



**HAL**  
open science

## Identification d'obstacles en acoustique dans des domaines tridimensionnels bornés

Nicolas Nemitz, Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Nicolas Nemitz, Marc Bonnet. Identification d'obstacles en acoustique dans des domaines tridimensionnels bornés. *Revue Européenne de Mécanique Numérique/European Journal of Computational Mechanics*, 2006, 15, pp.307-318. 10.3166/remn.15.307-318 . hal-00310912

**HAL Id: hal-00310912**

**<https://hal.science/hal-00310912>**

Submitted on 1 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Identification d'obstacles en acoustique dans des domaines tridimensionnels bornés

Nicolas Nemitz — Marc Bonnet

*Laboratoire de Mécanique des solides*

*Ecole Polytechnique*

*F-91128 Palaiseau cedex*

*nemitz@lms.polytechnique.fr, bonnet@lms.polytechnique.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cette communication concerne l'identification d'obstacles dans un domaine acoustique tridimensionnel borné. L'approche présentée repose sur deux ingrédients essentiels. Le premier est l'utilisation d'une méthode d'équations intégrales rapide fondée sur la fast multipole method, grâce à laquelle il est possible d'aborder ce type de problème d'inversion sur des configurations tridimensionnelles bornées de longueurs caractéristiques relativement grandes par rapport à la longueur d'onde acoustique. Le second est le gradient topologique de la fonction coût associée au problème inverse, permettant de déterminer les zones du domaine acoustique dans lesquelles l'introduction virtuelle d'un obstacle infinitésimal induit une diminution de la fonction coût. Cela permet par exemple de guider le choix de conditions initiales pour la mise en œuvre ultérieure d'un algorithme d'inversion reposant sur l'optimisation de la fonction coût. Ces deux aspects sont présentés et illustrés sur des exemples numériques.*

*ABSTRACT. This communication addresses the identification of rigid scatterers in a three-dimensional acoustic medium of finite extent. The methodology is based on two main concepts. The first is a boundary element formulation of the relevant acoustic boundary value problems which is accelerated by means of the Fast Multipole Method, and thereby applicable to acoustic domains of relatively large size compared to the acoustic wavelength. The second is the topological gradient of the cost function associated with the inverse problem, a distribution whose computation indicates the spatial regions in the acoustic medium where the virtual introduction of a rigid scatterer of very small size induces a decrease of the cost function, thereby allowing e.g. a better-informed choice of initial conditions for a subsequent optimization-based inversion algorithm. Both concepts are presented and demonstrated on numerical examples.*

*MOTS-CLÉS : problème de diffraction inverse, équations intégrales de frontière, éléments de frontière, gradient topologique, fast multipole method.*

*KEYWORDS: inverse scattering problem, boundary integral equation, boundary elements, fast multipole method, topological gradient.*

---

## 1. Introduction

On considère un milieu acoustique occupant le domaine borné  $\Omega^{\text{vrai}}$ , satisfaisant aux équations de l'acoustique linéaire. Un obstacle rigide inconnu  $B^{\text{vrai}}$ , de frontière  $\Gamma^{\text{vrai}}$  (ou un ensemble de tels obstacles) est immergé dans  $\Omega^{\text{vrai}}$ . On définit aussi le domaine sain (*i.e.* sans obstacle)  $\Omega$  tel que  $\Omega^{\text{vrai}} = \Omega \setminus B^{\text{vrai}}$ . Le déplacement normal  $u_n$  est imposé sur une partie  $S_N$  de la frontière  $S$  de  $\Omega$ . Le champ de pression acoustique  $p$  à l'intérieur de  $\Omega^{\text{vrai}}$  vérifie alors les équations :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p^{\text{vrai}} = 0 & \text{dans } \Omega^{\text{vrai}} \\ p_{,n}^{\text{vrai}} = \rho\omega^2 u_n & \text{sur } S_N \\ p_{,n}^{\text{vrai}} = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{vrai}} \\ p^{\text{vrai}} = 0 & \text{sur } S_D = S \setminus S_N \end{cases} \quad [1]$$

où  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde et  $\rho$  la masse volumique. Selon l'usage, le facteur temporel  $e^{-i\omega t}$  est omis dans l'écriture de toutes les grandeurs acoustiques.

Le problème inverse consiste à identifier l'emplacement et la forme de  $B^{\text{vrai}}$  (ou ceux de  $\Gamma^{\text{vrai}}$ ). Pour cela on suppose que l'on dispose de données aux limites surabondantes : les valeurs, notées  $p^{\text{obs}}$ , prises par  $p^{\text{vrai}}$  sur une partie  $S^{\text{obs}} \subseteq S_N$  de la frontière externe sont supposées connues. Pour une configuration donnée  $B^c$  d'obstacle rigide (simple ou multiple), c'est-à-dire une hypothèse sur cet obstacle, on note  $p^c$  le champ de pression solution du *problème direct*, défini par les équations [1] dans lesquelles  $\Omega^{\text{vrai}}$ ,  $\Gamma^{\text{vrai}}$  et  $p^{\text{vrai}}$  sont remplacés par  $\Omega^c = \Omega \setminus B^c$ ,  $\Gamma$  et  $p^c$ . L'obstacle  $B^{\text{vrai}}$  est alors recherché à travers la minimisation d'une fonction coût  $\mathcal{J}$  définie ici par :

$$\mathcal{J}(\Omega^c) = \frac{1}{2} \int_{S^{\text{obs}}} |p^c - p^{\text{obs}}|^2 d\Gamma \quad [2]$$

## 2. Gradient topologique

**Présentation.** La résolution du problème inverse par minimisation de  $\mathcal{J}$  fait appel à une procédure itérative, dont le résultat est susceptible de dépendre fortement du choix des conditions initiales (nombre d'obstacles, emplacements et formes initiales). Ce choix peut être facilité par le calcul d'un champ scalaire, appelé gradient topologique de la fonction  $\mathcal{J}$ , dont les zones négatives correspondent à la tendance à la décroissance de la fonction coût sous l'effet de l'introduction d'un obstacle infinitésimal. Ce concept a initialement été introduit dans le contexte de l'optimisation topologique de structures (Eschenauer *et al.* 1994).

Soit  $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0) = \mathbf{x}^0 + \varepsilon\mathcal{B}$  un petit obstacle sphérique de taille  $\varepsilon > 0$ , de frontière  $\Gamma_\varepsilon$  et contenant le point  $\mathbf{x}^0 \in \Omega$  ( $\mathcal{B}$  désignant la boule unité). Pour le domaine  $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus B^\varepsilon$ , on cherche à évaluer le comportement asymptotique de  $\mathcal{J}(\Omega^\varepsilon)$  pour une valeur infinitésimale de  $\varepsilon$ . Des travaux antérieurs (Garreau *et al.* 2001, Bonnet *et al.* 2004) ayant établi que :

$$\mathcal{J}(\Omega^\varepsilon) - \mathcal{J}(\Omega) = O(\varepsilon^3)$$

le gradient topologique de  $\mathcal{J}(\Omega)$  est la fonction  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0)$  telle que :

$$\mathcal{J}(\Omega^\varepsilon) = \mathcal{J}(\Omega) + \varepsilon^3 |\mathcal{B}| \mathcal{T}(\mathbf{x}^0) + o(\varepsilon^3) \quad [3]$$

Afin d'évaluer  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0)$ , il est donc nécessaire de calculer  $\mathcal{J}(\Omega^\varepsilon)$  et donc de résoudre le problème [1] dans lequel  $B^{\text{vrai}}$  est remplacé par  $B_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ , dont la solution est notée  $p^\varepsilon$ . Il est utile d'introduire la décomposition  $p^\varepsilon = \tilde{p}^\varepsilon + p$  en une partie diffractée  $\tilde{p}^\varepsilon$  et une partie incidente  $p$  solution du problème acoustique associé au domaine sain :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)p = 0 & \text{dans } \Omega \\ p_{,n} = \rho\omega^2 u_n & \text{sur } S_N \\ p = 0 & \text{sur } S_D \end{cases} \quad [4]$$

Il est alors naturel de supposer que le champ  $\tilde{p}^\varepsilon$  s'annule lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\tilde{p}^\varepsilon(\mathbf{x})| = 0 \quad [5]$$

ce qui permet de développer  $\mathcal{J}(\Omega^\varepsilon)$  selon  $\tilde{p}^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Omega^\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{S^{\text{obs}}} |p^\varepsilon - p^{\text{obs}}|^2 d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{\text{obs}}} [|p - p^{\text{obs}}|^2 + 2\text{Re}(\overline{(p - p^{\text{obs}})}\tilde{p}^\varepsilon) + o(|\tilde{p}^\varepsilon(\mathbf{x})|)] d\Gamma \\ &= \mathcal{J}(\Omega) + \int_{S^{\text{obs}}} \text{Re}(\overline{(p - p^{\text{obs}})}\tilde{p}^\varepsilon) d\Gamma + o(\|\tilde{p}^\varepsilon\|) \end{aligned} \quad [6]$$

Une méthode élégante et efficace pour évaluer la contribution dominante pour  $\varepsilon$  petit du terme  $\int_{S^{\text{obs}}} \text{Re}(\overline{(p - p^{\text{obs}})}\tilde{p}^\varepsilon) d\Gamma$  repose sur l'utilisation d'un champ adjoint.

**Calcul par un champ adjoint.** Soit  $\hat{p}$  le champ solution pour le domaine sain  $\Omega$  soumis à un déplacement imposé  $\hat{u}_n$  (non encore spécifié) sur  $S_N$  (voir équation [4]). De la troisième formule de Green on peut tirer une identité de réciprocity pour les champs  $\hat{p}$  et  $\tilde{p}^\varepsilon$  sur le domaine  $\Omega^\varepsilon$ , qui prend en compte les égalités sur la frontière,  $\tilde{p}^\varepsilon = \hat{p} = 0$  sur  $S_D$ ,  $p_{,i} = -\tilde{p}_{,i}^\varepsilon$  sur  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\tilde{p}_{,n}^\varepsilon = 0$  et  $\hat{p}_{,n} = \rho\omega^2 \hat{u}_n$  sur  $S_N$  :

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (\hat{p}p_{,i} + \tilde{p}^\varepsilon \hat{p}_{,i}) n_i d\Gamma = - \int_{S_N} \tilde{p}^\varepsilon \rho\omega^2 \hat{u}_n n_i d\Gamma \quad [7]$$

En particulier, en choisissant la donnée  $\hat{u}_n$  du problème adjoint selon :

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\rho\omega^2} \overline{(p - p^{\text{obs}})} \quad \text{sur } S^{\text{obs}}, \quad \hat{u}_n = 0 \quad \text{sur } S_N \setminus S^{\text{obs}} \quad [8]$$

l'équation [6] prend la forme :

$$\mathcal{J}(\Omega^\varepsilon) = \mathcal{J}(\Omega) - \text{Re} \left[ \int_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{p}^\varepsilon \hat{p}_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \hat{p} p_{,i} n_i d\Gamma \right] + o(\|\tilde{p}^\varepsilon\|) \quad [9]$$

à partir de laquelle le gradient topologique  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^0)$  peut être déduit du comportement asymptotique de  $\tilde{p}^\varepsilon$  sur  $\Gamma_\varepsilon$  (voir Bonnet *et al.* (2004) pour les développements). On

obtient, tous calculs faits :

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}^0) = \text{Re} [(\hat{p}_{,i} A_{ij} p_{,j} - k^2 p \hat{p})(\mathbf{x}^0)] \quad [10]$$

où le tenseur  $A$  dépend de la nature (rigide ou pénétrable) de l'obstacle ( $A_{ij} = 3\delta_{ij}/2$  pour un obstacle rigide). Calculer le gradient topologique nécessite alors uniquement de résoudre le problème direct et le problème adjoint sur le domaine sain. Ce que nous proposons de faire par la méthode des équations intégrales de frontière accélérée.

### 3. Fast Multipole Method

Une formulation intégrale équivalente au problème direct repose sur l'identité

$$c(\mathbf{x})p^c(\mathbf{x}) + \int_{S \cup \Gamma} p^c(\mathbf{y}) G_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) n_i(\mathbf{y}) d\Gamma_y - \int_S p_{,i}^c(\mathbf{y}) n_i G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma_y = 0 \quad [11]$$

(où  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \exp(ik|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)/(4\pi|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)$  est la solution fondamentale pour un milieu infini de l'équation de Helmholtz), qui donne une *équation intégrale* pour  $\mathbf{x} \in S \cup \Gamma$  (avec  $c(\mathbf{x}) = 1/2$ ) et une *représentation intégrale* de  $p^c(\mathbf{x})$  pour  $\mathbf{x} \in \Omega$  (avec  $c(\mathbf{x}) = 1$ ), voir (Bonnet 1999). Après discrétisation, l'équation intégrale conduit à un système linéaire dont la matrice est pleine et complexe. La rapidité de résolution de ce système par un solveur itératif dépend essentiellement du produit matrice-vecteur. Cette opération est *a priori* de complexité  $O(N^2)$ , rédhibitoire pour les situations à grand nombre  $N$  d'inconnues nodales. La *Fast Multipole Method* (FMM), initialement proposée dans (Greengard *et al.* 1997), permet d'accélérer cette phase cruciale du calcul, la complexité d'un produit matrice-vecteur étant réduite à  $O(N \log N)$ , et a été mise en œuvre dans ce travail.

**Principe.** Le principe de la FMM en acoustique linéaire est brièvement décrit pour une intégrale générique du type  $\int_{\Sigma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) d\Gamma_y$ , celles contenant les dérivées de  $G$  se déduisant de ce cas. La FMM repose sur deux identités. La première est une forme particulière du théorème d'addition de Gegenbauer, en reconnaissant dans  $G$  la fonction sphérique de Hankel de première espèce et d'ordre zéro :

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r} + \mathbf{r}_o|}}{4\pi|\mathbf{r} + \mathbf{r}_o|} = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) j_l(k|\mathbf{r}|) h_l^{(1)}(k|\mathbf{r}_o|) P_l(\cos(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o)) \quad [12]$$

où  $j_l$  est une fonction sphérique de Bessel de première espèce,  $h_l^{(1)}$  est une fonction sphérique de Hankel de première espèce et  $P_l$  est un polynôme de Legendre. La deuxième identité est le développement en ondes planes du produit  $j_l P_l$  :

$$j_l(k|\mathbf{r}|) P_l(\cos(\mathbf{r}, \mathbf{r}_o)) = \frac{(-i)^l}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} e^{ik\langle \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle} P_l(\cos(\mathbf{s}, \mathbf{r}_o)) d\mathbf{s} \quad [13]$$

où  $\mathcal{S}$  est la sphère unité. Les deux identités [12] et [13] sont en pratique utilisées sous une forme approchée : la série [12] est tronquée à un ordre  $\ell \leq L$  et l'intégrale sur la

sphère unité  $\mathcal{S}$  dans [13] est approchée par une formule de quadrature à points  $\mathbf{s}_p$  et poids  $w_p$ . En posant  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 - \mathbf{y}$  et  $\mathbf{r}_o = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1$ , on obtient :

$$\int_{\Sigma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})q(\mathbf{y})d\Gamma_y \approx \sum_p w_p e^{ik\langle \mathbf{s}_p, \mathbf{x} - \mathbf{c}_1 \rangle} T_{L, \mathbf{r}_o}(\mathbf{s}_p) \int_{\Sigma} e^{-ik\langle \mathbf{s}_p, \mathbf{y} - \mathbf{c}_2 \rangle} q(\mathbf{y})d\Gamma_y \quad [14]$$

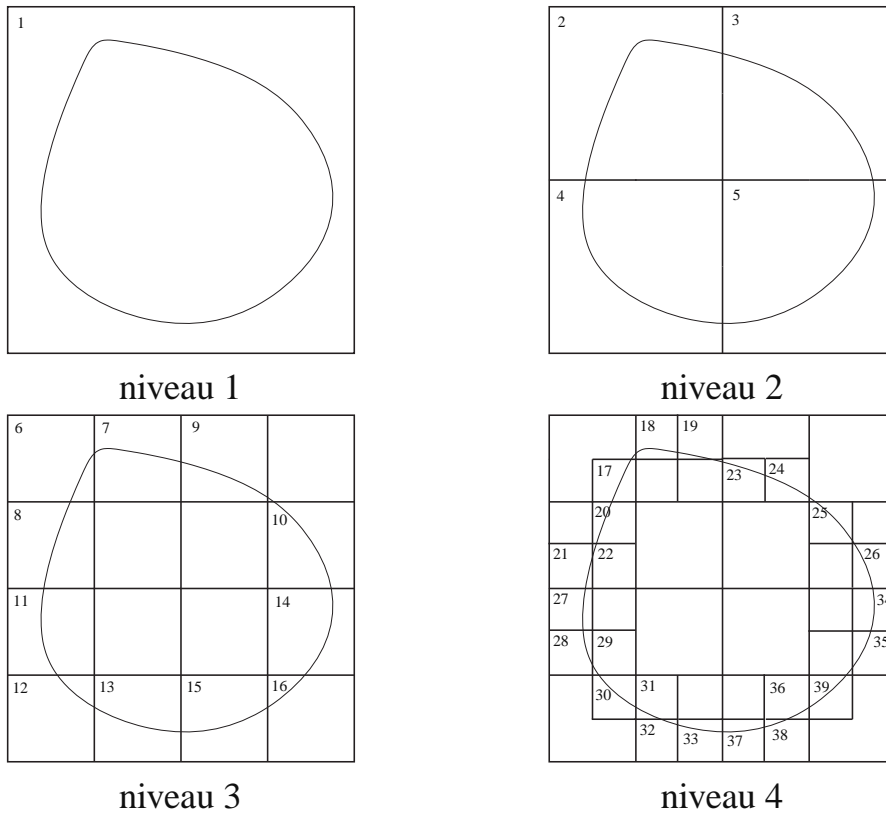
pour toute surface générique  $\Sigma$  ne contenant pas  $\mathbf{x}$ , avec :

$$T_{L, \mathbf{r}_o}(\mathbf{s}) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^L \frac{(2l+1)i^m}{4\pi} h_l^{(1)}(k|\mathbf{r}_o|) P_l(\cos(\mathbf{s}, \mathbf{r}_o))$$

et en supposant  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  choisis tels que  $|\mathbf{x} - \mathbf{c}_1| < |\mathbf{x} - \mathbf{c}_2|$  et  $|\mathbf{y} - \mathbf{c}_2| < |\mathbf{y} - \mathbf{c}_1|$  pour tout  $\mathbf{y} \in \Sigma$ . L'efficacité de la FMM résulte alors d'une utilisation « astucieuse » de [14].

**Algorithme FMM.** La FMM procède alors selon les étapes suivantes (Coifman *et al.* 1993, Darve 2000, Nishimura 2002, Sylvand 2002) :

- *Discrétisation* (usuelle) de  $S, \Gamma$  et  $p^c$  par éléments de frontière ;
- *Découpage* de l'espace en cellules cubiques organisées en arborescence récurrente (*oct-tree*), avec plusieurs niveaux de découpage par dichotomie ; on peut le visualiser simplement sur un exemple en deux dimensions :



**Figure 1.** *Découpage récursif de l'espace*

La procédure récursive s'arrête quand un critère défini par l'utilisateur est atteint (dans l'exemple, il porte sur la taille des cellules). Dans la suite on appellera *fil*s d'une cellule  $C$ , l'ensemble des cellules du niveau immédiatement inférieur de support inclus dans  $C$  (inversement,  $C$  sera leur *père*).

– *Montée*. Pour toutes les cellules feuilles (celles du dernier niveau), calculer le terme  $M_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_2)$ , dit *moment multipôle*

$$M_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_2) = \int_S e^{-ik\langle \mathbf{s}_p, \mathbf{y} - \mathbf{c}_2 \rangle} p(\mathbf{y}) d\Gamma_y \quad [15]$$

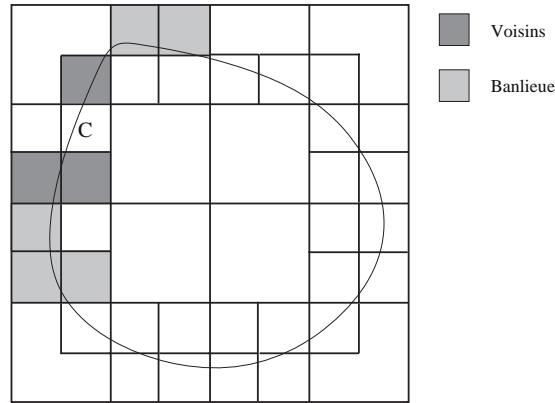
où  $\mathbf{c}_2$  désigne le centre de la cellule, puis en remontant l'arborescence pour toutes les cellules par changement de centre,

$$M_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_0) = M_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_2) e^{-ik\langle \mathbf{s}_p, \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_0 \rangle} \quad [16]$$

– *Descente*. Décrire cette étape délicate nécessite un peu de vocabulaire :

Les *cellules voisines* d'une cellule  $C$  est l'ensemble, noté  $V(C)$ , formé de  $C$  et des cellules de même niveau que  $C$  ayant au moins un point commun avec  $C$ .

La *banlieue* d'une cellule  $C$  est l'ensemble, noté  $B(C)$ , des cellules du même niveau que  $C$ , non voisines de  $C$ , dont les pères sont voisins du père de  $C$ .



**Figure 2.** *Voisins et banlieue d'une cellule*

Partant de la racine, parcourir l'arbre pour calculer, dans chaque cellule de centre  $\mathbf{c}_1$ , le terme  $L_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_1)$ , dit *moment local*, dont la valeur est donnée par deux contributions d'une part la banlieue (cellules qui ont été choisies telles que le rapport  $r/r_o$  soit d'une part toujours inférieur à une limite donnée, afin d'assuré la précision de la méthode, et d'autre part le plus proche possible de cette limite pour la rapidité du calcul) et d'autre part le père de  $\mathbf{c}_1$  via une formule de changement de centre :

$$L_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_1) = \sum_{\mathbf{c}_2 \in B(\mathbf{c}_1)} T_{L, r_0}(\mathbf{s}_p) M_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_2) + L_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_0) e^{-ik\langle \mathbf{s}_p, \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0 \rangle} \quad [17]$$

où  $\mathbf{c}_0$  désigne le centre du père de  $\mathbf{c}_1$ .

– Pour chaque cellule feuille, finir l'évaluation de [14] et calculer par une procédure séparée les interactions proches non traitées à l'aide de [14].

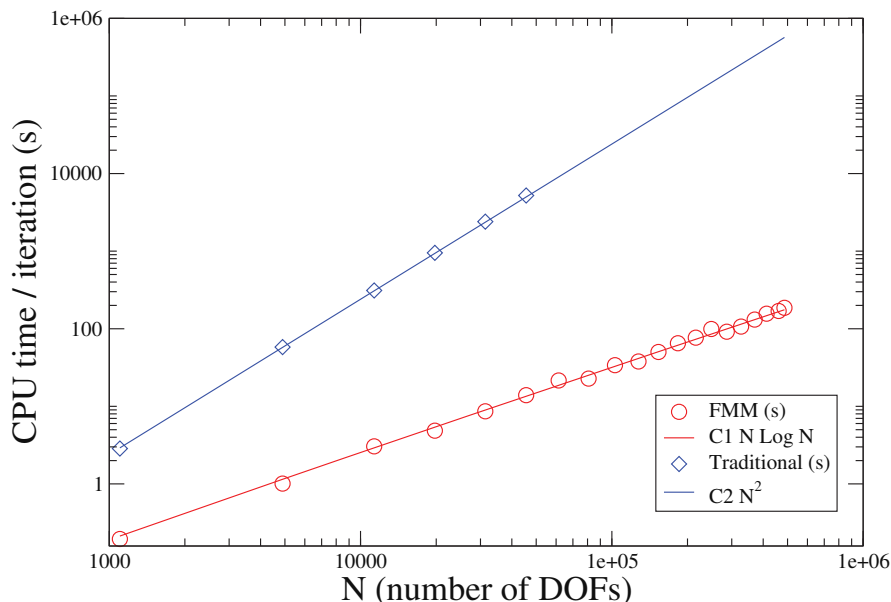
$$\int_S G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) dS_y = \sum_p \omega_p e^{-ik\langle \mathbf{x} - \mathbf{c}_1 \rangle} L_{\mathbf{s}_p}(\mathbf{c}_1) + \int_{S \cap V(\mathbf{c}_1)} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) dS_y$$

L'algorithme FMM succinctement décrit ci-dessus a ainsi réalisé [14] pour la surface  $\Sigma = S \setminus V(\mathbf{c}_1)$ , l'intégrale « proche » étant calculée de façon « traditionnelle ». L'article de synthèse (Nishimura 2002) décrit l'historique de la FMM ainsi que ses diverses variantes, et propose une bibliographie fournie.



## 4. Résultats numériques

**Vérification numérique de complexité.** Pour illustrer le gain en complexité apporté par la FMM, on considère l'exemple simple d'un domaine acoustique sphérique soumis à sa périphérie à une pression harmonique uniforme, pour lequel une solution exacte est connue. La résolution numérique de ce problème par éléments de frontière a été effectuée pour une série de maillages de plus en plus fins, tous composés d'éléments triangulaires à 3 nœuds, la fréquence étant ajustée à la finesse du maillage de manière à avoir un nombre constant d'éléments par longueur d'onde. La figure 3 présente le coût numérique d'une itération en fonction du nombre  $N$  d'inconnues nodales, le produit matrice-vecteur étant calculé soit par intégration numérique classique (complexité théorique  $O(N^2)$ ) soit par FMM (complexité théorique  $O(N \log N)$ ). Les fonctions  $C_1 N^2$  et  $C_2 N \log N$  approchant au mieux les temps de calcul observés dans les deux cas sont également tracées, ce qui permet de mettre en évidence une excellente vérification « expérimentale » des complexités théoriques.

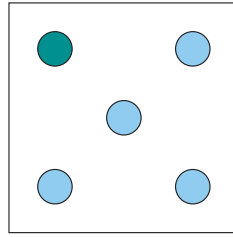


**Figure 3.** Coût numérique d'une itération en fonction du nombre  $N$  d'inconnues nodales, le produit matrice-vecteur étant calculé par intégration numérique classique (losanges, complexité théorique  $O(N^2)$ ) ou par FMM (cercles, complexité théorique  $O(N \log N)$ )

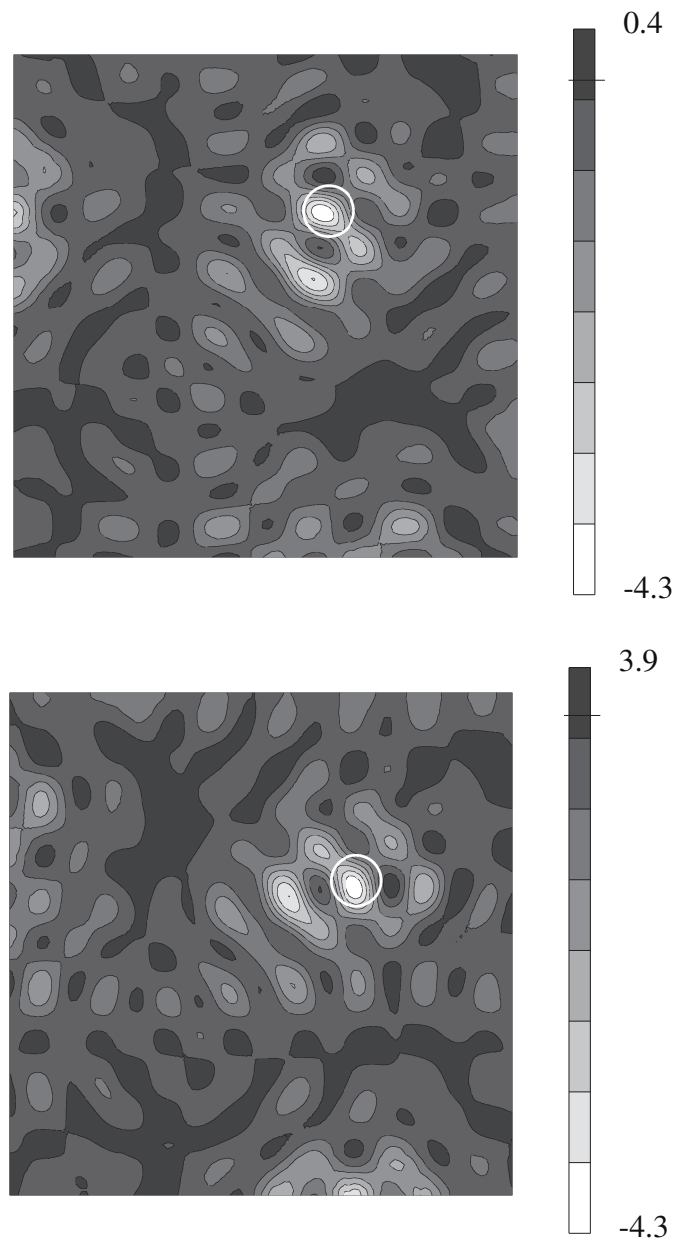
**Identification d'un obstacle sphérique.** On a choisi, comme exemple d'illustration de la méthode, la détection d'un obstacle sphérique rigide (centré en  $(0.6\ell, \ell, 0.6\ell)$ , de rayon  $0.3\ell$ ) inclus dans un cube de côté  $5\ell$  centré à l'origine ( $\ell$  : longueur caractéristique arbitraire). Les deux surfaces  $S$  et  $\Gamma^{\text{vrai}}$  sont maillées par des éléments triangulaires à trois nœuds tels qu'une longueur  $\ell$  recouvre environ 10 nœuds. Chaque face du cube comporte cinq surfaces, chacune d'extension spatiale correspondant à une dizaine d'éléments, servant tour à tour de source et de capteur (soit  $5 \times 6 = 30$  surfaces  $S_K$ ,  $1 \leq K \leq 30$ ). Trente expériences (simulées numériquement) sont effectuées, l'expérience  $K$  correspondant à  $u_n = 1$  sur  $S_K$  et  $u_n = 0$  sur  $S \setminus S_K$  et à une surface



de mesure  $S_K^{\text{obs}} = \cup_{L \neq K} S_L$ . A l'intérieur du domaine cubique, le champ de gradient topologique  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^o)$  est calculé sur une grille régulière  $\mathcal{G}$  de  $100 \times 100 \times 100$  points.



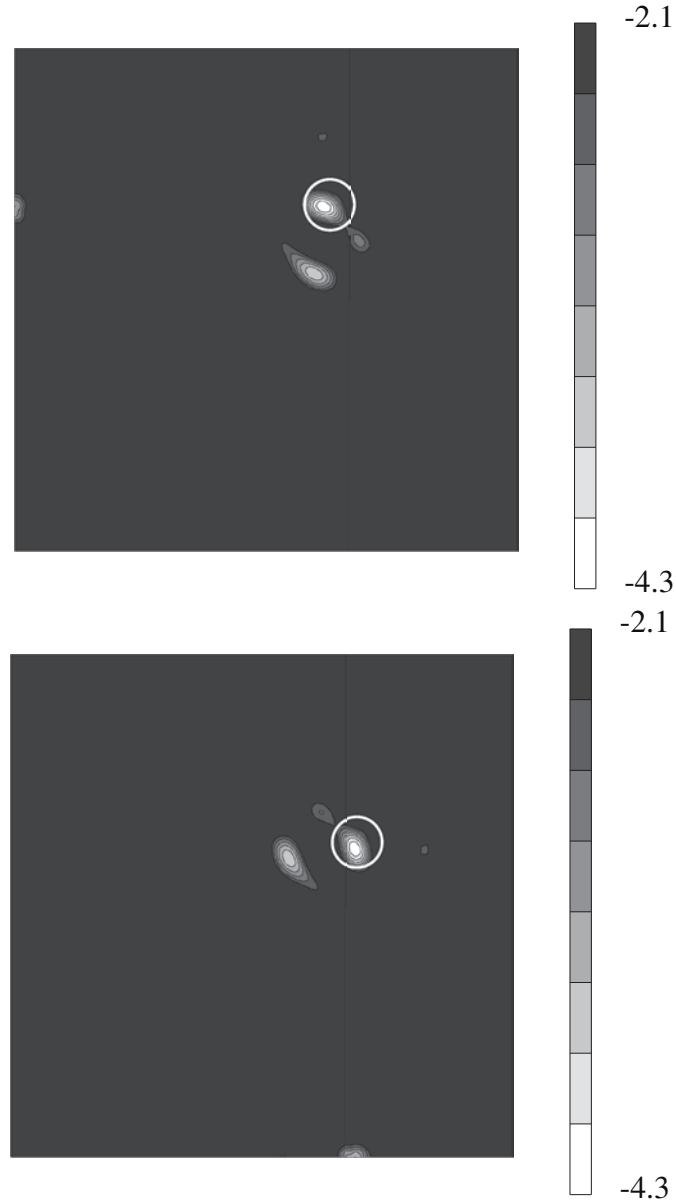
**Figure 4.** *Emetteurs/capteurs sur une face du cube*



**Figure 5.** *Champ  $10^{-3} \times \mathcal{T}(\mathbf{x}^o)$  dans les plans  $z = 0.6\ell$  (haut) et  $x = 0.6\ell$  (bas), longueur d'onde  $\lambda = \ell$*

La fonction-coût  $\mathcal{J}$  considérée est définie, avec des notations similaires à [2], par sommation des fonctions-coût aux moindres carrés associées à chaque expérience :

$$\mathcal{J}(\Omega^c) = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{30} \int_{S_K^{\text{obs}}} |p^c - p_K^{\text{obs}}|^2 d\Gamma \quad [18]$$



**Figure 6.** Champ tronqué  $10^{-3} \times \hat{\mathcal{T}}(\mathbf{x}^o)$  dans les plans  $z = 0.6\ell$  (haut) et  $x = 0.6\ell$  (bas), longueur d'onde  $\lambda = \ell$

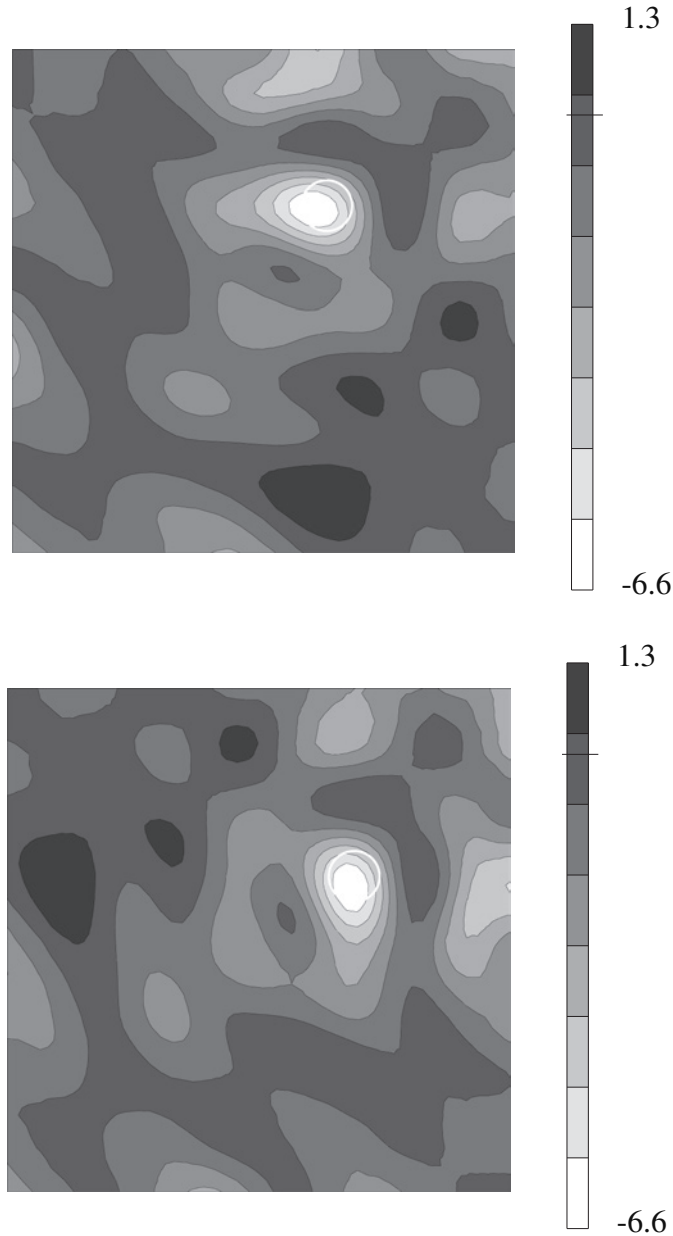
Dans un premier temps,  $\omega$  est fixé de façon à avoir une longueur d'onde  $\lambda = \ell$ . La figure 5 présente les traces dans les plans  $z = 0.6\ell$  et  $x = 0.6\ell$  (passant par le centre de l'obstacle à détecter) du champ  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^o)$  associé à la fonction-coût [18]. Les valeurs les plus basses (et en particulier négatives, comme souhaité) de  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^o)$ , figurées par des couleurs claires, correspondent bien à l'emplacement correct de l'obstacle. La figure 6

représente, dans les mêmes conditions que la figure 5, la distribution tronquée  $\hat{T}(\mathbf{x}^o)$  définie par :

$$\hat{T}(\mathbf{x}^o) = \begin{cases} T(\mathbf{x}^o) & \text{si } T \leq 0,5T_{\min} \\ 0 & \text{si } T > 0,5T_{\min} \end{cases} \quad [19]$$

avec :

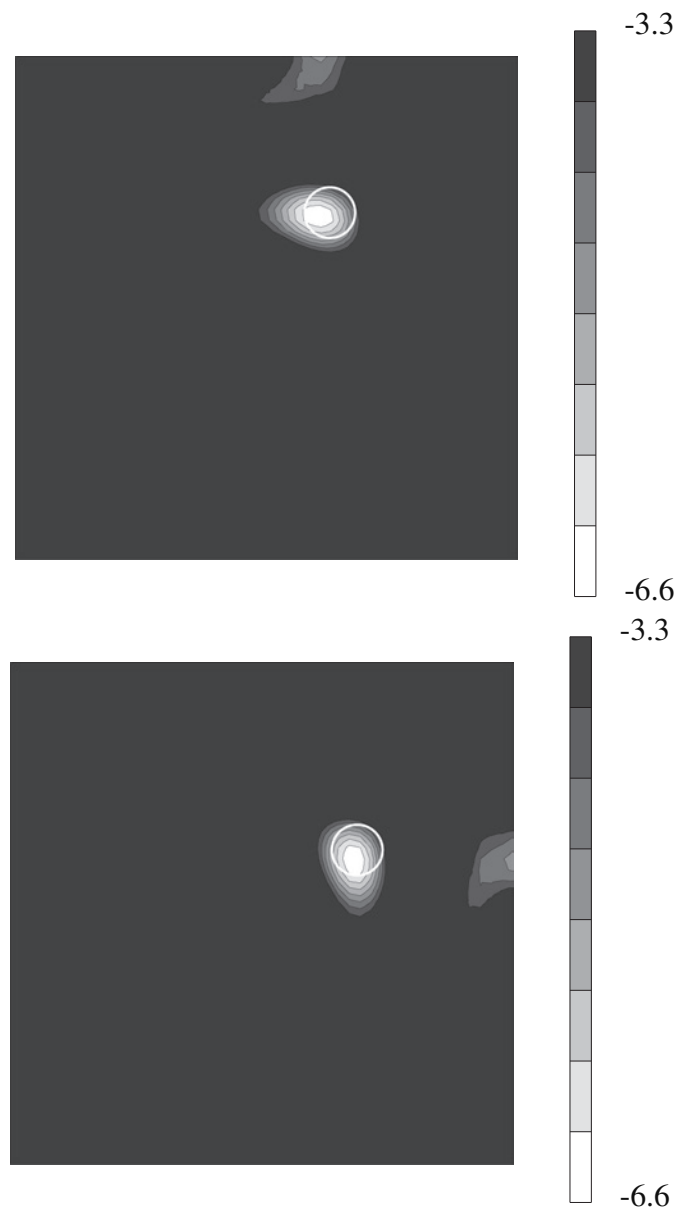
$$T_{\min} = \min_{\mathbf{x}^o \in \mathcal{G}} T(\mathbf{x}^o)$$



**Figure 7.** Champ  $10^{-3} \times T(\mathbf{x}^o)$  dans les plans  $z = 0.6\ell$  (haut) et  $x = 0.6\ell$  (bas), longueur d'onde  $\lambda = 2\ell$

On se place ensuite (toutes choses égales par ailleurs, et en particulier avec le même maillage que précédemment) dans le cas  $\lambda = 2\ell$  (doublement de la longueur d'onde). Les champs  $T(\mathbf{x}^o)$  et  $\hat{T}(\mathbf{x}^o)$  sont alors présentés, dans les mêmes conditions

que précédemment, aux figures 7 et 8. On note une localisation plus nette de l'obstacle inconnu. L'analyse de cette différence de qualité demande une étude systématique de l'influence de paramètres tels que la fréquence ou la finesse de discrétisation rapportée à la longueur d'onde, non réalisée à ce jour.



**Figure 8.** Champ tronqué  $10^{-3} \times \hat{T}(\mathbf{x}^o)$  dans les plans  $z = 0.6\ell$  (haut) et  $x = 0.6\ell$  (bas), longueur d'onde  $\lambda = 2\ell$

## 5. Conclusion

Cet article présente, dans le cadre de l'acoustique linéaire tridimensionnelle, une première tentative d'application conjointe de la méthode des éléments de frontière accélérée (*Fast Multipole Method*) et du calcul du champ de gradient topologique associé

à la fonction-coût du problème d'identification. L'intérêt principal de cette approche est de proposer un procédé approché d'exploration globale d'un milieu tridimensionnel, et ce à un coût numérique raisonnable, de l'ordre d'un petit nombre de calculs acoustiques directs. En particulier, la *Fast Multipole Method* permet une accélération de l'évaluation numérique des formules de représentation intégrale des champs acoustiques direct et adjoint aux points de la grille  $\mathcal{G}$  d'échantillonnage du champ  $\mathcal{T}(x^o)$ . Si les dimensions caractéristiques spatiales (environ 5 longueurs d'ondes) adoptées dans les illustrations présentées ici sont encore modestes, la littérature sur l'approche FMM pour les équations de type Helmholtz (Chew 2003, Nishimura 2002) indique que des dimensions beaucoup plus importantes (dépassant la centaine de longueurs d'onde) sont accessibles.

## 6. Bibliographie

- Bonnet M., *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*, John Wiley and Sons, 1999.
- Bonnet M., Guzina B. B., « Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative », *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, vol. 61, p. 2344-2373, 2004.
- Chew W. C. e. a., « Fast integral equation solvers in computational electromagnetics of complex structures. », *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, vol. 27, p. 803-823, 2003.
- Coifman R., Rokhlin V., Wandzura S., « The Fast Multipole Method for the Wave Equation : A Pedestrian Prescription », *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 35, n° 3, p. 7-12, June, 1993.
- Darve E., « The fast multipole method : numerical implementation », *J. Comp. Phys.*, vol. 160, p. 195-240, 2000.
- Eschenauer H. A., Kobelev V. V., Schumacher A., « Bubble method for topology and shape optimization of structures », *Structural Optimization*, vol. 8, p. 42-51, 1994.
- Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M., « The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case. », *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 39, p. 1756-1778, 2001.
- Greengard L., Rokhlin V., « A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions », *Acta Numerica*, vol. 6, p. 229-270, 1997.
- Nishimura N., « Fast multipole accelerated boundary integral equation methods », *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, p. 299-324, 2002.
- Sylvand G., *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : performances, parallélisation, applications*, PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Noisy le Grand, France, 2002.