



HAL
open science

Increments and crossings for the Brownian bridge: weak convergence

Corinne Berzin-Joseph, José R. León, Joaquín Ortega

► **To cite this version:**

Corinne Berzin-Joseph, José R. León, Joaquín Ortega. Increments and crossings for the Brownian bridge: weak convergence. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série I, Mathématique*, 1998, 327 (6), pp.587-592. 10.1016/S0764-4442(98)89169-6 . hal-00319472

HAL Id: hal-00319472

<https://hal.science/hal-00319472>

Submitted on 10 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Increments and crossings for the Brownian bridge: weak convergence

Corinne BERZIN-JOSEPH ^a, José R. LEÓN ^b, Joaquín ORTEGA ^c

^a Département de mathématiques, bâtiment Fermat, Université Versailles–Saint-Quentin en Yvelines, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles cedex, France
E-mail: Corinne.Berzin@math.u-psud.fr

^b Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Paseo Los Ilustres, Los Chaguaramos, Caracas 1041-A, Venezuela
E-mail: jleon@euler.ciens.ucv.ve

^c Departamento de matemáticas, IVIC, Apartado Postal 21.827, Caracas 1020-A, Venezuela
E-mail: jortega@cauchy.ivic.ve

(Reçu le 5 novembre 1997, accepté le 11 septembre 1998)

Abstract. Let $\{b^F(t), t \in [0, 1]\}$ be an F -Brownian bridge process. We study the asymptotic behaviour of non-linear functionals of regularizations by convolution of this process and obtain several applications. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Accroissements et passages par un niveau pour le pont brownien : convergence faible

Résumé. Soit $\{b^F(t), t \in [0, 1]\}$ un F -pont brownien. Nous étudions le comportement asymptotique de fonctionnelles non linéaires des régularisations de ce processus et obtenons quelques applications. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Version française abrégée

La motivation principale de cette Note est de donner un point de vue unifié dans l'étude du comportement asymptotique de fonctionnelles non linéaires des ponts browniens et empiriques. Dans cette optique nous avons réussi à prouver que des problèmes apparemment non reliés entre eux, comme le comportement asymptotique du nombre de franchissements d'un niveau pour le processus empirique (défini dans [7]), construit dans le but d'approcher la densité, et la convergence faible pour sa norme L^p (voir [4]), peuvent être traités d'un même point de vue via un théorème d'approximation forte. En fait, ces deux problèmes peuvent se réduire à l'étude de fonctionnelles particulières du pont brownien pour lesquelles la convergence sera une conséquence directe du TCL pour une somme de v.a. 1-dépendantes.

Notre travail fera l'objet de deux Notes : celle-ci, dans laquelle nous établissons des résultats ne concernant que le pont brownien, et la seconde [3] dans laquelle nous considérons des applications statistiques en relation avec le pont empirique.

Précisons le problème.

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

C. Berzin-Joseph et al.

Soit $\{W(t), t \in [0, 1]\}$ le mouvement brownien standard et φ un noyau de convolution. Pour $\varepsilon > 0$ nous définissons la « régularisation » de W par φ par $W_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon * W(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) W(s) ds$. M. Wschebor [8] a montré que, si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, alors pour presque-tout ω , $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda \left\{ s \leq t : \frac{W(s+\varepsilon) - W(s)}{\sqrt{\varepsilon}} \leq x \right\} = t\Phi(x)$, où Φ désigne la fonction de répartition de la v.a. gaussienne standard. On remarque que si $\varphi = 1_{[-1,0]}$, alors $\frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\sqrt{\varepsilon}} = \varepsilon^{1/2} \dot{W}_\varepsilon(t)$ et une généralisation naturelle de ce résultat consiste alors à considérer cette variable comme une variable en t sur l'espace de Lebesgue; de cette manière, la distribution de $\|\varphi\|_2^{-1} \varepsilon^{1/2} \dot{W}_\varepsilon(t)$ converge en loi vers celle d'une v.a. gaussienne standard. Ceci implique que pour une fonction presque-sûrement continue g , possédant une croissance « modérée », $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t g\left(\frac{\varepsilon^{1/2} \dot{W}_\varepsilon(s)}{\|\varphi\|_2}\right) ds = tE[g(N)]$ p.s., où N est une v.a. gaussienne standard.

La vitesse à laquelle a lieu cette convergence a été étudiée par Berzin et León [2] :

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t g_1\left(\frac{\varepsilon^{1/2} \dot{W}_\varepsilon(s)}{\|\varphi\|_2}\right) ds \rightarrow \sigma \widetilde{W}(t) \quad \text{faiblement, lorsque } \varepsilon \rightarrow 0,$$

où $g_1(x) = g(x) - E[g(N)]$, σ est une constante positive et \widetilde{W} un mouvement brownien indépendant de W . Ce résultat est utile pour l'étude de la convergence d'une intégrale par rapport au nombre de franchissements du processus régularisé. Nous définissons $N_\varepsilon^W(x) = \#\{s \leq 1 : W_\varepsilon(s) = x\}$, comme le nombre de fois où le processus W_ε franchit le niveau x sur $[0, 1]$. Si φ est absolument continue, cette v.a. a une espérance finie qui peut être calculée grâce à la formule de Rice. D'autre part, d'après une formule de Banach (voir [1], [5] et [6]), $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) N_\varepsilon^W(x) dx = \int_0^1 f(W_\varepsilon(s)) |\dot{W}_\varepsilon(s)| ds$, Wschebor a montré que, p.s., $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} f(x) N_\varepsilon^W(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ell^W(x) dx$, où $\ell^W(x)$ est le temps local du mouvement brownien au point x sur $[0, 1]$ et $\Lambda_\varepsilon = \left(\frac{\pi\varepsilon}{2\|\varphi\|_2^2}\right)^{1/2}$.

Ensuite, Berzin et León ont prouvé que $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\Lambda_\varepsilon N_\varepsilon^W(x) - \ell^W(x)] dx \xrightarrow{\mathcal{L}} V$, où V , conditionnée à la σ -algèbre \mathcal{F} engendrée par $\{W(t), t \in [0, 1]\}$, est une v.a. gaussienne centrée et de variance $\sigma^2 \int_0^1 f^2(W(s)) ds$, ce qui peut également se traduire en disant que $\mathcal{L}(V/\mathcal{F}) = \sigma \int_0^1 f(W(s)) d\widetilde{W}(s)$.

Dans cette Note nous étendons ces résultats à des fins probabilistes. Dans une autre Note [3] nous donnerons aussi des applications statistiques.

Soit F une fonction de répartition absolument continue et soit s sa densité. Nous supposons que son support est borné et, sans perte de généralité, que c'est $[0, 1]$. Le F -mouvement brownien est défini comme $W^F(t) = W(F(t))$. Les résultats que nous venons d'énoncer peuvent tous être généralisés à cette classe de processus.

Soit $g_\varepsilon(u, v)$, $\varepsilon > 0$, une certaine classe de fonctions satisfaisant des conditions de régularité; nous définissons $S_\varepsilon^{W^F}(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t g_\varepsilon(u, \xi_\varepsilon^W(u)) du$, où $\xi_\varepsilon^W(u) = \frac{\dot{W}^F(u)}{\sigma_\varepsilon^W(u)}$ et $\varepsilon(\dot{\sigma}_\varepsilon^W(x))^2 = \varepsilon \text{var}(\dot{W}_\varepsilon^F(x)) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) s(y) dy \rightarrow s(x) \|\varphi\|_2^2$.

Nous montrons dans le théorème 2 que, comme précédemment, il existe un mouvement brownien \widetilde{W} tel que $S_\varepsilon^{W^F}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \widetilde{W}(\sigma^2(t))$, où $\sigma^2(t) = \int_0^t \int_{-2}^2 E[g(u, X)g(u, \theta(w)X + \sqrt{1 - \theta^2(w)}Y)] dw du$, X, Y sont des v.a. gaussiennes standard indépendantes, $\theta(w) = \frac{\psi(w)}{\|\varphi\|_2^2}$, $\psi(w) = \varphi * \overline{\varphi}(w)$, $\overline{\varphi}(w) = \varphi(-w)$ et $g(u, \cdot) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(u, \cdot)$ dans L^2 .

Soit maintenant $\{b^F(t), t \in [0, 1]\}$, le F -pont brownien dans $[0, 1]$, i.e. $b^F(t) = W^F(t) - F(t)W^F(1)$. Nous voulons aussi étudier le comportement de $S_\varepsilon^{b^F}(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t g_\varepsilon(u, \xi_\varepsilon^{b^F}(u)) du$, où $\xi_\varepsilon^{b^F}(u) = \frac{\dot{b}^F(u)}{\sigma_\varepsilon^{b^F}(u)}$ et $(\dot{\sigma}_\varepsilon^{b^F}(u))^2 = \text{var}(\dot{b}_\varepsilon^F(u))$.

Nous montrons dans le théorème 2 que, de nouveau, il existe un mouvement brownien indépendant de W , \widetilde{W} , tel que $S_\varepsilon^{b^F}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \widetilde{W}(\sigma^2(t))$.

Comme application des résultats précédents nous obtenons les corollaires 1 à 5.

1. Hypotheses and notation

(H1) Assume the kernel φ satisfies: $\int_{-1}^1 \varphi(t)dt = 1$, $\varphi \in C^1$, $\varphi \geq 0$ and has support a subset of $[-1, 1]$.

(H2) For the function $f : f \in C^2$ and \ddot{f} is bounded.

(H3) For the function $s : s \in C^2$ on $[0, 1]$, $0 < m \leq s(x) \leq M$ for all $x \in [0, 1]$.

(H4) For the function g_ε :

1. $|g_\varepsilon(u, y) \leq P(u)Q(|y|)$ for $u \in [0, 1]$ and $y \in \mathbb{R}$, where P and Q are polynomials with positive coefficients;
2. for all $u \in [0, 1]$ and $y \in \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(u, y) = \sum_{k=2}^\infty c_{k,\varepsilon}(u)H_k(y)$, where $\{H_n, n \in \mathbb{N}\}$ are the Hermite's polynomials, orthogonal with respect to the standard Gaussian measure ϕ and with leading coefficient equal to 1;
3. $|k!c_{k,\varepsilon}(u)c_{k,\varepsilon}(v)| \leq a_k(u, v)$ and $\int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=2}^\infty a_k(u, v)dvdu < +\infty$, for a.e. $(u, v) \in [0, 1]^2$ and $v \in [0, 1]$;
4. $|\mathbb{1}_{\{2\varepsilon \leq u \leq 1-2\varepsilon\}} \mathbb{1}_{\{2\varepsilon \leq u+\varepsilon w \leq 1-2\varepsilon\}} k!c_{k,\varepsilon}(u)c_{k,\varepsilon}(u+\varepsilon w)| \leq b_k(u, w)$ and

$$\int_0^1 \int_{-2}^2 \sum_{k=2}^\infty b_k(u, w)dwdu < +\infty,$$

for a.e. $(u, w) \in [0, 1] \times [-2, 2]$ such that $u + \varepsilon w \in [0, 1]$;

5. $c_{k,\varepsilon}(u_\varepsilon) \rightarrow c_{k,\varepsilon}(u)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ if u_ε is a sequence in $[0, 1]$ which converges to $u \in [0, 1]$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ for a.e. $u \in [0, 1]$; $\sum_{k=2}^\infty c_k(u)H_k(y)$ defines the function $g(u, y)$;
6. let us define $\sigma^2(t) = \int_0^t h(u)du$, where $h(u) = \sum_{k=2}^\infty k!c_k^2(u) \left[\int_{-2}^2 \theta^k(w)dw \right]$ is supposed continuous and non-vanishing in $[0, 1]$.

We shall write $l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}|x|-1 = \sum_{n=1}^\infty a_{2n}H_{2n}(x)$ and $\sigma_1^2 = \int_{-2}^2 \sum_{k=1}^\infty a_{2n}^2(2n!) \theta^{2n}(w)dw$. Also

$$Z_\varepsilon^{b^F}(f) = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty f(x) [\Lambda_\varepsilon N_\varepsilon^{b^F}(x) - \tilde{\ell}^{b^F}(x)] dx,$$

where $N_\varepsilon^{b^F}(x)$ is the number of times that the process $b_\varepsilon^F(\cdot)$ crosses level x before time 1 and $\tilde{\ell}^{b^F}(\cdot)$ is a modification of the local time for the B.B. on $[0, 1]$ that satisfies, for any continuous function f .

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) \tilde{\ell}^{b^F}(x) dx = \int_0^1 f(b^F(u)) \sqrt{s(u)} du.$$

In what follows we shall drop out the indices F when no confusion is possible.

2. Preliminary results

2.1. Almost sure convergence

THEOREM 1. - Under (H1) and (H3)

$$\lambda\{u \leq t : \sqrt{\varepsilon} \dot{b}_\varepsilon^F(u) \leq x\} \rightarrow \int_0^1 P\left(\sqrt{s(u)} \|\varphi\|_2 N \leq x\right) du \quad \text{a.s. as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

C. Berzin-Joseph et al.

COROLLARY 1. - For every $\beta \geq 0$, as $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\int_0^1 |\sqrt{\varepsilon} \dot{b}_\varepsilon^F(u)|^\beta du \rightarrow E(|N|^\beta) \|\varphi\|_2^\beta \left[\int_0^1 [s(u)]^{\beta/2} du \right] \quad a.s.$$

We have, thus, an asymptotically unbiased and consistent estimator of $\int_0^1 [\sqrt{s(u)}]^\beta du$ given by

$$\frac{\int_0^t |\sqrt{\varepsilon} \dot{b}_\varepsilon^F(u)|^\beta du}{E(|N|^\beta) \|\varphi\|_2^\beta}.$$

COROLLARY 2

$$\Lambda_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} f(x) N_\varepsilon^b(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \tilde{\ell}^b(x) dx \quad a.s. \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Proof. - The proof follows the steps of [8]. □

2.2. Weak convergence

THEOREM 2. - Under (H1), (H3) and (H4) and assuming that g_ε is locally Lipschitz in the second variable:

$$|g_\varepsilon(u, x) - g_\varepsilon(u, y)| \leq D(\varepsilon, u) |P(x, y)| |x - y|,$$

where D is bounded in both variables and P has polynomial growth, then

$$S_\varepsilon^{b^F}(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} \widetilde{W}(\sigma^2(t))$$

in $C[0, 1]$, where \widetilde{W} is a Brownian motion.

Furthermore, the vector process $(b_\varepsilon^F(\cdot), S_\varepsilon^b(\cdot))$ converges weakly in $C[0, 1] \times C[0, 1]$ towards $(b^F(\cdot), \widetilde{W}(\sigma^2(\cdot)))$ and the processes $b^F(\cdot)$ and $\widetilde{W}(\sigma^2(\cdot))$ are independent.

Remark. - The same theorem holds for $S_\varepsilon^{W^F}(t)$ under the slighter conditions (H1), (H3) and (H4).

Proof. - The proof for $S_\varepsilon^{W^F}(\cdot)$ follows the same lines as in [2], we obtain then the result for $S_\varepsilon^{b^F}(\cdot)$ by showing that $S_\varepsilon^{W^F}(\cdot)$ and $S_\varepsilon^{b^F}(\cdot)$ are continuous in $L^2(\Omega)$. □

3. Applications

3.1. Increments

COROLLARY 3. - Under (H3), for every $\beta \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left[\left| \frac{b^F(u+\varepsilon) - b^F(u)}{\sqrt{\varepsilon}} \right|^\beta - E|N|^\beta [s(u)]^{\beta/2} \right] du \rightarrow \widetilde{W}(\sigma_\beta^2(t))$$

weakly in $C[0, 1]$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ and

$$\sigma_\beta^2(t) = 2 \left[\int_0^t (s(u))^\beta du \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |y|^\beta \phi(y) H_{2k}(y) dy \right]^2 \right].$$

Proof. - We show that

$$Z_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t [|\sqrt{\varepsilon} \dot{b}_\varepsilon^F(u)|^\beta - E(|N|^\beta) |\sqrt{\varepsilon} \dot{b}_\varepsilon^F(u)|^\beta] du = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t g_\varepsilon(u, \xi_\varepsilon^b(u)) du \rightarrow \widetilde{W}(\sigma_\beta^2(t))$$

Increments and crossings for the Brownian bridge: weak convergence

weakly as $\varepsilon \rightarrow 0$, where $g_\varepsilon(u, y) = |\sqrt{\varepsilon}\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)|^\beta [|y|^\beta - E|N|^\beta]$, because g_ε verifies hypotheses (H4). To finish the proof of Corollary 3 we show that $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t (|\sqrt{\varepsilon}\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)|^\beta - (s(u))^{\beta/2}) du \rightarrow 0$ uniformly in t as $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

COROLLARY 4. – Under (H3),

$$\eta_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\lambda \left\{ u \leq t, \frac{b^F(u + \varepsilon) - b^F(u)}{\sqrt{\varepsilon}} \leq x \right\} - \int_0^t P(\sqrt{s(u)}N \leq x) du \right)$$

converges weakly in $C[0, 1]$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ to $\widetilde{W}(\sigma^2(t, x)) - K(t, x)$, where

$$K(t, x) = b^F(t) \phi\left(\frac{x}{\sqrt{s(t)}}\right) \frac{1}{\sqrt{s(t)}} - \int_0^t b^F(u) \frac{\dot{s}(u)}{2[s(u)]^{3/2}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{s(u)}}\right) \left[\frac{x^2}{s(u)} - 1\right] du$$

and

$$\sigma^2(t, x) = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)!} \int_0^t H_{n-1}^2\left(\frac{x}{\sqrt{s(u)}}\right) \phi^2\left(\frac{x}{\sqrt{s(u)}}\right) du \right].$$

Proof. – Consider

$$g_\varepsilon(u, y) = \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)\sqrt{\varepsilon}y) - P(N\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)\sqrt{\varepsilon} \leq x) + y \left(\frac{x}{\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)\sqrt{\varepsilon}} \right).$$

We prove that g_ε verifies hypotheses (H4-1, 2, 5, 6) and also two conditions which, although weaker than (H4-3, 4) are enough to ensure the result of Theorem 2, then

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t g_\varepsilon(u, \xi_\varepsilon^b(u)) du \rightarrow \widetilde{W}(\sigma^2(t)) \quad \text{weakly as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Now

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t g_\varepsilon(u, \xi_\varepsilon^b(u)) du - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \xi_\varepsilon^b(u) \phi\left(\frac{x}{\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)\sqrt{\varepsilon}}\right) du \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \left[P(\sqrt{s(u)}N \leq x) - P(N\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)\sqrt{\varepsilon} \leq x) \right] du = T_1 - T_2 - T_3. \end{aligned}$$

We show that the last term tends to zero uniformly in t as $\varepsilon \rightarrow 0$. We observe that T_2 is tight, since the function $g_\varepsilon(u, y) = y \phi\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)}\right)$ verifies all the hypotheses except for $E(Ng_\varepsilon(u, N)) = 0$, which is not necessary to prove tightness. Integrating by parts, one has:

$$\begin{aligned} T_2 &= b_\varepsilon^F(t) \frac{1}{\dot{\sigma}_\varepsilon^b(t)\sqrt{\varepsilon}} \phi\left(\frac{x}{\dot{\sigma}_\varepsilon^b(t)\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &\quad - b_\varepsilon^F(0) \frac{1}{\dot{\sigma}_\varepsilon^b(0)\sqrt{\varepsilon}} \phi\left(\frac{x}{\dot{\sigma}_\varepsilon^b(0)\sqrt{\varepsilon}}\right) - \int_0^t b_\varepsilon^F(u) \frac{[\sqrt{\varepsilon}\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)]'}{\varepsilon[\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)]^2} \phi\left(\frac{x}{\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)\sqrt{\varepsilon}}\right) \left[\frac{x^2}{\varepsilon[\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)]^2} - 1\right] du \end{aligned}$$

with $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\sqrt{\varepsilon}\dot{\sigma}_\varepsilon^b(u)]' = \frac{\dot{s}(u)}{2\sqrt{s(u)}}$ for $u \in [0, 1]$.

To finish the proof of the Corollary it remains to show that $T_1 - T_2$ converges weakly in finite-dimensional distributions, as $\varepsilon \rightarrow 0$, to the required limit. \square

C. Berzin-Joseph et al.

3.2. Crossings and local time

COROLLARY 5. – If $\mathcal{F}_1 = \sigma\{b^F(u), 0 \leq u \leq 1\}$, under (H1), (H2) and (H3), $Z_\varepsilon^b(f)$ converges weakly as $\varepsilon \rightarrow 0$ towards a r.v. $V \in L^2(\Omega)$ and the conditional distribution (V/\mathcal{F}_1) is Gaussian with zero mean and random variance equal to $\sigma_1^2 \int_0^1 f^2(b^F(u))s(u)du$.

Remark. – Given \mathcal{F}_1 , the limit random variable (V/\mathcal{F}_1) is the stochastic integral $\sigma_1 \int_0^1 f(b^F(u))\sqrt{s(u)}d\widetilde{W}(u)$ (remember that \mathcal{F}_1 is the σ -field generated by $\{b^F(u), 0 \leq u \leq 1\}$).

Proof. – The proof follows the same lines as in [2]. However the computation is more involved given that the Brownian bridge has not independent increments. \square

References

- [1] Banach S., Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fund. Math.* 7 (1925) 225–237.
- [2] Berzin-Joseph C., León J.R., Weak convergence of the integrated number of level crossings to the local time for Wiener processes, *C. R. Acad. Sci. Paris 319 Série I* (1994) 1311–1316.
- [3] Berzin-Joseph C., León J.R., Ortega J., Study of the asymptotic behaviour of non-linear functionals for the empirical Bridge via strong appropriations, *C. R. Acad. Sci. Paris* (à paraître).
- [4] Csörgő M., Horváth L., Central limit theorems for L_p -norms of density estimators, *Probab. Th. Rel. Fields* (1988) 269–291.
- [5] Kac M., On the average number of real roots of a random algebraic equation, *Bull. Amer. Soc.* 49 (1943) 314–320.
- [6] Nualart D., Wschebor M., Intégration par parties dans l'espace de Wiener et approximation du temps local, *Probab. Th. Rel. Fields* 90 (1991) 83–109.
- [7] Silverman B.W., Weak and strong uniform consistency of the kernel estimate of a density and its derivatives, *Ann. Statist.* 6 (1978) 177–184.
- [8] Wschebor M., Sur les accroissements du processus de Wiener, *C. R. Acad. Sci. Paris 315 Série I* (1992) 1293–1296.