



**HAL**  
open science

## Modèle Déformable en Métrique non-euclidienne

Benjamin Taton, Jacques-Olivier Lachaud

► **To cite this version:**

Benjamin Taton, Jacques-Olivier Lachaud. Modèle Déformable en Métrique non-euclidienne. Actes du 13ème Congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA02), Jan 2002, France. pp.425-434. hal-00307964

**HAL Id: hal-00307964**

**<https://hal.science/hal-00307964>**

Submitted on 17 Jun 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle déformable en métrique non euclidienne

## Deformable model with non-Euclidian metrics

B. Taton\*

J.-O. Lachaud\*

(\*) Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique (LaBRI)  
Domaine Universitaire, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex  
e-mail : {taton|lachaud}@labri.fr

### Résumé

Les modèles déformables sont un outil classique pour la segmentation d'images. Les modèles hautement déformables peuvent de plus extraire des composantes image arbitrairement complexes. Cependant, la complexité en temps et en mémoire de ces modèles augmente au moins aussi vite que la taille des données. Cela est causé par le lien étroit entre résolution de l'image et résolution du modèle. Dans cet article, nous proposons une extension d'un modèle hautement déformable qui autorise une adaptation locale de la résolution du modèle. Celui-ci pourra donc avoir une grande précision dans les zones d'intérêt et une résolution grossière ailleurs. L'idée générale est d'échanger la métrique euclidienne de l'espace image contre une métrique non-euclidienne déformée, où les zones d'intérêt ont été géométriquement agrandies. Par ce biais, nous conservons le contexte robuste de segmentation des modèles déformables en lui rajoutant une indépendance certaine vis-à-vis de la taille des données d'une part et de la complexité des composantes image d'autre part.

### Mots Clef

Segmentation d'image, modèle déformable, géométrie non-euclidienne, adaptation de topologie, optimisation.

### Abstract

Deformable models are a classical tool for image segmentation. Furthermore, highly deformable models are able to extract image components with arbitrary complex shapes. However, these models have a time and memory complexity that increases at least as fast as the size of input data. This is the due to the close dependence between the image resolution and the model resolution. In this paper, we propose an extension to an existing highly deformable model, which can locally adapt its resolution. With this property a significant precision can be achieved in the interesting parts of the image while a coarse resolution is maintained elsewhere. The general idea is to replace the Euclidean metrics of the image space by a deformed non-Euclidean metrics,

where the areas of interest have been geometrically expanded. With this approach, we obtain a new model that follows the robust framework of classical deformable models for image segmentation, while offering a significant independence from both the size of input data and the geometric complexity of image components.

### Keywords

Image segmentation, deformable model, non-Euclidean geometry, topology adaptation, optimization.

## 1 Introduction

Les modèles déformables ont été introduits dans le contexte de la segmentation d'image par Kass, Witkin et Terzopoulos [7]. Ils sont basés sur la minimisation d'une fonctionnelle — ou *énergie* — qui prend en compte à la fois l'adéquation locale de la forme aux contours de l'image et sa régularité. Cette formulation permet de segmenter des composantes dont les contours sont très dégradés. Elle inclut naturellement l'interaction dynamique de l'utilisateur. Il est de plus très simple d'ajouter d'autres types de contraintes (forme de référence, points de passages). Les modèles déformables sont ainsi utilisés intensivement en imagerie biomédicale, où les images produites peuvent difficilement être segmentées en se basant sur les seuls critères d'homogénéité.

La géométrie des modèles déformables est représentée par une courbe ou une surface paramétrée. Ces modèles sont donc intrinsèquement limités à la topologie de leur forme initiale, en général une courbe fermée pour les images 2D ou un plan pour les images 3D. Pour que la segmentation soit correcte il est donc nécessaire de faire *a priori* une hypothèse sur la forme finale du modèle. Dans des domaines tels que l'analyse d'images médicales, les objets à reconnaître dans les images ont souvent des formes compliquées, et parfois anormales. Faire des hypothèses sur la forme des objets de l'image est donc difficile ou risqué.

Pour ces raisons, plusieurs auteurs ont proposé des modèles hautement déformables, capables d'adapter leur topologie aux évolutions géométriques induites par le processus de

minimisation. Si cette propriété étend considérablement le champ d'applications des modèles déformables, les techniques utilisées pour la mettre en œuvre sont néanmoins coûteuses (en temps de calcul ou en mémoire requise). Les paragraphes suivants vont mettre en évidence ce défaut important en présentant sommairement les différents modèles hautement déformables existants. Dans la suite de l'argumentation, on se place dans le contexte de l'imagerie 3D et on suppose que les images à segmenter sont de taille  $n^3$ . Le modèle déformable sera donc une surface fermée comportant environ  $O(n^2)$  sommets une fois discrétisée.

Une première approche conserve la formulation générale de minimisation d'énergie ainsi que la définition explicite de la forme. L'adaptation dynamique de la topologie peut se faire par une *reparamétrisation* globale de la courbe/surface à chaque itération [13, 14]. Comme elle est réalisée par plongement du modèle dans une grille simplifiée de la même résolution que l'image, le coût de la reparamétrisation est linéaire en la taille des données, i.e. en  $O(n^3)$ . D'autres auteurs discrétisent directement le modèle en une maille triangulée [8, 9, 17], simpliciale [4], ou spline [11]. Dès lors, les changements de topologie se font par recherche d'auto-intersections de la surface. Comme il est difficile de transformer la topologie de la surface dans le cas général, la plupart de ces modèles ne gèrent qu'une partie des transformations, ou demandent une interaction de l'utilisateur. Seuls les auteurs de [6] et [8, 9] proposent une solution au problème général.

Delingette et Montagnat échantillonnent leur modèle géométrique sur une grille régulière. Certaines propriétés de l'échantillonnage ainsi obtenu caractérisent les auto-intersections significatives du modèle géométrique. Les changements de topologie sont détectés en mettant en évidence ces propriétés, puis résolus à l'aide d'opérateurs topologiques classiques. Avec une complexité en  $P(\frac{\mathcal{L}}{d})$  (où  $\mathcal{L}$  désigne la longueur du contour, et  $d$  le pas de la grille) cette méthode paraît efficace. L'extension des algorithmes employés au cas tridimensionnel n'est toutefois pas immédiate.

Lachaud et Montanvert résolvent le problème dans les cas à deux et trois dimensions en imposant une densité régulière sur toute la maille du modèle géométrique. Certains critères de distances sur les couples de sommets non voisins de la maille permettent de caractériser les ruptures de topologie qui, là encore, sont résolues grâce à des opérateurs topologiques classiques. Le coût de cette technique est en  $O(n^2 \log n)$ .

Une deuxième approche transpose le principe de minimisation d'énergie en la propagation d'une onde dans un milieu [16]. L'adéquation modèle/données se fait en ralentissant l'onde lorsqu'elle traverse de forts contours image [1, 12]. La régularité de la forme est obtenue en imposant une vitesse de propagation proportionnelle à la courbure locale de l'onde. Comme l'onde est représentée implicitement par l'iso-potentielle d'une fonction scalaire de l'espace (-temps), les changements de topologie de l'onde sont

transparents. On peut montrer que la propagation d'une onde dans ce contexte est très proche d'une minimisation d'énergie [20]. En revanche, cette approche impose une discrétisation spatiale de la fonction proportionnelle à la taille des données. Le coût de chaque évolution est donc en  $O(n^3)$ . De plus, il faudrait théoriquement calculer la distance de tout point de la grille au front d'onde; des techniques de fenêtrage évitent ce sur-coût important. D'autres auteurs [18] proposent une décomposition de type *quadtree* pour concentrer les calculs autour du front d'onde. Si leur technique était appliquée en 3D, le coût de chaque itération d'évolution serait réduit à un  $O(n^2 \log n)$ .

Une troisième approche est de poser le problème de minimisation dans un contexte purement discret, avec un espace fini de formes possibles. Les auteurs de [10] définissent l'espace des formes comme étant l'ensemble des sous-ensembles de pixels/voxels de l'image. L'énergie de chacune de ces formes est calculée localement sur sa frontière. Les déformations se font par ajouts ou soustractions de pixels/voxels : les changements de topologie sont donc transparents. Le coût de cette méthode dépend linéairement de la taille de la frontière, soit en  $O(n^2)$ .

Les données issues de moyens d'acquisition comme l'IRM ou la tomодensitométrie ont des résolutions de plus en plus importantes. D'après l'argumentation précédente, les algorithmes de segmentation basés sur les modèles hautement déformables sont donc de plus en plus prohibitifs. Une solution est de disposer d'un modèle déformable capable d'adapter *localement* sa résolution. Le modèle pourra ainsi être très précis dans les zones d'intérêt et conserver une résolution grossière loin des contours ou sur des zones régulières.

Notons que les modèles proposés dans [5] et [6] sont capables d'adapter la densité de leur maille, ce qui améliore la représentation des objets segmentés dans l'image. Toutefois, les variations de la densité de sommets sont guidées par des critères concernant la forme du modèle géométrique (notamment par sa courbure locale). La position dans l'image n'est en revanche pas prise en compte. Il n'est donc pas possible d'imposer au modèle une densité particulière dans une zone définie de l'espace. Pour garantir que le modèle ne passera pas à côté de détails fins, il est donc nécessaire d'accroître significativement la densité en tout point de la maille, ce qui implique une hausse importante du coût de la segmentation.

Dans cet article, nous proposons d'étendre le modèle hautement déformable de [9] en lui ajoutant la possibilité d'adapter localement la densité de sa maille. Cela est réalisé en transformant la métrique de l'espace image en une métrique non-euclidienne, où les distances sont grossières autour des zones d'intérêt.

Dans un premier temps, nous décrivons succinctement le modèle hautement déformable existant. Notre extension fait appel à des notions de géométrie riemannienne. Elles seront donc rappelées dans un deuxième temps. Le modèle déformable plongé dans un espace riemannien sera en-

suite présenté. Pour finir, nous montrerons l'intérêt de cette approche sur un ensemble d'expérimentations réalisées à l'aide d'un prototype 2D.

## 2 Modèle hautement déformable

### 2.1 Segmentation par minimisation d'énergie

Cette section rappelle rapidement la définition et le fonctionnement du modèle déformable de Kass, Witkin et Terzopoulos [7], aussi appelé *snake*. Elle montre ensuite comment il peut être interprété comme un système mécanique. Ceci permet de l'étendre plus naturellement au problème de la segmentation d'images tridimensionnelles.

**Formulation.** Les snakes sont des courbes fermées du plan qui sont plongées dans l'image à analyser. Elles évoluent dans cette image de manière à minimiser une quantité appelée *énergie* de la courbe. Cette énergie est choisie de manière à pénaliser à la fois la distance de la courbe aux contours et ses irrégularités. Les courbes obtenues après convergence de la méthode sont donc un compromis entre régularité et proximité des contours. Classiquement, l'énergie d'une courbe  $\hat{C}$  s'écrit sous la forme d'une fonctionnelle  $E(\hat{C}) = E_{ext}(\hat{C}) + E_{int}(\hat{C})$ .

Le terme  $E_{ext}$  désigne la partie de l'énergie liée à la position de la courbe dans l'image. Cette énergie doit être d'autant plus faible que  $\hat{C}$  longe les contours de l'image. On l'exprime sous la forme de l'intégrale d'une énergie appelée *énergie image* :

$$E_{ext}(\hat{C}) = \int_0^1 E_{img}(\hat{C}(t)) dt$$

où  $E_{img}(P)$  désigne l'énergie d'un point placé en  $P$  dans l'image. Habituellement on l'écrit  $E_{img} = -\|\nabla I(\hat{C}(t))\|$ , où  $I$  désigne la fonction image préalablement lissée par un filtrage gaussien.

Le terme  $E_{int}$  désigne la part de l'énergie liée à la forme de la courbe. Comme les formes régulières sont privilégiées, ce terme sera d'autant plus grand que la courbe sera courbue. Le choix le plus fréquent est :

$$E_{int}(\hat{C}) = \int_0^1 \frac{\alpha}{2} \left\| \frac{d\hat{C}}{dt} \right\|^2 + \frac{\beta}{2} \left\| \frac{d^2\hat{C}}{dt^2} \right\|^2 dt.$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  déterminent respectivement comment la longueur et la courbure du snake pénalisent ses irrégularités.

Minimiser les deux fonctionnelles précédentes revient à trouver le snake d'énergie minimale par approximations successives.

**Analogie avec un système physique.** Le recherche du minimum de l'énergie est généralement effectuée en discrétisant le problème. La courbe  $\hat{C}$  est donc approchée par

une ligne polygonale fermée  $C = (C_1, \dots, C_n)$  dont l'énergie s'écrit :

$$E(C) = \sum_{i=0}^n E(C_i).$$

L'énergie en chaque point  $C_i$  du snake s'écrit avec les expressions discrétisées des dérivées de  $\hat{C}$  :  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ , et  $\Delta_2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}$ , ce qui donne :

$$E(C_i) = E_{img}(C_i) + \frac{\alpha}{2} (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2) + \frac{\beta}{2} (\Delta_2 x_i^2 + \Delta_2 y_i^2).$$

Le problème de minimisation est résolu itérativement en déplaçant à chaque étape les sommets dans la direction qui fait décroître  $E(C)$  le plus rapidement :

$$C_i^{t+1} = C_i^t - \epsilon \left( \begin{array}{c} \frac{\partial E(C^t)}{\partial x_i^t} \\ \frac{\partial E(C^t)}{\partial y_i^t} \end{array} \right).$$

Ces équations peuvent s'interpréter physiquement comme les équations qui régissent le mouvement d'un ensemble de particules  $(C_i)_{1 \leq i \leq n}$  soumises à des forces qui dérivent de l'énergie du snake dans l'image.

En détaillant les calculs, on peut montrer que, pour chaque particule, cette force s'écrit comme somme de trois forces élémentaires :

- une force qui attire la particule vers les contours de l'image et qui s'écrit comme le gradient de l'énergie image,
- une force élastique qu'on peut interpréter physiquement comme l'action de deux ressorts qui relient chaque particule à ses deux voisines,
- une force de courbure enfin, qui pousse les particules voisines à s'aligner sur une même droite.

On retrouve donc bien les deux contraintes initiales sur la courbe : d'une part elle est attirée vers les contours de l'image, et d'autre part elle est contrainte à rester régulière.

**Intérêt de la formulation dynamique.** Avec ces considérations, le snake devient un modèle dynamique, qu'on peut adapter pour lui donner un comportement plus proche de nos besoins.

En particulier, il est très facile d'introduire de nouvelles forces qui accélèrent la convergence ou améliorent la qualité de la segmentation. On ajoute ainsi très fréquemment une force de frottement fluide qui dissipe l'énergie des particules lorsqu'elles se déplacent. La convergence est alors plus rapide. Certains auteurs proposent de nouvelles forces qui améliorent la segmentation en attirant la courbe vers les contours, même lorsque celle-ci en est éloignée (par exemple, Cohen [2] introduit une force d'inflation suivant la normale à la courbe et Xu et Prince [21] définissent un champ de forces qui guide la courbe dans les concavités des objets à segmenter).

D'autre part, contrairement à la formulation en termes de minimisation d'énergie, la formulation à l'aide d'un modèle physique s'étend facilement au cas tridimensionnel.

Les frontières des objets sont modélisées par des réseaux maillés identifiés à des systèmes de particules en interaction. Chaque nœud de la maille est vu comme une masse soumise à l'action de la force image, des forces élastiques et de courbure imposées par les sommets voisins, et éventuellement d'autres forces telles que celles que nous venons de citer.

## 2.2 Modèle hautement déformable

**Motivations.** Les modèles déformables classiques sont incapables de changer de topologie : lors de son évolution, la courbe (ou la surface dans le cas tridimensionnel) conserve sa topologie initiale. Il est donc nécessaire de faire au départ des hypothèses sur la topologie des objets à identifier dans l'image. Dans un cadre tel que celui de l'analyse d'images médicales, les objets recherchés ont souvent une topologie compliquée avec des anses et des cavités, et révèlent parfois des pathologies : on ne peut donc pas faire d'hypothèse sur la topologie de la forme recherchée.

Les *modèles hautement déformables* évitent de définir au préalable la topologie de la forme finale. Les différentes sortes de modèles hautement déformables ont été décrites dans l'introduction. Dans la suite, nous nous intéressons à un modèle hautement déformable particulier, développé par Lachaud et Montanvert [8, 9], et pour lequel nous proposons ensuite une amélioration.

**Modèle géométrique existant.** La forme de ce modèle déformable 3D est définie par un réseau maillé à maille triangulaire (i.e. une surface triangulée éventuellement non connexe). En plus des règles d'évolution classiques, des règles supplémentaires imposent à la maille de toujours représenter une surface fermée avec une orientation cohérente (c'est-à-dire qui définit un intérieur et un extérieur).

Pour garantir ces propriétés, le modèle est capable de détecter automatiquement quand et comment changer sa topologie. Ces détectations sont effectuées en maintenant des contraintes qui assurent l'espacement régulier des sommets sur la maille : à chaque instant, la distance entre deux sommets voisins  $M$  et  $N$  vérifie :

$$\delta \leq d(M, N) \leq \zeta\delta, \text{ avec } \delta > 0 \text{ et } \zeta > 2.$$

Pour assurer le maintien de cette contrainte, il suffit, à chaque itération, d'examiner toutes les arêtes du réseau. Lorsqu'une arête est trop longue, un nouveau sommet est inséré en son milieu. Lorsqu'une arête est trop courte, les sommets situés à ses extrémités sont fusionnés.

Lorsque le réseau maillé satisfait ces contraintes, il est possible de détecter les intersections entre parties non localement connexes de la maille. Cela permet de déterminer si des changements topologiques doivent être effectués. Considérons une facette  $(u, v, w)$  de la maille, et un point  $p$  qui se déplace et traverse cette facette. Comme les côtés de la facette ont des longueurs inférieures à  $\zeta\delta$ , il arrive un instant où  $p$  passe à une distance de  $u$  ou  $v$  ou  $w$  inférieure à un certain seuil  $\lambda\zeta\delta$ . La figure 1 illustre cette idée en deux

dimensions. La détection fonctionne de manière similaire dans le cas tridimensionnel.

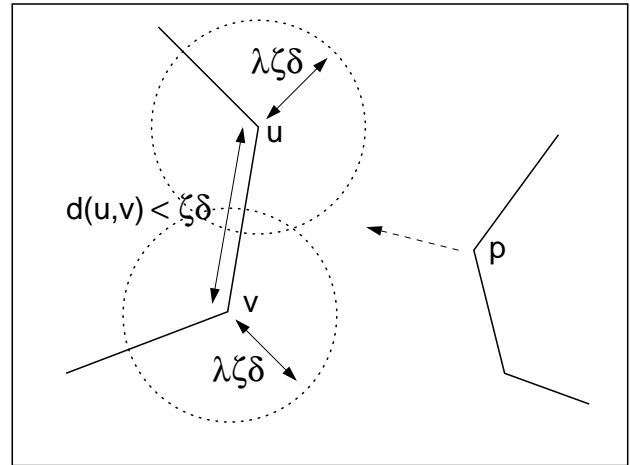


FIG. 1 – La détection des collisions entre parties non localement connexes de la maille est permise par les contraintes de distance sur les sommets voisins. Si  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda$ , lorsque  $p$  traverse  $(u, v)$ , il passe à une distance inférieure à  $\lambda\zeta\delta$  de  $u$  ou  $v$ . En trois dimensions, on montre que  $\sqrt{1 - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}} \leq \lambda$  convient pour détecter les collisions.

En détectant les couples de points  $(p, q)$  non voisins pour lesquels  $\lambda\zeta\delta \leq d(p, q)$ , on repère ainsi les collisions entre deux parties non localement connexes de la maille. Une subdivision de l'espace par un *octree* par points ramène la recherche de ces couples à une complexité en  $O(m \log m)$ , si  $m$  est le nombre de sommets.

Lorsqu'une collision est détectée, il est nécessaire de reconfigurer localement le réseau maillé, de manière à conserver la cohérence de la surface. La figure 2 illustre le procédé utilisé : on insère de nouveaux sommets et on élimine les sommets qui posent problème. De nouvelles arêtes sont alors ajoutées entre les deux morceaux de surface qui risquaient d'entrer en collision, et qui sont alors rendues connexes.

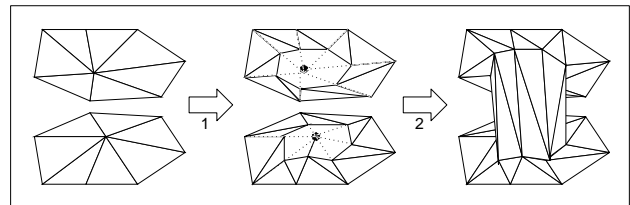


FIG. 2 – Pour effectuer les transformations topologiques, (1) on introduit des sommets intermédiaires, et on supprime les sommets en conflit, puis (2) on connecte les nouveaux sommets avec de nouvelles arêtes.

**Inconvénients du modèle.** Dans une image médicale, seules certaines zones souvent assez restreintes présentent un intérêt réel pour le praticien. Il n'est pas souhaitable de

traiter avec précision les zones qui ont un intérêt limité, car ces traitements sont coûteux.

Or, pour que le modèle décrit ci-dessus soit précis à un endroit dans l'espace, il est nécessaire que la maille soit fine à cet endroit. La méthode de recherche utilisée pour détecter les collisions impose que les distances entre sommets voisins sur la maille soient uniformes sur toute la surface. On ne peut donc pas augmenter seulement localement la résolution du modèle. En conséquence, traiter avec une grande précision un endroit restreint de l'image implique de traiter l'image entière avec une précision égale : le nombre de sommets de la maille comme le coût des calculs augmentent significativement.

L'amélioration que nous proposons permet au modèle de travailler à des résolutions différentes dans des zones différentes de la même image. Il est donc possible d'accroître sensiblement la précision dans les parties intéressantes de l'image, sans pour autant augmenter de manière significative les temps de calculs.

### 3 Amélioration proposée

Lorsque le modèle évolue, la résolution de la maille est contrôlée par les contraintes portant sur les sommets voisins : lorsque la résolution devient faible (ce qui se traduit par des arêtes trop longues), le modèle insère de nouveaux points pour rétablir la régularité. Inversement, lorsque la résolution devient trop importante (ce qui se traduit par des arêtes trop courtes), le modèle fusionne les points proches. On constate donc que la densité de sommets sur la maille est entièrement conditionnée par des mesures de distance. Nous proposons de changer la notion de distance dans l'espace image de manière à pousser la maille à adopter une résolution plus importante là où cela est utile :

- dans une zone de l'espace où les distances sont sur-évaluées, les distances entre points voisins apparaissent plus grandes au modèle. Pour satisfaire la contrainte de régularité de la maille, il ajoute donc des sommets intermédiaires, et la résolution augmente.
- inversement, dans une zone de l'espace où les distances sont sous-évaluées, les distances entre points voisins semblent plus faibles au modèle. Pour conserver la régularité de la maille, le modèle fusionne les points voisins, et la résolution diminue.

En changeant localement les notions de distances, il est possible de forcer le modèle à travailler à différentes résolutions suivant l'endroit de l'image. Il est donc envisageable d'augmenter localement la précision de l'analyse de l'image, sans pour autant augmenter considérablement le coût des calculs.

Modifier la notion de distance sur l'espace pose plusieurs problèmes :

- Premièrement, il est nécessaire d'avoir une définition plus générale de la notion de distance. Il est également nécessaire de mettre au point des algorithmes permettant de mesurer les distances entre les points avec cette nouvelle définition.

- Dans un second temps, il est important de constater que cela implique sur le fonctionnement du modèle. Il convient donc de reformuler son comportement dans un espace muni de notre nouvelle distance. Cela nécessite en particulier :
  - de redéfinir les forces appliquées aux sommets de la maille,
  - de modifier les contraintes de distances imposées entre sommets voisins de sorte que le modèle puisse adapter sa topologie à ses évolutions géométriques.
- Enfin, il convient de s'interroger sur la définition locale de la distance dont nous allons munir l'espace image. Les paragraphes qui suivent traitent un par un ces différents points.

## 4 Géométrie riemannienne

Pour définir une nouvelle notion de distance, nous nous appuyons sur les définitions et les théorèmes énoncés dans le cadre de la géométrie riemannienne. Ces théories n'étant pas l'objet de cet article, nous ne décrivons ici que les notions utiles pour définir notre nouveau modèle déformable. Le lecteur intéressé par les détails pourra se référer à des ouvrages classiques de géométrie différentielle [19, 15].

Par ailleurs, dans le souci de faciliter la compréhension, nous nous placerons dans le plan dans la suite. Les notions et algorithmes décrits s'étendent directement au cas tridimensionnel qui est celui qui nous intéresse.

### 4.1 Métrique - Longueur d'un chemin

Dans l'espace euclidien, la longueur d'un déplacement élémentaire  $\vec{ds} = (dx, dy)$  ne dépend pas de la position de l'espace à partir de laquelle il est effectué.

Dans un espace non euclidien au contraire, la longueur de ce déplacement infinitésimal reste bien entendu fonction des quantités  $dx$  et  $dy$ , mais dépend également de la position de l'espace où il a lieu. Sur un planisphère par exemple, un déplacement de  $1^\circ$  de longitude n'a pas la même longueur suivant qu'on est proche de l'équateur où de l'un des pôles.

Pour mesurer les longueurs des chemins dans un espace non euclidien, il est donc nécessaire de connaître en tout point l'application qui à un déplacement élémentaire associe sa longueur : cette application est déduite de la notion de métrique que nous définissons maintenant.

Une *métrique* est une application qui à tout point  $(x, y)$  du plan associe un produit scalaire  $g_{(x,y)}$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On impose de plus que  $g$  soit une application  $\mathcal{C}^1$  de  $x$  et  $y$ .

En un point  $(x, y)$  donné, le produit scalaire  $g_{(x,y)}$  fournit donc un moyen de mesurer les vecteurs : la longueur d'un déplacement  $\vec{ds} = (dx, dy)$  s'écrit  $g_{(x,y)}(\vec{ds}, \vec{ds})^{\frac{1}{2}}$ . La longueur d'un chemin  $\gamma$  du plan peut alors s'écrire comme la somme des longueurs des déplacements élémentaires qui le composent :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left( g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\vec{\gamma}}{dt}, \frac{d\vec{\gamma}}{dt} \right) \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (1)$$

Tout produit scalaire peut être identifié à une matrice symétrique définie positive. En un point  $(x, y)$  du plan,  $g_{(x,y)}$  peut donc s'écrire comme la forme bilinéaire :

$$(\vec{u}, \vec{v}) \rightarrow \vec{u}^T \times \begin{pmatrix} g_{11}(x, y) & g_{12}(x, y) \\ g_{12}(x, y) & g_{22}(x, y) \end{pmatrix} \times \vec{v}.$$

Ce sera notre moyen privilégié pour définir les métriques. En utilisant cette formulation, en posant  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , et en notant  $g_{ij} = g_{ij}(x(t), y(t))$ , l'intégrale (1) se réécrit :

$$\int_0^1 (g_{11}x'(t)^2 + 2g_{12}x'(t)y'(t) + g_{22}y'(t)^2)^{\frac{1}{2}} dt \quad (2)$$

Notons au passage qu'en choisissant la métrique constante donnée par la matrice identité, la longueur d'un déplacement élémentaire  $\vec{ds} = (dx, dy)$  s'écrit  $\|\vec{ds}\|^2 = dx^2 + dy^2$  : la métrique euclidienne apparaît donc comme une métrique riemannienne particulière.

## 4.2 Distance entre deux points

Le fonctionnement de notre modèle déformable est basé sur des mesures de distances entre les sommets de la maille. Il est donc nécessaire d'avoir une définition de la distance entre deux points dans un espace riemannien<sup>1</sup> et un moyen de la calculer.

**Définition.** La définition que nous utiliserons est tout à fait analogue à celle dont nous disposons dans un espace euclidien. Etant donnés deux points  $M$  et  $N$ , on définit la distance  $d(M, N)$  de  $M$  à  $N$  par :

$$d(M, N) = \inf\{L(\gamma) | \gamma \in \mathcal{C}_{MN}\},$$

où  $\mathcal{C}_{MN}$  désigne l'ensemble des chemins  $\mathcal{C}^1$  du plan qui joignent  $M$  à  $N$ .

En termes plus simples, la distance entre deux points est la longueur d'un plus court chemin joignant ces deux points (certaines hypothèses sur l'espace dans lequel on se place garantissent qu'un tel chemin existe toujours). Les plus courts chemins du plan seront appelés *géodésiques*.

**Méthode de calcul.** Pour déterminer la distance d'un point à un autre de l'espace, la méthode que nous avons choisie est de commencer par chercher une géodésique qui les joint, puis de calculer ensuite l'intégrale (2) le long de cette géodésique. Dans ce qui suit, nous décrivons une méthode de recherche d'une géodésique joignant deux points de l'espace.

Une géodésique est un plus court chemin joignant deux points. Elle est donc solution du problème de minimisation de l'intégrale (2), et, à ce titre, elle vérifie les équations d'Euler-Lagrange (voir [3]). Ces dernières s'écrivent

$$\begin{cases} g_{11}x'' + g_{12}y'' + \Gamma_{11}^1x'^2 + 2\Gamma_{12}^1x'y' + \Gamma_{22}^1y'^2 = 0 \\ g_{12}x'' + g_{22}y'' + \Gamma_{11}^2x'^2 + 2\Gamma_{12}^2x'y' + \Gamma_{22}^2y'^2 = 0 \end{cases},$$

<sup>1</sup>c'est-à-dire muni d'une métrique

Nombre de points	Erreur (%)	Coûts (ms)
10	0.00120	2.2
20	0.00030	8.9
30	0.00016	23.7

TAB. 1 – Ce tableau donne les temps de calcul moyens d'une distance riemannienne entre deux points tirés aléatoirement, ainsi que l'erreur commise par rapport à un calcul quasi-exact, en fonction du nombre de points utilisés dans la discrétisation de l'équation d'Euler-Lagrange.

où les  $\Gamma_{ij}^h$  sont les fonctions connues sous le nom de *symboles de Christoffel* et définies par :

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{hi}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_h} \right).$$

Pour les résoudre, nous utilisons une méthode dite *de relaxation* voisine d'un modèle de snake : la géodésique est approchée par une courbe polygonale initialisée d'une manière raisonnable (par exemple avec la ligne droite joignant les deux extrémités de la géodésique cherchée). A chaque itération ses sommets sont déplacés dans la direction qui fait le plus décroître la version discrétisée de l'intégrale (2).

Notons par ailleurs que, lorsque la métrique est une constante indépendante de la position dans l'espace, les géodésiques sont des droites : on retrouve là encore les propriétés que l'on connaît dans l'espace euclidien.

**Résultats.** Les expérimentations montrent que, même avec une approximation grossière de la géodésique, la méthode de calcul que nous proposons fournit des résultats assez précis (cf. table 1). En outre les temps de calcul sont suffisamment faibles pour qu'il soit raisonnable d'utiliser l'algorithme dans notre modèle géométrique.

## 5 Modèle déformable dans un espace riemannien

Le modèle déformable que nous voulons améliorer fonctionne en grande partie en effectuant des mesures de distance dans un espace euclidien. Il faut donc revoir son fonctionnement dans le contexte plus général que nous nous sommes fixé. Nous redéfinissons d'abord les forces qui déterminent le mouvement des particules, puis nous reformulons les contraintes de régularité de la maille et la méthode de détection des changements de topologie.

### 5.1 Dynamique du modèle

Dans le cas euclidien, le modèle déformable était guidé par trois types de forces :

- la force imposée par l'image à tous les nœuds de la maille ;
- la force élastique imposée à un sommet par ses voisins ;
- la force de courbure, imposée elle aussi à un sommet par ses voisins.

**Forces de l'image.** Avec notre nouveau modèle, les forces images restent les mêmes que dans le cas euclidien : une particule sera donc soumise à une force opposée au gradient de l'énergie image là où elle est située dans l'image.

**Forces élastiques.** Les forces élastiques, au contraire, doivent être changées à la fois dans leur intensité et dans leur direction. Alors que dans le cas euclidien elles pouvaient être modélisées par des ressorts rectilignes reliant les sommets voisins, nous supposons maintenant que ces forces peuvent être vues comme l'action de ressorts courbés posés sur les géodésiques joignant les points voisins. La force élastique imposée à un sommet  $u$  par l'un de ses voisins  $v$  est donc dirigée selon la tangente à la géodésique qui joint  $u$  à  $v$ . Son intensité est proportionnelle à la longueur de cette géodésique.

Avec cette nouvelle définition des forces et un espace muni de la métrique euclidienne (dans lequel les géodésiques sont des droites), notre nouveau modèle correspond exactement à l'ancien. D'autre part si l'on se restreint au cas du plan, si on laisse un sommet  $w$  de la maille soumis à cette seule force entre deux autres sommets fixes  $u$  et  $v$ , alors  $w$  se stabilise sur la géodésique qui joint  $u$  et  $v$ , à équidistance (riemannienne) des deux sommets. La courbe paramétrée représentée par l'ensemble des sommets de notre modèle est donc optimale pour le critère de longueur : c'est bien le comportement qu'on attendait dans le cas euclidien.

**Forces de courbure.** Les forces de courbures sont déterminées en faisant l'hypothèse que localement la métrique est pratiquement constante. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la métrique est de classe  $C^1$  et que des sommets connexes sont dans la pratique très proches les uns des autres. Elle permet de supposer que sur de courtes distances les géodésiques sont assimilables à des segments de droite.

On reprend alors la formulation proposée dans le modèle déformable initial en exprimant la force de courbure appliquée sur un sommet  $U$  par l'ensemble de ses voisins  $N(U)$  comme une force dirigée de  $U$  vers le barycentre  $G(N(U))$  de ses voisins. Cette force est d'intensité proportionnelle à la distance séparant  $U$  et  $G(N(U))$  (mesurée avec notre nouvelle métrique).

Là encore lorsque la métrique choisie pour l'espace est la métrique euclidienne, ce choix des forces de courbures correspond à celui du modèle déformable initial.

## 5.2 Changements de topologie

Les changements de topologie du modèle déformable que nous souhaitons étendre sont détectés grâce à des mesures de distances entre sommets non voisins. Il convient donc de les reformuler dans le contexte plus général que nous utilisons. On commence par énoncer une inégalité qui est ensuite utilisée pour redéfinir la recherche des ruptures topologiques.

La matrice qui nous sert à définir la métrique est, en chaque point, symétrique et définie positive. Par conséquent elle

est diagonalisable dans une base orthonormée et peut donc s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

où  $\theta$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dépendent du point du plan où l'on se place. Notons respectivement  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$  les bornes supérieures et inférieures de l'ensemble  $\{\lambda_1(x, y), \lambda_2(x, y) \mid (x, y) \in E\}$ ,  $E$  désignant l'espace image.

Donnons-nous maintenant deux points  $M = (x, y)$  et  $N = (x + dx, y + dy)$  du plan. Alors, l'inégalité suivante tient :

$$\lambda_{min}(dx^2 + dy^2) \leq d(M, N)^2 \leq \lambda_{max}(dx^2 + dy^2). \quad (3)$$

Revenons à notre problème et considérons une facette  $(u, v, w)$ . La distance d'un point de cette facette à  $u$ ,  $v$  ou  $w$  peut être majorée en utilisant l'inégalité (3). On peut estimer la plus grande distance possible entre un point de la facette et l'un des sommets. Nous noterons  $\Lambda$  ce nombre. Nécessairement, un point qui traverse la facette passe à une distance de  $u$ ,  $v$ , ou  $w$  inférieure à  $\Lambda$ .

Cela nous fournit un moyen de détecter les collisions entre parties non localement connexes de la surface. La méthode employée pour résoudre les problèmes topologiques qui se posent est similaire à celle employée dans le modèle initial. L'inégalité (3) permet par ailleurs de réduire considérablement les coûts des calculs. Si, pour un couple de sommets  $u = (x, y)$  et  $v = (x + dx, y + dy)$  non voisins, on a  $(\lambda\zeta\delta)^2 \leq \lambda_{min}(dx^2 + dy^2)$ , alors l'inégalité nous assure que  $\lambda\zeta\delta \leq d(u, v)$ . Il n'y a donc pas lieu d'effectuer une reconfiguration topologique. Ce calcul a un coût équivalent à un calcul de distance euclidienne. Il est donc beaucoup plus avantageux qu'un calcul exact de la distance dans l'espace riemannien.

Pour exploiter cette propriété, on subdivise régulièrement l'espace en cellules contenant les sommets du réseau maillé. Pour une cellule  $C$  donnée il est facile de déterminer quelles sont les cellules proches qui peuvent contenir des sommets à une distance de  $C$  inférieure à  $\frac{\lambda\zeta\delta}{\sqrt{\lambda_{min}}}$ . Pour détecter les ruptures de topologie impliquant un sommet contenu dans  $C$ , on se contente d'examiner uniquement les sommets appartenant à ces cellules proches. On élimine ainsi sans calcul un nombre important de sommets.

## 6 Choix de la métrique

Nous avons décrit un modèle déformable qui évolue dans un espace image muni d'une métrique non euclidienne, mais nous n'avons pas encore précisé comment choisir la métrique en tout point de cette image. C'est l'objet de cette section.

### 6.1 Choix supervisé

Souvent, c'est l'utilisateur qui est le mieux à même de définir les zones de l'image qui l'intéressent. On peut donc imaginer de lui laisser faire le choix de la métrique.



Nous appellerons *métriques isotropes* les métriques données sous la forme :

$$g(x, y) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $g$  est une application du plan à valeur dans  $[1, +\infty[$ .

Ces métriques permettent d'effectuer une dilatation de l'espace d'autant plus importante que  $g$  aura une valeur élevée, mais indépendante de la direction dans laquelle on se déplace. Avec une telle métrique tous les vecteurs images l'un de l'autre par une rotation d'angle quelconque auront la même longueur. C'est donc un moyen simple de choisir la métrique.

Cependant, en ne se limitant pas à ce type de métrique, on peut manipuler plus précisément le modèle déformable. Nous donnons maintenant quelques indices pour faciliter le choix d'une métrique.

Nous avons dit plus haut que la matrice utilisée pour donner la métrique est diagonalisable en base orthonormée. Notons  $v_1$  et  $v_2$  ses vecteurs propres, et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres associées.

Un déplacement unitaire le long du vecteur  $v_1$  aura pour longueur  $\lambda_1$ . Un déplacement unitaire le long du vecteur  $v_2$  aura pour longueur  $\lambda_2$ . Un déplacement unitaire dans une direction quelconque désignée par un angle non orienté  $\theta$  par rapport à  $v_1$  sera de longueur  $(\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$ . Il est donc possible de contraindre le modèle déformable à n'ajouter des points sur la maille que lorsqu'elle est orientée dans une direction donnée. L'intérêt est particulièrement sensible dans le cas de deux contours parallèles et proches l'un de l'autre (voir la figure 4 pour un exemple).

## 6.2 Choix basé sur l'image

S'il peut être utile de laisser l'utilisateur choisir seul la métrique à utiliser, il peut également être intéressant de proposer un calcul entièrement automatique. Notre modèle étant en cours de développement, il ne nous a pas encore été possible de mettre en œuvre de telles méthodes. Cependant nous donnons ici quelques pistes qui semblent prometteuses.

Avec une approche frontière comme celle que nous proposons, les parties intéressantes de l'image sont situées au voisinage des contours. Nous proposons donc de ne dilater l'espace qu'au voisinage immédiat des contours. L'intérêt d'une telle approche est qu'elle permet d'accélérer la convergence : l'initialisation peut avoir lieu avec un faible nombre de points, et la maille se raffine automatiquement lorsqu'elle arrive dans un endroit « sensible ».

Si dans un premier temps on peut se limiter à l'usage de métriques isotropes, l'usage de métriques plus générales peut être particulièrement utile. En effet, les formes que nous recherchons sont des formes régulières. Une surface triangulée avec un échantillonnage grossier reste donc une bonne approximation de la surface des objets que nous voulons reconnaître. Nous proposons donc de travailler avec

des métriques non isotropes pour lesquelles les longueurs des déplacements le long des contours sont faibles et les longueurs des déplacements orthogonalement aux contours sont importantes. L'intérêt est que le modèle est alors capable de distinguer deux contours parallèles proches sans que le nombre de points utilisés pour les décrire soit trop important. Cette méthode prometteuse vient en complément de la précédente. Elle nécessite néanmoins une connaissance de la direction du contour et donc un prétraitement de l'image plus important qu'avec la première idée proposée.

## 7 Expérimentations

Pour valider notre modèle, nous avons développé une application qui fonctionne pour la segmentation d'images du plan et que nous comptons étendre au cas tridimensionnel. Nous présentons des résultats obtenus sur des images synthétiques.

### 7.1 Comparaison entre différentes métriques

Ce paragraphe valide notre modèle et illustre comment le choix de la métrique influence la résolution de la maille et le résultat de la segmentation.

**Résultats en métrique euclidienne.** La figure 3 illustre la limitation imposée par le modèle déformable initial : la maille étant régulière, pour segmenter avec précision une région restreinte de l'espace, il est nécessaire d'augmenter le nombre de sommets sur toute la maille, y compris là où c'est inutile.

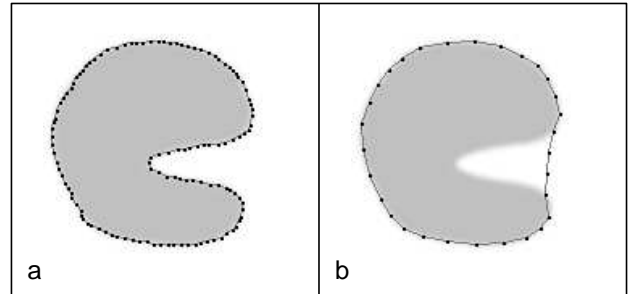


FIG. 3 – En utilisant une distance euclidienne, il est nécessaire d'augmenter partout la résolution de la maille pour obtenir une bonne segmentation de la concavité. En particulier, on utilise un nombre de points bien plus grand que ce qui est nécessaire pour segmenter la partie convexe de l'objet : (a) 116 sommets, (b) 30 sommets.

**Résultats avec une métrique non euclidienne.** La figure 4 montre comment il est possible d'augmenter localement la résolution en changeant les notions de distance. Les images 4a et 4b donnent les résultats de la segmentation, alors que les images 4c et 4d décrivent les métriques utilisées. Les métriques sont représentées par leurs vecteurs propres en un certain nombre de points. Chaque vecteur a

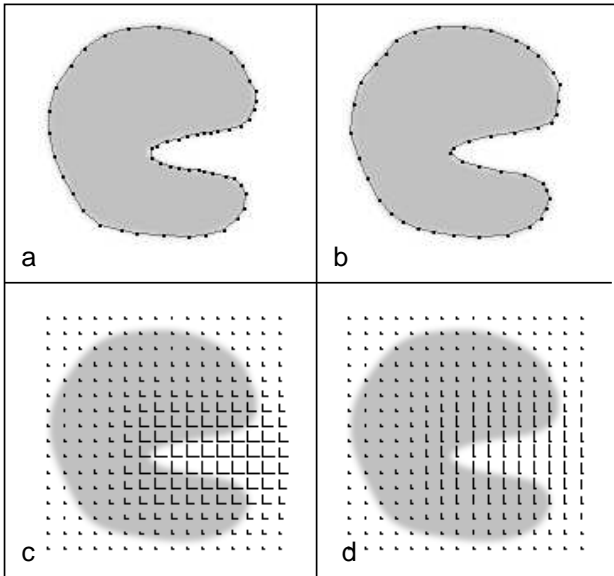


FIG. 4 – Utilisation de différentes métriques riemanniennes (isotropes et anisotropes) : (a) résultat de la segmentation avec une métrique riemannienne isotrope représentée sur l’image (c), (b) résultat de la segmentation avec une métrique riemannienne anisotrope représentée sur l’image (d). On constate une accumulation de sommets dans les zones où la métrique est importante. Dans le cas anisotrope, cette accumulation est ciblée sur les parties du contour orientées verticalement.

une longueur proportionnelle à la valeur propre à laquelle il est associé. Ainsi, plus un vecteur est grand sur l’image, plus un déplacement dans sa direction est coûteux.

Les figures 4a et 4c donnent le résultat de la segmentation en utilisant une métrique riemannienne isotrope : on observe que la densité de points sur la maille est plus importante dans la concavité de la maille, c’est-à-dire là où la métrique est importante.

Les figures 4b et 4d donnent le résultat de la segmentation en utilisant une métrique riemannienne non isotrope : la densité de la maille n’est augmentée que lorsque la maille est orientée verticalement. La segmentation est identique, mais le nombre de sommets utilisés pour décrire le contour de l’objet reste faible. Cela illustre l’intérêt que pourrait apporter la définition de métriques anisotropes allongeant les distances dans la direction normale au contour, et laissant les distances inchangées dans la direction parallèle.

## 7.2 Changements de topologie

La figure 5 valide le fonctionnement de la recherche de rupture de topologie dans un espace muni d’une métrique non euclidienne. La métrique est représentée par ses vecteurs propres d’une taille proportionnelle aux valeurs propres de la même manière que sur la figure 4.

## 8 Conclusion

Nous avons présenté un modèle hautement déformable à résolution adaptative. Ce modèle peut travailler localement avec une précision accrue sans que sa complexité soit affectée de manière significative. Il a été validé en deux dimensions par le développement d’un prototype. Les résultats d’un ensemble représentatif d’expérimentations ont été présentés. Il serait particulièrement intéressant de le valider similairement dans le cas tridimensionnel. De plus, nous envisageons d’explorer plus en détails le choix des métriques et éventuellement de développer des méthodes de calcul automatiques de ces dernières, directement à partir de l’image.

## Références

- [1] V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic active contours. In *ICCV95*, pages 694–699, 1995.
- [2] L. D. Cohen. On active contour models and balloons. *CVGIP : Image Understanding*, 53(2) :211–218, March 1991.
- [3] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*, volume 1. Interscience Publishers Inc., New York, NY, 1953.
- [4] H. Delingette. Simplex meshes : A general representation for 3D shape reconstruction. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR’94)*, pages 856–859, Los Alamitos, CA, USA, June 1994. IEEE Computer Society Press.
- [5] H. Delingette. General object reconstruction based on simplex meshes. Research Report 3111, INRIA, Sophia Antipolis, France, February 1997.
- [6] H. Delingette and J. Montagnat. New algorithms for controlling active contours shape and topology. In D. Vernon, editor, *European Conference on Computer Vision (ECCV’2000)*, number 1843 in LNCS, pages 381–395, Dublin, Ireland, June 2000. Springer.
- [7] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) :321–331, 1987.
- [8] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Volumic segmentation using hierarchical representation and triangulated surface. In *Proc. 4th European Conference on Computer Vision (ECCV’96)*, Cambridge, UK, volume 1064 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 137–146. Springer-Verlag, Berlin, April 1996.
- [9] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Deformable meshes with automated topology changes for coarse-to-fine 3D surface extraction. *Medical Image Analysis*, 3(2) :187–207, 1999.
- [10] J.-O. Lachaud and A. Vialard. Discrete deformable boundaries for the segmentation of multidimensional images. In C. Arcelli, L. P. Cordella, and G. Santini di Baja, editors, *Proc. 4th Int. Workshop on Visual Form (IWVF4)*, Capri, Italy, volume 2059 of

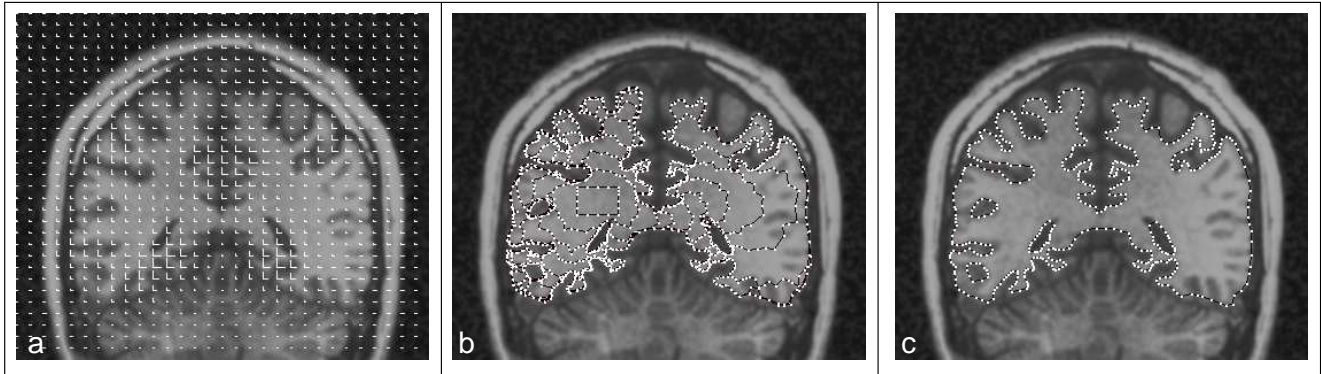


FIG. 5 – Changement de topologie avec une métrique non euclidienne sur une image réelle ; (a) métrique définie sur cette image, (b) différentes étapes de l'évolution du modèle superposées (c) résultat de la segmentation. On constate que le modèle adapte bien sa résolution aux valeurs de la métrique. La détection des transformations topologiques s'effectue comme prévu, même dans les zones où la métrique est déformée.

*Lecture Notes in Computer Science*, pages 542–551. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

- [11] F. Leitner and P. Cinquin. Complex topology 3D objects segmentation. In *Proc. of Advances in Intelligent Robotics Systems*, volume 1609 of *SPIE*, Boston, MA, November 1991.
- [12] R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri. Shape Modelling with Front Propagation : A Level Set Approach. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(2) :158–174, February 1995.
- [13] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical Image Segmentation Using Topologically Adaptable Snakes. In *Proc. of Computer Vision, Virtual Reality and Robotics in Medicine*, pages 92–101, Nice, France, 1995. Springer-Verlag.
- [14] T. McInerney and D. Terzopoulos. Medical Image Segmentation Using Topologically Adaptable Surfaces. In J. Troccaz, E. Grimson, and R. Mösges, editors, *Proc. of CVRMed-MRCAS*, volume 1205 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 23–32, Grenoble, France, March 1997. Springer-Verlag.
- [15] F. Morgan. *Riemannian Geometry, A Beginner's Guide*. Jones and Bartlett, 1992.
- [16] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- [17] J. Park, M. Kim, T. McInerney, and D. Terzopoulos. A multiscale deformable model for extracting complex surfaces from volume images. In *Proc. 7th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, Seoul, Korea*, pages 208–217, October 1999.
- [18] J. Strain. Tree methods for moving interfaces. *Journal of Computational Physics*, 15(2) :616–648, May 1999.
- [19] E. Toubiana and R. Sá-Earp. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Diderot, Paris, 1997.
- [20] R. T. Whitaker. Volumetric deformable models : active blobs. In R.A. Robb, editor, *Proc. 3rd Conf. on Visualization in Biomedical Computing (VBC'94)*, volume 2359 of *SPIE Proc.*, pages 122–134, Rochester, MN, October 1994. SPIE.
- [21] C. Xu and J. L. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Trans. on Image Processing*, 7(3) :359–369, March 1998.