



HAL
open science

Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires

Corinne Berzin

► **To cite this version:**

Corinne Berzin. Approximation du temps local des champs aléatoires gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires. *Probability and Mathematical Statistics*, 1991, 12 (2), pp.201-215. hal-00319158

HAL Id: hal-00319158

<https://hal.science/hal-00319158>

Submitted on 10 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

APPROXIMATION DU TEMPS LOCAL
DES CHAMPS ALÉATOIRES GAUSSIENS STATIONNAIRES
PAR RÉGULARISATION DES TRAJECTOIRES

PAR
CORINNE BERZIN (ORSAY)

Abstract. Let $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ be a stationary gaussian field. We are looking for the $(d-1)$ -dimensional area measure of the intersection with zero level of the field regularized by convolution. Under some conditions and with an appropriated normalization, this measure converges in L^2 towards a limit which is the local time, when X admits a continuous local time.

I. INTRODUCTION

1. Le cas du Wiener à d -paramètres ($d \geq 1$). La théorie du temps local d'un processus stochastique X a été élaborée par P. Lévy dans le cas du mouvement brownien. Depuis de nombreuses approximations ont été proposées; en 1984, Wschebor [6] a proposé une construction du temps local du processus de Wiener à d -paramètres, en utilisant les régularisées de X . Le résultat principal est que si $X_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon * X(t)$ est une régularisation de X obtenue à l'aide d'une C^∞ -approximation de l'unité ψ_ε , si T est un ensemble ouvert borné, dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de $(\mathbb{R}^+)^d$ et si le temps local est défini de la manière suivante:

Soient A et B des boréliens respectivement de \mathbb{R} et \mathbb{R}^d , μ_d désignant la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^d , la mesure d'occupation $\mu(A, B)$ de X est définie par

$$\mu(A, B) = \mu_d\{t \in B, X(t) \in A\}$$

et le temps local $L(x, B)$ est caractérisé comme étant une fonction satisfaisant

$$\mu(A, B) = \int 1_A(x) L(x, B) dx.$$

L'existence de versions régulières de telles fonctions est étudiée dans [4] et [5], alors pour une certaine normalisation $d(\varepsilon)$ d'ordre ε on a:

$$\sqrt{d(\varepsilon)} \sigma_{d-1}(C(X_\varepsilon) \cap T) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^p} L(0, T), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

où σ_{d-1} désigne la mesure d'aire $(d-1)$ -dimensionnelle et

$$C(X_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}^d, X_\varepsilon(t) = 0\}.$$

2. Les cas des processus stables et gaussiens stationnaires ($d = 1$). Azaïs [1] a étendu ce résultat aux processus stables à accroissements indépendants. Florens-Zmirou et Azaïs [2] ont ensuite donné une approximation similaire du temps local pour une certaine classe de processus gaussiens stationnaires indexés par le temps. Ils ont établi que si $N_{\psi, \varepsilon}]a, b[$ désigne le nombre de passages par zéro de X_ε durant l'intervalle de temps $]a, b[$, $\lambda_{2, \varepsilon}$ le moment spectral d'ordre 2 de X_ε et si X admet un temps local $L(u,]a, b[)$ continu en u au point zéro, alors

$$\sqrt{\pi/2} \lambda_{2, \varepsilon}^{-1/2} N_{\psi, \varepsilon}]a, b[\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0,]a, b[).$$

Le but de cette note est de généraliser ce résultat au cas où le processus X est multiindexé.

Nous généralisons la notion d'aire $(d-1)$ -dimensionnelle à celle de périmètre $Q_T(\cdot)$ utile dans les cas où pour un processus Y et pour chaque réalisation de la surface aléatoire $Y(\cdot)$, l'ensemble $C(Y)$ est très irrégulier topologiquement. Nous considérons

$$A(X_\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}^d, X_\varepsilon(t) < 0\};$$

lorsque X_ε est à trajectoires continues, presque sûrement X_ε n'a pas de points critiques de valeur zéro et $Q_T(A(X_\varepsilon))$ n'est alors que la mesure d'aire $(d-1)$ -dimensionnelle de $C(X_\varepsilon) \cap T$ (voir [6]); nous montrons alors sous certaines hypothèses, qu'il existe une normalisation $d(\varepsilon)$ strictement positive, telle que si X admet une version continue du temps local L , alors

$$\sqrt{d(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T).$$

Il est à noter que lorsque $d > 1$, les hypothèses de travail sont beaucoup plus générales que dans le cas $d = 1$; ceci provenant du fait que $u \rightarrow 1/\|u\|$ est intégrable au voisinage de $u = 0$.

II. RÉSULTATS

1. Notations et hypothèses. Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}^d\}$ un champ aléatoire gaussien centré et stationnaire de covariance $r(\cdot)$ continue en zéro, et de mesure spectrale $F(d\lambda)$, supposée non nulle sur les quadrants ouverts de \mathbb{R}^d . On suppose $d > 1$. On note $D_i = \partial/\partial t_i$.

Soit ψ un noyau de convolution de classe C^1 vérifiant:

$$\psi(u) \leq 1/\|u\|^{d+1}, \quad |D_i \psi(u)| \leq 1/\|u\|^{d+1}, \quad |D_i \psi(\cdot)| \in L^1(d\lambda),$$

$$\forall i \in [1, d], \quad \forall u \in (\mathbb{R}^*)^d.$$

On note $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier de ψ . On définit ψ_ε par $\psi_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-d} \psi(u/\varepsilon)$, $\forall u \in \mathbb{R}^d$, et X_ε par $X_\varepsilon = \psi_\varepsilon * X$.

Soient $\lambda_1(\varepsilon) \geq \dots \geq \lambda_d(\varepsilon)$ les valeurs propres de la matrice de covariance de $X_\varepsilon(0)$.

Soit T un cube ouvert borné dans \mathbb{R}^d dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées et de longueur C .

Soit $r_{\varepsilon, \psi}(\cdot) = E(X_\varepsilon(\cdot)X_\varepsilon(0))$ noté encore $r_\varepsilon(\cdot)$.

$\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

Si B est un Borélien de \mathbb{R}^d , nous appelons $Q_T(B)$ *périmètre relatif de B par rapport à T*, défini par

$$Q_T(B) = \sup \left\{ \int \operatorname{div} v(t) 1_B(t) dt; v \in C_k^\infty(T)^d; \|v\| < 1 \right\},$$

où $C_k^\infty(T)^d$ désigne l'ensemble des fonctions de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d de classe C^∞ et à support inclus dans T .

HYPOTHÈSE H1. La fonction de covariance r vérifie:

(a) Les dérivées partielles premières et secondes de r existent en dehors de l'origine et sont bornées à l'infini. Les dérivées partielles premières de r sont à variation bornée autour de l'origine.

(b) On pose $H(i) = \int x_i^2 dF(x)$, $\forall i \in [1, d]$; on suppose qu'il existe une direction j pour laquelle $H(j)$ est infini.

HYPOTHÈSE H2. On suppose que l'on peut appliquer les formules de type Rice adaptées à notre problème [6].

HYPOTHÈSE H3. Soit $c(\varepsilon) = (\lambda_1(\varepsilon))^{-1}$; on suppose que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) \lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i, \quad \forall i \in [1, d].$$

Soit $\Lambda = [(\Lambda_{i,j})]_{i,j}$, où $\Lambda_{i,j} = \delta_{i,j} \lambda_i$ et p le rang de Λ . On considère $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$, où les X_i sont des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes, de variance λ_i , $1 \leq i \leq p$, et $\theta = E(\|X\|_p)$.

Nous démontrons alors:

THÉORÈME. *Sous les hypothèses H1, H2 et H3 les variables aléatoires*

$$\xi^\varepsilon = \sqrt{c(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) \quad \text{et} \quad \eta^\delta = (\theta/2\delta) \int 1_T(t) 1_{\{|X(t)| < \delta\}}(t) dt$$

convergent au sens de $L^2(\Omega)$ vers une même limite pour ε et δ tendant vers zéro.

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses H1, H2 et H3 et si X admet un temps local $L(u, T)$ continu en u au point zéro, alors*

$$\sqrt{c(\varepsilon)} \theta^{-1} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T).$$

2. Commentaires.

(a) Sur H2. Les formules de type Rice utilisées dans notre travail sont valides par exemple lorsque X (respectivement X_ε) est à trajectoires continues (respectivement de classe C^4) [condition (A)] et si on a la propriété

$\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\exists \varepsilon(C/n)$, $\forall \varepsilon < \varepsilon(C/n)$, $\exists a < C/2n$, $\forall t_1 \in T$, $\forall t_2 \in T$, $\forall t_3 \in T$ tels que $\|t_1 - t_3\| < a$, $\|t_3 - t_2\| > C/n$, la matrice de covariance de $(X_\varepsilon(t_1), X(t_2), \dot{X}_\varepsilon(t_3))$ est non dégénérée [6].

Cette dernière condition est vérifiée sous H1 dans les exemples suivants:

(α) X est isotrope ($r(t) = g(\|t\|)$) et ψ est invariante par les transpositions et par symétrie par rapport aux axes de coordonnées [condition (B)].

(β) ψ et F sont invariantes par rapport aux axes de coordonnées et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = +\infty, \quad \forall i \in [1, d],$$

ce qui est assuré par exemple sous H3 lorsque $p = d$.

(b) Sur H3. Deux cas particuliers sont intéressants:

(α) Les conditions (A) et (B) sont vérifiées et r vérifie H1. Dans ce cas:

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = \int |\psi|^2(\varepsilon x) x_i x_j dF(x) = 0 \quad \text{pour } i \neq j,$$

et

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = c(\varepsilon)^{-1}, \quad \forall i \in [1, d].$$

En particulier, si

$$g'(x) = x^\beta f(x) \quad \text{pour } x \geq 0,$$

où $-1 < \beta$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$, $a \neq 0$, $|f(x)| < M$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, alors

$$c(\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta} K_\psi^{-1},$$

où K_ψ supposée non nulle est définie par

$$K_\psi = -a \int \psi(u) h_1 \|h\|^{\beta-1} D_1 \psi(u-h) du dh, \quad \theta = E(\|X\|_d),$$

où $X \rightarrow N(0, I)$, et sous l'hypothèse d'existence pour x d'un temps local continu en 0:

$$\theta^{-1} (\sqrt{K_\psi})^{-1} (\sqrt{\varepsilon})^{1-\beta} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T).$$

EXEMPLE 1. $r(t) = e^{-\|t\|^\alpha}$, $0 < \alpha < 2$, $\beta = \alpha - 1$.

(β) $r(t) = \prod_i r^i(t_i)$, r_i vérifie H1, $r_i \in L^1$, $r_i(0) > 0$, $\psi(t) = \prod_i \psi_i(t_i)$, $\psi_i(x) = \psi_i(-x)$, $\psi_i(x) \leq \text{const} \cdot |x|^{-1}$, $\int_{\mathbb{R}} \psi_i(t) dt = 1$, $\forall i \in [1, d]$, $\forall t \in \mathbb{R}^d$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Dans ce cas $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,i} = \lambda_{2,\varepsilon}^i g_i(\varepsilon)$, où $g_i(\varepsilon) = \prod_{j \neq i} r_{\psi_j, \varepsilon}^j(0)$ converge vers $\prod_{j \neq i} r^j(0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et $\lambda_{2,\varepsilon}^i$ est le moment spectral d'ordre deux d'un processus à un indice de covariance $r_{\psi_i, \varepsilon}^i$. Si

$$\lambda_{2,\varepsilon}^i / \sup_i (\lambda_{2,\varepsilon}^i) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} a_j, \quad p = \text{rang}(a_j \delta_{i,j})_{i,j=1,d}$$

et si

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{1,1} \geq \lambda_{2,\varepsilon}^{2,2} \geq \dots \geq \lambda_{2,\varepsilon}^{d,d}$$

alors, sous l'hypothèse d'existence pour x d'un temps local continu en 0 et sous la condition (A) on a:

$$\theta^{-1} \sqrt{c(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{L^2} L(0, T),$$

où $\theta = E(\|X\|_p)$ et $X \rightarrow N(0, (a_i/a_1 r_1(0)/r_i(0) \delta_{i,j})_{i,j=1,p})$.

EXEMPLE 2. $r^i = r^0$ et $\psi_i = \psi_0$, où r^0 vérifie H1 (traduit pour $d = 1$), alors $a_i = 1, \forall i \in [1, d]$.

Remarques. L'exemple 2 permet donc d'obtenir un sous-ensemble de la classe des processus à un indice, stationnaires, de moment spectral d'ordre deux infini, qui contient une partie de la classe exhibée dans le cas $d = 1$ par [2]. Le cas (β) soit un peu du cadre de notre étude puisque r ne vérifie pas H1 (a) mais on peut légèrement modifier la preuve du théorème général (en considérant notamment les cubes partiellement proches au lieu des cubes proches (cf. [6], p. 105).

III. DÉMONSTRATIONS

On note:

$$\gamma_\varepsilon(t) = E(X_\varepsilon(t)X(0)), \quad DR_\varepsilon(t) = (D_i r_\varepsilon(t))_i,$$

$$D^2 R_\varepsilon(t) = (D_i D_j r_\varepsilon(t))_{i,j}, \quad a(\varepsilon) = (\varepsilon \sqrt{d})^{-1}, \quad c_d = A/\sqrt{d}.$$

On dira que $x \ll y$, s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que $x < ky$.

Commençons par démontrer deux lemmes.

LEMME 1. (1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) = 0$.

(2) $r_\varepsilon(t)$ et $\gamma_\varepsilon(t)$ tendent uniformément en t vers $r(t)$ quand ε tend vers zéro.

(3) $|D_i r_\varepsilon(t)|, |D_i D_j r_\varepsilon(t)|$ et $|D_i \gamma_\varepsilon(t)|$ sont bornées ($\forall i, \forall j$) sur $D(t_0) = \{t \in \mathbb{R}^d, \|t\| > t_0\}$ par des constantes ne dépendant que de t_0 .

Preuve. (1) On peut toujours supposer que

$$\inf_{\|x\| < 1} |\hat{\psi}(x)|^2 \geq 1$$

(en effet, il existe $\eta > 0$ tel que $\inf_{\|x\| < \eta} |\hat{\psi}(x)|^2 > 0$; on considère alors φ définie par $\varphi(x) = \psi(x/\eta), \forall x \in \mathbb{R}^d$, d'où

$$\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} \geq \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} \dots \int_{-a(\varepsilon)}^{a(\varepsilon)} x_j^2 dF(x)$$

d'après H1(b):

(i) $\lambda_{2,\varepsilon}^{i,j} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} +\infty$.

De plus, si

$$z_j = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0),$$

on a

$$(ii) -z_j D^2 R_\varepsilon(0) z_j' = \lambda_{2,\varepsilon}^{j,j} \leq A_1(\varepsilon) \text{ et}$$

$$(iii) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) A_1(\varepsilon) = A_1 = 1.$$

En utilisant (i)–(iii) on obtient $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon) = 0$.

(2) On montre (2) à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(3) Grâce à la propriété de majoration de $|D_i \psi(\cdot)|$, on peut dériver $r_\varepsilon(\cdot)$ sous le signe somme. On a alors

$$(*) \quad D_i r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon) \int \psi(u) D_i \psi(v) r(t + \varepsilon(u-v)) dudv.$$

On fait le changement de variables $t + \varepsilon(u-v) = h$ et on intègre alors par parties, il vient

$$D_i r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^d \int \psi(u) \psi(u + (t-h)/\varepsilon) D_i r(h) dudh = \int (1).$$

Soit $t_0 > 0$; on pose $A = t_0/3$ et on suppose $\|t\| > t_0 = 3A$. On découpe \mathbb{R}^{2d} suivant la partition:

$$D_1 = \{(u, h) \in \mathbb{R}^{2d}, -\|u\| \leq 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon, \|h\| < A\},$$

$$D_2 = \{(u, h) \in \mathbb{R}^{2d}, -\|u\| > 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon, \|h\| < A\},$$

$$D_3 = \{(u, h) \in \mathbb{R}^{2d}, \|h\| \geq A\}.$$

On majore $|D_i r_\varepsilon(t)|$ par $(1/\varepsilon)^d \int \psi(u) \psi(u + (t-h)/\varepsilon) |D_i r(h)| dudh$ sur $\bigcup_{i=1}^3 D_i$.

Si $(u, h) \in D_1$, $\|u\| \geq A/\varepsilon$, d'où $\psi(u) \leq \varepsilon^{d+1}$, et donc on a

$$\int_{D_1} |(1)| \leq \varepsilon \int_{\|h\| < A} |D_i r(h)| dh \leq \varepsilon,$$

d'après H1(a).

Si $(u, h) \in D_2$, $\|t/\varepsilon + u - h/\varepsilon\| \geq A/\varepsilon$, d'où $\psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) \leq \varepsilon^{d+1}$; de même:

$$\int_{D_2} |(1)| \leq \varepsilon.$$

Si $\|h\| > A$, $|D_i r(h)|$ est majorée d'après H1(a), d'où

$$\int_{D_3} |(1)| \leq (1/\varepsilon)^d \int \psi(u) \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) dudh \leq \int \psi(u) \psi(v) dudv = 1,$$

et donc il existe $N(t_0)$ tel que $|D_i r_\varepsilon(\cdot)|$ soit majoré par $N(t_0)$ sur $D(t_0)$.

$$(**) \quad D_i D_j r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^2 \int D_j \psi(t/\varepsilon - u) r(\varepsilon u - \varepsilon v) D_i \psi(-v) dudv.$$

Pour simplifier les notations, on suppose que $i = 2$ et $j = 1$. On intègre alors par parties, il vient

$$D_2 D_1 r_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^{d+1} \int \psi(u) D_2 r(h) D_1 \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) dudh = \int (2).$$

On découpe \mathbb{R}^{2d} suivant la partition:

$$D_1 = \{(u, h) \in \mathbb{R}^{2d}, \exists k \in \{2, \dots, d\}, |h_k| > c_d\},$$

$$D_2 = \{(u, h) \in \mathbb{R}^{2d}, \forall k \in \{1, \dots, d\}, |h_k| \leq c_d\},$$

$$D_3 = \{(u, h) \in \mathbb{R}^{2d}, |h_1| > A/\sqrt{d}, \forall k \in \{2, \dots, d\}, |h_k| \leq c_d\}.$$

Posons

$$S = \{h \in \mathbb{R}^{d-1}, \exists k \in \{2, \dots, d\}, |h_k| > c_d\}$$

et

$$U = \{h \in \mathbb{R}^{d-1}, \forall k \in \{2, \dots, d\}, |h_k| \leq c_d\};$$

$$\int_{D_1} (2) = (1/\varepsilon)^{d+1} \int_S \psi(u) \left[\int_{\mathbb{R}} D_2 r(h) D_1 \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) dh_1 \right] dh_2 \dots dh_d du.$$

On intègre par parties le terme sous crochet, il vient d'après H1(a):

$$\int_{D_1} (2) = (1/\varepsilon)^d \int_{S \times \mathbb{R}} \psi(u) D_1 D_2 r(h) \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) dudh.$$

Mais les dérivées partielles secondes de r sont bornées sur $S \times \mathbb{R}$, d'où

$$\left| \int_{D_1} (2) \right| \leq 1.$$

On découpe D_2 suivant la partition:

$$D_{2,1} = \{(u, h) \in D_2, -\|u\| \leq 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon\},$$

$$D_{2,2} = \{(u, h) \in D_2, -\|u\| > 2A/\varepsilon - \|t\|/\varepsilon\}.$$

On démontre de la même façon que dans (*) que

$$\left| \int_{D_2} (2) \right| \leq 1.$$

Pour majorer $\left| \int_{D_3} (2) \right|$, on intègre par parties en h_1 , d'où

$$\int_{D_3} (2) = B/\varepsilon^d,$$

où

$$\begin{aligned} B = & \int_U \psi(u) D_2 r(c_d, h_2, \dots, h_d) \psi(t_1/\varepsilon + u_1 - c_d/\varepsilon, \dots, t_d/\varepsilon + u_d - h_d/\varepsilon) dh_2 \dots dh_d du \\ & - \int_U \psi(u) D_2 r(-c_d, h_2, \dots, h_d) \psi(t_1/\varepsilon + u_1 + c_d/\varepsilon, \dots, t_d/\varepsilon + u_d - h_d/\varepsilon) dh_2 \dots dh_d du \\ & + \int_{D_3} \psi(u) D_1 D_2 r(h) \psi(t/\varepsilon + u - h/\varepsilon) dudh; \end{aligned}$$

$$\int_{D_3} (2) = \int_{D_3} (A) + \int_{D_3} (B) + \int_{D_3} (C).$$

Pour majorer $\left| \int_{D_3} (A) \right|$ et $\left| \int_{D_3} (B) \right|$, on partitionne

$$D_4 = \{(u, h) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-1}, \forall k \in \{2, \dots, d\}, |h_k| \leq c_d\}$$

en deux domaines

$$D_{41} = \{(u, h) \in D_4, -\|u\| \leq (2A/\varepsilon) - \|t\|/\varepsilon\},$$

$$D_{42} = \{(u, h) \in D_4, -\|u\| > (2A/\varepsilon) - \|t\|/\varepsilon\}.$$

On fait alors un raisonnement analogue à celui dans (*), en tenant compte du fait que

$$\int_U |D_2 r(\pm c_d, h_2, \dots, h_d)| dh_2 \dots dh_d \ll 1,$$

d'où

$$\left| \int_{D_3} (A) \right| + \left| \int_{D_3} (B) \right| \ll \varepsilon.$$

Pour majorer $|\int_{D_3} (C)|$, il suffit de voir que les dérivées partielles secondes de r sont bornées sur D_3 ; on a donc $|D_2 D_1 r_\varepsilon(t)| \ll 1$.

$$(***) \quad D_i \gamma_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon) \int D_i \psi(t/\varepsilon - u) r(\varepsilon u) du$$

posons $\varepsilon u = v$ et intégrons par parties, il vient

$$D_i \gamma_\varepsilon(t) = (1/\varepsilon)^d \int \psi((t-v)/\varepsilon) D_i r(v) dv.$$

Il suffit alors d'intégrer sur la partition suivante: $D_1 = \{v \in \mathbb{R}^d, \|v\| < A\}$ et D_1^c , et d'appliquer les mêmes raisonnements que précédemment.

LEMME 2. Soit $\{(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t)), t \in B\}$ un processus gaussien centré à valeurs dans \mathbb{R}^{2n} et B un ouvert borné de \mathbb{R}^k . On suppose que la matrice de covariance $R_\varepsilon(t)$ de $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ converge uniformément en t lorsque ε tend vers zéro vers

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

où A est diagonale, de rang q . Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_q$, les q valeurs propres non nulles de A et $\Lambda_1 = (\lambda_i \delta_{i,j})_{i,j=1,q}$. Soit $t \rightarrow g_\varepsilon(t)$ une fonction définie sur B à valeurs dans \mathbb{R} qui converge uniformément en t vers $g(t)$ bornée sur B , lorsque ε tend vers zéro. Alors

$$\int_B E(\|X_\varepsilon(t)\| \|Y_\varepsilon(t)\|) g_\varepsilon(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_B g(t) dt \right] E^2(\|X\|_q),$$

où $X \rightarrow N(0, \Lambda_1)$.

Démonstration. Elle se fait en trois étapes.

(E1) Il est clair que le théorème est vrai si le rang de A est q ; en effet, il suffit alors d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$$(E2) \quad \int_B g_\varepsilon(t) E(\|X_\varepsilon(t)\|) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E(\|X\|_q) \int_B g(t) dt.$$

(a) Si la matrice de covariance $C_\varepsilon(t)$ de $X_\varepsilon(t)$ est diagonale et si ses valeurs propres convergent simplement et sont uniformément bornées en t pour $\varepsilon < \varepsilon_0$, alors (E2) est prouvé en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

(b) Si $C_\varepsilon(t)$ est quelconque, on la diagonalise à l'aide d'une matrice orthogonale $P_\varepsilon(t)$, soit $D_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t) C_\varepsilon(t) P_\varepsilon'(t)$ et on peut ranger les valeurs propres de $D_\varepsilon(t)$ par ordre croissant, par exemple; il suffit alors, pour appliquer

(a), de voir que

$$E(\|X_\varepsilon(t)\|) = E(\|P_\varepsilon(t)X_\varepsilon(t)\|).$$

(E3) Pour montrer le lemme, on se sert alors de (E1) et (E2) en bruitant les processus X_ε et Y_ε , puis on fait tendre le bruit vers zéro.

Plus précisément: Soit Z_σ un vecteur aléatoire gaussien centré de variance $\sigma^2 I_n$, indépendant de $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t))$ et à valeurs dans \mathbb{R}^n . Soit W_σ un vecteur aléatoire vérifiant les mêmes propriétés que Z_σ . On suppose de plus que Z_σ et W_σ sont indépendants entre eux. On note T_σ un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n et suivant une loi $N(0, (\lambda_i + \sigma^2)\delta_{i,j})_{i,j=1,n}$. On décompose

$$\int_B g_\varepsilon(t) E(\|X_\varepsilon(t)\| \|Y_\varepsilon(t)\|) dt - \int_B g(t) E^2(\|X\|_q) dt = \int (1)$$

en

$$\begin{aligned} \int (1) &= \int_B g_\varepsilon(t) [E(\|X_\varepsilon(t)\| \|Y_\varepsilon(t)\|) - E(\|X_\varepsilon(t) + Z_\sigma\| \|Y_\varepsilon(t) + W_\sigma\|)] dt \\ &+ \int_B g_\varepsilon(t) [E(\|X_\varepsilon(t) + Z_\sigma\|)(\|Y_\varepsilon(t) + W_\sigma\|) - E^2(\|T_\sigma\|)] dt \\ &+ \int_B g_\varepsilon(t) [E^2(\|T_\sigma\|) - E^2(\|X\|_q)] dt + \int_B (g_\varepsilon(t) - g(t)) E^2(\|X\|_q) dt. \end{aligned}$$

On pose

$$\int (1) = \int (a) + \int (b) + \int (c) + \int (d),$$

$$|(a)| \leq E(\|Z_\sigma\|) [E(\|X_\varepsilon(t)\|) + E(\|Y_\varepsilon(t)\|) + E(\|Z_\sigma\|)] |g_\varepsilon(t)|,$$

d'où:

$$|(a)| \leq \sigma [E(\|X_\varepsilon(t)\|) + E(\|Y_\varepsilon(t)\|) + \sigma] |g_\varepsilon(t)|.$$

On applique alors (E2) et donc:

$\int_B (a)$ converge vers zéro lorsque σ tend vers zéro uniformément en ε .

$\int_B (b)$ converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro, d'après (E1) et le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

$\int_B (c)$ converge vers zéro lorsque σ tend vers zéro uniformément en ε d'après (E2) et parce-que $|g_\varepsilon(t)| \leq 1$ pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $\forall t \in B$.

$\int_B (d)$ converge vers zéro lorsque ε tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème.

Démonstration du théorème. Montrons que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E(\sqrt{c(\varepsilon)} Q_T(A(X_\varepsilon)) - (\theta/2\delta) \int 1_{\{|x(t)| < \delta\}} dt)^2 = 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on partitionne le cube T en cubes T_i de côtés parallèles aux axes de coordonnées et de longueur C/n . On pose

$$\xi_i^\varepsilon = \sqrt{c(\varepsilon)} Q_{T_i}(A(X_\varepsilon)) \quad \text{et} \quad \eta_i^\delta = (\theta/2\delta) \int_{T_i} 1_{\{|x(t)| < \delta\}} dt.$$

Nous voulons montrer que

$$\lim_{\delta} \limsup_{\varepsilon} E\left(\sum_i (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)^2\right) = \lim_{\delta} \limsup_{\varepsilon} E\left(\sum_{i,j} (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta)\right) = 0.$$

Soit

$$\Sigma = E\left(\sum_{i,j} (\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta)\right).$$

On divise Σ en deux sommes Σ' et Σ'' telles que:

Σ' désigne la somme correspondante aux indices (i, j) tels que T_i et T_j ne sont pas proches; c'est-à-dire: $\forall t \in T_i, \forall t' \in T_j, \|t - t'\| > C/n$;

Σ'' désigne la somme restante: on somme sur les couples (i, j) tels que $\exists t \in T_i, \exists t' \in T_j, \|t - t'\| \leq C/n$.

Nous noterons " T_i proche de T_j ": " T_i pp T_j ".

Pour Σ' : Soit un terme général $a_{i,j}^{\varepsilon,\delta}$ de Σ' :

$$a_{i,j}^{\varepsilon,\delta} = E(\eta_i^\delta \eta_j^\delta) + E(\xi_i^\varepsilon \xi_j^\varepsilon) - E(\eta_i^\delta \xi_j^\varepsilon) - E(\eta_j^\delta \xi_i^\varepsilon) = (1) + (2) - (3) - (4).$$

On applique les formules de type Rice [6] à chacune des quatre espérances:

$$(1) = \int_{T_i \times T_j} (\theta/2\delta)^2 \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1), X(t_2)}(x, y) dx dy dt_1 dt_2,$$

où p_{Y_1, \dots, Y_n} désigne la densité de (Y_1, \dots, Y_n) .

(1) tend vers $\theta^2 \int_{T_i} \int_{T_j} p_{X(t_1), X(t_2)}(0, 0) dt_1 dt_2$ lorsque δ tend vers zéro d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Soit P_ε une matrice orthogonale qui diagonalise $-D^2 R_\varepsilon(0)$ en A_ε définie par $A_\varepsilon = (A_i(\varepsilon) \delta_{i,j})_{i,j}$; on note p_{t_1, t_2}^ε la densité de $X_\varepsilon(t_1), X_\varepsilon(t_2)$. Nous avons

$$(2) = \int_{T_i \times T_j} p_{t_1, t_2}^\varepsilon(0, 0) A_\varepsilon(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

où

$$A_\varepsilon(t_1, t_2) = E(\|\sqrt{c(\varepsilon)} P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(t_1 - t_2)\| \|\sqrt{c(\varepsilon)} P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(0)\| | X_\varepsilon(t_1 - t_2) = X_\varepsilon(0) = 0).$$

Posons $t_1 - t_2 = \tau$; on décompose alors $\dot{X}_\varepsilon(\tau), \dot{X}_\varepsilon(0)$ de la manière suivante:

$$P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(0) = \xi_\varepsilon + X_\varepsilon(0) \alpha_\varepsilon + X_\varepsilon(\tau) \beta_\varepsilon, \quad P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) = \xi_\varepsilon^* - X_\varepsilon(\tau) \alpha_\varepsilon - X_\varepsilon(0) \beta_\varepsilon,$$

où $(\xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon^*)$ est un couple gaussien centré, de coordonnées à valeurs dans \mathbb{R}^d et indépendant de $(X_\varepsilon(0), X_\varepsilon(\tau))$ (voir [6]). On vérifie que

$$\alpha_\varepsilon = \frac{r_\varepsilon(\tau) P_\varepsilon D R_\varepsilon(\tau)}{r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)}, \quad \beta_\varepsilon = \frac{-P_\varepsilon D r_\varepsilon(\tau) r_\varepsilon(0)}{r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)}.$$

De plus,

$$\text{Var } \xi_\varepsilon = \text{Var } \xi_\varepsilon^* = A_\varepsilon - \frac{r_\varepsilon(0) P_\varepsilon D R_\varepsilon(\tau) D R_\varepsilon'(\tau) P_\varepsilon'}{r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)}$$

et

$$\text{Cov}(\xi_\varepsilon, \xi_\varepsilon^*) = -P_\varepsilon D^2 R_\varepsilon(\tau) P'_\varepsilon - \frac{r_\varepsilon(\tau) P_\varepsilon D R_\varepsilon(\tau) D R'_\varepsilon(\tau) P'_\varepsilon}{r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau)},$$

d'où

$$(2) = \int_{T_1 \times T_1} (2\pi)^{-1} (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau))^{-1/2} E(\|\sqrt{c(\varepsilon)} \xi_\varepsilon\| \|\sqrt{c(\varepsilon)} \xi_\varepsilon^*\|) dt_1 dt_2.$$

En appliquant les lemmes 1 et 2 il vient, compte tenu que les coefficients de P_ε sont bornés par 1:

(2) tend vers $\theta^2 \int_{T_1 \times T_1} P_{X(t_1), X(t_2)}(0, 0) dt_1 dt_2$ lorsque ε tend vers zéro.

$$(3) = \int_{T_1 \times T_1} \int_{-\delta}^{\delta} \sqrt{c(\varepsilon)} \int_{(\theta/2\delta)}^{\delta} \|\dot{x}\| P_{X(t_1), X_\varepsilon(t_2), \dot{X}_\varepsilon(t_2)}(u, 0, \dot{x}) du d\dot{x} dt_1 dt_2,$$

$$(3) = \int_{T_1 \times T_1} \int_{-\delta}^{\delta} (1/2\pi) \int_{-\delta}^{\delta} (\theta/2\delta) (r(0)r_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon^2(t_1 - t_2))^{-1/2} B_\varepsilon(t_1 - t_2) dt_1 dt_2,$$

où

$$B_\varepsilon(\tau) = \exp(-2^{-1} u^2 r_\varepsilon(0) / (r(0)r_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon^2(\tau))) C_\varepsilon(\tau),$$

$$C_\varepsilon(\tau) = E(\|\sqrt{c(\varepsilon)} P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau)\| | X(0) = u, X_\varepsilon(\tau) = 0).$$

Calculons

$$E(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} | X(0) = u, X_\varepsilon(\tau) = 0) = (i).$$

La matrice de covariance de $(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)}, X(0), X_\varepsilon(\tau))$ est

$$\begin{bmatrix} \Lambda_\varepsilon c(\varepsilon) & (a_{i,\varepsilon}(\tau))'_i & \theta'_d \\ (a_{i,\varepsilon}(\tau))_i & r(0) & \gamma_\varepsilon(\tau) \\ \theta_d & \gamma_\varepsilon(\tau) & r_\varepsilon(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,1} & I_{1,2} \\ I_{2,1} & I_{2,2} \end{bmatrix}$$

et θ_d est le vecteur ligne de R^d dont les coordonnées sont nulles. $a_{i,\varepsilon}(\tau) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$ uniformément en τ d'après le lemme 1 et parce-que les coefficients de P_ε sont bornés par 1; d'où:

(*) (i) = $f_\varepsilon(\tau)u$, où $f_\varepsilon(\tau) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ uniformément en τ .

Or

$$\text{Var}(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} / X(0), X_\varepsilon(\tau)) = I_{1,1} - I_{1,1}^{-1} I_{1,2} I_{2,1}^{-1} I_{2,1},$$

le terme général de $I_{1,2} I_{2,1}^{-1} I_{2,1}$ est

$$\frac{r(0) a_{i,\varepsilon}(\tau) a_{j,\varepsilon}(\tau)}{r(0) r_\varepsilon(0) - \gamma_\varepsilon^2(\tau)},$$

qui converge uniformément en τ vers zéro lorsque ε tend vers zéro; d'où:

(**) $\text{Var}(P_\varepsilon \dot{X}_\varepsilon(\tau) \sqrt{c(\varepsilon)} / X(0), X_\varepsilon(\tau))$ converge uniformément en τ vers 0 lorsque ε tend vers zéro.

Il est clair qu'en modifiant légèrement le lemme 2 et en utilisant les résultats (*) et (**) et le lemme 1 on a

$$(3) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\theta^2/2\delta) \int_{T_i \times T_j} \int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1), X(t_2)}(0, 0) D(t_1 - t_2, u) du dt_1 dt_2,$$

où

$$D(\tau, u) = \exp(-2^{-1} u^2 r(0)(r^2(0) - r^2(\tau))^{-1}),$$

et donc

$$(3) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \theta^2 \int_{T_i \times T_j} p_{X(t_1), X(t_2)}(0, 0) dt_1 dt_2$$

d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

De manière analogue on montrerait que (4) converge vers la même limite que (3) lorsque ε puis δ tendent vers zéro; et donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Sigma' = 0.$$

Pour Σ'' : Nous avons

$$\Sigma'' = \sum_{T_i \text{pp} T_j} E(\xi_i^\varepsilon - \eta_i^\delta)(\xi_j^\varepsilon - \eta_j^\delta),$$

d'où

$$\Sigma'' \leq \sum_{T_i \text{pp} T_j} (E(\xi_i^\varepsilon - \eta_j^\delta)^2 E(\xi_j^\varepsilon - \eta_i^\delta)^2)^{1/2},$$

et donc

$$\Sigma'' \leq \sum_{T_i \text{pp} T_j} [(E(\xi_i^\varepsilon)^2)^{1/2} + (E(\eta_j^\delta)^2)^{1/2}]^2.$$

Majorons $E(\eta_i^\delta)^2$:

$$E(\eta_i^\delta)^2 = \int_{T_i \times T_i} (\theta/2\delta)^2 \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} p_{X(t_1), X(t_2)}(x, y) dt_1 dt_2 dx dy,$$

$$E(\eta_i^\delta)^2 \leq \int_{T_i \times T_i} \theta^2 (r^2(0) - r^2(t_1 - t_2))^{-1/2} dt_1 dt_2,$$

d'où

$$E(\eta_i^\delta)^2 \leq \int_{-C/n}^{C/n} \dots \int_{-C/n}^{C/n} (r^2(0) - r^2(u_1, \dots, u_d))^{-1/2} (C/n - |u_1|) \dots (C/n - |u_d|) du,$$

$$E(\eta_i^\delta)^2 \leq (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \dots \int_{-C/n}^{C/n} (r^2(0) - r^2(u_1, \dots, u_d))^{-1/2} du_1 \dots du_d.$$

Majorons $r(0) - r(u)$ sur $] -C/n, 0[\times]0, C/n[\times \dots \times]0, C/n[$ par exemple:

$$r(0) - r(u) = \int (1 - \cos \langle x, u \rangle) dF(x),$$

d'où

$$r(0) - r(u) \geq \int_{-1/d\|u\|}^0 \int_0^{1/d\|u\|} \dots \int_0^{1/d\|u\|} (1 - \cos \langle x, u \rangle) dF(x).$$

Il est clair que $0 \leq \langle x, u \rangle \leq 1$ pour tout x appartenant au domaine d'intégration de l'expression précédente; donc

$$r(0) - r(u) \geq \int_{-1/d\|u\|}^0 \int_0^{1/d\|u\|} \dots \int_0^{1/d\|u\|} \langle x, u \rangle^2 dF(x).$$

Mais $x_i u_i \geq 0 \forall i \in [1, d]$, d'où

$$r(0) - r(u) \geq \sum_{j=1}^d u_j^2 \int_{-1/d\|u\|}^0 \int_0^{1/d\|u\|} \dots \int_0^{1/d\|u\|} x_j^2 dF(x).$$

Or $\|u\| < \sqrt{d} C/n$ implique $1/d\|u\| > n/Cd \sqrt{d}$, $-1/d\|u\| < -n/Cd \sqrt{d}$. Posons

$$a_n(C) = \inf_{\sigma, j} A_j(\sigma n/dC \sqrt{d}),$$

où

$$A_j(\sigma u) = \int_{A\sigma_1(u)} \int_{A\sigma_2(u)} \dots \int_{A\sigma_d(u)} v_j^2 dF(v), \quad u > 0,$$

avec $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_d)$, où $\forall i \in [1, d]$, $\sigma_i = \pm 1$,

$$A\sigma_i(u) = \begin{cases}]0, \sigma_i(u)[& \text{si } \sigma_i \geq 0, \\]\sigma_i(u), 0[& \text{si } \sigma_i \leq 0, \end{cases}$$

d'où $r(0) - r(u) \geq \|u\|^2 a_n(C)$, et donc

$$E(\eta_i^\delta)^2 \leq (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \int_{-C/n}^{C/n} \dots \int_{-C/n}^{C/n} (1/\|u\|) du$$

ou encore

$$E(\eta_i^\delta)^2 \leq (C/n)^d \int_0^{\sqrt{d}C/n} r^{d-2} dr = (C/n)^{2d-1} (\sqrt{d})^{d-1} / (d-1),$$

et donc $E(\eta_i^\delta)^2 \leq (C/n)^{2d-1}$.

Majorons $E(\xi_i^\varepsilon)^2$:

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 = c(\varepsilon) \int_{T_1 \times T_2} p_{t_1, t_2}^\varepsilon(0, 0) E(\|\dot{X}_\varepsilon(0)\| \|\dot{X}_\varepsilon(t_1 - t_2)\| | X_\varepsilon(0) = X_\varepsilon(t_1 - t_2) = 0) dt,$$

$$(1) = E(\|\dot{X}_\varepsilon(0)\| \|\dot{X}_\varepsilon(\tau)\| | X_\varepsilon(0) = X_\varepsilon(\tau) = 0) \leq \sum_{j=1}^d \text{Var}(D_j X_\varepsilon(0) / X_\varepsilon(0), X_\varepsilon(\tau)),$$

d'où

$$(1) \leq \sum_{k=1}^d (\lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} - r_\varepsilon(0) [D_k r_\varepsilon(\tau)]^2 (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(\tau))^{-1}),$$

et donc

$$(1) \leq \sum_{k=1}^d \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k},$$

on obtient alors

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 \leq \sum_{k=1}^d c(\varepsilon) \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} \int_{T_i \times T_i} (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(t_1 - t_2))^{-1/2} dt_1 dt_2,$$

d'où

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 \leq \sum_{k=1}^d c(\varepsilon) \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \int_{-C/n}^{C/n} \dots \int_{-C/n}^{C/n} (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(u_1, \dots, u_d))^{-1/2} du.$$

On considère alors le vecteur z_k défini au début de la partie concernant les démonstrations; on peut écrire

$$\forall k \in [1, d], c(\varepsilon) z_k (-D^2 R_\varepsilon(0)) z_k' = c(\varepsilon) \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k} \leq c(\varepsilon) A_1(\varepsilon);$$

or $c(\varepsilon) A_1(\varepsilon) = A_1 = 1$, d'où pour tout k appartenant à $[1, d]$ $c(\varepsilon) \lambda_{2,\varepsilon}^{k,k}$ reste majoré par une constante ne dépendant pas de ε . On a alors la majoration suivante:

$$E(\xi_i^\varepsilon)^2 \leq (C/n)^d \int_{-C/n}^{C/n} \int_{-C/n}^{C/n} \dots \int_{-C/n}^{C/n} (r_\varepsilon^2(0) - r_\varepsilon^2(u_1, u_2, \dots, u_d))^{-1/2} du.$$

On intègre sur les domaines suivants:

$$D_1 = \{\tau \in [-C/n, C/n]^d \mid \|\tau\| > \varepsilon/\sqrt{d}\}, \quad D_2 = \{\tau \in [-C/n, C/n]^d \mid \|\tau\| \leq \varepsilon/\sqrt{d}\}.$$

On suppose que $\varepsilon < \varepsilon(C/n) = dC/n$. Il vient $E(\xi_i^\varepsilon)^2 \leq (1) + (2)$.

Sur D_1 : Soit $\tau \in D_1 \cap]-C/n, 0[\times]0, C/n[\times \dots \times]0, C/n[$, par exemple

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) = \int (1 - \cos \langle \tau, u \rangle) |\hat{\psi}|^2(\varepsilon u) dF(u),$$

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \geq \int_{-1/d\|\tau\|}^0 \int_0^{1/d\|\tau\|} \dots \int_0^{1/d\|\tau\|} \langle \tau, u \rangle^2 |\hat{\psi}|^2(\varepsilon u) dF(u).$$

Mais $\|\varepsilon u\| \leq 1$, d'où

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \geq \int_{-1/d\|\tau\|}^0 \int_0^{1/d\|\tau\|} \int_0^{1/d\|\tau\|} \langle \tau, u \rangle^2 dF(u),$$

d'après ce qui précède:

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \geq \|\tau\|^2,$$

et donc

$$(1) \leq (C/n)^{2d-1} \quad \text{pour } \varepsilon < \varepsilon(C/n).$$

Sur D_2 : Soit $\tau \in D_2 \cap]-C/n, 0[\times]0, C/n[\times \dots \times]0, C/n[$, par exemple

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \geq \int_{-a(\varepsilon)}^0 \int_0^{a(\varepsilon)} \dots \int_0^{a(\varepsilon)} (1 - \cos \langle \tau, u \rangle) |\hat{\psi}|^2(\varepsilon u) dF(u).$$

Or $\|\varepsilon u\| \leq 1$ et $0 \leq \langle \tau, u \rangle \leq 1$, d'où

$$r_\varepsilon(0) - r_\varepsilon(\tau) \geq \int_{-a(\varepsilon)}^0 \int_0^{a(\varepsilon)} \dots \int_0^{a(\varepsilon)} \langle \tau, u \rangle^2 dF(u) \geq \|\tau\|^2 \quad \text{pour } \varepsilon < \varepsilon(C/n),$$

d'où (2) $\ll (C/n)^{2d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon(C/n)$. On en déduit donc que

$$\Sigma'' \ll \sum_{T_i \text{ pp } T_j} (C/n)^{2d-1} \quad \text{pour } \varepsilon < \varepsilon(C/n).$$

Or il existe au plus $(3n)^d$ cubes proches, d'où $\Sigma'' \ll (C/n)^{d-1}$ pour $\varepsilon < \varepsilon(C/n)$, et donc

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \Sigma \ll (C/n)^{d-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

d'où

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \Sigma = 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

TRAVAUX CITÉS

- [1] J. M. Azaïs, *Conditions for convergence of number of crossings to the local time. Application to stable processes with independent increments and to gaussian processes*, Probab. Math. Statist. 11 (1990), pp. 19-36.
- [2] — et D. Florens-Zmirou, *Approximation du temps local des processus gaussiens stationnaires par régularisation des trajectoires*, Probab. Theory Related Fields 76 (1987), pp. 121-132.
- [3] S. M. Berman, *Local non-determinism and local times of gaussian processes*, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973), pp. 69-94.
- [4] Y. A. Davydov, *Local times for multiparameter random processes*, Theory Probab. Appl. 23 (1978), pp. 573-583.
- [5] W. Ehm, *Sample properties of multiparameter stable processes*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 56 (1981), pp. 195-228.
- [6] M. Wschebor, *Surfaces aléatoires: mesure géométrique des ensembles de niveau*, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York 1985.

Université Paris XI
 UA 743 Statistique Appliquée
 Bât. 425, Mathématiques
 91405 Orsay Cédex, France

Received on 16.12.1987

