



HAL
open science

Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus

Aurélien Djament, Christine Vespa

► **To cite this version:**

Aurélien Djament, Christine Vespa. Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus. 2008. hal-00315573v1

HAL Id: hal-00315573

<https://hal.science/hal-00315573v1>

Preprint submitted on 29 Aug 2008 (v1), last revised 19 Oct 2009 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur l'homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus

Aurélien DJAMENT* et Christine VESPA†

29 août 2008

Résumé

On calcule dans cet article l'homologie stable des groupes orthogonaux et symplectiques sur un corps fini k à coefficients tordus par un endofoncteur usuel F des k -espaces vectoriels (puissance extérieure, symétrique, divisée...), c'est-à-dire, pour tout entier naturel i , les colimites des espaces vectoriels $H_i(O_{n,n}(k); F(k^{2n}))$ et $H_i(Sp_{2n}(k); F(k^{2n}))$ — dans cette situation, la stabilisation (avec une borne explicite en fonction de i et F) est un résultat classique de Charney.

Tout d'abord, nous donnons un cadre formel pour relier l'homologie stable de certaines suites de groupes à l'homologie de petites catégories convenables, à l'aide d'une suite spectrale, qui dégénère dans de nombreux cas favorables. Cela nous permet d'ailleurs de retrouver des résultats de Betley sur l'homologie stable des groupes linéaires et des groupes symétriques, par des méthodes purement algébriques (sans recours à la K -théorie stable).

Pour une application exploitable de ce formalisme aux groupes orthogonaux ou symplectiques sur un corps commutatif, nous démontrons un résultat catégorique sur les espaces vectoriels munis d'une forme quadratique ou alternée et employons de puissants résultats d'annulation connus en homologie des foncteurs (Suslin, Scorichenko, Djament) pour en déduire une simplification spectaculaire de la deuxième page de la suite spectrale générale.

Dans le cas où les groupes orthogonaux ou symplectiques sont pris sur un corps fini, et les coefficients à valeurs dans les espaces vectoriels sur ce même corps, nous pouvons mener le calcul de cette deuxième page grâce à des résultats classiques : annulation homologique à coefficients triviaux (Quillen, Fiedorowicz-Priddy), et calcul des groupes de torsion entre foncteurs usuels (Franjou-Friedlander-Scorichenko-Suslin, Chałupnik).

Table des matières

1	Cadre formel	5
1.1	Hypothèses générales	5
1.2	Cas particuliers fondamentaux	7
2	Suite spectrale pour l'homologie stable d'une suite de groupes	8
2.1	Morphisme de l'homologie stable vers l'homologie de catégorie	9
2.2	Suite spectrale fondamentale	10
2.3	Arrêt de la suite spectrale et comparaison à la K -théorie stable	12
3	Cas des groupes orthogonaux et symplectiques	14
3.1	Les catégories de fractions $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ et $\mathcal{E}_{alt}^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$	14
3.2	Théorème fondamental	18
4	Quelques calculs d'homologie de groupes orthogonaux et symplectiques	21
4.1	Calculs en caractéristique impaire	22
4.2	Un calcul en caractéristique 2	25
A	Algèbre homologique dans les catégories de foncteurs	25

*CNRS, laboratoire de mathématiques Jean Leray (Nantes) ; courriel : djament@math.univ-nantes.fr

†Institut de Recherche Mathématiques Avancé, université de Strasbourg ; courriel : vespa@math.u-strasbg.fr

B Foncteurs exponentiels	28
C Inversion de Möbius et équivalences de Morita	30
D Les résultats de Betley sur les groupes symétriques revisités	33
E Un aperçu du cas des modules d'après Betley et Scorichenko	34

Introduction

Les foncteurs entre espaces vectoriels, au moins dans le cas des corps finis, ont été étudiés en détail depuis le début des années 1990. Des liens profonds avec la théorie des représentations et la topologie algébrique ainsi que des méthodes de calcul homologique très puissantes ont été mis en œuvre — cf. la synthèse [FFPS03]; de nouveaux résultats ont été obtenus tout récemment (cf. [Cha08] et [Dja07], par exemple). On dispose ainsi de nouveaux outils pour l'homologie stable des groupes linéaires — c'est-à-dire la colimite de leur homologie, qui dans de nombreux cas est atteinte, en degré fixé, en temps fini — qu'on les considère comme groupes algébriques (cf. [FS97]) ou comme groupes discrets (cf. [Bet99] et l'appendice de [FFSS99], résultats généralisés sur un anneau arbitraire dans [Sco00]). Cependant, à peu près rien d'analogue n'était connu jusqu'à maintenant pour les autres familles infinies de groupes algébriques sur les corps finis, hormis le calcul de leur homologie à coefficients constants comme groupes discrets (effectué par Fiedorowicz et Priddy dans [FP78] en généralisant les méthodes initiées par Quillen dans [Qui72]) et des résultats de stabilité homologique à coefficients tordus établis par Charney dans [Cha87]. Pourtant, les récents travaux du second auteur ([Ves08]) montrent que les méthodes en homologie des foncteurs qui ont fait leurs preuves dans les catégories d'espaces vectoriels peuvent trouver des généralisations naturelles dans des catégories d'espaces quadratiques.

Dans le présent article, nous exposons une méthode qui permet d'exprimer l'homologie stable des groupes orthogonaux et symplectiques, comme groupes discrets, sur un corps fini k , à coefficients dans un foncteur entre espaces vectoriels sur k à l'aide de groupes d'homologie de foncteurs qui sont calculables dans les cas raisonnables, englobant les puissances symétriques, extérieures, divisées ou tensorielles.

Nous commençons par dégager un cadre formel pour étudier l'homologie stable d'une suite convenable de groupes à partir de l'homologie d'une catégorie adaptée à la situation. Plus précisément, on se donne une petite catégorie \mathcal{C} avec une chaîne d'objets $A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow A_{n+1} \rightarrow \dots$ et l'on s'intéresse aux groupes d'automorphismes des A_i . La catégorie \mathcal{C} sera par exemple celle des modules à gauche projectifs de type fini sur un anneau A avec les *monomorphismes scindés* comme flèches, et $A_i = A^i$. On peut prendre aussi pour \mathcal{C} la catégorie des ensembles finis avec injections et pour A_i un ensemble à i éléments, ce qui nous permettra de retrouver des résultats de Betley ([Bet02]) sur l'homologie stable des groupes symétriques. Pour le sujet principal de cet article, on considère une catégorie \mathcal{C} d'espaces quadratiques, ou symplectiques, de dimension finie sur un corps commutatif, et pour A_i un espace hyperbolique ou symplectique de dimension $2i$.

Notre formalisme suppose trois hypothèses sur la catégorie \mathcal{C} et la chaîne d'objets considérée, qu'on peut exprimer rapidement comme suit :

1. les objets A_i vérifient une certaine propriété de cofinalité dans \mathcal{C} ;
2. on s'est donné des morphismes de groupes $\dots \rightarrow \text{Aut } A_n \rightarrow \text{Aut } A_{n+1} \rightarrow \dots$ qui permettent de former une colimite naturelle à l'homologie de ces groupes à coefficients tordus par un foncteur depuis \mathcal{C} , que l'on appellera *homologie stable* des groupes à coefficients dans le foncteur ;
3. stablement, les groupes d'automorphismes des A_n opèrent transitivement sur les ensembles de morphismes de but A_n .

Sous ces hypothèses, on construit un morphisme naturel de l'homologie stable des groupes à coefficients dans un foncteur vers l'homologie de \mathcal{C} à coefficients dans ce foncteur. Ce morphisme est toujours un isomorphisme en degré 0, mais ce n'est plus en général le cas au-delà, où l'on obtient, au paragraphe 2.2, une suite spectrale convergeant vers l'homologie stable des groupes et dont la deuxième page s'exprime par des groupes de torsion sur la catégorie \mathcal{C} .

Cette suite spectrale offre une alternative purement algébrique à la suite spectrale de la K -théorie stable (cas particulier de la suite spectrale de Serre) convergeant vers l’homologie stable du groupe linéaire à coefficients tordus, et qui se généralise sans changement aux familles de groupes usuels. En effet, dans les cas connus où l’on sait exprimer la K -théorie stable (éventuellement généralisée) en termes algébriques plus simples, et où la suite spectrale correspondante s’arrête dès la deuxième page, on observe un phénomène analogue avec notre formalisme — voir notamment nos propositions 2.14 et 2.17. Ceci n’est guère surprenant dans la mesure où les travaux de Scorichenko (cas classique de la K -théorie stable) ou Betley (cas des groupes symétriques) n’utilisent en fait nullement la définition de la K -théorie stable, mais seulement l’existence d’une suite spectrale fonctorielle d’un certain type, et où l’article [BP94] de Betley et Pirashvili identifie dans de nombreux cas la K -théorie stable à un foncteur dérivé défini de façon purement algébrique.

Néanmoins, il serait imprudent de penser parvenir à mener des calculs précis dans un cadre très général. En effet, les groupes de torsion intervenant dans notre suite spectrale posent souvent des problèmes de calcul extrêmement difficiles. Le cas des groupes symétriques est particulièrement favorable et se ramène facilement à des groupes d’homologie explicites de groupes symétriques plus petits (conformément aux résultats de [Bet02]). Pour retrouver le théorème d’annulation de Betley sur l’homologie stable du groupe linéaire ([Bet92]), nous avons besoin d’utiliser une partie du puissant théorème d’annulation en homologie des foncteurs établi par Scorichenko dans la deuxième partie de [Sco00].

Pour l’étude des groupes orthogonaux ou symplectiques, la difficulté suivante se présente. Si l’on choisit pour \mathcal{C} la catégorie des espaces quadratiques ou symplectiques *non dégénérés*, la deuxième page de notre suite spectrale sera donnée par un groupe de torsion sur \mathcal{C} entre notre foncteur de départ et un foncteur *constant* en l’homologie stable à coefficients constants des groupes orthogonaux ou symplectiques — autrement dit, à cette homologie à coefficients constants près (qui est triviale si le corps de base est fini et les coefficients pris sur le même corps), on obtient essentiellement l’homologie de \mathcal{C} à coefficients dans notre foncteur. Malheureusement, nous ne savons pas calculer directement cette homologie, c’est pourquoi nous avons opté pour un autre choix de catégorie \mathcal{C} , celle des espaces quadratiques ou symplectiques (de dimension finie) *éventuellement dégénérés*, les morphismes étant supposés *injectifs* (sans quoi l’hypothèse de transitivité de l’action des groupes d’automorphismes, qui provient du théorème de Witt, ne serait plus vérifiée).

L’intérêt de cette catégorie vient de ce qu’on peut y mener des calculs homologiques en se ramenant, par adjonction à des calculs sur la catégorie des espaces vectoriels, où, dans le cas où le corps de base est fini, les groupes de torsion (ou d’extensions) entre les foncteurs usuels — puissances tensorielles, symétriques, extérieures, divisées... — sont connus grâce au travail de Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin ([FFSS99]) complété par Chaĭupnik ([Cha08]). En effet, un espace quadratique (resp. symplectique) n’est autre que la donnée d’un espace vectoriel V et d’un élément de $S^2(V^*)$ (resp. $\Lambda^2(V^*)$), où S^2 (resp. Λ^2) désigne la deuxième puissance symétrique (resp. extérieure) et V^* le dual de V ; ce type de construction catégorique donne lieu à des adjonctions explicites entre foncteurs *exacts* lorsqu’on oublie la forme quadratique (resp. alternée). En revanche, la restriction à la sous-catégorie pleine des espaces non dégénérés pose des problèmes homologiques délicats.

Ces considérations nécessitent de comparer les groupes de torsion $\text{Tor}(G, F)$ sur la catégorie des espaces vectoriels (de dimension finie) et sa sous-catégorie d’injections, puisque la catégorie d’espaces quadratiques ou symplectiques que nous considérons est restreinte aux injections sur les morphismes, tandis que c’est dans la catégorie des espaces vectoriels avec tous les morphismes linéaires que l’on sait mener des calculs homologiques. Le travail de Scorichenko (généralisant celui de Suslin, qui traitait le cas où le corps de base est fini) nous garantit l’isomorphisme entre ces deux groupes de torsion, sous l’hypothèse que le foncteur F est *polynomial*, qui est vérifiée pour tous les foncteurs usuels susmentionnés. C’est un résultat homologique dans le même esprit, établi récemment par le premier auteur ([Dja07]), qui nous permet de lever l’autre difficulté qui apparaît, à savoir que les groupes de torsion de la deuxième page de notre suite spectrale pour des catégories d’espaces éventuellement dégénérés appartiennent à notre foncteur initial avec un foncteur a priori impossible à calculer.

Nous contournons ce problème en observant que ce foncteur, tout inaccessible qu’il soit, transforme l’inclusion d’un espace quadratique ou symplectique dans sa somme orthogonale avec un espace *non dégénéré* en un isomorphisme. On peut donc en fait le définir depuis la catégorie de

fractions où l'on inverse ces morphismes, catégorie dont on montre (théorème 3.17) l'équivalence avec la *catégorie de Burnside* sur les espaces vectoriels avec injections (aussi bien dans le cas quadratique que symplectique), autrement dit, notre foncteur inaccessible peut être vu comme un *foncteur de Mackey* non additif sur les espaces vectoriels avec injections, ou encore comme une famille de représentations des différents groupes linéaires, par un résultat général d'équivalence de Morita (cf. [Ves08]). Lorsqu'on enchaîne les différentes identifications permises par ces considérations et l'adjonction entre espaces quadratiques ou symplectiques et espaces vectoriels déjà évoquée, le théorème d'annulation homologique principal de [Dja07] permet de voir que seule la contribution du terme constant (i.e. la valeur sur l'espace nul) de notre foncteur inaccessible, qui est simplement l'homologie stable des groupes orthogonaux ou symplectiques à coefficients constants, est potentiellement non nulle (théorème 3.19 et corollaire 3.25).

Comme exemple explicite, à l'aide du calcul des groupes d'extensions entre puissances divisées ([FFSS99]) sur un corps fini, nous obtenons entre autres (cf. théorèmes 4.10 et 4.11) :

Théorème. *Soit k un corps fini de cardinal q impair. L'homologie stable des groupes orthogonaux (resp. symplectiques) sur k à coefficients dans les puissances divisées est un k -espace vectoriel bigradué dont le dual bigradué peut être muni d'une structure d'algèbre de Hopf, qui est une algèbre symétrique sur des générateurs primitifs $\alpha_{m,s}$ (resp. $\beta_{m,s}$) de bidegré $(2q^s m, q^s + 1)$ indexés par des entiers $m \geq 0$ et $s \geq 0$ (resp. $s > 0$), où le premier degré est le degré homologique.*

Signalons que le présent travail (tout comme l'article [Bet02] sur les groupes symétriques) ne traite que d'homologie stable à coefficients dans un foncteur, pas à coefficients dans un bifoncteur, comme le fait Scorichenko pour les groupes linéaires (à la suite de Betley et Suslin). De fait, la généralisation aux bifoncteurs cause des difficultés spécifiques. D'une part, même en degré homologique nul, où l'isomorphisme entre homologie stable et homologie de catégorie est systématique et formel à coefficients dans un foncteur, il est déjà beaucoup plus malaisé d'obtenir un résultat aussi général pour les bifoncteurs. Dans le cas des groupes linéaires, l'annulation de l'homologie stable (en tout degré) à coefficients dans un foncteur polynomial sans terme constant autorise une comparaison raisonnable, mais dans les situations comme celles des groupes orthogonaux, symplectiques ou symétriques où l'on ne dispose pas d'annulation similaire, il ne s'avère déjà pas facile de formuler une conjecture pour l'homologie stable. Néanmoins, on peut espérer des résultats partiels, par exemple dans le cas de bifoncteurs de degré polynomial covariant assez petit par rapport à la caractéristique du corps, situation de degré où l'on retrouve l'annulation souhaitée pour les foncteurs.

Organisation de l'article La section 1 présente en détail les trois axiomes nécessaires à notre approche de l'homologie stable, auxquels nous avons fait allusion précédemment, ainsi que les premières conséquences et constructions générales qui s'en déduisent. On y discute également une classe d'exemples fondamentale, qui contient tous nos cas d'application, et un axiome supplémentaire qui intervient dans l'étude de la suite spectrale de la section 2. Celle-ci étudie, dans le cadre général de la section 1, le morphisme puis la suite spectrale naturels qui relient l'homologie de la catégorie assujettie à nos axiomes à l'homologie stable de la suite de groupes correspondante. On y discute notamment de la simplification de la deuxième page de cette suite spectrale, de son arrêt et de sa comparaison avec les suites spectrales classiques dérivées de constructions du type de la K -théorie stable.

La section 3 constitue le cœur de ce travail : elle donne les arguments non formels qui rendront accessible au calcul l'homologie stable des groupes orthogonaux ou symplectiques sur les corps finis, à coefficients tordus raisonnables. Elle identifie d'abord la catégorie de fractions des espaces éventuellement dégénérés où l'inclusion dans la somme orthogonale avec un espace non dégénéré est inversée, comme susmentionné. Ensuite, elle combine ce résultat avec les théorèmes d'annulation idoines connus en homologie des foncteurs pour ramener notre homologie stable à des groupes de torsion explicites sur la catégorie des espaces vectoriels.

Dans la section 4, on effectue des calculs d'homologie stable de groupes orthogonaux ou symplectiques à coefficients dans des endofoncteurs classiques des espaces vectoriels sur un corps fini, à l'aide des résultats de la section précédente et des calculs fondamentaux en homologie des foncteurs ([FFSS99], complété par [Cha08]). Il faut distinguer la caractéristique impaire, qui se prête à des calculs complets, de la caractéristique 2 où les mêmes méthodes ne suffisent plus, mais où quelques résultats partiels sont déduits des travaux de Troesch ([Tro02]).

Les trois premiers appendices donnent des rappels et des notations sur les catégories de foncteurs utilisés dans le corps de l'article : généralités d'algèbre homologique, foncteurs exponentiels puis quelques équivalences de catégories de foncteurs.

Dans les deux derniers appendices, on montre comment retrouver rapidement à l'aide de notre formalisme des théorèmes dus à Betley sur l'homologie stable des groupes symétriques et linéaires.

Quelques notations utilisées dans tout l'article On se donne un anneau commutatif \mathbb{k} de "base" (au-dessus duquel tous les produits tensoriels non spécifiés seront pris, par exemple). On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$ la catégorie des \mathbb{k} -modules.

Si \mathcal{C} est une catégorie (essentiellement) petite, on note $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$. Quelques généralités sur cette catégorie abélienne sont rappelées dans l'appendice A.

Si k est un corps commutatif, on note $\mathcal{E}(k)$ la catégorie des espaces vectoriels sur k et $\mathcal{E}^f(k)$ (ou simplement \mathcal{E}^f) la sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie.

La précomposition par un foncteur Q est notée Q^* .

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

Remerciements Les auteurs témoignent leur gratitude à Vincent Franjou pour ses nombreuses discussions utiles à la réalisation de cet article. Ils remercient Serge Bouc pour leur avoir indiqué l'utilité de l'inversion de Möbius pour obtenir des équivalences de Morita, en particulier le théorème de Pirashvili à la Dold-Kan. Ils sont reconnaissants envers Antoine Touzé pour des discussions sur les foncteurs strictement polynomiaux, qui devraient permettre d'obtenir un analogue des résultats de cet article pour la cohomologie *rationnelle* (i.e. comme groupes algébriques) des groupes orthogonaux ou symplectiques.

Le second auteur remercie pour son hospitalité le laboratoire de mathématiques Jean Leray (Nantes), où une grande partie de ce travail a été élaboré.

1 Cadre formel

Dans cette section, on donne le cadre général de cet article, qui permet de traiter de l'homologie stable des groupes orthogonaux ou symplectiques. On verra, dans les appendices E et D, que ce cadre s'applique également aux groupes linéaires et symétriques.

1.1 Hypothèses générales

Dans ce paragraphe, on introduit des axiomes que l'on supposera vérifiés dans tout l'article. Les exemples et des hypothèses supplémentaires souvent utiles seront donnés dans le paragraphe suivant — en effet, tous les cas intéressants d'application de la situation générale, hormis un cas technique apparaissant en cours de démonstration, relèveront desdites hypothèses supplémentaires.

On se donne une catégorie (essentiellement) petite \mathcal{C} et deux foncteurs $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$ et $G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Grp}$, où \mathbb{N} désigne la catégorie associée à l'ensemble ordonné \mathbb{N} (il y a exactement une flèche d'un entier positif i vers un autre entier positif j si $i \leq j$, et aucune sinon) et \mathbf{Grp} la catégorie des groupes.

Avant de donner les trois hypothèses que nous ferons sur (\mathcal{C}, S, G) , signalons que l'on pourrait remplacer \mathbb{N} par un autre ensemble ordonné filtrant à droite et possédant un plus petit élément sans modifier la plupart des considérations qui suivent. Cependant, une telle généralisation semble présenter un intérêt modeste dans la mesure où l'on ne connaît aucun exemple qui ne puisse se ramener au cas ici décrit (remplacer l'ensemble ordonné par une partie cofinale à droite contenant le plus petit élément ne modifie guère la situation).

Notre premier axiome est relatif au foncteur S , dont il exprime une sorte de propriété de cofinalité :

(C) *pour tout objet c de \mathcal{C} , il existe $i \in \mathbb{N}$ et un morphisme dans \mathcal{C} de source c et de but $S(i)$.*

Notre second axiome renvoie à une forme stable de transitivité de l'action au but des automorphismes sur un ensemble de morphismes :

(W) étant donnés $i \in \mathbb{N}$ et $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$, pour tous morphismes $u, v : c \rightarrow S(i)$ de \mathcal{C} , il existe $j \geq i$ dans \mathbb{N} et $g \in \text{Aut}_{\mathcal{C}} S(j)$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} c & \xrightarrow{u} & S(i) & \xrightarrow{S(i \leq j)} & S(j) \\ & \searrow v & & & \downarrow g \\ & & S(i) & \xrightarrow{S(i \leq j)} & S(j) \end{array}$$

commute.

Dans de nombreux cas, l'axiome suivant, qui implique (W), qui exprime une transitivité instable, sera vérifié :

(W') pour tous $c \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et $i \in \mathbb{N}$, le groupe $\text{Aut}_{\mathcal{C}} S(i)$ opère transitivement sur l'ensemble $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, S(i))$.

L'archétype de résultat fournissant ce type de propriété est le théorème de Witt (cf. paragraphe suivant).

On astreint enfin le foncteur G à satisfaire la propriété de compatibilité au foncteur S suivante : (G) sur les objets, G est donné par $G(i) = \text{Aut}_{\mathcal{C}}(S(i))$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. De plus, on suppose que pour tous entiers i et j tels que $i \leq j$, le morphisme $S(i \leq j) : S(i) \rightarrow S(j)$ est $G(i)$ -équivariant, où $S(i)$ est muni de l'action à gauche tautologique de $G(i)$ et $S(j)$ de celle déduite du morphisme $G(i \leq j) : G(i) \rightarrow G(j)$.

Hypothèse 1.1. Dans la suite du paragraphe 1.1, on suppose que (\mathcal{C}, S, G) vérifie les hypothèses (C), (W) et (G).

Notation 1.2. La colimite du foncteur G est notée G_{∞} . Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$, on note F_{∞} la colimite du foncteur composé $\mathbb{N} \xrightarrow{S} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$.

Remarque 1.3. Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$ et tous entiers $i \leq j$, l'application linéaire $(F \circ S)(i \leq j) : F(S(i)) \rightarrow F(S(j))$ est $G(i)$ -équivariante, par l'axiome (G). Ainsi, F_{∞} est naturellement un $\mathbb{k}[G_{\infty}]$ -module.

On peut donc donner la définition suivante, qui introduit l'objet d'étude de cet article.

Définition 1.4. L'homologie stable de la suite de groupes $(G(i))_{i \in \mathbb{N}}$ à coefficients dans $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C})$ est $H_*(G_{\infty}; F_{\infty})$.

Remarque 1.5. Le caractère filtrant à droite de \mathbb{N} implique que le morphisme canonique $\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} H_*(G(i); F(S(i))) \rightarrow H_*(G_{\infty}; F_{\infty})$ est un isomorphisme. Dans la suite on identifiera les deux groupes via cet isomorphisme.

On rappelle que l'on note $P_c^{\mathcal{C}^{op}}$ le foncteur $\mathbb{k}[\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(c, -)]$, appelé projectif standard de \mathcal{C}^{op} (voir appendice A). On termine ce paragraphe par quelques résultats généraux sur la colimite de ces projectifs standards.

Lemme 1.6. Le foncteur

$$P_{\infty}^{\mathcal{C}^{op}} := \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} P_{S(i)}^{\mathcal{C}^{op}}$$

est plat et est muni d'une action du groupe G_{∞} .

De plus, il existe un isomorphisme de G_{∞} -modules

$$P_{\infty}^{\mathcal{C}^{op}} \otimes_{\mathcal{C}} F \simeq F_{\infty}$$

naturel en $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Démonstration. La platitude découle du caractère filtrant de \mathbb{N} . Comme $G(i)$ agit sur $P_{S(i)}^{\mathcal{C}^{op}}$, on en déduit également une action canonique de G_{∞} sur $P_{\infty}^{\mathcal{C}^{op}}$.

La dernière partie se vérifie immédiatement. □

Lemme 1.7. On a

$$(P_{\infty}^{\mathcal{C}^{op}})_{G_{\infty}} \simeq \mathbb{k}$$

où $(P_{\infty}^{\mathcal{C}^{op}})_{G_{\infty}}$ désigne les coinvariants de $P_{\infty}^{\mathcal{C}^{op}}$ par l'action de G_{∞} et \mathbb{k} est le foncteur constant.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe de l'hypothèse (W). □

1.2 Cas particuliers fondamentaux

Dans ce paragraphe, on considère une catégorie (essentiellement) petite \mathcal{C} munie d'une structure monoïdale symétrique $\oplus : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ dont l'unité sera notée 0 . On fait également l'hypothèse que 0 est objet initial de \mathcal{C} .

Quitte à remplacer \mathcal{C} par une catégorie monoïdale symétrique équivalente, on pourra supposer que le foncteur \oplus est strictement associatif et que 0 en est un élément neutre strict (cf. [ML71], chap. VII, §2), ce qui permet de donner un sens univoque à des expressions comme $A^{\oplus n}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Soit $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$. On peut définir un foncteur $S_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{C}$ par $S_A(n) = A^{\oplus n}$ et

$$S_A(n \leq m) : A^{\oplus n} = A^{\oplus n} \oplus 0 \xrightarrow{A^{\oplus n} \oplus (0 \rightarrow A^{\oplus(m-n)})} A^{\oplus n} \oplus A^{\oplus(m-n)} = A^{\oplus m}.$$

On remarque que ce choix de functorialité, qui consiste, lorsque \mathcal{C} est une catégorie de modules, par exemple, à "ajouter des zéros à droite", comporte une part contingente.

On définit également un foncteur $G_A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Grp}$ par $G_A(n) = \text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus n})$ et

$$G_A(n \leq m) : \text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus n}) \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus m}) \quad u \mapsto u \oplus A^{\oplus(m-n)}.$$

On vérifie aussitôt le fait suivant :

Proposition 1.8. *Le triplet (\mathcal{C}, S_A, G_A) vérifie l'hypothèse (G).*

Nous aurons également à considérer l'hypothèse suivante :

(S) *pour tout morphisme $f : d \rightarrow c$ de \mathcal{C} et tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme du stabilisateur de f sous l'action de $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(c)$ vers le stabilisateur de $S(i) \oplus f$ sous l'action de $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(S(i) \oplus c)$ induit par le foncteur $S(i) \oplus -$ est un isomorphisme.*

L'hypothèse (S) permettra de donner des renseignements supplémentaires sur la deuxième page de la suite spectrale pour l'homologie de G_{∞} à coefficients tordus que nous obtiendrons dans la section 2 lorsque les axiomes (C), (W) et (G) sont vérifiés.

Nous introduisons enfin une hypothèse plus forte que (C) mais moins forte que l'essentielle surjectivité du foncteur S_A :

(C') *pour tout objet c de \mathcal{C} , il existe un objet b de \mathcal{C} et un entier i tels que $b \oplus c \simeq S(i)$.*

Nous terminons ce paragraphe en donnant les exemples fondamentaux qui interviendront dans cet article.

Exemple 1.9. 1. Soient k un corps commutatif (éventuellement de caractéristique 2) et $\mathcal{E}_q^{deg}(k)$ la catégorie (qui sera notée simplement \mathcal{E}_q^{deg} lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter) dont les objets sont les espaces quadratiques de dimension finie sur k et les morphismes les applications linéaires *injectives* compatibles aux formes quadratiques (appelées aussi applications orthogonales). Remarquons qu'une forme quadratique sur un espace vectoriel V est un polynôme homogène de degré 2 sur V ([Pfi95]), c'est à dire un élément de $S^2(V^*)$, où S^2 est la deuxième puissance symétrique. Comme d'habitude, on note $O(A)$ pour $\text{Aut}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(A)$ le groupe orthogonal associé à un objet A de \mathcal{E}_q^{deg} . On notera par ailleurs \mathcal{E}_q la sous-catégorie pleine de \mathcal{E}_q^{deg} dont les objets sont les espaces quadratiques non dégénérés.

La somme orthogonale, notée \perp , définit une structure monoïdale symétrique sur \mathcal{E}_q^{deg} dont l'unité 0 est objet initial de \mathcal{E}_q^{deg} .

Soit \mathbf{H} l'objet de \mathcal{E}_q , appelé plan hyperbolique, dont l'espace vectoriel sous-jacent est k^2 et la forme quadratique l'application $k^2 \rightarrow k \quad (x, y) \mapsto xy$. Comme d'habitude, on notera $O_{n,n}(k)$ le groupe $G_{\mathbf{H}}(n)$ des automorphismes de $\mathbf{H}^{\perp n}$.

Le triplet $(\mathcal{E}_q^{deg}, S_{\mathbf{H}}, G_{\mathbf{H}})$ vérifie l'hypothèse (C), car tout espace quadratique se plonge dans un espace quadratique non dégénéré et tout espace quadratique non dégénéré se plonge dans un espace hyperbolique (i.e. un espace quadratique qui est somme directe de sous-espaces totalement isotropes), qui est isomorphe à une somme orthogonale de copies de \mathbf{H} (cf. [Sch85]).

Le triplet $(\mathcal{E}_q, S_{\mathbf{H}}, G_{\mathbf{H}})$ vérifie pour sa part (C').

Le théorème de Witt montre que l'axiome (W') est satisfait, puisque $S_{\mathbf{H}}$ prend ses valeurs dans les espaces non dégénérés.

Le triplet $(\mathcal{E}_q^{deg}, S_{\mathbf{H}}, G_{\mathbf{H}})$ vérifie également l'hypothèse (S) pour la même raison. En effet, si V est un espace quadratique et H un espace non dégénéré, tout automorphisme de $V \perp H$

qui préserve H préserve également son supplémentaire orthogonal, qui n'est autre que V car H est non dégénéré. Par conséquent, tout élément du stabilisateur d'un morphisme $H \perp f : H \perp V \rightarrow H \perp W$ sous l'action de $O(H \perp V)$ stabilise $H \subset H \perp V$ et W , donc s'écrit sous la forme $H \perp u$, où $u \in O(W)$ stabilise $f : V \rightarrow W$; u est manifestement unique, d'où la satisfaction de (S).

(On pourrait étendre ces considérations à un corps gauche muni d'une involution et aux formes hermitiennes afférentes.)

2. On peut reprendre mutatis mutandis l'exemple précédent en remplaçant les formes quadratiques par les formes bilinéaires alternées. Bornons-nous à préciser nos notations : $\mathcal{E}_{alt}^{deg}(k)$ (ou simplement \mathcal{E}_{alt}^{deg}) désignera la catégorie des espaces symplectiques de dimension finie (avec les injections symplectiques pour morphismes) sur le corps commutatif k , \mathcal{E}_{alt} la sous-catégorie pleine des espaces non dégénérés, \perp la somme orthogonale.

On notera aussi \mathbf{H} l'espace symplectique k^2 muni de la forme $((x, y), (x', y')) \mapsto xy' - yx'$. Le groupe des automorphismes de $A \in \text{Ob } \mathcal{E}_{alt}^{deg}$ sera noté $Sp(A)$; $G_{\mathbf{H}}(n) = Sp(\mathbf{H}^{\perp n})$ sera noté $Sp_{2n}(k)$.

3. Soit Θ la catégorie ayant pour objets les ensembles finis et pour morphismes les fonctions injectives. La structure monoïdale symétrique de Θ est donnée par la réunion disjointe; son unité l'ensemble vide est objet initial de Θ . Soit A un ensemble à un élément fixé. La condition (C') est vérifiée puisque S_A est essentiellement surjectif. On a $G_A(n) = \mathfrak{S}_n$ (groupe symétrique sur n lettres); on voit facilement que la condition (W') est satisfaite. La condition (S) a lieu du fait qu'une bijection d'un ensemble E qui préserve un sous-ensemble F préserve également son complémentaire.
4. Soient A un anneau et $\mathbb{M}(A)$ la catégorie des A -modules à gauche libres de type fini avec pour morphismes les injections A -linéaires scindées, munie de la somme directe, dont l'unité 0 est objet initial. Le triplet $(\mathbb{M}(A), S_A, G_A)$ vérifie l'hypothèse (C'). Comme d'habitude, on note $GL_n(A)$ pour $G_A(n)$.

L'hypothèse (W) est aussi satisfaite, mais pas (S) si A est non nul et pas non plus (W') en général : pour s'en convaincre, on peut considérer un anneau non nul A tel que les A -modules à gauche A et A^2 soient isomorphes, par exemple l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension infinie, de sorte que l'injection évidente $A \hookrightarrow A^2$, qui n'est pas surjective, ne saurait être conjuguée sous $GL_2(A)$ à un isomorphisme $A \xrightarrow{\cong} A^2$ ((W') est cependant vraie si A est un anneau assez gentil, par exemple principal). La satisfaction de (W) résulte quant à elle du fait plus général suivant :

Lemme 1.10. Soient \mathcal{A} une catégorie additive, M et N deux objets de \mathcal{A} et $u : N \rightarrow M$ un monomorphisme scindé de \mathcal{A} .

Il existe un automorphisme g de $N \oplus M$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{u} & M & \longrightarrow & N \oplus M \\ & \searrow & & & \uparrow g \\ & & & & N \oplus M \end{array}$$

dans lequel les flèches non spécifiées sont les inclusions canoniques, commute.

Démonstration. Soit $p : M \rightarrow N$ une rétraction de u . L'endomorphisme g de $N \oplus M$ donné par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & p \\ u & id \end{pmatrix}$ fait commuter le diagramme, et c'est un automorphisme d'inverse donné par $\begin{pmatrix} -id & p \\ u & id - up \end{pmatrix}$. □

2 Suite spectrale pour l'homologie stable d'une suite de groupes

Dans cette section, on introduit une suite spectrale obtenue de manière purement algébrique, convergeant vers l'homologie stable, à coefficients tordus, des familles de groupes qui nous intéressent. Cette suite spectrale est l'ingrédient original de la partie formelle de ce travail; elle fournit une

alternative à la suite spectrale de la K -théorie stable considérée dans les travaux de Betley et Scorichenko.

Convention 2.1. Dans toute cette section, on se donne un triplet (\mathcal{C}, S, G) vérifiant les hypothèses (C), (W) et (G) du paragraphe 1.1.

2.1 Morphisme de l'homologie stable vers l'homologie de catégorie

Le but de ce paragraphe est de construire un morphisme naturel :

$$H_*(G_\infty; F_\infty) \rightarrow H_*(\mathcal{C}; F) \quad (1)$$

où $H_*(\mathcal{C}; F)$ est l'homologie de la catégorie \mathcal{C} à coefficients dans un foncteur $F \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, dont on rappelle la définition dans l'appendice A. Ce morphisme naturel peut être défini à partir des morphismes d'évaluation. On en donne ici une présentation utilisant une catégorie auxiliaire notée $\tilde{\mathcal{C}}$, qui interviendra uniquement dans cette section.

L'intérêt de cette catégorie provient de ce qu'on peut obtenir des résolutions plates du foncteur constant $\mathbb{k} \in \text{Ob } \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op})$ à partir de résolutions projectives du G_∞ -module trivial \mathbb{k} . Ceci permet, entre autre, d'exprimer $H_*(G_\infty; F_\infty)$ en terme d'homologie de la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$.

Définition 2.2. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ la catégorie ayant \mathbb{N} pour ensemble d'objets, telle que $\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(i, j) = G(j)$ pour $i \leq j$ et \emptyset sinon. La composition est définie par $t' \circ t := t' \cdot G(j \leq l)(t)$ pour $i \leq j \leq l$ et $t \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(i, j) = G(j)$ et $t' \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(j, l) = G(l)$.

Notation 2.3. On désigne par $\tilde{S} : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ le foncteur égal à l'identité sur les objets et associant à chaque relation $i \leq j$ de \mathbb{N} le morphisme de $\tilde{\mathcal{C}}$ correspondant à $1 \in G(j)$.

Pour la cohérence des notations, on note également $\tilde{G} := G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Grp}$.

La propriété suivante est immédiate.

Proposition 2.4. Le triplet $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{S}, \tilde{G})$ vérifie les hypothèses (C), (W') et (G).

En revanche, même si (\mathcal{C}, S, G) provient d'une structure monoïdale sur \mathcal{C} comme au paragraphe 1.2, il n'en est pas nécessairement de même pour $(\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{S}, \tilde{G})$ (la définition évidente que l'on est tenté de donner à partir de l'addition sur \mathbb{N} et de la structure monoïdale sur \mathcal{C} n'est pas toujours fonctorielle).

Proposition 2.5. Il existe un foncteur $Q : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ défini par $Q(i) = S(i)$ sur les objets et $Q(f) = f \cdot S(i \leq j)$ pour $i \leq j$ dans \mathbb{N} et $f \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(i, j) = G(j)$ sur les morphismes.

Pour $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C})$, le foncteur Q^*F (on rappelle que $Q^* : \mathcal{F}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}})$ désigne la précomposition par Q) fournit un morphisme naturel $H_*(\tilde{\mathcal{C}}, Q^*F) \rightarrow H_*(\mathcal{C}, F)$.

Afin d'obtenir le morphisme naturel (1), on identifie dans la suite $H_*(\tilde{\mathcal{C}}, Q^*F)$ et $H_*(G_\infty; F_\infty)$. Pour cela nous aurons besoin du résultat suivant qui explique l'avantage de la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ sur \mathcal{C} .

Lemme 2.6. Le foncteur $P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} (= \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} P_i^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}, \text{ cf. lemme 1.6})$ est tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme de G_∞ -modules :

$$P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}(i) \simeq \mathbb{k}[G_\infty].$$

Démonstration. Pour $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leq i$ on a : $P_i^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}(j) = \mathbb{k}[\text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}}(j, i)] \simeq \mathbb{k}[G(i)]$. Le résultat s'en déduit par passage à la colimite. \square

Remarque 2.7. Le foncteur $P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}$ n'est pas pour autant un foncteur constant : via l'isomorphisme du lemme précédent, son action sur les morphismes n'est pas donnée par l'identité. En effet, pour $l \leq j \leq i$ si $f \in \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}(j, l) = G(j)$ on a $P_i^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}(f)([g]) = [g \cdot G(j \leq i)(f)]$, pour $g \in G(i)$. Néanmoins nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.8. Le foncteur $(P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}})_{G_\infty} : \tilde{\mathcal{C}}^{op} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$ est constant en \mathbb{k} .

Démonstration. Notons $\alpha_j : G(j) \rightarrow G_\infty$, pour $j \in \mathbb{N}$, le morphisme canonique. La remarque précédente montre que, dans l'isomorphisme du lemme 2.6, le morphisme $\mathbb{k}[G_\infty] \simeq P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}(j) \rightarrow P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}(l) \simeq \mathbb{k}[G_\infty]$ induit par un morphisme $l \rightarrow j$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ correspondant à un élément f de $G(j)$ est la multiplication par $\alpha_j(f)$. Par passage aux coinvariants il induit donc l'identité de \mathbb{k} . \square

Proposition 2.9. *Il existe un isomorphisme gradué*

$$H_*(\tilde{\mathcal{C}}; Q^*F) \simeq H_*(G_\infty; F_\infty)$$

naturel en $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Démonstration. Soit $R_\bullet \rightarrow \mathbb{k}$ une résolution projective de \mathbb{k} en tant que G_∞ -module. Par le lemme 2.6 le foncteur $-\otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}[G_\infty]} \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op})$ est exact. On en déduit un complexe exact $R_\bullet \otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} \rightarrow \mathbb{k} \otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}$ dans $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op})$. Or $\mathbb{k} \otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} \simeq (P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}})_{G_\infty} \simeq \mathbb{k}$ d'après le lemme 2.8. De plus les foncteurs $R_i \otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}$ de $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op})$ sont plats comme $P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}$ puisque les G_∞ -modules R_i sont projectifs. On en déduit que $R_\bullet \otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} \rightarrow \mathbb{k} \otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} \simeq \mathbb{k}$ est une résolution plate de $\mathbb{k} \in \text{Ob } \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op})$.

On utilise maintenant l'isomorphisme canonique

$$(M \otimes_{G_\infty} P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}}) \otimes_{\tilde{\mathcal{C}}} Q^*F \simeq M \otimes_{G_\infty} (P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} \otimes_{\tilde{\mathcal{C}}} Q^*F)$$

naturel en F et en le G_∞ -module M , associé aux isomorphismes naturels de G_∞ -modules

$$P_\infty^{\tilde{\mathcal{C}}^{op}} \otimes_{\tilde{\mathcal{C}}} Q^*F \simeq (Q^*F)_\infty \simeq F_\infty$$

dont le premier est déduit du lemme 1.6 et de la proposition 2.4 et le second s'obtient par inspection. \square

On peut donc définir le morphisme canonique (1) qui nous intéresse par la composition

$$H_*(G_\infty; F_\infty) \xrightarrow{\simeq} H_*(\tilde{\mathcal{C}}; Q^*F) \rightarrow H_*(\mathcal{C}; F)$$

de l'isomorphisme de la proposition précédente et du morphisme induit par Q . On peut vérifier aisément que ce morphisme est toujours un isomorphisme en degré 0, ce qui découlera des résultats du paragraphe suivant, qui permettent d'étudier son comportement en tout degré.

Remarque 2.10. Pour formel et élémentaire qu'il soit, ce résultat en degré 0 peut déjà procurer un point de vue efficace sur des calculs de coïnvariants stables. Par exemple (anticipant sur les résultats que nous donnerons par la suite en tout degré homologique, résultats qui sont eux non formels et considérablement plus difficiles qu'en degré 0) si $\mathbb{k} = k$ est un corps fini, on peut en déduire sans trop de peine le fait que

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_0(O_{n,n}(k); \Gamma^*(k^{2n})) \quad (\text{resp. } \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_0(Sp_{2n}(k); \Gamma^*(k^{2n}))) \quad (2)$$

est isomorphe à l'espace vectoriel des transformations naturelles de Γ^* (foncteur (gradué) puissance divisée sur les k -espaces vectoriels) vers le foncteur $V \mapsto k^{S^2(V^*)}$ (resp. $V \mapsto k^{\Lambda^2(V^*)}$), où l'étoile indique cette fois la dualité.

L'article de Kuhn [Kuh98] (cf. son théorème 1.6) montre comment calculer ces espaces vectoriels gradués, à l'aide du lien fondamental établi entre les foncteurs entre k -espaces vectoriels et algèbre de Steenrod sur k (au moins lorsque le corps fini k est premier), établi par Henn, Lannes et Schwartz (on pourra consulter le premier article de Schwartz dans l'ouvrage [FFPS03] à ce sujet). Ce résultat est déjà remarquable car le calcul direct des coïnvariants (2) n'est pas du tout immédiat!

2.2 Suite spectrale fondamentale

Soit $Q_! : \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ le foncteur défini (à isomorphisme canonique près) par l'isomorphisme naturel

$$\forall F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C}) \quad \forall G \in \text{Ob } \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op}) \quad G \otimes_{\tilde{\mathcal{C}}} Q^*(F) \simeq Q_!(G) \otimes_{\mathcal{C}} F$$

(cf. proposition A.2).

Cet isomorphisme se dérive en une suite spectrale de Grothendieck (homologique) de terme E^2 donné par

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^{\mathcal{C}}(\mathbb{L}_q Q_!(G), F)$$

et d'aboutissement $\mathrm{Tor}_*^{\tilde{\mathcal{C}}}(G, Q^*(F))$. Les foncteurs $\mathbb{L}_q Q_!(G)$ désignent les dérivés à gauche du foncteur exact à droite $Q_!$; cette suite spectrale est naturelle en F et concentrée dans le premier quadrant, donc en particulier convergente.

Dans le cas où G est le foncteur constant \mathbb{k} , qui nous intéresse spécialement, nous allons préciser la forme de ces foncteurs $\mathbb{L}_q Q_!(G)$. Nous introduisons à cet effet la notation suivante.

Notation 2.11. Soient i et j deux éléments de \mathbb{N} tels que $i \leq j$. Nous désignerons par $St_{\mathcal{C}}(i, j)$ le stabilisateur de $S(i \leq j) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S(i), S(j))$ sous l'action à gauche canonique de $G(j)$.

Nous noterons $St_{\mathcal{C}}(i)$ la colimite sur $j \geq i$ des groupes $St_{\mathcal{C}}(i, j)$. Nous identifierons $St_{\mathcal{C}}(i)$ avec son image dans le groupe G_{∞} .

On remarque que l'on a $St_{\mathcal{C}}(j) \subset St_{\mathcal{C}}(i)$ pour $i \leq j$. Cela permet de considérer $St_{\mathcal{C}}$ comme un foncteur de but **Grp** et de source \mathbb{N}^{op} .

Nous aurons besoin, dans les cas où le foncteur S n'est pas essentiellement surjectif, de la généralisation suivante de ces stabilisateurs, qui s'effectue au prix d'une perte de fonctorialité.

Notation 2.12. Choisissons, conformément à l'axiome (C), un morphisme $c \xrightarrow{u_c} S(i_c)$ de \mathcal{C} pour tout objet c de \mathcal{C} . Pour tout entier naturel $j \geq i_c$, on note $St(c, j)$ le stabilisateur de $c \xrightarrow{u_c} S(i_c) \xrightarrow{S(i_c \leq j)} S(j)$ sous l'action à gauche canonique de $G(j)$.

Nous noterons $St(c)$ la colimite sur $j \geq i_c$ des groupes $St(c, j)$. Nous identifierons $St(c)$ avec son image dans le groupe G_{∞} .

L'hypothèse (W) montre que changer le choix des i_c et des u_c ne modifie pas, à conjugaison près, les groupes $St(c)$ obtenus. Pour la même raison, tout morphisme $f : b \rightarrow c$ de \mathcal{C} fait de $St(c)$ un sous-groupe d'un conjugué de $St(b)$ dans G_{∞} .

Malgré le manque de fonctorialité sur les groupes $St(c)$, la remarque précédente et la trivialité en homologie de l'action des automorphismes intérieurs d'un groupe font de $c \mapsto H_*(St(c); \mathbb{k})$ un foncteur de \mathcal{C}^{op} vers les \mathbb{k} -modules gradués.

Proposition 2.13. *Les foncteurs dérivés $\mathbb{L}_* Q_!$ sont donnés sur le foncteur constant $\mathbb{k} \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op})$ par un isomorphisme gradué*

$$\mathbb{L}_* Q_!(\mathbb{k})(c) \simeq H_*(St(c); \mathbb{k})$$

naturel en $c \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}^{op}$.

Démonstration. L'isomorphisme (11) de la proposition A.2 et la proposition 2.9 fournissent des isomorphismes canoniques

$$\mathbb{L}_i Q_!(\mathbb{k})(c) = H_i(\tilde{\mathcal{C}}; Q^*(P_c^{\mathcal{C}})) \simeq H_i(G_{\infty}; (P_c^{\mathcal{C}})_{\infty}).$$

Il suffit ensuite de noter que le G_{∞} -module $(P_c^{\mathcal{C}})_{\infty}$ s'identifie à $\mathbb{k}[G_{\infty}/St(c)]$ grâce à l'axiome (W) et d'appliquer le lemme de Shapiro. \square

C'est dans la proposition suivante que l'intérêt de l'hypothèse (S) apparaît.

Proposition 2.14. *Supposons que les foncteurs S et G proviennent d'une structure monoïdale symétrique sur \mathcal{C} comme au paragraphe 1.2 et que l'hypothèse (S) est satisfaite.*

Alors pour tous entiers n, i et tout objet c de \mathcal{C} , le foncteur $\mathbb{L}_n Q_!(\mathbb{k})$ transforme le morphisme canonique $c \rightarrow S(i) \oplus c$ en un isomorphisme.

Si de plus S vérifie l'hypothèse (C'), alors le foncteur $\mathbb{L}_n Q_!(\mathbb{k})$ est constant en $H_n(G_{\infty}; \mathbb{k})$. La suite spectrale prend donc la forme

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{C}}(H_q(G_{\infty}; \mathbb{k}), F) \Rightarrow H_{p+q}(G_{\infty}; F_{\infty})$$

ou encore, si \mathbb{k} est un corps (ou simplement que $H_*(G_{\infty}; \mathbb{k})$ est un \mathbb{k} -module plat),

$$E_{p,q}^2 = H_p(\mathcal{C}; F) \otimes H_q(G_{\infty}; \mathbb{k}) \Rightarrow H_{p+q}(G_{\infty}; F_{\infty});$$

ces identifications sont naturelles en $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Démonstration. On peut supposer que $i_{S(i) \oplus c} = S(i) \oplus i_c$ et $u_{S(i) \oplus c} = S(i) \oplus u_c$ (cf. supra). Pour tout entier $j \geq i_c$, le foncteur $S(i) \oplus -$ induit donc un isomorphisme $St(c, j) \xrightarrow{\cong} S(S(i) \oplus c, i + j)$, par l'axiome (S).

Identifiant ces deux groupes via cet isomorphisme, on voit que la flèche induite par le morphisme canonique $c \rightarrow S(i) \oplus c$ s'identifie au morphisme de groupe $St(c, j) \hookrightarrow St(c, i + j)$ induit par

$$G(j) = \text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus j}) \rightarrow G(i + j) = \text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus(i+j)}) \quad u \mapsto A^{\oplus i} \oplus u.$$

Celui-ci est conjugué au morphisme $u \mapsto u \oplus A^{\oplus i}$ qui intervient dans la colimite définissant G_{∞} par l'automorphisme de $A^{\oplus(i+j)}$

$$A^{\oplus(i+j)} = A^{\oplus i} \oplus A^{\oplus j} \simeq A^{\oplus j} \oplus A^{\oplus i} = A^{\oplus(i+j)}$$

donné par l'échange des facteurs.

Comme les automorphismes intérieurs n'agissent pas en homologie, cela fournit la première partie du résultat, grâce à la proposition 2.13.

Supposons maintenant que S vérifie l'hypothèse (C'). Soient c un objet de \mathcal{C} et b un objet de \mathcal{C} tel qu'existent $i \in \mathbb{N}$ et un isomorphisme $b \oplus c \simeq S(i)$. Ce qui précède montre que, pour tout $a \in \text{Ob } \mathcal{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'application linéaire $\mathbb{L}_n Q_!(\mathbb{k})(a \rightarrow a \oplus c)$ a un inverse à droite, donné par isomorphisme près par $\mathbb{L}_n Q_!(\mathbb{k})(a \oplus c \rightarrow a \oplus c \oplus b)$ (qui a donc lui un inverse à gauche!); pour la même raison, ce dernier morphisme a un inverse à droite. Donc $\mathbb{L}_n Q_!(\mathbb{k})(a \oplus c \rightarrow a \oplus c \oplus b)$ puis $\mathbb{L}_n Q_!(\mathbb{k})(a \rightarrow a \oplus c)$ sont des isomorphismes.

Considérons à présent un morphisme $f : d \rightarrow c$ quelconque de \mathcal{C} et montrons que c'est un $\mathbb{L}_* Q_!(\mathbb{k})$ -isomorphisme. On choisit des objets a et b de \mathcal{C} et des entiers i et j tels qu'existent des isomorphismes $a \oplus d \simeq S(j)$ et $b \oplus c \simeq S(i)$. On peut ensuite trouver, par l'axiome (W), un entier l , qu'on peut supposer supérieur à i et j , et un automorphisme g de $S(l)$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} d & \longrightarrow & a \oplus d \simeq S(j) \xrightarrow{S(j \leq l)} S(l) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ c & \longrightarrow & b \oplus c \simeq S(i) \xrightarrow{S(i \leq l)} S(l). \end{array}$$

Toutes les flèches horizontales sont des $\mathbb{L}_* Q_!(\mathbb{k})$ -isomorphismes par ce qui précède, de même que g qui est un isomorphisme, donc c'est aussi le cas de f , ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 2.15. C'est dans cette démonstration qu'apparaît l'intérêt de supposer symétrique la structure monoïdale de \mathcal{C} , hypothèse qui n'intervient nulle part ailleurs dans les constructions ou démonstrations.

Remarque 2.16. 1. Dans le cas de la catégorie $\mathbb{M}(A)$ des modules à gauche projectifs de type fini sur un anneau A avec injections scindées (cf. exemple 1.9.4), l'hypothèse (C') est satisfaite mais pas (S); néanmoins, la conclusion de la proposition précédente a encore lieu. Cela provient de résultats établis par Betley dans [Bet92]. Nous en donnons une démonstration, fondée sur les travaux de Scorichenko, dans l'appendice E.

2. Toutes les hypothèses de la proposition sont satisfaites par la catégorie Θ de l'exemple 1.9.3. Cela permet de retrouver les résultats de Betley (cf. [Bet02]) sur l'homologie stable des groupes symétriques. C'est ce que nous ferons dans l'appendice D.

3. Toutes les hypothèses de la proposition 2.14 sont également satisfaites dans les catégories $\mathcal{E}_q(k)$ et $\mathcal{E}_{alt}(k)$ (où k est un corps commutatif) munies de la somme orthogonale et de l'objet \mathbf{H} (cf. exemples 1.9.1 et 1.9.2). Cependant, les résultats de ce corollaire sont peu maniables dans ce cas, ce qui nous amènera à travailler plutôt dans les catégories \mathcal{E}_q^{deg} et \mathcal{E}_{alt}^{deg} , dans les sections suivantes.

2.3 Arrêt de la suite spectrale et comparaison à la K -théorie stable

Nous donnons un critère simple pour que la suite spectrale qui nous intéresse s'effondre à la deuxième page; on obtient même mieux: non seulement le terme E^{∞} , mais aussi l'aboutissement de la suite spectrale (qui en diffère par une graduation), est isomorphe au terme E^2 .

Proposition 2.17. *Faisons les trois hypothèses suivantes :*

1. *L'anneau \mathbb{k} est de dimension homologique au plus 1 ;*

2. la catégorie \mathcal{C} possède un objet initial;
3. pour tout entier q , le foncteur $\mathbb{L}_q Q_!(\mathbb{k}) \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ est constant.

Alors il existe un isomorphisme

$$H_n(G_\infty; F_\infty) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}_p^{\mathcal{C}}(\mathbb{L}_q Q_!(\mathbb{k}), F)$$

naturel en $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Les cas les plus importants sont ceux où \mathbb{k} est un corps ou égale \mathbb{Z} . On remarque que sous les hypothèses de la proposition 2.14 les conditions 2 et 3 de la proposition précédente sont satisfaites.

Démonstration. Nous allons déduire le résultat de la proposition A.1 de l'annexe A.

Soit R_\bullet une résolution projective de $\mathbb{k} \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$. On considère le complexe $C_\bullet = Q_!(R_\bullet)$: il est formé de foncteurs projectifs. En effet, le foncteur $Q_!$, adjoint à gauche du foncteur exact $(Q^{op})^* : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{C}}^{op})$ (cf. proposition A.2 de l'appendice A), préserve les objets projectifs.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme entre les groupes d'extensions suivants :

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})}^r(H_n(C_\bullet), H_m(C_\bullet)) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{k}}^r(H_n(C_\bullet), H_m(C_\bullet)).$$

En effet, par hypothèse $\mathbb{L}_q Q_!(\mathbb{k}) = H_n(C_\bullet)$ est un foncteur constant de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ or, comme \mathcal{C} a un objet initial, tout foncteur constant de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ en un \mathbb{k} -module injectif est injectif (et représente les morphismes de l'évaluation en l'objet initial de \mathcal{C} vers ledit module).

Par l'hypothèse sur la dimension homologique de \mathbb{k} il s'ensuit que $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})}^{n-m+1}(H_n(C_\bullet), H_m(C_\bullet)) = 0$ pour $n \geq m$.

Par le deuxième point de la proposition A.1 on en déduit que la suite spectrale s'effondre au terme E^2 et qu'il existe une décomposition naturelle :

$$H_n(Q_!(R_\bullet) \otimes_{\mathcal{C}} F) = H_n(C_\bullet \otimes_{\mathcal{C}} F) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}_p^{\mathcal{C}}(\mathbb{L}_q Q_!(\mathbb{k}), F).$$

Or,

$$H_n(Q_!(R_\bullet) \otimes_{\mathcal{C}} F) \simeq H_n(R_\bullet \otimes_{\mathcal{C}} Q^*(F)) = H_n(\tilde{\mathcal{C}}; Q^*(F)) \simeq H_n(G_\infty; F_\infty)$$

où le dernier isomorphisme provient de la proposition 2.9. □

La suite spectrale que nous venons d'étudier, qui converge toujours vers $H_*(G_\infty; F_\infty)$, qui s'identifie à son terme E^2 dans les cas favorables, mérite d'être comparée à celle obtenue en K -théorie stable (et avec ses variantes faisant intervenir d'autres groupes que le groupe linéaire).

Rappelons sa construction. Soit G un groupe dont le sous-groupe des commutateurs est parfait (c'est le cas du groupe linéaire infini sur un anneau arbitraire, mais aussi du groupe symétrique infini, du groupe orthogonal ou symplectique infini sur un corps commutatif). On applique la construction plus de Quillen au classifiant BG de G (comme groupe discret) et on forme la fibre homotopique F_G de l'application canonique $BG \rightarrow BG^+$.

L'homologie de F_G à coefficients dans un G -module M , vu comme $\pi_1(F_G)$ -module via le morphisme canonique $\pi_1(F_G) \rightarrow \pi_1(BG) = G$, est par définition la K -théorie stable G -généralisée à coefficients dans M ; on la note $K_*^s(G; M)$. Le point remarquable est le suivant : dans la suite spectrale de Serre

$$E_{p,q}^2 = H_p(BG^+; K_q^s(G; M)) \simeq H_p(G; K_q^s(G; M)) \Rightarrow H_{p+q}(G; M) \quad (3)$$

l'action du groupe G sur le groupe abélien $K_q^s(G; M)$ est *triviale* (cf. par exemple [Kas82], théorème 3.1).

De plus, dans de nombreux cas, la suite spectrale s'effondre au terme E^2 et procure des isomorphismes

$$H_n(G; M) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H_p(BG^+; K_q^s(G; M))$$

(cf. l'article [BP94] de Betley et Pirashvili, théorème 2, et la section 6 de l'article "Stable K -theory is bifunctor homology" de Franjou et Pirashvili, dans le volume [FFPS03], pour le cas classique du groupe linéaire; ce cas est adapté dans [Bet02], théorème 1.3, pour le groupe symétrique).

La K -théorie stable comme l'homologie de catégorie rendent donc généralement des services très analogues en terme de calcul de l'homologie du groupe G à coefficients tordus. Il convient d'ailleurs de noter que les arguments de Scorichenko pour identifier la K -théorie stable d'un anneau quelconque et l'homologie de la catégorie des modules projectifs de type fini pour des coefficients déduits de bifoncteurs polynomiaux n'utilise pas réellement la définition de la K -théorie stable, mais seulement l'existence de la suite spectrale naturelle (3) et d'un morphisme naturel gradué $K_*^s(GL_\infty; M) \rightarrow H_*(GL_\infty; M)$ (induit par l'application canonique $F_G \rightarrow BG$). On déduit de ce morphisme un morphisme naturel de la K -théorie stable à coefficients provenant d'un bifoncteur vers l'homologie de ce bifoncteur, morphisme dont Scorichenko montre qu'il est bijectif si le bifoncteur est polynomial en exploitant uniquement la suite spectrale (3). Dans le cas d'un corps fini, l'homologie du groupe linéaire infini à coefficients dans le corps est trivial, comme l'a montré Quillen dans [Qui72], de sorte que la suite spectrale (3) se réduit à un isomorphisme naturel entre K -théorie stable et homologie de GL_∞ , c'est pourquoi le théorème de Scorichenko sur la K -théorie stable se réduit dans ce cas, traité auparavant par Betley (cf. [Bet99]) et Suslin (cf. l'appendice de [FFSS99]) indépendamment, à une identification entre homologie du groupe linéaire (à coefficients tordus) et homologie de catégorie.

Nous reviendrons dans les appendices E et D sur l'équivalence des méthodes de calcul d'homologie stable des groupes linéaires et symétriques respectivement, à coefficients venant d'un foncteur convenable, à l'aide de la K -théorie stable (généralisée au groupe symétrique infini dans le second cas) ou à l'aide de notre suite spectrale utilisant directement l'homologie d'une catégorie appropriée.

3 Cas des groupes orthogonaux et symplectiques

Cette section fournit le résultat principal de cet article, qui relie l'homologie stable des groupes orthogonaux (resp. symplectiques) à coefficients tordus et des groupes de torsions sur la catégorie des espaces vectoriels. Ces derniers sont accessibles au calcul, dans les cas favorables, comme nous l'illustrons à la section 4.

On commence par identifier une certaine catégorie de fractions de \mathcal{E}_q^{deg} (resp. de \mathcal{E}_{alt}^{deg}) à une catégorie de Burnside. Puis, on utilise cette identification et des résultats d'annulation en homologie des foncteurs pour obtenir notre résultat central.

3.1 Les catégories de fractions $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ et $\mathcal{E}_{alt}^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$

Dans le cas où $\mathcal{C} = \mathcal{E}_q^{deg}(k)$ (resp. $\mathcal{C} = \mathcal{E}_{alt}^{deg}(k)$), où k est un corps commutatif fixé, le foncteur $\mathbb{L}_n Q_i(\mathbb{k})$ transforme l'inclusion canonique $D \rightarrow S_{\mathbf{H}}(i) \perp D = \mathbf{H}^{\perp i} \perp D$ en un isomorphisme d'après la proposition 2.14. Cette observation justifie que l'on s'intéresse dans ce paragraphe à la catégorie de fractions où l'on inverse les morphismes canoniques de la forme $D \xrightarrow{i} D \perp \mathbf{H}^{\perp n}$.

Soient $(- \perp \mathbf{H})$ l'ensemble de flèches de \mathcal{E}_q^{deg} suivant :

$$(- \perp \mathbf{H}) = \{D \xrightarrow{i} D \perp H \mid H \text{ espace hyperbolique ; } i \text{ inclusion canonique}\}$$

et $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ la catégorie de fractions correspondante (qui existe par des résultats généraux, voir par exemple [GZ67]). On note $\phi : \mathcal{E}_q^{deg} \rightarrow \mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ le foncteur canonique. Le but de ce paragraphe est de démontrer qu'il existe une équivalence de catégories

$$\Psi : \mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}] \xrightarrow{\simeq} Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$$

où \mathcal{E}_{inj}^f est la catégorie ayant pour objets les k -espaces vectoriels de dimension finie et pour morphismes les applications linéaires injectives et $Sp(\cdot)$ désigne la catégorie de Burnside dont on rappelle la construction dans la définition C.4 de l'appendice C.

Après avoir donné quelques résultats essentiels sur les morphismes de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$, on définira le foncteur Ψ , puis on montrera que Ψ est essentiellement surjectif, plein et fidèle.

Notation 3.1. Pour les diagrammes dans la catégorie de fractions $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ on notera par \rightsquigarrow les morphismes de \mathcal{E}_q^{deg} qui sont éléments de $(- \perp \mathbf{H})$ et par \rightarrow tout morphisme de \mathcal{E}_q^{deg} .

Remarquons que $(- \perp \mathbf{H})$ est stable par composition et que pour tout objet D de \mathcal{E}_q^{deg} , $Id_D \in (- \perp \mathbf{H})$. On a également la propriété suivante :

Lemme 3.2. Soient H un espace hyperbolique et $f : D \rightarrow D'$ un morphisme de \mathcal{E}_q^{deg} , il existe $g : D \perp H \rightarrow D' \perp H$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} D & \rightsquigarrow & D \perp H \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ D' & \rightsquigarrow & D' \perp H. \end{array}$$

Démonstration. Ce diagramme est commutatif pour $g = f \perp Id_H$. \square

Ce lemme nous permet de donner la description suivante des morphismes de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$.

Lemme 3.3. Tout morphisme de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ s'écrit sous la forme $g^{-1}f$ où g est un élément de $(- \perp \mathbf{H})$ et f est un morphisme de \mathcal{E}_q^{deg} .

Remarque 3.4. L'ensemble $(- \perp \mathbf{H})$ n'admet pas un "calcul à gauche des fractions" comme défini par Gabriel et Zisman dans [GZ67]. En effet, pour $D \rightsquigarrow^i D \perp H$ un élément de $(- \perp \mathbf{H})$, $f : D \perp H \rightarrow D'$ et $g : D \perp H \rightarrow D'$ deux morphismes de \mathcal{E}_q^{deg} tels que $fi = gi$, il n'existe pas de morphisme de $(- \perp \mathbf{H})$ $D' \rightsquigarrow^{i'} D' \perp K$ tel que $i'f = i'g$. Nous n'avons donc pas une description de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ aussi simple que dans le cas considéré par Gabriel-Zisman et il est en général difficile de savoir quels sont les morphismes égaux de cette catégorie, l'écriture d'un morphisme de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ sous la forme $g^{-1}f$ n'étant pas unique. Néanmoins nous avons les résultats suivants qui seront essentiels dans la preuve de la fidélité du foncteur F du théorème 3.17.

Lemme 3.5. Soient D un objet de \mathcal{E}_q^{deg} , H un espace hyperbolique et $f \in \text{Aut}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(D \perp H)$ tel que $f|_D = Id_D$ alors $f = Id_{D \perp H}$ dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$.

Démonstration. Soient D , H et f comme dans l'énoncé. L'inclusion canonique $D \xrightarrow{i} D \perp H$ est un élément de $(- \perp \mathbf{H})$ et est donc un isomorphisme dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$. Or on a $fi = i$ dont on déduit que $f = Id_{D \perp H}$ dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$. \square

Le cas particulier où D est l'espace vectoriel nul fournit le lemme suivant :

Lemme 3.6. Soit H un espace hyperbolique et $f \in \text{Aut}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(H)$ alors $f = Id_H$ dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$.

On déduit de ce lemme le résultat suivant :

Proposition 3.7. Soient D un objet de \mathcal{E}_q^{deg} , H un espace hyperbolique et $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(D, H)$ alors $f = g$ dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$.

Démonstration. Soient $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(D, H)$, par le théorème de Witt, il existe $h \in \text{Aut}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(H)$ tel que $hf = g$. Par le lemme 3.6 on déduit que $f = g$ dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$. \square

Nous aurons également besoin dans la suite du lemme très facile suivant :

Lemme 3.8. Soient $\alpha, \beta : V \rightarrow W$ dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ alors il existe un espace hyperbolique H tel que $\alpha = i^{-1}f$ et $\beta = i^{-1}g$ où $f, g : V \rightarrow W \perp H$ et $i : W \rightarrow W \perp H$ l'inclusion canonique.

Démonstration. D'après le lemme 3.3 on a $\alpha = i_1^{-1}f_1$ et $\beta = i_2^{-1}g_2$ où $f_1 : V \rightarrow W \perp H_1$, $g_2 : V \rightarrow W \perp H_2$ et $i_1 : W \rightarrow W \perp H_1$, $i_2 : W \rightarrow W \perp H_2$ sont les inclusions canoniques. Il suffit alors de vérifier que $\alpha = i_2^{-1}i_2i_1^{-1}f_1 = i^{-1}f$ avec $f : V \rightarrow W \perp H_1 \perp H_2$. De même pour β . \square

Notation 3.9. Dans la suite, un morphisme de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ se décomposant sous la forme $\alpha = i^{-1}f$ où $f : V \rightarrow W \perp H$ et $i : W \rightarrow W \perp H$ l'inclusion canonique, sera noté :

$$V \xrightarrow{f} W \perp H \leftarrow W.$$

Remarque 3.10. Notons qu'on a une équivalence de catégories entre $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ et la catégorie de fractions de \mathcal{E}_q^{deg} où l'on inverse l'ensemble des inclusions canoniques $D \rightarrow D \perp K$ où K est un espace quadratique non dégénéré. En effet, comme tout espace quadratique non dégénéré K se plonge dans un espace hyperbolique $K \perp K'$, la composée suivante :

$$V \xrightarrow{a} V \perp K \xrightarrow{b} V \perp K \perp K'$$

est inversible dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}]$, ce qui implique que a est inversible à gauche et b est inversible à droite dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}]$. De plus, comme la composée

$$V \perp K \xrightarrow{b} V \perp K \perp K' \xrightarrow{c} V \perp K \perp K' \perp K$$

est inversible dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}]$, b est inversible à gauche dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}]$. On en déduit que b est inversible dans $\mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}]$ et donc que a l'est également.

Afin de définir le foncteur de \mathcal{E}_q^{deg} dans $Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ dont découle l'équivalence de catégories annoncée en début de section nous avons besoin du lemme facile suivant.

Lemme 3.11. *Soit $f \in \text{Hom}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(D, D')$, on a $f^{-1}(\text{Rad}(D')) \subset \text{Rad}(D)$ où Rad désigne le radical.*

Proposition 3.12. *Il existe un foncteur $\tilde{\Psi} : \mathcal{E}_q^{deg} \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ défini sur les objets par $\tilde{\Psi}(D) = \text{Rad}(D)$ et sur les morphismes par :*

$$\tilde{\Psi}(D \xrightarrow{f} D') = \text{Rad}(D) \xleftarrow{i} f^{-1}(\text{Rad}(D')) \xrightarrow{\tilde{f}} \text{Rad}(D')$$

où i est l'inclusion obtenue dans le lemme 3.11 et \tilde{f} est la restriction de f à $f^{-1}(\text{Rad}(D'))$.

Démonstration. Vérifions que $\tilde{\Psi}$ définit bien un foncteur.

Pour $D \in \mathcal{E}_q^{deg} : \tilde{\Psi}(D \xrightarrow{Id} D) = \text{Rad}(D) \xleftarrow{Id} \text{Rad}(D) \xrightarrow{Id} \text{Rad}(D)$.

Pour une paire de flèches composables de $\mathcal{E}_q^{deg} : D \xrightarrow{f} D' \xrightarrow{g} D''$ on a :

$$\tilde{\Psi}(g \circ f) = \text{Rad}(D) \xleftarrow{(g \circ f)^{-1}} \text{Rad}(D'') \xrightarrow{\tilde{g \circ f}} \text{Rad}(D'')$$

et $\tilde{\Psi}(g) \circ \tilde{\Psi}(f)$ est donné par le diagramme en escalier suivant :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(g^{-1}(\text{Rad}(D''))) & \xrightarrow{f} & g^{-1}(\text{Rad}(D'')) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \text{Rad}(D'') \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ f^{-1}(\text{Rad}(D')) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Rad}(D') & & \\ \downarrow & & & & \\ \text{Rad}(D) & & & & \end{array}$$

D'où

$$\tilde{\Psi}(g \circ f) = \tilde{\Psi}(g) \circ \tilde{\Psi}(f).$$

□

Proposition 3.13. *Le foncteur $\tilde{\Psi} : \mathcal{E}_q^{deg} \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ induit un unique foncteur $\Psi : \mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}] \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_q^{deg} & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & Sp(\mathcal{E}_{inj}^f) \\ \phi \downarrow & \nearrow \tilde{\Psi} & \\ \mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}] & & \end{array}$$

Démonstration. Soit $D \xrightarrow{i} D \perp H$ un élément de $(-\perp \mathbf{H})$, on a

$$\tilde{\Psi}(i) = \text{Rad}(D) \xleftarrow{Id} \text{Rad}(D) \xrightarrow{Id} \text{Rad}(D)$$

(qui est bien un isomorphisme de $Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$!).

Par la propriété universelle de la catégorie des fractions, il existe un unique foncteur $\Psi : \mathcal{E}_q^{deg}[(-\perp \mathbf{H})^{-1}] \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ tel que $\Psi \circ \phi = \tilde{\Psi}$. □

Afin de montrer que le foncteur Ψ fournit une équivalence de catégories, on prouve dans la suite qu'il est essentiellement surjectif et pleinement fidèle.

Proposition 3.14. *Le foncteur $\Psi : \mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}] \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ est essentiellement surjectif.*

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{E}_{inj}^f$, on munit V de la forme quadratique nulle. L'espace quadratique D ainsi obtenu étant totalement isotrope on a $\Psi(D) = V$. \square

Proposition 3.15. *Le foncteur $\Psi : \mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}] \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ est plein.*

Démonstration. Soient $V = Rad(V) \perp H$ et $W = Rad(W) \perp K$ deux objets de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ et $f \in \text{Hom}_{Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)}(Rad(V), Rad(W))$. Par définition des morphismes de $Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ il existe un sous espace vectoriel X de $Rad(V)$ tel que $f = Rad(V) \xleftarrow{i} X \xrightarrow{\beta} Rad(W)$ où i est l'inclusion et β est une injection linéaire.

Soit X' un espace vectoriel supplémentaire de X dans $Rad(V)$ et X'' un supplémentaire de $\beta(X)$ dans $Rad(W)$. Comme les formes quadratiques sur les radicaux sont nulles on a :

$$Rad(V) \simeq X \perp X' \quad Rad(W) \simeq \beta(X) \perp X''.$$

Par les propriétés générales de la catégorie \mathcal{E}_q^{deg} il existe un espace hyperbolique L et $g \in \text{Hom}_{\mathcal{E}_q^{deg}}(X', L)$.

Soit $k : V \simeq X \perp X' \perp H \rightarrow (\beta(X) \perp X'' \perp K) \perp H \perp L \simeq W \perp H \perp L$ l'application donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id_H \\ 0 & g & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application $u = V \xrightarrow{k} W \perp H \perp L \rightsquigarrow W$ de $\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$ vérifie $\Psi(u) = f$. \square

Proposition 3.16. *Le foncteur $\Psi : \mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}] \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ est fidèle.*

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in \text{Hom}_{\mathcal{E}_q^{deg}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]}(V, W)$ tels que $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta)$. D'après les lemmes 3.3 et 3.8 on peut écrire α et β sous la forme :

$$\alpha = V \xrightarrow{f} W \perp H \rightsquigarrow W ; \quad \beta = V \xrightarrow{g} W \perp H \rightsquigarrow W .$$

Par la définition de la catégorie de Burnside $Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ rappelée en C.4, l'égalité $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta)$ implique que $f^{-1}(Rad(W)) = g^{-1}(Rad(W))$ et $\tilde{f} = \tilde{g}$.

On a les décompositions suivantes des espaces V et $W \perp H : V = f^{-1}(Rad(W)) \perp D$ où D est un objet de \mathcal{E}_q^{deg} ; $W \perp H = Rad(W) \perp L$ où L est un espace non dégénéré. Dans des bases de V et $W \perp H$ obtenues en juxtaposant des bases de $f^{-1}(Rad(W))$ et D pour V et de $Rad(W)$ et L pour $W \perp H$ la matrice de l'application f s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{f} & \epsilon \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

où $i : D \rightarrow L$ est une injection (préservant la forme quadratique) puisque $D \cap f^{-1}(Rad(W)) = 0$, et $\epsilon : D \rightarrow Rad(W)$ est une application linéaire. La matrice de g dans la même base est de la forme

$$\begin{pmatrix} \tilde{f} & \epsilon' \\ 0 & i' \end{pmatrix}$$

avec les mêmes conditions sur i' et ϵ' que précédemment.

Comme i et i' sont des injections préservant les formes quadratiques, à valeurs dans un espace quadratique non dégénéré, par le théorème de Witt, il existe $u \in O(L)$ tel que $ui = i'$. De plus, comme i est injective, il existe $\alpha : L \rightarrow Rad(W)$ tel que $\epsilon + \alpha i = \epsilon'$.

Considérons l'automorphisme l de $Rad(W) \perp L$ de matrice

$$\begin{pmatrix} Id & \alpha \\ 0 & u \end{pmatrix}$$

l'application lf a pour matrice

$$\begin{pmatrix} f|_{f^{-1}(\text{Rad}(W))} & \epsilon + \alpha i \\ 0 & ui \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f|_{f^{-1}(\text{Rad}(W))} & \epsilon' \\ 0 & i' \end{pmatrix}$$

dont on déduit que $lf = g$. Or, par le lemme 3.5, on a $l = Id_{\text{Rad}(W) \perp L}$ d'où : $f = g$ dans $\mathcal{E}_q^{\text{deg}}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}]$. \square

Nous avons donc démontré le résultat suivant :

Théorème 3.17. *Le foncteur $\tilde{\Psi} : \mathcal{E}_q^{\text{deg}} \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ défini à la proposition 3.12 induit une équivalence de catégories*

$$\Psi : \mathcal{E}_q^{\text{deg}}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}] \xrightarrow{\cong} Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$$

où \mathcal{E}_{inj}^f est la catégorie ayant pour objets les k -espaces vectoriels de dimension finie et pour morphismes les applications linéaires injectives.

Pour la catégorie $\mathcal{E}_{alt}^{\text{deg}}$, on démontre de manière similaire le théorème précédent.

Théorème 3.18. *Le foncteur $\tilde{\Psi} : \mathcal{E}_{alt}^{\text{deg}} \rightarrow Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$ défini comme à la proposition 3.12 mutatis mutandis induit une équivalence de catégories*

$$\Psi : \mathcal{E}_{alt}^{\text{deg}}[(- \perp \mathbf{H})^{-1}] \xrightarrow{\cong} Sp(\mathcal{E}_{inj}^f)$$

où \mathbf{H} désigne l'espace symplectique défini en 1.9.2.

3.2 Théorème fondamental

Dans l'énoncé suivant, $O_\infty(k)$ (resp. $Sp_\infty(k)$) désigne $\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} O_{n,n}(k)$ (resp. $\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} Sp_{2n}(k)$), la colimite étant prise conformément aux conventions de la section 1.

Dans ce qui suit, lorsque F est un foncteur depuis une catégorie d'espaces vectoriels, on note F^\vee la précomposition de F par le foncteur de dualité $(-)^* : F^\vee(V) = F(V^*)$ (tandis que F^* désigne, conformément à la notation de l'appendice A, la postcomposition de F par la dualité, lorsque \mathbb{k} est un corps).

On rappelle la notion classique (cf. [FFPS03]) de foncteur polynomial ou analytique dans $\mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k))$, où k est un corps : le *foncteur différence* est l'endofoncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k))$ noyau de l'épimorphisme scindé évident $(- \oplus k)^* \rightarrow Id$; un foncteur F est *polynomial* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta^n(F) = 0$ (son *degré* est alors le plus grand entier d tel que $\Delta^d(F) \neq 0$); un foncteur *analytique* est une colimite (qu'on peut supposer filtrante) de foncteurs polynomiaux.

Théorème 3.19. *Soient k un corps fini et F un foncteur analytique de $\mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k))$.*

Il existe des suites spectrales du premier quadrant, naturelles en F , données par

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^{\mathcal{E}^f(k)}(H_q(O_\infty(k); \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[S^2]^\vee, F) \Rightarrow H_{p+q}(O_\infty(k); F_\infty)$$

et

$$E_{p,q}^2 = \text{Tor}_p^{\mathcal{E}^f(k)}(H_q(Sp_\infty(k); \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[\Lambda^2]^\vee, F) \Rightarrow H_{p+q}(Sp_\infty(k); F_\infty).$$

Lorsque \mathbb{k} est un anneau de dimension homologique au plus 1, elles s'effondrent au terme E^2 et procurent des isomorphismes canoniques

$$H_n(O_\infty(k); F_\infty) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}_p^{\mathcal{E}^f(k)}(H_q(O_\infty(k); \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[S^2]^\vee, F)$$

et

$$H_n(Sp_\infty(k); F_\infty) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \text{Tor}_p^{\mathcal{E}^f(k)}(H_q(Sp_\infty(k); \mathbb{k}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[\Lambda^2]^\vee, F).$$

Avant de donner la démonstration de ce théorème, on donne quelques définitions, tirées pour la plupart de [Dja07] (dans une variante contravariante), puis un lemme reliant les différents foncteurs introduits. Les mentions au corps k sont sous-entendues.

Définition 3.20. La catégorie \mathcal{E}_{iso}^f est la sous-catégorie de \mathcal{E}^f ayant les mêmes objets et les isomorphismes pour morphismes.

La catégorie \mathcal{E}_{surj}^f est la sous-catégorie de \mathcal{E}^f ayant les mêmes objets et les surjections pour morphismes.

La catégorie \mathcal{E}_{Gr}^f est la catégorie des couples (V, W) formés d'un espace vectoriel de dimension finie V et d'un sous-espace vectoriel W , avec pour morphismes $(V, W) \rightarrow (V', W')$ les applications linéaires $f : V \rightarrow V'$ telles que $f(W) = W'$.

Dans la définition suivante nous donnons plusieurs foncteurs reliant les catégories $\mathcal{F}(\mathcal{E}_{iso}^f)$, $\mathcal{F}(\mathcal{E}_{surj}^f)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{E}_{Gr}^f)$.

Définition 3.21. Le foncteur $\beta : \mathcal{F}((\mathcal{E}_{iso}^f)^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}_{surj}^f)^{op})$ envoie un foncteur F sur le foncteur prenant les mêmes valeurs sur les objets et les isomorphismes et envoyant les surjections strictes sur 0.

Le foncteur $\rho : \mathcal{F}((\mathcal{E}_{surj}^f)^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op})$ est la précomposition par $(\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op} \rightarrow (\mathcal{E}_{surj}^f)^{op} \quad (V, W) \mapsto W$.

Le foncteur $\kappa : \mathcal{F}((\mathcal{E}^f)^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op})$ est la précomposition par $(\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op} \rightarrow (\mathcal{E}^f)^{op} \quad (V, W) \mapsto V/W$.

Le foncteur $\omega : \mathcal{F}((\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}^f)^{op})$ est défini par $\omega(X)(V) = \bigoplus_{W \subset V} X(V, W)$ et le fait que $\omega(X)(f)$, pour $f : V \rightarrow V'$ morphisme de \mathcal{E}^f , a pour composante $X(f) : X(V', W') \rightarrow X(V, W)$ si $f(W) = W'$ et 0 sinon (cf. proposition A.3).

Le foncteur $\gamma : \mathcal{F}((\mathcal{E}_q^{deg}[(- \oplus \mathbf{H})^{-1}])^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}_q^{deg})^{op})$ est la précomposition par le foncteur canonique $\phi : (\mathcal{E}_q^{deg})^{op} \rightarrow (\mathcal{E}_q^{deg}[(- \oplus \mathbf{H})^{-1}])^{op}$.

Le foncteur $\delta : \mathcal{F}((\mathcal{E}^f)^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}_{inj}^f)^{op})$ est la précomposition par le foncteur d'inclusion $(\mathcal{E}_{inj}^f)^{op} \rightarrow (\mathcal{E}^f)^{op}$.

Remarque 3.22. On rappelle qu'une forme quadratique sur un espace vectoriel V est un élément de $S^2(V^*)$. Par conséquent, pour k un corps commutatif (éventuellement de caractéristique 2), on a l'égalité :

$$\mathcal{E}_q^{deg} = (\mathcal{E}_{inj}^f)_{(S^2)^\vee}$$

où $(\mathcal{E}_{inj}^f)_{(S^2)^\vee}$ est la catégorie dont les objets sont les couples (V, α) où V est un objet de \mathcal{E}_{inj}^f et α est un élément de $S^2(V^*)$. On note $\Omega_{(S^2)^\vee} : \mathcal{F}((\mathcal{E}_q^{deg})^{op}) = \mathcal{F}(((\mathcal{E}_{inj}^f)_{(S^2)^\vee})^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}_{inj}^f)^{op})$ le foncteur défini à la proposition A.3.

La preuve du théorème 3.19 repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.23. *Le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}((\mathcal{E}_{iso}^f)^{op}) & \xrightarrow{\xi} & \mathcal{F}((Sp(\mathcal{E}_{inj}^f))^{op}) & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{F}((\mathcal{E}_q^{deg}[(- \oplus \mathbf{H})^{-1}])^{op}) & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{F}((\mathcal{E}_q^{deg})^{op}) \\ \downarrow \beta & & & & & & \downarrow \Omega_{(S^2)^\vee} \\ \mathcal{F}((\mathcal{E}_{surj}^f)^{op}) & \xrightarrow{\rho \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee)} & \mathcal{F}((\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op}) & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{F}((\mathcal{E}^f)^{op}) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{F}((\mathcal{E}_{inj}^f)^{op}) \end{array}$$

où η est induit par l'équivalence de catégories du théorème 3.17 et ξ est l'équivalence donnée dans le théorème C.5, commute à isomorphisme canonique près.

Démonstration. Soit α un objet de $\mathcal{F}((\mathcal{E}_{iso}^f)^{op})$. Son image dans $\mathcal{F}((\mathcal{E}_{inj}^f)^{op})$ en suivant le chemin supérieur est donnée par

$$V \mapsto \bigoplus_{q \in S^2(V^*)} \bigoplus_{W \subset Rad(V, q)} \alpha(W).$$

Sur les morphismes, une flèche $f : V \rightarrow V'$ de \mathcal{E}_{inj}^f est transformée en l'application linéaire dont la composante $\alpha(W') \rightarrow \alpha(W)$, pour $q \in S^2(V^*)$, $q' \in S^2(V'^*)$, $W \subset Rad(V, q)$ et $W' \subset Rad(V', q')$, est $\alpha(\bar{f})$ lorsque $S^2({}^t f)(q') = q$ et que f induit un isomorphisme $\bar{f} : W \rightarrow W'$ (i.e. $f(W) = W'$) et est nulle sinon.

On peut simplifier cette écriture en notant que la donnée d'une forme quadratique q sur V et d'un sous-espace W de V inclus dans son radical est équivalente à la donnée d'un sous-espace W

de V et d'une forme quadratique \bar{q} sur V/W . Notre foncteur devient alors

$$V \mapsto \bigoplus_{W \subset V} \alpha(W) \otimes \mathbb{k}[S^2((V/W)^*)].$$

Sur les morphismes, la composante $\alpha(W') \otimes \mathbb{k}[S^2((V'/W')^*)] \rightarrow \alpha(W) \otimes \mathbb{k}[S^2((V/W)^*)]$ induite par f est nulle si $f(W) \neq W'$ et est sinon égale au produit tensoriel de $\alpha(\bar{f})$ et du morphisme $\mathbb{k}[S^2((V'/W')^*)] \rightarrow \mathbb{k}[S^2((V/W)^*)]$ associant $[S^2({}^t f)(\bar{q}')] à $[\bar{q}]$ pour q' forme quadratique sur V' nulle sur W' . Ce dernier morphisme n'étant autre que $\kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee)(f)$, cela établit le lemme. $\square$$

Démonstration du théorème 3.19. On se contente d'établir l'assertion relative au groupe orthogonal, l'autre étant tout à fait analogue.

Compte-tenu de la proposition A.3, la suite spectrale du paragraphe 2.2 prend la forme :

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}_q^{deg}}(L_q, U^*F) \simeq \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}_{inj}^f}(\Omega_{(S^2)^\vee}(L_q), F) \Rightarrow H_{p+q}(O_\infty; F_\infty)$$

où $U : \mathcal{E}_q^{deg} = (\mathcal{E}_{inj}^f)_{(S^2)^\vee} \rightarrow \mathcal{E}_{inj}^f$ est le foncteur d'oubli (pour alléger, on a noté encore F la restriction de ce foncteur à \mathcal{E}_{inj}^f) et $L_q = \mathbb{L}_q Q_!(\mathbb{k})$.

La proposition 2.14 montre que les foncteurs L_q appartiennent à l'image essentielle du foncteur γ . Il existe donc, par le lemme précédent, des objets α_q de $\mathcal{F}((\mathcal{E}_{iso}^f)^{op})$ tels que $\Omega_{(S^2)^\vee}(L_q) \simeq \delta\omega(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee))$. Autrement dit, $\Omega_{(S^2)^\vee}(L_q)$ est isomorphe à la restriction à $(\mathcal{E}_{inj}^f)^{op}$ du foncteur $\omega(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee))$.

Comme F est par hypothèse analytique, on déduit d'un résultat fondamental de Scorichenko (théorème 3.2 de [Sco00]) que le morphisme canonique $\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}_{inj}^f}(\Omega_{(S^2)^\vee}(L_q), F) \rightarrow \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}^f}(\omega(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee)), F)$ est un isomorphisme (Scorichenko suppose le foncteur polynomial; on en déduit aussitôt le résultat pour un foncteur analytique par passage à la colimite filtrante).

Le caractère analytique de F implique également que le monomorphisme canonique $\lambda(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee)) \rightarrow \omega(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee))$, où $\lambda : \mathcal{F}((\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op}) \rightarrow \mathcal{F}((\mathcal{E}^f)^{op})$ désigne la précomposition par le foncteur $(\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow (\mathcal{E}_{Gr}^f)^{op} \quad V \mapsto (V, 0)$, induit un isomorphisme $\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}^f}(\lambda(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee)), F) \rightarrow \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}^f}(\omega(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee)), F)$. C'est un cas particulier de la variante homologique du résultat d'annulation cohomologique principal de l'article [Dja07] (voir son théorème 10.2.1 et son corollaire 10.2.2) — en fait, celui-ci ne procure le résultat que lorsque \mathbb{k} égale k , mais la même démonstration s'applique dans le cas général.

On note à présent que $\lambda(\rho\beta(\alpha_q) \otimes \kappa(\mathbb{k}[S^2]^\vee))$ est isomorphe à $\alpha_0 \otimes \mathbb{k}[S^2]^\vee$. Quant au \mathbb{k} -module α_0 , c'est la valeur en 0 du foncteur $\mathbb{L}_q Q_!(\mathbb{k})$, c'est-à-dire $H_q(O_\infty(k); \mathbb{k})$, d'après la proposition 2.13. Cela démontre la première partie du théorème. L'assertion relative à l'effondrement de la suite spectrale provient de la proposition 2.17. \square

Remarque 3.24. On vient de montrer que le morphisme naturel $\mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}_q^{deg}}(M, F) \rightarrow \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{E}_q^{deg}}(M, F)$, où M est un foncteur constant et F un foncteur analytique de $\mathcal{F}(\mathcal{E}^f(\mathbb{k}))$ (par abus on a omis la notation de précomposition par différents foncteurs d'oubli) est un isomorphisme.

Dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k))$, notée simplement $\mathcal{F}(k)$ voire \mathcal{F} , on désigne par I le foncteur $(\mathbb{k}[-]^\vee)^* : V \mapsto \mathbb{k}^{V^*}$. Par ailleurs, on rappelle que Γ^2 désigne la deuxième puissance divisée.

En utilisant la trivialité de l'homologie stable des groupes classiques sur un corps fini à coefficients dans le même corps (voir [FP78], chapitre 4), on déduit du théorème 3.19 le résultat suivant.

Corollaire 3.25. *Supposons $k = \mathbb{k}$. Si F est un foncteur analytique de $\mathcal{F}(k)$, il existe des isomorphismes naturels*

$$H_*(O_\infty(k); F_\infty) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(k[S^2]^\vee, F)$$

et

$$H_*(Sp_\infty(k); F_\infty) \simeq \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(k[\Lambda^2]^\vee, F).$$

Les duaux de ces espaces vectoriels s'identifient canoniquement à

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, I \circ \Gamma^2)$$

et

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, I \circ \Lambda^2)$$

respectivement.

Remarque 3.26. Pour ce corollaire, on peut se contenter du cas particulier du théorème de Scorichenko (invoqué dans la démonstration du théorème 3.19) établi précédemment par Suslin dans l'appendice de [FFSS99], et du résultat d'annulation cohomologique de [Dja07] sous sa forme originelle.

En utilisant les résultats de stabilité établis par Charney dans [Cha87], on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.27. *Sous les hypothèses précédentes, supposons de plus que F est polynomial de degré au plus d . Alors pour tous entiers i et n tels que $n \geq 2i + d + 6$, on a des isomorphismes naturels*

$$H_i(O_{n,n}(k); F(k^{2n}))^* \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, I \circ \Gamma^2)$$

et

$$H_i(Sp_{2n}(k); F(k^{2n}))^* \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, I \circ \Lambda^2).$$

4 Quelques calculs d'homologie de groupes orthogonaux et symplectiques

Nous allons maintenant illustrer les résultats de la section précédente par des calculs explicites de groupes d'homologie de groupes orthogonaux et symplectiques.

Convention 4.1. *Dans toute cette section, on suppose que $\mathbb{k} = k$ est un corps fini de caractéristique p et de cardinal $q = p^d$.*

On note simplement \mathcal{F} la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k))$.

Les mentions au corps k seront souvent omises.

Le motif de la restriction aux corps finis est double : d'une part, on dispose de théorèmes d'annulation pour l'homologie stable des groupes $O_\infty(k)$ et $Sp_\infty(k)$ à coefficients constants, ce qui permet de simplifier l'expression générale obtenue pour un corps commutatif quelconque (cf. corollaire 3.25); de surcroît, c'est seulement dans le cas des corps finis que des calculs d'algèbre homologique poussés dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k))$ ont été obtenus (cf. [FLS94] et [FFSS99]).

Nous obtiendrons des résultats pour les foncteurs exponentiels gradués (cf. appendice A) classiques : puissances extérieures, divisées, symétriques. Notre point de départ est le suivant, dans lequel $D : \mathcal{F}^{op} \rightarrow \mathcal{F}$ désigne le foncteur de dualité de \mathcal{F} composé commutatif de $(-)^V$ et $(-)^*$, donc donné par $(DF)(V) = F(V^*)^*$.

Proposition 4.2. *Soit E^\bullet un foncteur exponentiel gradué de \mathcal{F} . Pour tout entier n , il existe un isomorphisme gradué naturel*

$$\text{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(k[T^2]^V, E^n) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \text{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}((E^i)^V, E^j).$$

Le dual de cet espace vectoriel s'identifie à

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^n, I \circ T^2) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^j, DE^i). \quad (4)$$

Démonstration. La deuxième assertion s'obtient à partir de la première et de l'isomorphisme (8) de l'appendice A.

Utilisant l'adjonction entre les foncteurs exacts induits par la somme directe et la diagonale (cf. début de l'appendice B), l'équivalence de catégories $(-)^* : (\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$ et l'isomorphisme naturel $V^* \otimes W \simeq \text{Hom}_{\mathcal{E}^f}(V, W)$, puis l'isomorphisme (9) de l'appendice A, on obtient des isomorphismes gradués naturels

$$\begin{aligned} \text{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(k[T^2]^V, E^n) &\simeq \text{Tor}_*^{(\mathcal{E}^f)^{op} \times \mathcal{E}^f}(k[\text{Hom}_{\mathcal{E}^f}], (V, W) \mapsto E^n(V^* \oplus W)) \\ &\simeq HH_*(\mathcal{E}^f; (V, W) \mapsto E^n(V^* \oplus W)). \end{aligned}$$

Il suffit alors de développer $E^n(V^* \oplus W)$ à l'aide de la propriété exponentielle et d'utiliser l'expression de l'homologie de Hochschild d'un produit tensoriel extérieur comme groupe de torsion (cf. appendice A) pour conclure. \square

Remarque 4.3. Le substitut de propriété exponentielle indiqué dans la remarque B.2 permet d'obtenir d'une manière analogue, pour les puissances tensorielles, un isomorphisme gradué

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(k[T^2]^\vee, T^n) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}((T^i)^\vee, T^j) \otimes_{\mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_j} k[\mathfrak{S}_n].$$

Ces groupes peuvent être entièrement calculés; on laisse au lecteur le soin d'écrire les analogues des résultats de la suite de cette section en termes de puissances tensorielles.

Par la suite, nous utiliserons systématiquement la forme duale en termes d'Ext, car tous les calculs effectués dans la catégorie \mathcal{F} ont été donnés en termes de groupes d'extensions et non de torsion (cf. [FFPS03] par exemple).

La structure du foncteur T^2 dépendant de la parité de la caractéristique p de k , nous distinguons le cas p impair du cas $p = 2$ dans nos investigations ultérieures. Tandis que nous obtiendrons des calculs complets sur les foncteurs usuels dans le premier cas, nous ne pourrons donner que des résultats très partiels dans le second.

4.1 Calculs en caractéristique impaire

Convention 4.4. Dans tout ce paragraphe, on suppose p impair.

On suppose que E^\bullet est un foncteur exponentiel de Hopf commutatif ou anticommutatif de \mathcal{F} (cf. appendice A).

D'une manière générale, si $u : A \rightarrow B$ est une flèche de \mathcal{F} entre foncteurs sans terme constant (i.e. $A(0) = B(0) = 0$), on note $h(u) = (I \circ u)_* : \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ A) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ B)$ le morphisme d'algèbres de Hopf considéré dans la proposition B.4.

Par conséquent, le foncteur T^2 se scinde en somme des deux foncteurs simples $\Gamma^2 (\simeq S^2)$ et Λ^2 . La propriété exponentielle du foncteur I procure donc un isomorphisme $I \circ T^2 \simeq (I \circ \Gamma^2) \otimes (I \circ \Lambda^2)$. Comme le foncteur constant en k est facteur direct de I , $I \circ \Gamma^2$ et $I \circ \Lambda^2$ sont en particulier facteurs directs de $I \circ T^2$. Pour mener à bien nos calculs, nous avons besoin d'exprimer précisément l'effet des idempotents correspondant à cette décomposition sur les isomorphismes de la proposition 4.2.

À cette fin, on note τ l'involution du foncteur T^2 échangeant les deux facteurs du produit tensoriel puis $e_\Gamma = h(\frac{1+\tau}{2})$ et $e_\Lambda = h(\frac{1-\tau}{2})$ les deux idempotents de $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ T^2)$ dont les images respectives sont $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ \Gamma^2)$ et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ \Lambda^2)$. Le lemme suivant décrit leur effet sur les éléments primitifs.

Lemme 4.5. La restriction de e_Γ (resp. e_Λ) à l'espace vectoriel des éléments primitifs de l'algèbre de Hopf $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ T^2)$ est le projecteur $x \mapsto \frac{x+\bar{x}}{2}$ (resp. $x \mapsto \frac{x-\bar{x}}{2}$), où l'on note \bar{x} pour $h(\tau)(x)$.

Démonstration. Si x est un élément primitif d'une algèbre de Hopf H et que f et g sont deux endomorphismes de H , on a $(f * g)(x) = \mu \circ (f \otimes g)(1 \otimes x + x \otimes 1) = f(x) + g(x)$ (où μ désigne le produit de H). Cela fournit déjà, compte tenu de la proposition B.4.3, $e_\Gamma(x) = m_{1/2}(x + \bar{x})$ et $e_\Lambda(x) = m_{1/2}(x + m_{-1}(\bar{x}))$ (toujours pour x primitif), où l'on note m_λ pour l'image par h de la multiplication par $\lambda \in k$. Cela procure également les égalités $2m_{1/2}(x) = m_1(x) = x$ et $m_{-1}(x) + x = m_0(x) = 0$, d'où le lemme. \square

Le résultat suivant permettra, dans les cas usuels, de décrire l'involution $h(\tau)$ en termes explicites :

Lemme 4.6. Dans l'isomorphisme (4) de la proposition 4.2, l'involution $h(\tau)$ est donnée par les isomorphismes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^j, DE^i) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^i, DE^j)$ fournis par l'auto-adjonction du foncteur D .

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 4.2 en notant que si F est un objet de \mathcal{F} et G un objet de $\mathcal{F}((\mathcal{E}^f)^{op})$, le diagramme d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(G, F) & \longleftarrow & HH_*(\mathcal{E}^f; G \boxtimes F) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}], G \boxtimes F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(F^\vee, G^\vee) & \longleftarrow & HH_*(\mathcal{E}^f; F^\vee \boxtimes G^\vee) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{E}^f}(k[\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^f}], F^\vee \boxtimes G^\vee) \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par l'échange des facteurs et l'anti-équivalence de catégories $(-)^*$ commute. \square

Le lemme suivant permet de déterminer explicitement, via les résultats de [FFSS99], l'involution décrite dans l'énoncé précédent, lorsque E^\bullet est un foncteur exponentiel gradué usuel. On y note par abus $Id \in \text{Ob } \mathcal{F}$ le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}^f \hookrightarrow \mathcal{E}$.

Lemme 4.7. *L'involution sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, Id)$ induite par l'auto-adjonction du foncteur D et l'auto-dualité du foncteur Id est triviale.*

Démonstration. Franjou, Lannes et Schwartz ont déterminé dans l'article [FLS94] $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, Id)$: cet espace vectoriel gradué est de dimension 1 en degré pair et nul en degré impair ; comme algèbre, $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, Id)$ est une algèbre symétrique (donc en particulier commutative) sur des générateurs e_i de degré $2p^{i-1}$, pour $i > 0$ quotientée par l'idéal des puissances p -ièmes. L'involution donnée par la dualité étant un (anti)morphisme d'algèbre graduée, il suffit de vérifier qu'elle préserve les e_i .

Pour cela, nous aurons besoin d'utiliser la catégorie \mathcal{P} des foncteurs "polynomiaux stricts" sur k de Friedlander-Suslin (cf. [FS97]). Il existe un foncteur exact $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ compatible à la dualité (\mathcal{P} est munie d'une dualité analogue à celle de \mathcal{F}) tel que e_i est l'image d'un élément, traditionnellement encore noté de la même façon, appartenant à $\text{Ext}_{\mathcal{P}}^{2p^{i-1}}(Id^{(i)}, Id^{(i)})$, où $Id^{(i)}$ désigne le foncteur identité Id tordu i fois par le morphisme de Frobenius (cf. [FS97], § 4). De plus, le lemme 4.2 de [FS97] montre que e_1 est auto-dual. On utilise maintenant le corollaire 5.9 de [FFSS99] : il montre que l'image de e_i par le morphisme $\text{Ext}_{\mathcal{P}}^{2p^{i-1}}(Id^{(i)}, Id^{(i)}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}}^{2p^{i-1}}(\Gamma^{p^{i-1}(1)}, S^{p^{i-1}(1)})$ donné par le postcomposition par le morphisme de Frobenius (itéré et tordu) $Id^{(i)} \rightarrow S^{p^{i-1}(1)}$ et la précomposition par son dual (de sorte que ce morphisme est compatible à la dualité) envoie e_i sur $e_1^{p^{i-1}}$, où le produit est cette fois relatif à l'algèbre (trigradué) $\text{Ext}_{\mathcal{P}}^*(\Gamma^{*(1)}, S^{*(1)})$, dont la structure multiplicative, déduite des structures exponentielles duales de Γ^* et S^* , est compatible à la dualité. Il s'ensuit que e_i est auto-dual, d'où le lemme. \square

Lemme 4.8. *L'isomorphisme bigradué*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ T^2) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet)$$

de la proposition 4.2 est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

Démonstration. La compatibilité aux unités et counités est évidente.

En reprenant la démonstration de la proposition 4.2, on obtient, pour tout espace vectoriel L de dimension finie, un isomorphisme d'espaces vectoriels bigradués

$$\gamma_{E^\bullet, L} : \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ (T^2 \otimes L)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet \circ (Id \otimes L))$$

naturel en L et en E^\bullet (la naturalité en E^\bullet étant relative aux morphismes respectant la structure exponentielle) et se réduisant à celui de ladite proposition pour $L = k$.

De plus, le diagramme suivant d'isomorphismes commute

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ T^2)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\gamma_{E^\bullet, k}^{\otimes 2}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet)^{\otimes 2} \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ (T^2 \otimes k^2)) & \xrightarrow{\gamma_{E^\bullet, k^2}} & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet \circ (Id \otimes k^2)) \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par la proposition B.3 via les isomorphismes $I \circ (T^2 \otimes k^2) \simeq (I \circ T^2)^{\otimes 2}$ et $DE^\bullet \circ (Id \otimes L) \simeq (DE^\bullet)^{\otimes 2}$ (déduits de la propriété exponentielle de I et DE^\bullet). Cela provient de la naturalité en E^\bullet de l'isomorphisme précédent et du fait que l'isomorphisme $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, F \otimes G) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, F) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, G)$ se définit à partir du coproduit $E^\bullet \rightarrow E^\bullet \otimes E^\bullet$ qui est un morphisme de foncteurs exponentiels parce que E^\bullet est supposé (anti)commutatif, ce qui permet de se ramener à la propriété suivante de compatibilité de γ au produit tensoriel : les diagrammes du type

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ (T^2 \otimes L)) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E'^\bullet, I \circ (T^2 \otimes L')) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet \otimes E'^\bullet, I \circ (T^2 \otimes (L \oplus L'))) \\ \downarrow \gamma_{E^\bullet, L} \otimes \gamma_{E'^\bullet, L'} & & \downarrow \gamma_{E^\bullet \otimes E'^\bullet, L \oplus L'} \\ \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet \circ (Id \otimes L)) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E'^\bullet, DE'^\bullet \circ (Id \otimes L')) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet \otimes E'^\bullet, D(E^\bullet \otimes E'^\bullet) \circ (Id \otimes (L \oplus L'))) \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont induites par le produit tensoriel, commutent ; cette propriété se vérifie par inspection.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ T^2)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\gamma_{E^\bullet, k}^{\otimes 2}} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet)^{\otimes 2} \\
\downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ (T^2 \otimes k^2)) & \xrightarrow{\gamma_{E^\bullet, k^2}} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet \circ (Id \otimes k^2)) \\
\downarrow h(Id \otimes s) & & \downarrow (DE^\bullet)(Id \otimes s)_* \\
\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ T^2) & \xrightarrow{\gamma_{E^\bullet, k}} & \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet)
\end{array}$$

dans lequel $s : k^2 \rightarrow k$ désigne la somme permet de conclure quant à la compatibilité de $\gamma_{E^\bullet, k}$ aux produits ; le cas des coproduits s'établit de manière analogue. \square

Nous rappelons maintenant le premier point du théorème 6.3 de [FFSS99], dans la version bigraduée (moins précise que la version trigraduée originelle) qui nous intéresse, où l'assertion relative à la dualité se déduit du lemme 4.7 :

Théorème 4.9 (Franjou-Friedlander-Scorichenko-Suslin). *L'algèbre de Hopf bigraduée $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Gamma^\bullet, S^\bullet)$ est une algèbre symétrique sur des générateurs primitifs $a_{m,s}$ (resp. $b_{m,s}$) de bidegré $(2q^s m, q^s + 1)$ indexés par des entiers $m \geq 0$ et $s \geq 0$ (resp. $s > 0$). De plus, pour $s > 0$, $a_{m,s}$ et $b_{m,s}$ sont duaux, et $a_{m,0}$ est auto-dual.*

En appliquant la proposition 4.2 et les lemmes 4.8, 4.5 et 4.6, on en déduit le théorème suivant, qui calcule (à dualisation près) les espaces vectoriels bigradués $H_*(O_\infty, \Gamma_\infty^\bullet)$ et $H_*(Sp_\infty, \Gamma_\infty^\bullet)$ (sur le corps à q éléments) d'après le corollaire 3.25 (et même $H_i(O_{n,n}, \Gamma^j(\mathbb{F}_q^{2n}))$ et $H_i(Sp_{n,n}, \Gamma^j(\mathbb{F}_q^{2n}))$ pour $n \geq 2i + j + 6$ par le corollaire 3.27).

Théorème 4.10. *L'algèbre de Hopf bigraduée $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Gamma^*, I \circ \Gamma^2)$ (resp. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Gamma^*, I \circ \Lambda^2)$) est une algèbre symétrique sur des générateurs primitifs $\alpha_{m,s}$ (resp. $\beta_{m,s}$) de bidegré $(2q^s m, q^s + 1)$ indexés par des entiers $m \geq 0$ et $s \geq 0$ (resp. $s > 0$).*

En procédant de façon similaire, utilisant cette fois la dernière assertion du théorème 6.3 de [FFSS99], on obtient le résultat suivant, qui calcule pour sa part $H_*(O_\infty, \Lambda_\infty^\bullet)$ et $H_*(Sp_\infty, \Lambda_\infty^\bullet)$.

Théorème 4.11. *L'algèbre de Hopf bigraduée $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Lambda^*, I \circ \Gamma^2)$ (resp. $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\Gamma^*, I \circ \Lambda^2)$) est une algèbre à puissances divisées sur des générateurs primitifs $\alpha_{m,s}$ (resp. $\beta_{m,s}$) de bidegré $(2q^s m + q^s - 1, q^s + 1)$ indexés par des entiers $m \geq 0$ et $s \geq 0$ (resp. $s > 0$).*

Remarque 4.12. Pour mener à bien ses calculs de groupes d'extensions dans la catégorie \mathcal{F} , l'article [FFSS99] commence par déterminer les groupes d'extensions entre les mêmes foncteurs, tordus par des itérations du morphisme de Frobenius, dans la catégorie \mathcal{P} des foncteurs polynomiaux stricts. En jouant sur la torsion de Frobenius, les auteurs définissent des groupes $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}}^*$ à partir des groupes d'extensions dans \mathcal{P} . Ils obtiennent (corollaire 6.2 de [FFSS99]), lorsque E^\bullet est un foncteur exponentiel de Hopf strictement polynomial (anti)commutatif (hypothèses vérifiées par Γ^\bullet , Λ^\bullet et S^\bullet), un isomorphisme d'algèbres de Hopf trigraduées

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet) \simeq \bigotimes_{s \geq 0} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}}^*(E^{\bullet(sd)}, DE^\bullet) \otimes \bigotimes_{t > 0} \mathrm{Ext}_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^{\bullet(td)})$$

(où les entiers placés en exposant entre parenthèses indiquent le nombre d'application de la torsion de Frobenius).

Curieusement, dans le cas des théorèmes 4.10 et 4.11, la décomposition

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, DE^\bullet) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ T^2) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ \Gamma^2) \otimes \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(E^\bullet, I \circ \Lambda^2)$$

(où le dernier isomorphisme se déduit de la propriété exponentielle de \mathcal{E}^\bullet) que nous obtenons est isomorphe (dans la catégorie des algèbres de Hopf bigraduées) à la décomposition précédente. Nous ne savons pas expliquer conceptuellement ce phénomène.

Pour déterminer par la même méthode $H_*(O_\infty, S_\infty^\bullet)$ et $H_*(Sp_\infty, S_\infty^\bullet)$, nous avons besoin de connaître $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(S^\bullet, \Gamma^\bullet)$. Ce calcul, manquant dans [FFSS99], a été effectué récemment par Chałupnik dans [Cha08], corollaire 4.6 (toujours en transitant par la catégorie \mathcal{P}). On laisse au lecteur le soin d'écrire le résultat, un petit peu plus technique, obtenu.

4.2 Un calcul en caractéristique 2

Convention 4.13. Dans ce paragraphe, k est le corps à 2 éléments \mathbb{F}_2 .

On pourrait procéder de manière analogue sur tout corps fini de caractéristique 2, mais nous nous restreignons à ce cas car nous nous appuyons sur des résultats de Troesch qui n'ont été énoncés que sur des corps premiers.

Sur \mathbb{F}_2 , le foncteur T^2 n'est pas semi-simple, et Γ^2 n'est pas simple (il n'est pas non plus isomorphe à S^2) : on a des suites exactes courtes non scindées

$$0 \rightarrow \Lambda^2 \rightarrow \Gamma^2 \rightarrow Id \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \Gamma^2 \rightarrow T^2 \rightarrow \Lambda^2 \rightarrow 0,$$

où la flèche $\Gamma^2 \rightarrow Id$ ("Verschiebung") est duale du morphisme de Frobenius $Id \rightarrow S^2$.

Nous calculerons seulement les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, I \circ \Gamma^2)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, I \circ \Lambda^2)$, la détermination complète de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, I \circ \Gamma^2)$ ou $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, I \circ \Lambda^2)$ semblant hors de portée lorsque F est un foncteur polynomial de degré strictement supérieur à 1.

De fait, les foncteurs $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, -)$ jouissent de la remarquable propriété suivante (qui est vraie sur tout corps fini premier), établie dans [Tro02] (théorème 3.1) :

Théorème 4.14 (Troesch). Soient C^\bullet un complexe exact d'objets de \mathcal{F} sans terme constant et F un foncteur analytique de \mathcal{F} . On a

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, H^*(F \circ C^\bullet)) = 0.$$

(Troesch énonce ce résultat seulement pour F polynomial, mais le résultat général s'en déduit aussitôt par passage à la colimite filtrante, puisque Id possède une résolution projective de type fini, d'après un résultat classique de Schwartz, établi par exemple dans [FLS94], proposition 10.1.)

Par conséquent, les deux suites exactes précédentes induisent après postcomposition par I (le caractère analytique de ce foncteur est un fait classique — cf. par exemple [FFPS03]) des suites exactes longues :

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^{i-1}(Id, I) \rightarrow \text{Ext}^i(Id, I \circ \Lambda^2) \rightarrow \text{Ext}^i(Id, I \circ \Gamma^2) \rightarrow \text{Ext}^i(Id, I) \rightarrow \dots$$

et

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^i(Id, I \circ T^2) \rightarrow \text{Ext}^i(Id, I \circ \Lambda^2) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(Id, I \circ \Gamma^2) \rightarrow \text{Ext}^{i+1}(Id, I \circ T^2) \rightarrow \dots$$

Mais $\text{Ext}^i(Id, I)$ est nul pour $i \neq 0$ et isomorphe à \mathbb{F}_2 pour $i = 0$, tandis que $\text{Ext}^i(Id, I \circ T^2) = 0$ pour tout i d'après la proposition 4.2. On en déduit aussitôt :

Théorème 4.15. Le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(Id, I \circ \Gamma^2)$ est de dimension 1 pour $i \geq 2$ et nul sinon.

Le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(Id, I \circ \Lambda^2)$ est de dimension 1 pour $i \geq 1$ et nul pour $i = 0$.

Remarque 4.16. De façon similaire on obtient que $\text{Ext}^i(Id, I \circ S^2)$ est de dimension 1 pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On en déduit, par le corollaire 3.27 :

Corollaire 4.17. Soient n et i des entiers naturels tels que $n \geq 2i+7$. L'espace vectoriel $H_i(O_{n,n}(\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2^{2n})$ (resp. $H_i(Sp_{2n}(\mathbb{F}_2), \mathbb{F}_2^{2n})$) est de dimension 1 pour $i \geq 2$ (resp. $i \geq 1$) et nul sinon.

A Algèbre homologique dans les catégories de foncteurs

Soit \mathcal{C} une petite catégorie; on rappelle que l'on note $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs de source \mathcal{C} et de but la catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$. Nous rappelons dans cet appendice quelques résultats homologiques élémentaires et bien connus de cette catégorie, qui se comporte à plusieurs égards comme une catégorie de modules (elle est d'ailleurs parfois notée $\mathcal{C} - \mathbf{mod}$).

Cette catégorie est abélienne, l'exactitude se testant au but. Elle possède toutes limites et colimites, qui se calculent au but. (On renvoie, par exemple, à [Gab62] pour les généralités sur les catégories abéliennes.) C'est même une catégorie de Grothendieck : elle possède un générateur et les colimites filtrantes sont exactes. On peut préciser le premier point de la façon suivante : pour tout objet i de \mathcal{C} , on note $P_i^{\mathcal{C}}$ le foncteur $\mathbb{k}[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, -)]$ (où $\mathbb{k}[E]$ désigne le \mathbb{k} -module libre de base

E). Le lemme de Yoneda procure un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(P_i^{\mathcal{C}}, F) \simeq F(i)$, d'où l'on déduit que les $P_i^{\mathcal{C}}$ sont projectifs et engendrent $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. On les appelle parfois *générateurs projectifs standard* de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Le *produit tensoriel au-dessus de \mathcal{C}* (cf. par exemple l'appendice C de [Lod98]) est le foncteur $\otimes_{\mathcal{C}} : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}) \times \mathcal{F}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$ donné ainsi : pour $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ et $G \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\mathcal{C})$, $F \otimes_{\mathcal{C}} G$ est le quotient de $\bigoplus_{i \in \mathrm{Ob} \mathcal{C}} F(i) \otimes G(i)$ (on rappelle que les produits tensoriels non spécifiés sont pris sur \mathbb{k})

par le sous-module engendré par les éléments du type $F(f)(x') \otimes y - x' \otimes G(f)(y)$ pour $i \xrightarrow{f} i'$ flèche de \mathcal{C} , $y \in G(i)$ et $x' \in F(i')$.

Le bifoncteur $\otimes_{\mathcal{C}}$ commute aux colimites en chaque variable. Il possède des propriétés de commutativité et d'associativité évidentes. De plus, on a des isomorphismes naturels

$$P_i^{\mathcal{C}^{op}} \otimes_{\mathcal{C}} G \simeq G(i) \quad \text{et} \quad F \otimes_{\mathcal{C}} P_i^{\mathcal{C}} \simeq F(i).$$

Une autre manière de caractériser le produit tensoriel est l'adjonction suivante :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}}(F \otimes_{\mathcal{C}} G, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(G, \mathcal{H}om_{\mathbb{k}}(F, V)), \quad (5)$$

où, pour $V \in \mathrm{Ob} \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$ et $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$, $\mathcal{H}om_{\mathbb{k}}(F, V)$ désigne l'objet de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ donné par $C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}}(F(C), V)$.

Pour des raisons standard d'algèbre homologique, dériver à gauche le bifoncteur $\otimes_{\mathcal{C}}$ relativement à l'une ou l'autre des variables donne des résultats canoniquement isomorphes, notés $\mathrm{Tor}_{*}^{\mathcal{C}}$. (On peut aussi définir ces groupes comme l'homologie d'un complexe simplicial explicite — cf. [Lod98], appendice C, par exemple.)

Un foncteur $G \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\mathcal{C})$ est dit *plat* si $- \otimes_{\mathcal{C}} G$ est exact. Tout foncteur projectif est plat, et les foncteurs plats sont stables par colimite filtrante. Comme dans le cas des modules, on peut remplacer, pour calculer les groupes de torsion sur \mathcal{C} , les résolutions projectives par des résolutions plates.

Dans les catégories de foncteurs, nous aurons besoin du résultat suivant déduit de la théorie de l'obstruction des complexes de chaînes exposée par Dold dans [Dol60] ; ce n'est qu'une transposition au cas des catégories de foncteurs de type $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ de la proposition 1.6 de l'article [Pir00b] de Pirashvili exprimée en termes de Γ -modules.

Proposition A.1 (Pirashvili). *Soient $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\mathcal{C})$ et C_{\bullet} un complexe de chaînes \mathbb{N} -gradué d'objets projectifs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$.*

1. *Il existe une suite spectrale du premier quadrant*

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{C}}(H_q(C_{\bullet}), F) \Rightarrow H_{p+q}(C_{\bullet} \otimes_{\mathcal{C}} F).$$

2. *Supposons que*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})}^{m-n+1}(H_n(C_{\bullet}), H_m(C_{\bullet})) = 0 \quad \text{pour} \quad n < m \quad (6)$$

alors, la suite spectrale s'effondre au terme E^2 ; de plus, il existe une décomposition :

$$H_n(C_{\bullet} \otimes_{\mathcal{C}} F) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{C}}(H_q(C_{\bullet}), F) \quad (7)$$

naturelle en F .

L'isomorphisme (5) montre que le produit tensoriel au-dessus de \mathcal{C} est en quelque sorte dual du foncteur Hom sur $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Cela fonctionne particulièrement bien lorsque \mathbb{k} est un corps ; on note alors F^* pour $\mathcal{H}om_{\mathbb{k}}(F, \mathbb{k})$, la post-composition de F par le foncteur de dualité des espaces vectoriels, noté $V \mapsto V^*$. L'exactitude de cette dualité donne alors un isomorphisme naturel gradué

$$\mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}(F, G)^* \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{C})}(G, F^*). \quad (8)$$

L'*homologie* de la catégorie \mathcal{C} à coefficients dans un foncteur $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}(\mathcal{C})$ est par définition le \mathbb{k} -module gradué $\mathrm{Tor}_{*}^{\mathcal{C}}(\mathbb{k}, F)$ (où \mathbb{k} désigne le foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ constant en \mathbb{k}), qui est noté $H_{*}(\mathcal{C}; F)$.

On remarque que $H_0(\mathcal{C}; F)$ s'identifie canoniquement à la colimite du foncteur F . Lorsque \mathcal{C} est la catégorie à un objet associée à un groupe (ou plus généralement un monoïde) G , F se réduit à un $\mathbb{k}[G]$ -module et l'on retrouve la notion habituelle d'homologie du groupe G (ou plus généralement de groupes de torsion sur G). Par ailleurs, le module gradué $H_*(\mathcal{C}; \mathbb{k})$ à coefficients dans le foncteur constant s'identifie à l'homologie singulière du nerf de \mathcal{C} .

Une généralisation de l'homologie et des groupes de torsion (modulo une hypothèse de projectivité sur les coefficients) sur la catégorie \mathcal{C} est celle d'homologie des bifoncteurs, i.e. des objets de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})$. Comme cette notion correspond, dans le cas d'une catégorie à un objet, à celle d'homologie de Hochschild de l'algèbre du monoïde associé, nous noterons HH_* cette théorie homologique. Si B est un tel bifoncteur, on définit $HH_0(\mathcal{C}; B)$ comme le quotient de $\bigoplus_{i \in \text{Ob } \mathcal{C}} B(i, i)$ par le sous-module engendré par les éléments du type $B(f, id_i)(x) - B(id_j, f)(x)$ pour i, j objets de \mathcal{C} , $x \in B(j, i)$ et $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j)$. Le foncteur $HH_0(\mathcal{C}, -)$ est exact à droite; les \mathbb{k} -modules $HH_i(\mathcal{C}; B)$ sont par définition l'évaluation en B de ses foncteurs dérivés. Si B est un produit tensoriel extérieur $F \boxtimes G$ avec $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ et $G \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C})$, i.e. $B(i, j) = F(i) \otimes G(j)$, et que l'un des foncteurs F et G a pour valeurs des \mathbb{k} -modules projectifs, on a $HH_*(\mathcal{C}; B) = \text{Tor}_*^{\mathcal{C}}(F, G)$ (c'est vrai sans hypothèse en degré 0).

Une autre description de HH_* est donnée par l'isomorphisme gradué naturel suivant :

$$HH_*(\mathcal{C}; B) \simeq \text{Tor}_*^{\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}}(\mathbb{k}[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)], B) \quad (9)$$

(cf. [Lod98], appendice C, par exemple).

L'homologie de \mathcal{C} à coefficients dans un bifoncteur (et de même les groupes de torsion sur \mathcal{C}) possède une functorialité en \mathcal{C} : si $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur entre petites catégories et B un objet de $\text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})$, on dispose d'un morphisme canonique $HH_*(\mathcal{D}; Q^*(B)) \rightarrow HH_*(\mathcal{C}; B)$, où l'étoile indique la précomposition et où l'on note par abus encore Q pour $Q^{op} \times Q : \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$. En degré 0, il se définit en constatant que le morphisme évident

$$\bigoplus_{j \in \text{Ob } \mathcal{D}} B(Q(j), Q(j)) \rightarrow \bigoplus_{i \in \text{Ob } \mathcal{C}} B(i, i)$$

induit un morphisme $HH_0(\mathcal{D}; Q^*(B)) \rightarrow HH_0(\mathcal{C}; B)$, qu'on prolonge ensuite en un morphisme de foncteurs homologiques (c'est possible par exactitude de Q^*). C'est un isomorphisme si Q est une équivalence de catégories.

Il existe un analogue de la notion de foncteurs adjoints pour le produit tensoriel au-dessus d'une petite catégorie. Le cas qui nous intéresse est celui correspondant aux extensions de Kan, qu'on peut traiter de façon analogue :

Proposition A.2. *Soient \mathcal{C} et \mathcal{D} des petites catégories et $Q : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur. Il existe un foncteur $Q_! : \mathcal{F}(\mathcal{D}^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$, unique à isomorphisme canonique près, tel qu'il existe un isomorphisme naturel*

$$F \otimes_{\mathcal{D}} Q^*(G) \simeq Q_!(F) \otimes_{\mathcal{C}} G$$

pour $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{D}^{op})$ et $G \in \text{Ob } \mathcal{F}(\mathcal{C})$ (où Q^* désigne la précomposition par Q). On peut définir $Q_!$ par

$$Q_!(F)(a) = F \otimes_{\mathcal{D}} Q^*(P_a^{\mathcal{C}}). \quad (10)$$

Le foncteur $Q_!$ est exact à droite; il commute même à toutes les colimites. Ses foncteurs dérivés à gauche sont donnés par

$$\mathbb{L}_i Q_!(F)(a) = \text{Tor}_i^{\mathcal{D}}(F, Q^*(P_a^{\mathcal{C}})). \quad (11)$$

De plus, le foncteur $Q_!$ est adjoint à gauche au foncteur $(Q^{op})^* : \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{D}^{op})$; son effet sur les projectifs standard est donné par un isomorphisme naturel

$$Q_!(P_b^{\mathcal{D}^{op}}) \simeq P_{Q(b)}^{\mathcal{C}^{op}}.$$

La démonstration, qui consiste en une variation sur le lemme de Yoneda, est laissée au lecteur.

Nous terminons ces rappels par un résultat plus particulier qui intervient dans la section 3.

Proposition A.3. Soient X un foncteur de \mathcal{C}^{op} vers la catégorie des ensembles et \mathcal{C}_X la catégorie dont les objets sont les couples (i, x) formés d'un objet i de \mathcal{C} et d'un élément x de $X(i)$, les morphismes $(i, x) \rightarrow (j, y)$ étant les morphismes $f : i \rightarrow j$ de \mathcal{C} tels que $X(f)(y) = x$. On note $U : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur d'oubli (donné sur les objets par $(i, x) \mapsto i$), et $\Omega_X : \mathcal{F}((\mathcal{C}_X)^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}^{op})$ le foncteur donné par

$$\Omega_X(F)(i) = \bigoplus_{x \in X(i)} F(i, x),$$

le morphisme $\Omega_X(F)(f) : \Omega_X(F)(i) \rightarrow \Omega_X(F)(j)$ induit par un morphisme $f : i \rightarrow j$ de \mathcal{C}^{op} ayant pour composante $F(i, x) \rightarrow F(j, y)$ l'application induite par F si $X(f)(i) = j$ et 0 sinon.

Il existe un isomorphisme gradué

$$\mathrm{Tor}^{\mathcal{C}_X}(F, U^*(G)) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathcal{C}}(\Omega_X(F), G)$$

naturel en les objets F de $\mathcal{F}((\mathcal{C}_X)^{op})$ et G de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$.

Ce résultat élémentaire est la traduction en terme de foncteur Tor des adjonctions étudiées dans le §3.1 de [Dja07]. Le cas du degré 0 se déduit de la formule (10); l'exactitude du foncteur Ω_X permet de propager l'isomorphisme en tout degré homologique.

Le cas des coefficients constants est ce que Loday nomme *lemme de Shapiro pour l'homologie des petites catégories* ([Lod98], appendice C.12).

B Foncteurs exponentiels

Dans cet appendice, on s'intéresse uniquement à la catégorie $\mathcal{F}(k) = \mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k))$ des foncteurs de source $\mathcal{E}^f(k)$ et de but $\mathcal{E}(k)$. On notera également $\mathcal{F}_2(k) = \mathcal{F}(\mathcal{E}^f(k) \times \mathcal{E}^f(k))$.

Les notions que nous rappelons sont classiques : on pourra se référer à [FFSS99].

Notons $\pi : \mathcal{E}^f(k) \times \mathcal{E}^f(k) \rightarrow \mathcal{E}^f(k)$ le foncteur de somme directe et $\delta : \mathcal{E}^f(k) \rightarrow \mathcal{E}^f(k) \times \mathcal{E}^f(k)$ le foncteur d'inclusion diagonale. Chacun d'entre eux est adjoint à droite et à gauche à l'autre. Il en résulte que la même propriété vaut pour les foncteurs de précomposition $\pi^* : \mathcal{F}(k) \rightarrow \mathcal{F}_2(k)$ et $\delta^* : \mathcal{F}_2(k) \rightarrow \mathcal{F}(k)$. Cette observation simple s'avère tout à fait efficace pour traiter des foncteurs possédant la propriété suivante.

- Définition B.1.**
1. Un *foncteur exponentiel* de $\mathcal{F}(k)$ est un objet E de $\mathcal{F}(k)$ muni d'un isomorphisme $E(0) \simeq k$ et d'un isomorphisme entre les objets $\pi^*(E)$ et $E \boxtimes E$ de $\mathcal{F}_2(k)$ (i.e. d'un isomorphisme $E(U \oplus V) \simeq E(U) \otimes E(V)$ naturel en les objets U et V de \mathcal{E}_k^f).
 2. Un *foncteur exponentiel gradué* de $\mathcal{F}(k)$ est une suite $E^\bullet = (E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets de $\mathcal{F}(k)$ prenant des valeurs de dimension finie muni d'un isomorphisme $E^0 \simeq k$ (foncteur constant) et d'un isomorphisme gradué $\pi^*(E^\bullet) \simeq E^\bullet \boxtimes E^\bullet$ (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un isomorphisme $\pi^*(E^n) \simeq \bigoplus_{i+j=n} E^i \boxtimes E^j$).
 3. Soit E un foncteur exponentiel, éventuellement gradué, de $\mathcal{F}(k)$. Si la structure exponentielle de E est compatible aux isomorphismes d'associativité de la somme directe et du produit tensoriel¹, on dit que E est un *foncteur exponentiel de Hopf*.

Par exemple, les foncteurs projectifs standard de $\mathcal{F}(k)$ et leurs duaux, les foncteurs injectifs standard de $\mathcal{F}(k)$ sont des foncteurs exponentiels de Hopf. Les foncteurs puissance symétrique S^* , puissance divisée Γ^* (dual gradué du précédent) et puissance extérieure Λ^* sont exponentiels

¹Cela signifie que le diagramme évident d'isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} E((U \oplus V) \oplus W) & \longrightarrow & E(U \oplus (V \oplus W)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(U \oplus V) \otimes E(W) & & E(U) \otimes E(V \oplus W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E(U) \otimes E(V)) \otimes E(W) & \longrightarrow & E(U) \otimes (E(V) \otimes E(W)) \end{array}$$

commute pour tous $U, V, W \in \mathrm{Ob} \mathcal{E}^f(k)$.

gradués de Hopf. (Cela provient directement des propriétés universelles qui les caractérisent.) De plus, S^* et Γ^* sont commutatifs et Λ^* est anticommutatif (au sens gradué) en un sens évident, qui est précisé dans [FFSS99], page 675.

Noter que les composantes d'un foncteur exponentiel gradué sont des foncteurs polynomiaux.

Remarque B.2. Le foncteur gradué puissance tensorielle T^* n'est pas exponentiel, mais il possède une propriété analogue dont on peut se servir dans les calculs d'une façon similaire à la propriété exponentielle : la formule du binôme se traduit par un isomorphisme

$$\pi^*(T^n) \simeq \bigoplus_{i+j=n} (T^i \boxtimes T^j) \otimes_{\mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_j} k[\mathfrak{S}_n],$$

où le groupe symétrique \mathfrak{S}_l agit par permutation des facteurs du produit tensoriel et le groupe $\mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_j$ est plongé de manière usuelle dans \mathfrak{S}_{i+j} .

La proposition suivante est une partie du théorème 1.7 de [FFSS99] ; sa démonstration repose essentiellement sur l'adjonction entre les foncteurs π^* et δ^* évoquée plus haut et son prolongement aux groupes d'extensions (qui découle de leur exactitude).

Proposition B.3. *Soient E^* un foncteur exponentiel gradué et F, G deux foncteurs de $\mathcal{F}(k)$. Il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un isomorphisme gradué*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^n, F \otimes G) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^i, F) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^j, G)$$

naturel en F et G .

(Autrement dit, on dispose d'un isomorphisme bigradué $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F \otimes G) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, G)$.)

Si E est un foncteur exponentiel, éventuellement gradué, on dispose de morphismes $k \simeq E(0) \rightarrow E$, appelé *unité*, $E \rightarrow E(0) \simeq k$, appelé *coïunité*, $E \otimes E = \delta^*(E \boxtimes E) \simeq \delta^*\pi^*(E) \rightarrow E$ (induit par la coïunité de l'adjonction), appelé *produit*, $E \rightarrow E \otimes E = \delta^*(E \boxtimes E) \simeq \delta^*\pi^*(E)$, appelé *coproduit*, et $E(-id) : E \rightarrow E$, appelé *antipode*. On vérifie facilement (cf. [FFSS99]) que ces applications font de E une *algèbre de Hopf* (graduée connexe si E est gradué) dans la catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{F}(k), \otimes, k)$ lorsque E est un foncteur exponentiel de Hopf (c'est en fait une caractérisation des foncteurs exponentiels de Hopf).

Ce type de structure est utile pour définir des *produits de convolution*. Supposons en effet que E^\bullet est un foncteur exponentiel de Hopf et F un foncteur de $\mathcal{F}(k)$ muni d'une structure d'algèbre. Alors $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F)$ est une algèbre bigraduée pour le produit, dit de convolution,

$$* : \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F \otimes F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F),$$

où l'isomorphisme est donné par la proposition B.3 et la seconde flèche est induite par le produit de F ; l'unité de ce produit est donné par l'élément de $\text{Hom}_{\mathcal{F}(k)}(E^0, F) \simeq F(0)$ unité de l'algèbre F .

Si F est un foncteur muni d'une structure de cogèbre, on définit de même un coproduit sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F)$ comme le morphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F \otimes F) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F)$$

où la première flèche provient du coproduit de F . Lorsque F est muni d'une structure d'algèbre de Hopf dans $\mathcal{F}(k)$, on obtient sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F)$ une structure de k -algèbre de Hopf bigraduée (l'antipode étant induite par celle de F), connexe si $F(0) = k$.

Proposition B.4. *Soient E^\bullet un foncteur exponentiel gradué de Hopf de $\mathcal{F}(k)$ et F un foncteur muni d'une structure d'algèbre (resp. d'algèbre de Hopf) dans la catégorie monoïdale symétrique $(\mathcal{F}(k), \otimes, k)$.*

1. *Si A est un foncteur sans terme constant (i.e. $A(0) = 0$) de $\mathcal{F}(k)$, la structure d'algèbre (resp. d'algèbre de Hopf) de F induit une structure d'algèbre (resp. d'algèbre de Hopf) sur $F \circ A$.*
2. *Si $u : A \rightarrow B$ est un morphisme entre foncteurs sans terme constant de $\mathcal{F}(k)$, $\text{Ext}^*(E^\bullet, F(u)) : \text{Ext}^*(E^\bullet, F \circ A) \rightarrow \text{Ext}^*(E^\bullet, F \circ B)$ est un morphisme de k -algèbres (resp. de k -algèbres de Hopf) bigraduées. Ce morphisme sera noté $h(u)$.*

3. Si $v : A \rightarrow B$ est un autre tel morphisme et que F est un foncteur exponentiel de Hopf, on a $h(u + v) = h(u) * h(v)$.

Démonstration. Les deux premières assertions sont immédiates. Pour la dernière, on écrit $u + v$ comme la composée $A \hookrightarrow A \oplus A \xrightarrow{u \oplus v} B \oplus B \rightarrow B$, où le premier morphisme est la diagonale et le dernier la somme, puis on considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* A) & & \\
\downarrow & \searrow & \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_*(A \oplus A)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* A \otimes F_* A) & \xrightarrow{\simeq} & \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* A) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* A) \\
\downarrow h(u \oplus v) & & \downarrow h(u) \otimes h(v) \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_*(B \oplus B)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* B \otimes F_* B) & \xrightarrow{\simeq} & \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* B) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* B) \\
\downarrow & \swarrow & \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}(k)}^*(E^\bullet, F_* B) & &
\end{array}$$

où l'on note pour alléger F_* la postcomposition par F et dans lequel les flèches verticales ou obliques non spécifiées sont induites par coproduit ou produit : le chemin vertical gauche fournit $h(u + v)$ et celui de droite $h(u) * h(v)$. \square

C Inversion de Möbius et équivalences de Morita

Cet appendice a pour but de montrer que l'argument donné par le second auteur pour obtenir l'équivalence de catégories du théorème 4.2 de [Ves08] :

$$\mathcal{F}(Sp(\mathcal{E}_q^{deg}(\mathbb{F}_2))) \simeq \prod_{V \in \mathcal{S}} \mathbb{F}_2[O(V)] - mod$$

où $Sp(\mathcal{E}_q^{deg}(\mathbb{F}_2))$ est la catégorie de Burnside associée à $\mathcal{E}_q^{deg}(\mathbb{F}_2)$ dont on rappelle la définition en C.4 et \mathcal{S} est un ensemble de représentants des classes d'isométrie des objets de $\mathcal{E}_q^{deg}(\mathbb{F}_2)$, s'adapte facilement à d'autres situations pour donner des équivalences naturelles de catégories non triviales.

Cet argument est une combinaison de l'inversion de Möbius et du théorème de Morita-Freyd dont on rappelle ici les énoncés.

On rappelle que la fonction de Möbius μ_X d'un ensemble fini partiellement ordonné (X, \leq) est défini par :

$$\begin{aligned}
\mu_X(x, x) &= 1 \quad \text{pour tout } x \text{ dans } X \\
\sum_{x \leq z \leq y} \mu_X(x, z) &= 0 \quad \text{pour tous } x < y \text{ dans } X.
\end{aligned}$$

Théorème C.1 (Théorème 3.9.2 [Sta97]). *Soit (X, \leq) un ensemble fini partiellement ordonné, dans lequel toute paire $\{x, y\}$ a un plus grand minorant $x \wedge y$. Supposons que X a un plus grand élément M . Soit R un anneau (avec unité 1_R), et supposons que $\alpha \mapsto e_\alpha$ est une application de X dans R vérifiant les propriétés suivantes : $e_\alpha e_\beta = e_{\alpha \wedge \beta}$ pour tout $\alpha, \beta \in X$, et $e_M = 1_R$. Pour $\alpha \in X$, on définit :*

$$f_\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \mu_X(\beta, \alpha) e_\beta,$$

où μ_X est la fonction de Möbius de X . Alors les éléments f_α , pour $\alpha \in X$, sont des idempotents orthogonaux de R , dont la somme est égale à 1_R .

Le théorème suivant, dû à Freyd, doit être vu comme une forme générale, "à plusieurs objets", du théorème classique de Morita sur l'équivalence des catégories de modules.

Théorème C.2 (Morita-Freyd). *Soient \mathcal{A} une catégorie de Grothendieck \mathbb{k} -linéaire (i.e. enrichie sur les \mathbb{k} -modules : les ensembles de morphismes sont naturellement munis d'une structure de \mathbb{k} -modules) et \mathcal{G} une sous-catégorie pleine petite de \mathcal{A} dont les objets sont projectifs de type fini et engendrent \mathcal{A} . Alors \mathcal{A} est équivalente à la catégorie des foncteurs \mathbb{k} -linéaires de \mathcal{G}^{op} dans $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}$.*

On commence par appliquer ces outils à la catégorie Γ des ensembles finis pointés et on montre que cela nous permet de retrouver le théorème à la Dold-Kan démontré par Pirashvili dans l'article [Pir00a], que nous utiliserons dans l'appendice D. On étudie ensuite le cas, très proche de celui considéré dans [Ves08], de la catégorie de Burnside associée à une "bonne catégorie" et qui fournit une équivalence de catégories qui nous est utile à la section 3.2.

On désigne par Ω la catégorie des ensembles finis avec surjections. On note $(-)_+$ l'adjoint à gauche au foncteur d'oubli de Γ vers la catégorie des ensembles finis : pour E un ensemble fini, E_+ s'obtient en adjoignant un point de base externe à E .

Théorème C.3 (Pirashvili). *Il existe une équivalence de catégories $cr : \mathcal{F}(\Gamma^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega^{op})$ telle que*

$$cr(F)(E) = \text{coker} \left(\bigoplus_{e \in E} F(E_e) \rightarrow F(E_+) \right)$$

morphisme induit par les surjections $E_+ \rightarrow E_e$ égales à l'identité hors du point de base, où E_e désigne l'ensemble E pointé par e .

De plus, le foncteur $i_! : \mathcal{F}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma)$ tel que

$$G \otimes_{\Gamma} i_!(F) \simeq cr(G) \otimes_{\Omega} F$$

est donné par

$$i_!(F)(E) = \bigoplus_{E' \subset E \setminus \{*\}} F(E').$$

Démonstration. Soit E un objet de Γ de point de base $*$. On considère l'ensemble $\mathfrak{p}(E)$ de ses sous-objets (i.e. de ses sous-ensembles contenant le point de base) ordonné par l'inclusion ; $\mathfrak{p}(E)$ admet pour plus grand élément E et toute paire d'élément de $\mathfrak{p}(E)$, $\{A, B\}$ admet pour plus grand minorant l'intersection $A \cap B$. Soit $R = \text{End}_{\Gamma}(E)$ l'anneau des endomorphismes d'unité Id_E . A un élément A de $\mathfrak{p}(E)$ on associe l'élément $e_A \in \text{End}_{\Gamma}(E)$ donné par $e_A(x) = x$ si $x \in A$ et $e_A(x) = *$ sinon. On a $e_E = Id_E$ et $e_A e_B = e_{A \cap B}$. Par conséquent, par le théorème C.1 les éléments f_A définis par :

$$f_A = \sum_{B \subset A} \mu_{\mathfrak{p}(E)}(B, A) e_B$$

sont des idempotents orthogonaux de $R = \text{End}_{\Gamma}(E)$ de somme égale à Id_E . On en déduit la décomposition

$$P_E^{\Gamma} \simeq \bigoplus_{A \in \mathfrak{p}(E)} f_A P_E^{\Gamma}, \quad (12)$$

où les P_E^{Γ} désignent les projectifs standard de $\mathcal{F}(\Gamma)$. Les foncteurs P_E^{Γ} sont de type fini et donc leurs facteurs directs $f_A P_E^{\Gamma}$ forment un ensemble de générateurs projectifs de type fini de $\mathcal{F}(\Gamma)$.

Afin de pouvoir appliquer le théorème C.2 nous avons besoin d'identifier les modules suivants

$$\text{Hom}(f_A P_E^{\Gamma}, f_B P_E^{\Gamma}) \simeq f_B \mathbb{k}[\text{End}_{\Gamma}(E)] f_A.$$

Pour cela, on fait les observations suivantes, pour tous $A \in \mathfrak{p}(E)$ et $t \in \text{End}_{\Gamma}(E)$:

1. $e_A t = t e_{t^{-1}(A)}$;
2. $t = t e_B$, où B désigne l'élément de $\mathfrak{p}(E)$ réunion du point de base et de l'ensemble complémentaire de $t^{-1}(*)$ dans E .

Du premier point on déduit

$$f_A t = t \sum_{B \subset A} \mu_{\mathfrak{p}(E)}(B, A) e_{t^{-1}(B)}$$

puis, compte-tenu de ce que $e_C f_D = f_D$ si $D \subset C$, 0 sinon,

$$f_A t f_{A'} = t \sum_{t(A') \subset B \subset A} \mu_{\mathfrak{p}(E)}(B, A) f_{A'} = \begin{cases} t f_{A'} & \text{si } t(A') = A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Du second vient que $t f_{A'}$ est nul sauf si $A' \subset (E \setminus t^{-1}(*)) \cup \{*\}$. Cette condition signifie que A' induit une fonction de $A' \setminus \{*\}$ dans $E \setminus \{*\}$, ou une surjection de $A' \setminus \{*\}$ vers $A \setminus \{*\}$ si $t(A') = A$.

Des deux observations précédentes, et du fait que $tf_{A'}$, comme les te_B pour $B \subset A'$, ne dépend que de la restriction de t à A' , on déduit une application linéaire surjective

$$\mathbb{Z}[\text{Surj}(A' \setminus \{*\}, A \setminus \{*\})] \twoheadrightarrow f_A \mathbb{Z}[\text{End}_\Gamma(E)] f_{A'}, \quad (13)$$

où Surj désigne l'ensemble des fonctions surjectives entre deux ensembles.

Un argument de rang montre que cette application est en fait bijective : en effet, la somme directe des groupes abéliens $f_A \mathbb{Z}[\text{End}_\Gamma(E)] f_{A'}$ lorsque A et A' parcourent $\mathfrak{p}(E)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\text{End}_\Gamma(E)]$. On conclut par la bijection

$$\text{End}_\Gamma(E) \simeq \bigsqcup_{(A,A') \in \mathfrak{p}(E)^2} \text{Surj}(A' \setminus \{*\}, A \setminus \{*\})$$

obtenue en associant à un endomorphisme t de E les éléments $A = t(E)$ et $A' = (E \setminus t^{-1}(*) \cup \{*\})$ de $\mathfrak{p}(E)$ et la surjection $A' \setminus \{*\} \twoheadrightarrow A \setminus \{*\}$ induite par t .

Pour conclure, via le théorème de Freyd-Morita, à l'équivalence de catégories entre $\mathcal{F}(\Gamma)$ et $\mathcal{F}(\Omega)$, il suffit de constater que l'isomorphisme (13) est compatible à la composition en un sens évident.

En explicitant les équivalences de catégories $cr : \mathcal{F}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ et $i_l : \mathcal{F}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma)$ on obtient les descriptions données dans l'énoncé. \square

Avant d'appliquer notre méthode au cas dont découlera celui qui nous intéresse à la section 3.2, on rappelle la définition de la catégorie de Burnside d'une catégorie admettant des produits fibrés.

Définition C.4 ([Bén67]). Soit \mathcal{C} une catégorie admettant des produits fibrés, la catégorie de Burnside de \mathcal{C} , notée $Sp(\mathcal{C})$, est définie de la manière suivante :

1. les objets de $Sp(\mathcal{C})$ sont ceux de \mathcal{C} ;
2. pour A et B deux objets de $Sp(\mathcal{C})$, $\text{Hom}_{Sp(\mathcal{C})}(A, B)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de diagrammes dans \mathcal{C} de la forme $A \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} B$, pour la relation d'équivalence qui identifie les deux diagrammes $A \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} B$ et $A \xleftarrow{u} D' \xrightarrow{v} B$ s'il existe un isomorphisme $\alpha : D \rightarrow D'$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} D & & & & \\ & \searrow^g & & & \\ & & \alpha & & \\ & & \searrow & & \\ & & & D' & \xrightarrow{v} B \\ & \searrow^f & & \downarrow u & \\ & & & A & \end{array}$$

Le morphisme de $\text{Hom}_{Sp(\mathcal{C})}(A, B)$ représenté par le diagramme $A \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} B$ sera noté $[A \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} B]$.

3. Pour deux morphismes $T_1 = [A \leftarrow D \rightarrow B]$ et $T_2 = [B \leftarrow D' \rightarrow C]$ la composition est donnée par :

$$T_2 \circ T_1 = [A \leftarrow D \times_B D' \rightarrow C].$$

Théorème C.5. Soit \mathcal{C} une petite catégorie admettant des produits fibrés, où les morphismes sont tous des monomorphismes et tout endomorphisme est inversible et telle que l'ensemble des sous-objets d'un objet fixé est fini. Il existe une équivalence de catégories :

$$\mathcal{F}(Sp(\mathcal{C})) \simeq \prod_{C \in \mathcal{S}} \mathbb{k}[\text{Aut}_{\mathcal{C}}(C)] - \text{mod}$$

où \mathcal{S} est un ensemble de classes d'isomorphismes d'objets de \mathcal{C} .

Démonstration. La preuve de ce théorème est obtenue mutatis mutandis à partir de celle du théorème 4.2 de [Ves08] à laquelle on renvoie le lecteur. \square

D Les résultats de Betley sur les groupes symétriques revisités

On conserve les notations de l'appendice précédent; notre anneau de base est $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$. On note également $U : \Theta \rightarrow \Gamma$ le foncteur composé de l'inclusion de Θ dans la catégorie des ensembles finis et de $(-)_+$. On dispose donc de $U_! : \mathcal{F}(\Theta^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\Gamma^{op})$ par les notations générales.

On considère aussi la catégorie Σ des ensembles finis avec bijections; les foncteurs d'inclusion $J^\Omega : \Sigma \rightarrow \Omega$ et $J^\Theta : \Sigma^{op} \rightarrow \Theta^{op}$ donnent lieu à $J_!^\Omega : \mathcal{F}(\Sigma^{op}) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega^{op})$ et $J_!^\Theta : \mathcal{F}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{F}(\Theta)$.

Lemme D.1. *Pour E un ensemble fini, on a*

$$J_!^\Theta(F)(E) = \bigoplus_{E' \subset E} F(E').$$

(On laisse au lecteur, dans cet énoncé comme dans la suite de l'appendice, le soin de préciser la fonctorialité en E , qui est analogue à plusieurs cas déjà rencontrés — cf. la proposition A.3.)

Démonstration. Cela découle de l'isomorphisme canonique

$$(J^\Theta)^*(P_E^{\Theta^{op}}) = \mathbb{Z}[\text{Hom}_\Theta(-, E)] \simeq \bigoplus_{E' \subset E} \mathbb{Z}[\text{Hom}_\Sigma(-, E')] = \bigoplus_{E' \subset E} P_{E'}^{\Sigma^{op}}.$$

□

Proposition D.2. *La composée $\mathcal{F}(\Theta^{op}) \xrightarrow{U_!} \mathcal{F}(\Gamma^{op}) \xrightarrow{cr} \mathcal{F}(\Omega^{op})$ est isomorphe à $\mathcal{F}(\Theta^{op}) \xrightarrow{(J^\Theta)^*} \mathcal{F}(\Sigma^{op}) \xrightarrow{J_!^\Omega} \mathcal{F}(\Omega^{op})$.*

De surcroît, le foncteur $U_!$ est exact.

Démonstration. Par un argument d'adjonction (ou plutôt sa variante en terme de produit tensoriel), la première assertion équivaut à l'existence d'un isomorphisme $U^* \circ i_! \simeq J_!^\Theta \circ (J^\Omega)^*$, qui résulte du lemme précédent.

Pour la deuxième assertion, il suffit de voir que $J_!^\Omega$ est exact, puisque cr est une équivalence de catégories; cela provient d'une description explicite analogue à celle du lemme précédent (faisant intervenir les quotients au lieu des sous-ensembles d'un ensemble fini). □

Le théorème suivant est équivalent à la conjonction des théorèmes 1.23 et 3.2 de [Bet02]. On y note F_∞ pour $(U^*F)_\infty$, et $cr_i(F)$ pour $cr(F)(\{1, \dots, i\})$.

Théorème D.3 (Betley). *Pour tout $F \in \text{Ob } \mathcal{F}(\Gamma)$, il existe des isomorphismes naturels*

$$H_n(\mathfrak{S}_\infty; F_\infty) \simeq \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ i \in \mathbb{N}}} \text{Tor}_p^{\mathfrak{S}_i}(H_q(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{Z}), cr_i(F)) \simeq \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ i \in \mathbb{N}}} H_q(\mathfrak{S}_\infty; H_p(\mathfrak{S}_i; cr_i(F)))$$

(où l'action du groupe symétrique sur $H_q(\mathfrak{S}_\infty; \mathbb{Z})$ et $H_p(\mathfrak{S}_i; cr_i(F))$ est triviale).

Démonstration. Pour le premier isomorphisme, on combine les propositions 2.14 et 2.17 avec les isomorphismes naturels suivants, déduits des propositions D.2 et C.3 :

$$\begin{aligned} \text{Tor}_*^\Theta(G, U^*(F)) &\simeq \text{Tor}^\Gamma(U_!(G), F) \simeq \text{Tor}_*^\Omega(cr \circ U_!(G), cr(F)) \simeq \text{Tor}_*^\Omega(J_!^\Omega \circ (J^\Theta)^*(G), cr(F)) \\ &\simeq \text{Tor}_*^\Sigma((J^\Theta)^*(G), (J^\Omega)^* \circ cr(F)) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \text{Tor}_*^{\mathfrak{S}_i}((J^\Theta)^*(G), cr_i(F)). \end{aligned}$$

Le deuxième isomorphisme est formel, parce que la dimension homologique de \mathbb{Z} est 1. En effet, si l'on tensorise au-dessus de $\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_i$ une résolution projective de \mathbb{Z} comme \mathfrak{S}_∞ -module et une résolution de $cr_i(F)$ comme \mathfrak{S}_i -module, les deux suites spectrales du complexe double associé s'effondrent à la deuxième page qui s'identifie à leur aboutissement commun, comme l'établit un raisonnement tout à fait analogue à celui invoqué dans la démonstration de la proposition 2.17. □

Remarque D.4. Notre méthode ne diffère pas fondamentalement de celle employée par Betley pour établir ce théorème, si l'on excepte le remplacement de la K -théorie stable généralisée par l'homologie de la catégorie Θ .

E Un aperçu du cas des modules d'après Betley et Scorichenko

Dans cet appendice, on se donne un anneau (unitaire) A , non nécessairement commutatif; on choisit $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ comme anneau de coefficients et on note $\mathcal{F}(A)$ pour $\mathcal{F}(\mathbb{P}(A))$, où $\mathbb{P}(A)$ est la catégorie des A -modules à gauche projectifs de type fini. Pour simplifier, nous noterons aussi Hom_A pour $\text{Hom}_{\mathbb{P}(A)}$.

Comme dans l'exemple 1.9.4, $\mathbb{M}(A)$ désigne la sous-catégorie de $\mathbb{P}(A)$ avec les mêmes objets et les injections scindées comme morphismes. Nous aurons aussi besoin de la sous-catégorie $\mathbb{E}(A)$ ayant les mêmes objets que $\mathbb{P}(A)$ et les épimorphismes pour flèches. La catégorie $\mathbb{E}(A)^{op}$ est équivalente à $\mathbb{M}(A^{op})$ via le foncteur de dualité $\text{Hom}_A(-, A)$.

Le résultat suivant est un cas particulier d'un résultat sur les bifoncteurs établi dans la deuxième partie de [Sco00]. Nous l'admettrons ici.

Théorème E.1 (Scorichenko). *Soit F un foncteur polynomial de $\mathcal{F}(A)$ tel que $F(0) = 0$. Alors $\text{Tor}_*^{\mathbb{M}(A)}(M; F) = 0$ si M est un foncteur constant.*

(Par abus on note de la même façon un foncteur de $\mathcal{F}(A)$ et sa restriction à $\mathcal{F}(\mathbb{M}(A))$.)

Par dualité, on a un énoncé similaire avec la catégorie $\mathbb{E}(A)$.

Dans la suite, les groupes d'homologie dont les coefficients ne sont pas spécifiés seront pris sur \mathbb{Z} .

Lemme E.2. *Pour tout objet V de $\mathbb{P}(A)$, il existe une suite spectrale du premier quadrant*

$$E_{p,q}^2 = H_p(GL_\infty(A); H_q(\text{Hom}_A(-, V))_\infty) \Rightarrow \mathbb{L}_{p+q} Q!(k)(V)$$

où $\text{Hom}_A(-, V)$ est vu comme foncteur de $\mathbb{E}(A)^{op}$ vers \mathbf{Ab} .

Démonstration. On note d'abord qu'on a $H_q(\text{Hom}_A(-, V))_\infty \simeq H_q(\text{Hom}_A(-, V)_\infty)$ canoniquement puisqu'homologie et colimites filtrantes commutent.

Si E est un A -module projectif de type fini, le stabilisateur de $V \hookrightarrow V \oplus E$ sous l'action de $GL(V \oplus E)$ s'identifie au produit semi-direct $\text{Hom}_A(E, V) \rtimes GL(E)$. On en déduit aisément l'énoncé, en utilisant la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre. \square

Noter qu'il n'y a a priori *aucune functorialité en V* sur cette suite spectrale : l'aboutissement est "naturellement" fonctoriel contravariant sur les monomorphismes scindés, tandis que le terme E^2 est "naturellement" fonctoriel covariant sur toutes les applications A -linéaires! En particulier, on ne semble pas disposer de description simple du morphisme canonique $\mathbb{L}_n Q!(k)(V) \simeq H_n(St(V)) \rightarrow H_n(GL_\infty(A)) \simeq \mathbb{L}_n Q!(0)$ (qui est induit par l'inclusion de $St(V)$ dans $GL_\infty(A)$).

On a néanmoins le résultat suivant :

Lemme E.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que, dans la suite spectrale précédente, le terme $E_{p,q}^2$ soit nul pour $p < n$ et $q > 0$. Alors le foncteur $\mathbb{L}_n Q!(k)$ est constant.*

Démonstration. Cette assertion provient des deux observations suivantes :

- l'épimorphisme de groupes $\pi : St(V) \rightarrow GL_\infty(A)$ donné par la description précédente comme produit semi-direct induit, sous l'hypothèse d'annulation de l'énoncé, un isomorphisme en homologie de degré au plus n , puisque $H_*(\pi)$ est le "coin" $\mathbb{L}_* Q!(k)(V) \rightarrow E_{*,0}^2$ (propriété générale de la suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre);
- la composée du monomorphisme $GL_\infty(A) \hookrightarrow St(V)$ (toujours donné par la description de $St(V)$ de la démonstration du lemme précédent) avec l'inclusion $St(V) \hookrightarrow GL_\infty(A)$ induit un isomorphisme en homologie (cf. la démonstration de la proposition 2.14), et sa composée avec l'épimorphisme π est l'identité. \square

Théorème E.4 (Betley). *Si F est un foncteur polynomial de $\mathcal{F}(A)$ tel que $F(0) = 0$, alors $H_*(GL_\infty(A), F_\infty) = 0$.*

Cette assertion est le théorème 4.2 de [Bet92], où l'anneau A est supposé commutatif, mais les arguments de Betley ne semblent en fait pas réellement requérir cette hypothèse.

Par le théorème des coefficients universels, ce résultat implique une annulation analogue pour des foncteurs polynomiaux sans terme constant depuis $\mathbb{P}(A)$ vers la catégorie des modules sur un anneau arbitraire.

Démonstration. On démontre l’assertion par récurrence sur le degré homologique. Si elle est vrai en degré $< n$, on a $E_{p,q}^2 = 0$ dans la suite spectrale du lemme E.2 pour $p < n$ et $q > 0$, puisqu’alors $H_q(\mathrm{Hom}_A(-, V))$ est un foncteur polynomial (car il est en fait exponentiel gradué par la formule de Künneth) nul en 0 (on applique ici l’hypothèse de récurrence à A^{op}). On en déduit que $\mathbb{L}_i Q_i(k)$ est un foncteur constant pour $i \leq n$, en utilisant le lemme E.3. La suite spectrale du §2.2 et le théorème E.1 donnent alors $H_i(GL_\infty(A), F_\infty) = 0$ pour F polynomial sans terme constant, d’où le théorème. \square

Remarque E.5. Cette démonstration diffère profondément de celle de Betley. En effet, dans [Bet92], il établit le résultat à partir de résultats généraux sur la structure des foncteurs polynomiaux et surtout de théorèmes d’annulation démontrés dans son article antérieur [Bet89]. Celui-ci se fondait sur des considérations explicites sur les groupes linéaires utilisant des arguments arithmétiques (différents selon qu’il s’agit de prouver l’annulation de la composante sans torsion de l’homologie ou de sa composante p -primaire pour un nombre premier p), qui permettent d’obtenir les annulations souhaitées, d’abord pour le cas crucial de $GL_\infty(\mathbb{Z})$. À l’inverse, la méthode ici suivie ne nécessite aucune considération d’ordre arithmétique, mais repose lourdement sur le théorème E.1, résultat d’annulation tout à fait non trivial en homologie des foncteurs.

Références

- [Bén67] J. BÉNABOU – « Introduction to bicategories », in *Reports of the Midwest Category Seminar*, Springer, Berlin, 1967, p. 1–77.
- [Bet89] S. BETLEY – « Vanishing theorems for homology of $GL_n R$ », *J. Pure Appl. Algebra* **58** (1989), no. 3, p. 213–226.
- [Bet92] —, « Homology of $GL(R)$ with coefficients in a functor of finite degree », *J. Algebra* **150** (1992), no. 1, p. 73–86.
- [Bet99] —, « Stable K -theory of finite fields », *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.
- [Bet02] —, « Twisted homology of symmetric groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 12, p. 3439–3445 (electronic).
- [BP94] S. BETLEY & T. PIRASHVILI – « Stable K -theory as a derived functor », *J. Pure Appl. Algebra* **96** (1994), no. 3, p. 245–258.
- [Cha87] R. CHARNEY – « A generalization of a theorem of Vogtmann », in *Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups (Evanston, Ill., 1985)*, vol. 44, 1987, p. 107–125.
- [Cha08] M. CHALUPNIK – « Koszul duality and extensions of exponential functors », *Adv. Math.* **218** (2008), no. 3, p. 969–982.
- [Dja07] A. DJAMENT – « Foncteurs en grassmanniennes, filtration de Krull et cohomologie des foncteurs », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2007), no. 111, p. xx+213.
- [Dol60] A. DOLD – « Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe », *Math. Ann.* **140** (1960), p. 278–298.
- [FFPS03] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, T. PIRASHVILI & L. SCHWARTZ – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [FFSS99] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO & A. SUSLIN – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
- [FLS94] V. FRANJOU, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.
- [FP78] Z. FIEDOROWICZ & S. PRIDY – *Homology of classical groups over finite fields and their associated infinite loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 674, Springer, Berlin, 1978.
- [FS97] E. M. FRIEDLANDER & A. SUSLIN – « Cohomology of finite group schemes over a field », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 2, p. 209–270.

- [Gab62] P. GABRIEL – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.
- [GZ67] P. GABRIEL & M. ZISMAN – *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.
- [Kas82] C. KASSEL – « La K -théorie stable », *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), no. 4, p. 381–416.
- [Kuh98] N. J. KUHN – « Computations in generic representation theory : maps from symmetric powers to composite functors », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4221–4233.
- [Lod98] J.-L. LODAY – *Cyclic homology*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.
- [ML71] S. MAC LANE – *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.
- [Pfi95] A. PFISTER – *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 217, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Pir00a] T. PIRASHVILI – « Dold-Kan type theorem for Γ -groups », *Math. Ann.* **318** (2000), no. 2, p. 277–298.
- [Pir00b] — , « Hodge decomposition for higher order Hochschild homology », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **33** (2000), no. 2, p. 151–179.
- [Qui72] D. QUILLEN – « On the cohomology and K -theory of the general linear groups over a finite field », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 552–586.
- [Sch85] W. SCHARLAU – *Quadratic and Hermitian forms*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 270, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [Sco00] A. SCORICHENKO – « Stable K -theory and functor homology over a ring », Thèse, Evanston, 2000.
- [Sta97] R. P. STANLEY – *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.
- [Tro02] A. TROESCH – « Quelques calculs de cohomologie de composition de puissances symétriques », *Communications in Algebra* **30(7)** (2002).
- [Ves08] C. VESPA – « Generic representations of orthogonal groups : the functor category \mathcal{F}_{quad} », *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), no. 6, p. 1472–1499.