<sup>e</sup> cas :  $1/4 < \alpha < 3/4$ ,  $a(\alpha) = 1/2$ . — Ici, le terme important est :

$$T_1 = 1/\sqrt{\varepsilon} \int_0^1 f(Y_s^\varepsilon) g(\dot{Y}_s^\varepsilon) ds.$$

Nous montrons que le processus  $S_t^\varepsilon$  défini par :  $S_t^\varepsilon = 1/\sqrt{\varepsilon} \int_0^t g(\dot{Y}_s^\varepsilon) ds$  converge en distribution finies dimensionnelles vers un mouvement brownien  $W$  et que les vecteurs  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$  et  $(W_{t_1}, \dots, W_{t_m})$  sont gaussiens indépendants. Ce résultat se montre en calculant tous les moments d'une combinaison linéaire finie de la forme  $\sum_{i=1}^m a_i X_{t_i} + \sum_{i=1}^m b_i S_{t_i}^\varepsilon$ . Ces moments sont calculés à l'aide de la formule du diagramme ([4] et [6]).

Une construction similaire à celle de l'intégrale stochastique dans  $L^2(\Omega)$  permet de conclure, c'est-à-dire :

On définit :

$$Z_\varepsilon^n(f) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i=1}^n f(Y_{(i-1)/n}^\varepsilon) \int_{(i-1)/n}^{i/n} g(\dot{Y}_s^\varepsilon) ds \quad \text{et} \quad Z^n(f) = \sum_{i=1}^n f(X_{(i-1)/n}) [W_{i/n} - W_{(i-1)/n}].$$

D'après ce qui précède on sait que :

$$Z_\varepsilon^n(f) \rightarrow Z^n(f) \text{ en loi lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

et d'autre part on peut montrer que

$$Z^n(f) \rightarrow Y \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

et que la loi conditionnelle  $\mathcal{L}(Y | X_s, 0 \leq s \leq 1) = N(0, \sigma^2 \int_0^1 f^2(X_s) ds)$ . De plus un calcul de moments montre que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(T_1 - Z_\varepsilon^n(f))^2 = 0$ , ce qui entraîne le résultat.

3<sup>e</sup> cas :  $3/4 < \alpha < 1$ ,  $a(\alpha) = 2(1 - \alpha)$ . —  $T_1$  est le terme dominant, lui-même équivalent à :

$$\frac{1}{\varepsilon^{2(1-\alpha)}} a_2 \sum_{k=2}^{\infty} \left[ \int_0^1 H_{k-2}(Y_s^\varepsilon) H_2(\dot{Y}_s^\varepsilon) ds \right] c_{k-2}.$$

Cette dernière expression s'écrivant grâce à la formule d'Itô-Wiener :

$$(1) \quad \frac{1}{\varepsilon^{2(1-\alpha)}} a_2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} \left[ \int_0^1 H_{k-2} \left( \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(is\lambda) dZ_\varepsilon(\lambda) \right) \times H_2 \left( \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda \exp(is\lambda) dZ_\varepsilon(\lambda) \right) ds \right] = \frac{1}{\varepsilon^{2(1-\alpha)}} a_2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} \times \left[ \int_0^1 \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{\pi \in \Pi_k} \omega_{\xi(\pi(1))}(\lambda_1, s) \dots \omega_{\xi(\pi(k))}(\lambda_k, s) dZ_\varepsilon(\lambda_1) \dots dZ_\varepsilon(\lambda_k) ds \right]$$



où

$$\omega_1(\lambda, s) = \frac{\exp(is\lambda)}{\sigma_\varepsilon}, \quad \omega_2(\lambda, s) = \frac{\exp(is\lambda)}{\dot{\sigma}_\varepsilon} i\lambda$$

et

$$\xi(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \leq k-2 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme dans l'article de D. Chambers et E. Slud [5] en intégrant par rapport à la variable  $s$  et en définissant  $K(\lambda) = (\exp(i\lambda) - 1)/i\lambda$  on a :

$$(1) = \frac{-1}{\varepsilon^{2(1-\alpha)} \dot{\sigma}_\varepsilon^2} a_2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} \times \left[ \int_0^1 \frac{1}{\sigma_\varepsilon^{k-2} k!} \int_{\mathbb{R}^k} K(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \sum_{\pi \in \Pi_k} \lambda_{\pi^{-1}(k-1)} \lambda_{\pi^{-1}(k)} dZ_\varepsilon(\lambda_1) \dots dZ_\varepsilon(\lambda_k) \right]$$

La convergence lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro de  $\varepsilon^{2(1-\alpha)} \dot{\sigma}_\varepsilon^2$  vers  $C \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\psi}(z) |z|^{2\alpha} dz$  et de  $\sigma_\varepsilon^{k-2}$  vers 1 et les critères de convergence dans  $L^2(\Omega)$  des intégrales d'Itô-Wiener qui interviennent montrent que  $T_1$  converge dans  $L^2$  vers :

$$- [C\chi^2]^{-1} a_2 \left[ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_{k-2}}{k!} \int_{\mathbb{R}^k} K(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \sum_{\pi \in \Pi_k} \lambda_{\pi^{-1}(k-1)} \lambda_{\pi^{-1}(k)} dZ_X(\lambda_1) \dots dZ_X(\lambda_k) \right]$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

Note remise le 7 juin 1993, acceptée le 24 juin 1993.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. M. AZAIS et D. FLORENS, Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires, *Probab. Theory Related Fields*, 76, 1987, p. 121-132.
- [2] S. M. BERMAN, Gaussian Processes with stationary increments: local times and sample function properties, *Ann. Math. Statist.*, 41, 1970, p. 1260-1272.
- [3] C. BERZIN et M. WSCHBOR, Approximation du temps local des surfaces gaussiennes, *Probab. Theory Related Fields*, 1993 (à paraître).
- [4] P. BREUER et P. MAJOR, Central limit theorems for non-linear functionals of Gaussian fields, *J. Multivariate Anal.*, 13, 1983, p. 425-441.
- [5] D. CHAMBERS et D. SLUD, Central limit theorems for non-linear functionals of stationary Gaussian Processes, *Probab. Theory Related Fields*, 80, 1989, p. 323-346.
- [6] H. HWAI-CHUNG et S. TZE-CHIEN, Limiting distributions of non-linear vector functions of stationary Gaussian Processes, *Ann. Probab.*, 18, 3, 1990, p. 1159-1173.
- [7] J. R. LEON et J. ORTEGA, Level crossings and local times for regularized Gaussian Processes:  $L^2$  convergence, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 314, série I, 1992, p. 227-231.
- [8] M. WSCHBOR, Sur les accroissements du processus de Wiener, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 315, série I, 1992, p. 1293-1296.

C. B. : Université Paris-XI, Laboratoire de Statistique Appliquée, Centre d'Orsay, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex, France;

J. R. L. : Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, AP: 47197, Los Chaguaramos, Caracas 1041-A, Venezuela;

J. O. : IVIC-Matemáticas, AP: 21827, Caracas 1020-A, Venezuela.