



HAL
open science

Estimación de la matriz de los momentos espectrales de orden 2 de un campo aleatorio Gaussiano a partir de las curvas de nivel

Corinne Berzin, Ileana Iribarren

► **To cite this version:**

Corinne Berzin, Ileana Iribarren. Estimación de la matriz de los momentos espectrales de orden 2 de un campo aleatorio Gaussiano a partir de las curvas de nivel. Estimación de la matriz de momentos espectrales de orden 2 de un campo aleatorio Gaussiano a partir de las curvas de nivel, 1988, Montevideo, Uruguay. pp.9-16. hal-00319443

HAL Id: hal-00319443

<https://hal.science/hal-00319443>

Submitted on 10 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimación de la matriz de los momentos espectrales de orden 2 de un campo aleatorio Gaussiano a partir de las curvas de nivel

Corinne Berzin. Laboratoire de Statistique appliquée, Bât. n°425, U.A. n°743, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, Francia

Ileana Iribarren. Matemáticas-I.V.I.C. Apartado 21827, Caracas 1020-A, Venezuela

Resumen

Extendiendo la idea del caso uniparamétrico de definir estimadores del segundo momento espectral a partir del número de cruces del proceso con una barrera, se definen estimadores de la matriz de los momentos espectrales de segundo orden basados en funcionales definidos sobre los conjuntos de nivel del campo. Se obtienen propiedades asintóticas y se da una expresión para la varianza asintótica.

1. Introducción:

Sea $X = \{X(t); t \in \mathbb{R}^2\}$ un campo aleatorio gaussiano, centrado y estacionario. Sea Γ su función de covarianza que supondremos normalizada ($\Gamma(0)=1$) y dos veces diferenciable. Si dF denota la medida espectral asociada a Γ , la matriz Σ , simétrica, de los momentos espectrales de segundo orden de X , tiene por elemento

$$\sigma_{ij} = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i \lambda_j dF$$

En el caso uniparamétrico la fórmula de Rice para la esperanza del número de cruces del proceso con una barrera, permite definir estimadores insesgados del segundo momento espectral (Lindgren[5]). Cabaña[1] extendiendo ésta idea obtiene estimadores basados solo en los extremos del proceso. En el caso multiparamétrico Longuet-Higgins[6] estima los momentos espectrales de todos los ordenes observando el número de ceros del proceso sobre rectas oblicuas.

En este trabajo definiremos estimadores de los elementos de la matriz Σ a partir de funcionales definidos sobre los conjuntos de nivel de X del mismo tipo que los utilizados por Cabaña [2] para estudiar la isotropía de un campo.

Se obtienen estimadores insesgados de los elementos de la diagonal de Σ y de la función $E\|X(0)\|$ utilizando una generalización de la fórmula de Rice para la esperanza de la integral de una función definida sobre una curva de nivel del campo y el momento mixto es obtenido por un proceso de inversión de la función $E\|X(0)\|$. Las propiedades asintóticas y la expresión de la varianza se obtienen de la aplicación de resultados generales sobre el comportamiento asintótico de los funcionales de la curva de nivel, (I. Iribarren[4]).

2. Preliminares:

Supondremos en adelante que X tiene trayectorias c.s. de clase C^2 . El proceso gradiente de X , $X'(t) = (X_1'(t), X_2'(t))$ donde $X_i'(t) = \frac{\partial X}{\partial t_i}(t)$ para $i=1,2$, admite como matriz de covarianza $(-\Gamma_{ij}(0))_{i,j=1,2}$, donde $\Gamma_{ij}(t) = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t_i \partial t_j}(t)$ y los momentos espectrales están relacionados con Γ de acuerdo a $\sigma_{ij} = -\Gamma_{ij}(0)$. Supondremos en adelante que la matriz Σ es no degenerada.

Con éstas hipótesis y las fijadas en la introducción, el conjunto de nivel aleatorio $C_u^T = \{t \in T : X(t) = u\}$, donde $u \in \mathbb{R}$ es un nivel fijo y T un rectángulo de \mathbb{R}^2 , es una curva c.s. de clase C^1 . Además, si Θ y $\|X\|$ son los campos aleatorios estacionarios de la representación polar de X , es decir $X(t) = \|X(t)\|(\cos\Theta(t), \sin\Theta(t))$ y $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva, la integral de línea $\int_{C_u^T} f(\Theta) dS$ donde

dS es el diferencial de longitud de curva, esta definida c.s.. Denotaremos por

$$(1) \quad \mathcal{F}_u(f, T) = \frac{1}{|T|} \int_{C_u^T} f(\Theta) dS$$

Con las mismas hipótesis vale la fórmula

$$(2) \quad E\mathcal{F}_u(f, T) = \frac{\phi(u)}{\sqrt{2\pi}} E[f(\Theta(0))\|X(0)\|]$$

donde $\phi(u) = \exp(-\frac{u^2}{2})$. En el caso $f \equiv 1$ la fórmula (2) se escribe como

$$(2') \quad E\mathcal{L}(T, u) = \frac{\phi(u)}{\sqrt{2\pi}} E\|\dot{X}(0)\|$$

donde $\mathcal{L}(T, u) = \mathcal{F}_u(1, T)$.¹

Lema1: Sean λ_+ y λ_- , ($\lambda_+ \geq \lambda_-$) los valores propios de Σ y sea $r = \frac{\lambda_+}{\lambda_-}$ ($0 < r \leq 1$).

Entonces

$$(3) \quad \gamma_3 = E\|\dot{X}(0)\| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} h(r)$$

donde $\gamma_1 = (\sigma_{11})^{1/2}$, $\gamma_2 = (\sigma_{22})^{1/2}$ y $h(r)$ es una función definida de $[0, 1] \rightarrow [1, \pi/2\sqrt{2}]$

estrictamente creciente, positiva.

Demostración: Un cálculo directo muestra que

$$\gamma_3 = E\|\dot{X}(0)\| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\lambda_+} E\left(\sqrt{1 - \frac{\lambda_-}{\lambda_+}}\right)$$

donde $E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta) d\theta$ es la integral elíptica de segunda especie. Tomando en cuenta que

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \right]$$

se tiene que $\lambda_+ = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{1+r}$ y definimos

$$(4) \quad h(r) = \frac{E(\sqrt{1-r})}{\sqrt{1+r}}$$

Es fácil ver que h satisface las propiedades dichas en el enunciado del lema.

Nota: De las relaciones anteriores se obtiene que el momento mixto

¹ La fórmula (2') fué demostrada por M. Wschebor [8] para $t \in \mathbb{R}^d$, para campos Gaussianos y posteriormente generalizada por él mismo [7] y E. Cabaña [3]. La expresión (2) es una versión para funcionales, demostrada por Cabaña.

$$(5) \quad \sigma_{12}^2 = \frac{(1-r)^2(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - (1+r)^2(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2}{4(1+r)^2}$$

3. Estimación.

Queremos definir estimadores de γ_1 y γ_2 en base a funcionales del tipo definido en (1)

Consideremos $T = T_1 \times T_2$ donde T_1 y T_2 son intervalos de \mathbb{R} . Para $t_2 \in T_2$ fijo definimos el proceso sección de X determinado por t_2 como

$$\begin{aligned} X_{t_2}(\cdot): T_1 &\rightarrow \Theta \\ t_1 &\rightarrow X_{t_2}(t_1) = X(t_1, t_2) \end{aligned}$$

si $N_U^{X_{t_2}(\cdot)}(T_1) = \#\{t_1 \in T_1: X_{t_2}(t_1) = u\}$, vale la fórmula de Rice

$$EN_U^{X_{t_2}(\cdot)}(T_1) = \frac{1}{\pi} \phi(u) \gamma_1 |T_1|$$

por lo tanto, el siguiente es un estimador insesgado de γ_1 :

$$\hat{\gamma}_1(T_1, t_2, u) = \pi \phi^{-1}(u) |T_1|^{-1} N_U^{X_{t_2}(\cdot)}(T_1)$$

la información contenida en la curva de nivel será utilizada al integrar en T_2 , lo que nos lleva a definir el estimador

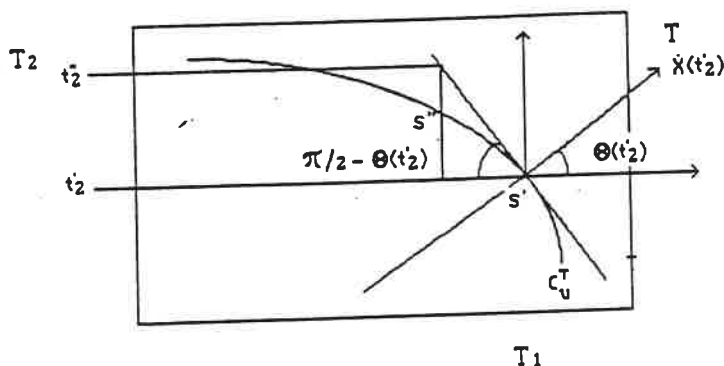
$$(6) \quad \hat{\gamma}_1(T, u) = |T_2|^{-1} \int_{T_2} \hat{\gamma}_1(T_1, t_2, u) dt_2$$

Ahora bien, el estimador anteriormente definido es insesgado de acuerdo a la fórmula de Rice, y heurísticamente, comparando los procesos de integración se puede ver que

$$(7) \quad \int_{T_2} N_U^{X_{t_2}(\cdot)}(T_1) dt_2 = \int_{C_U^T} |\cos \Theta(t)| dS$$

La expresión (7) tiene interés por sí misma, su demostración rigurosa puede ser complicada y escapa a los objetivos de este trabajo, haremos un esbozo de la idea y geométrica. Si suponemos que la curva C_U^T es tal que para t_2' y t_2'' el proceso $X_{t_2'}(\cdot)$ $X_{t_2''}(\cdot)$ cortan el nivel u en un solo punto de T_1 , entonces se puede elegir dos puntos sobre la curva digamos s' y s'' tales que

$$\Delta t_2 = |t'_2 - t''_2| \left(|\cos \Theta(t'_2)| \Delta s = |\sin[\pi/2 - \Theta(t'_2)]| |s' - s''| \right)$$



si se recorre toda la curva haciendo tender Δs a cero, las integrales que figuran en (7) coinciden en el límite.

Utilizamos (7) para redefinir el estimador (6) por

$$(8) \quad \hat{\gamma}_1(T, u) = \pi \phi^{-1}(u) C(T, u)$$

donde $C(T, u) = F_u(|\cos \theta|, T)$ y por un procedimiento análogo, definimos

$$(9) \quad \hat{\gamma}_2(T, u) = \pi \phi^{-1}(u) S(T, u)$$

donde $S(T, u) = F_u(|\sin \theta|, T)$

Ambos estimadores (8) y (9) son insesgados en virtud de la fórmula (2). Un estimador insesgado de γ_3 se define directamente de acuerdo a (2') como

$$(10) \quad \hat{\gamma}_3(T, u) = \sqrt{2\pi} \phi^{-1}(u) L(T, u).$$

Consideremos un nuevo parámetro, que denotamos γ , sugerido por la relación (3) de la siguiente manera

$$(11) \quad \gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}}$$

y su estimador:

$$(12) \quad \hat{\gamma}(T,u) = \frac{L(T,u)}{\sqrt{C^2(T,u) + S^2(T,u)}}$$

un estudio cuidadoso de $\hat{\gamma}$ muestra que toma valores en el intervalo $[1, \sqrt{2}]$, es decir que puede salirse del rango de h , por esta razón definimos

$$(13) \quad \hat{\tau}(T,u) = \begin{cases} h^{-1}(\hat{\gamma}(T,u)) & \text{si } \hat{\gamma}(T,u) \in \text{Rg}(h) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente y en virtud de la fórmula (5) definimos un estimador del momento espectral mixto como:

$$(14) \quad \hat{\sigma}_{12}^2(T,u) = \frac{(1-\hat{\tau}(T,u))^2(\hat{\gamma}_1^2(T,u) + \hat{\gamma}_2^2(T,u))^2 - (1+\hat{\tau}(T,u))^2(\hat{\gamma}_1^2(T,u) - \hat{\gamma}_2^2(T,u))^2}{4(1+\hat{\tau}(T,u))^2}$$

si $\hat{\tau}(T,u) = 1$ y $\hat{\sigma}_{12}^2(T,u) = 0$ en otro caso.

4. Propiedades de los Estimadores.

Los estimadores $\hat{\gamma}_1(T,u)$, $\hat{\gamma}_2(T,u)$ y $\hat{\gamma}_3(T,u)$ son insesgados por la manera como han sido definidos. Utilizaremos una adaptación del Teorema del Límite Central para funcionales del tipo definido en (1) (Iribarren[4]) para establecer la consistencia y normalidad asintótica de estos estimadores. Los estimadores $\hat{\gamma}(T,u)$, $\hat{\tau}(T,u)$ y $\hat{\sigma}_{12}^2(T,u)$ por depender analíticamente de los anteriores tendrán también la propiedad de ser consistentes y asintóticamente normales.

Definición. Decimos que X satisface una condición de p -mezcla si

$$\sup\{|E(YZ) - EY EZ| : Y \in \sigma(B), Z \in \sigma(B')\} = \rho(d(B, B')) \rightarrow 0 \text{ cuando } d \rightarrow \infty$$

donde B, B' son dos Borelianos de \mathbb{R}^2 , $d(B, B')$ denota la distancia euclídeana entre ambos conjuntos, y $\sigma(B) = \sigma\{X(t) : t \in B\}$ y $Y \in \sigma(B)$ quiere decir $\sigma(B)$ -medibilidad.

Teorema. Si el campo aleatorio X satisface las condiciones de regularidad supuestas en los párrafos anteriores y además

-X satisface una condición de ρ -mezcla y existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{2\rho} \delta^{(2+\delta)(k)} < \infty$$

-La función de covarianza Γ de X es tal que $\Gamma(u), \Gamma'(u), \Gamma''(u)$ tienden a cero cuando $|u| \rightarrow \infty$.

-Los momentos de orden $2+\delta$ de $L(T, u)$ son finitos.

Entonces

$$(15) \quad \lambda^2 \text{cov}(\hat{\gamma}_k(\lambda T, u), \hat{\gamma}_j(\lambda T, u)) \rightarrow V_{kj}(T) \quad \text{para } k, j=1, 2, 3$$

cuando $\lambda \rightarrow \infty$, donde $\lambda \in \mathbb{N}$ y λT es la dilatación del rectángulo T por λ , además

$$(16) \quad \lambda(\hat{\gamma}_1(\lambda T, u) - \gamma_1, \hat{\gamma}_2(\lambda T, u) - \gamma_2, \hat{\gamma}_3(\lambda T, u) - \gamma_3)$$

converge debilmente a un proceso de Wiener tridimensional $\{W_V(T): T \text{ rectángulo de } \mathbb{R}^2\}$ y de matriz de covarianza $V(T) = (V_{kj}(T))_{k,j=1,2,3}$ cuyos elementos están dados por las fórmulas siguientes:

$$(17) \quad V_{kj}(T) = |T|^{-1} \phi^{-2}(u) \int_{\mathbb{R}^2} H_{0t}^{kj}(u, u) dt \quad \text{para } k, j=1, 2, 3$$

donde

$$H_{st}^{kj}(u, v) = P_{X(s), X(t)}(u, v) h_{st}^{kj}(u, v) - P_{X(s)}(u) P_{X(t)}(v) h_s^k(u) h_t^j(v)$$

y

$$h_{st}^{kj}(u, v) = \begin{cases} \pi^2 E(|\dot{X}_k(s)| |\dot{X}_j(t)| / X(s)=u, X(t)=v) & k, j=1; 2 \\ 2\pi E(|X(s)| |X(t)| / X(s)=u, X(t)=v) & k=j=3 \\ \pi \sqrt{2\pi} E(|\dot{X}_k(s)| |\dot{X}_j(t)| / X(s)=u, X(t)=v) & j=1; 2; k=3 \end{cases}$$

y $h_s^k(u) h_t^j(v)$ designa en cada caso el producto de las esperanzas condicionales dado $X(s)=u$ y dado $X(t)=v$.

Demostración: La demostración resulta de adaptar el teorema 1 de Iribarren[4].

Agradecimiento: Queremos agradecer al Prof. E. Cabaña, quien además de proponernos el problema discutió con nosotras la solución.

Referencias:

- [1] E.M.Cabaña, *Estimation of the spectral moments, by means of extrema* Reporte nº84-08. Dto. de Matemáticas y C. C., Universidad Simón Bolívar, Caracas, 1984.
- [2] E.M.Cabaña, *Affine Processes; A Test of Isotropy based on Level Sets*. S.I.A.M.J.Appl. Math., 47, nº4, 1987.
- [3] E.M.Cabaña, *Esperanzas para Integrales sobre Conjuntos de Nivel Aleatorios*. Actas II Congreso Latinoamericano de Probabilidades y Estadística (II CLAPEM) Caracas, 1985.
- [4] I.Iribarren, *Asymptotic behaviour of the integrals of a function on the level set of a mixing random field*. Prob. and Math. Stat., 10, Fasc.1, 1988.
- [5] G.Lindgren, *Spectral moments estimation by means of level crossing*, Biometrika, 61, (1974), p.401.
- [6] M.S.Longuet-Higgins, *The statistical analysis of a random moving surface*. Phil.Trans.A., 249, 1957, p. 321-387.
- [7] M.Wschebor, *Surfaces aléatoires. Mésures géométriques des ensembles de niveau*. Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, nº 1147, 1985.
- [8] M.Wschebor, *Formule de Rice en dimension d*. Zeit. für Wahr. 60., 1982, p. 393-401.