



**HAL**  
open science

# METHODES DIAGRAMMATIQUES EN REPRESENTATIONS D'ALGEBRES DE DIMENSION FINIE

Claude Cibils, Larrion Francisco, Salmeron Leonardo

► **To cite this version:**

Claude Cibils, Larrion Francisco, Salmeron Leonardo. METHODES DIAGRAMMATIQUES EN REPRESENTATIONS D'ALGEBRES DE DIMENSION FINIE. Section de mathématiques, Université de Genève. Université de Genève, pp.68, 1983, Publications internes. hal-00297235

**HAL Id: hal-00297235**

**<https://hal.science/hal-00297235v1>**

Submitted on 15 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PUBLICATIONS INTERNES  
DE LA  
SECTION DE MATHÉMATIQUES  
DE  
L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE

METHODES DIAGRAMMATIQUES EN REPRESENTATION D'ALGÈBRES  
DE DIMENSION FINIE

par

C.CIBILS  
F.LARRIÓN  
L.SALMERÓN

PUBLICATIONS INTERNES  
DE LA  
SECTION DE MATHÉMATIQUES  
DE  
L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE

METHODES DIAGRAMMATIQUES EN REPRESENTATION D'ALGÈBRES  
DE DIMENSION FINIE

par

C. CIBILS

F. LARRIÓN

L. SALMERÓN

PUB  
1983  
No 17

<u>CHAPITRE I</u> :	<u>PRELIMINAIRES</u>	1
§1.	Algèbres et modules	1
§2.	Equivalence de Morita	5
§3.	Radical et couvertures projectives	7
§4.	Dualité et enveloppes injectives	13
§5.	Idempotents	15
§6.	Idempotents centraux	16
 <u>CHAPITRE II</u> :	 <u>ALGEBRE DE CARQUOIS ET ALGEBRES</u>	 18
§1.	Carquois et algèbres de carquois	18
§2.	Radical et idéaux de définition	20
§3.	Carquois de Gabriel d'une algèbre	24
§4.	Construction d'un homomorphisme $\phi : kC_{\Lambda} \rightarrow \Lambda$	27
§5.	$\phi$ est surjective	29
§6.	Le noyau de $\phi$ est de définition	32
 <u>CHAPITRE III</u> :	 <u>REPRESENTATIONS DE CARQUOIS</u>	 34
§1.	Remarques sur les idéaux de définition	34
§2.	Représentations de carquois avec relations	35
§3.	Correspondance entre modules et représentations	38
§4.	Description des modules simples	42
§5.	Description des projectifs indé- composables	42
§6.	Description de $\text{rad}^m P_i$	44
§7.	Description des injectifs indé- composables	45

<u>CHAPITRE IV</u> :	<u>ALGÈBRES HÉRÉDIATIVES ET UNISÉRIELLES</u>	48
	§1. Algèbres héréditaires et quotients d'héréditaire	48
	§2. Algèbres unisérielles	51
REFERENCES		63

## PREFACE

Ce travail se propose de détailler une méthode développée ces dernières années pour étudier les modules de génération finie sur des algèbres de dimension finie sur un corps.

Cette méthode, qui est basée sur des graphes orientés finis, est bien connue des spécialistes. Il est cependant difficile à un débutant de s'en faire rapidement une idée, car la plupart des articles la supposent connue, ou bien l'exposent rapidement. Nous essayons ici d'en donner une approche très explicite, ainsi qu'un aperçu de son utilisation.

La méthode diagrammatique est surtout une source importante d'exemples, qui aident l'intuition. Il s'agit aussi d'un outil, mais il faut signaler qu'il en existe bien d'autres. En tous cas, elle peut constituer un bon point de départ pour celui qui désire s'initier à la théorie des représentations des algèbres de dimension finie.

La lecture linéaire est recommandée, car nous évitons de nous référer à d'autres textes (la plupart des démonstrations sont données). Nous supposons que le lecteur a une idée plutôt précise de ce qu'est un anneau, un module, une somme directe, un module projectif ou injectif. Si ce n'est pas le cas, la lecture simultanée de notre premier chapitre avec celui de J.P. Jans, Rings and homology Holt, Rinehart et Winston, New York, (1964), devrait tout arranger.

Le premier chapitre est donc une synthèse de résultats de base. Le suivant introduit les méthodes diagrammatiques (essentiellement dues à P. Gabriel) puis le troisième indique comment "visualiser" des modules en tant que représentations d'un carquois, c'est-à-dire d'un graphe orienté fini.

Le quatrième chapitre considère deux familles d'algèbres : les héréditaires et quotients d'héréditaires, puis les unisérielles. Nous donnons leur caractérisation en termes de carquois.

Une première version de ce travail, en espagnol, a été polycopiée à Mexico. Celle-ci est quelque peu modifiée et complétée.

Nous voulons remercier ici Raymundo Bautista et Roberto Martinez grâce à qui nous avons appris le sujet. Nous remercions également les professeurs de l'Université Autonome de Puebla, ainsi que les étudiants du séminaire de représentations de l'Université Nationale Autonome de Mexico, avec lesquels nous avons "essayé" ce travail : ils nous ont évité beaucoup d'erreurs.

## CHAPTIRE I

### PRELIMINAIRES

Voici une présentation rapide mais complète de résultats bien connus, indispensables par la suite.

#### §1. ALGEBRES ET MODULES

DEFINITION : Soit  $k$  un corps. Une  $k$ -algèbre est un anneau  $\Lambda$  associatif (unitaire) qui est aussi un  $k$  espace vectoriel avec

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$$

pour tout  $\alpha \in k$ ,  $a \in \Lambda$ ,  $b \in \Lambda$ .

Le corps  $k$  est toujours vu comme sous-anneau de  $\Lambda$  au moyen de l'injection d'anneaux :

$$\begin{aligned} k &\hookrightarrow \Lambda \\ \alpha &\rightarrow \alpha 1 \end{aligned}$$

$k$  est alors central dans  $\Lambda$  (i.e.  $\alpha a = a\alpha$ ).

Exemples :

- $k[x_1, \dots, x_r]$ , l'anneau de polynômes en  $r$  variables est une  $k$ -algèbre de dimension infinie.
- $k\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ , l'anneau de polynômes en  $r$  variables non commutatives est aussi une  $k$ -algèbre de dimension infinie. Son quotient par l'idéal bilatère engendré par  $\{x_i x_j - x_j x_i, i, j = 1 \dots r\}$  est  $k[x_1, \dots, x_r]$ .
- Si  $\Lambda$  est une  $k$ -algèbre,  $M_n(\Lambda)$  est l'ensemble de toutes les matrices  $n \times n$  à coefficients dans  $\Lambda$ .  $M_n(\Lambda)$  est naturellement une  $k$ -algèbre, de dimension finie si c'est le cas pour  $\Lambda$ .



- Si  $G$  est un groupe fini,  $kG$  note le  $k$ -espace vectoriel de base les éléments de  $G$ .  $kG$  possède une seule structure de  $k$ -algèbre telle que la multiplication des éléments de base coïncide avec celle de  $G$ .

Notation : -  $\text{Mod}\Lambda$  est la catégorie de tous les modules à gauche de  $\Lambda$ . Chacun de ces modules est, en particulier, un  $k$ -espace vectoriel.

-  $\text{mod}\Lambda$  est la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}\Lambda$  dont les objets sont les modules de génération finie. Si  $\Lambda$  est de dimension finie sur  $k$ , remarquons qu'un  $\Lambda$ -module est de génération finie si et seulement si sa  $k$ -dimension est finie.

DEFINITION : Un  $\Lambda$ -module non nul  $M$  est *indécomposable* s'il n'admet pas de sommands directs autres que les triviaux. C'est-à-dire que si  $M = X \oplus Y$ , alors soit  $X=0$ , soit  $Y=0$ . Le théorème suivant montre que tout module est somme directe unique d'indécomposables lorsque  $\Lambda$  est de dimension finie. Il est donc naturel d'essayer de connaître les types (i.e. classes d'isomorphie) d'indécomposables : quel est leur nombre ? peut-on en dresser une liste complète ?

THEOREME (Krull-Schmidt)

Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre de dimension finie, et  $M$  un  $\Lambda$ -module de génération finie.

Alors  $M$  peut se décomposer :

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r$$

avec  $\{M_i\}_{i=1 \dots r}$  sous-modules indécomposables de  $M$  (cela est évident).

Si nous avons deux décompositions de  $M$  :

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$$

avec  $\{M_i\}_{i=1 \dots r}$  et  $\{N_j\}_{j=1 \dots s}$  des sous-modules indécomposables, alors  $r=s$  et il existe une permutation d'indices  $\sigma$  telle que

$M_i$  est isomorphe à  $N_{\sigma(i)}$

Pour démontrer ce théorème il nous faut savoir que l'anneau d'endomorphismes d'un module indécomposable est local, le lemme suivant nous y mène :

LEMME (Fitting) Si  $M \in \text{mod } \Lambda$  est indécomposable et  $f \in \text{End}_{\Lambda}(M)$ ,  $f$  est soit un isomorphisme, soit nilpotent.

Preuve. Si  $f$  n'est pas un isomorphisme, il n'est pas injectif (car  $f$  est, en particulier, un  $k$ -endomorphisme d'espace vectoriel). Ainsi  $\ker f \neq 0$ .

Si  $\ker f = M$ ,  $f=0$  et il n'y a rien à démontrer.

Si  $\ker f \neq M$ , il faut que  $\ker f \cap \text{Im } f \neq 0$  (au cas contraire  $M$  serait décomposable).

Mais cela dit que  $\ker f^2 \supsetneq \ker f$ . En continuant ce raisonnement on aboutit à l'existence d'un  $n$  pour lequel  $\ker f^n = M$ , car  $M$  est de dimension finie.  $\square$

PROPOSITION. Si  $M \in \text{mod } \Lambda$  est indécomposable,  $\text{End}_{\Lambda}(M)$  est un anneau local.

Rappel : Cela veut dire que  $\text{End}_{\Lambda}(M)$  possède un seul idéal à gauche maximal (qui est alors bilatère), constitué par les non inversibles.

Preuve : Il nous faut voir (grâce au lemme) que les nilpotents forment un idéal.

- Si  $f$  est nilpotent,  $gf$  n'est pas un isomorphisme et donc est nilpotent.
- Si  $f$  et  $g$  sont nilpotents sans que  $f+g$  le soit, nous avons que  $f+g = \varphi$  est un isomorphisme. Ainsi  $f_1 + g_1 = 1$  avec  $f_1 = \varphi^{-1}f$  et  $g_1 = \varphi^{-1}g$  tous deux nilpotents puisque toujours non inversibles. Cela est absurde car  $g_1 = 1 - f_1$  est un isomorphisme, son inverse étant  $1 + f_1 + \dots + f_1^{n-1}$  si  $f_1^n = 0$ .  $\square$

Preuve du théorème de Krull-Schmidt :

Par récurrence sur  $r$ . Si  $r=1$ ,  $M$  est indécomposable puisque  $M=M_1$ , et donc  $s=1$ .

Supposons vraie l'unicité de la décomposition dès que nous en avons une de longueur inférieure à  $r$ .

Considérons alors

$$M = M_1 \oplus \dots \oplus M_r = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$$

Notons  $\alpha_i : M \rightarrow M_i$  et  $\beta_j : M \rightarrow N_j$  les projections canoniques pour chacune de ces décompositions.

Il est clair que  $\sum_{j=1}^s \alpha_1|_{N_j} \beta_j|_{M_1} = 1_{M_1}$ .

Mais  $\text{End}_{\Lambda} M_1$  est local, donc l'un au moins des endomorphismes de la somme n'est pas dans l'idéal maximal, donc est inversible.

En renumérotant s'il le faut, nous supposons qu'il s'agit de  $\alpha_1|_{N_1} \beta_1|_{M_1} = \varphi$ .

Ainsi  $\varphi^{-1} \alpha_1|_{N_1} \beta_1|_{M_1} = 1_{M_1}$  et  $\beta_1|_{M_1}$  est une injection scindée, ce qui veut dire que  $\beta_1|_{M_1}$  admet un inverse à gauche.

Dans ce cas, il est facile de voir que  $N_1 = \text{im } \beta_1|_{M_1} \oplus \text{Ker } \varphi^{-1} \alpha_1$ .

Mais  $N_1$  est indécomposable, d'où  $\beta_1|_{M_1}$  est un isomorphisme.

(Et donc  $\alpha_1|_{N_1}$  est aussi un isomorphisme).

Considérons maintenant

$$M' = N_1 + (M_2 \oplus \dots \oplus M_r)$$

On a que  $M' \subset M$ . En fait la somme est directe et  $M' = M$ . En effet, si  $n_1 + m_2 + \dots + m_r = 0$ , alors  $\alpha_1(n_1) + \alpha_1(m_2) + \dots + \alpha_1(m_r) = 0$ . Mais  $\alpha_1(m_i) = 0$  si  $i \neq 1$  ( $\alpha_1$  est la projection canonique sur  $M_1$ ) et  $\alpha_1|_{N_1}$  est un isomorphisme. D'où  $n_1 = 0$  et donc  $m_2 + \dots + m_r = 0$ .

D'autre part  $M_1 \simeq N_1$ , donc  $\dim_k M_1 = \dim_k N_1$  et  $\dim_k M' = \dim_k M$ . D'où  $M' = M$ .

Nous avons donc

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r = N_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_r$$

L'endomorphisme de  $M$  défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 |_{N_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ & & l_{M_2} & \\ 0 & & & l_{M_r} \end{pmatrix}$$

respecte ces sommes directes et fournit donc un isomorphisme entre  $M/M_1$  et  $M/N_1$ .

Or  $M/N_1 = N_2 \oplus \dots \oplus N_s$  et  $M/M_1 = M_2 \oplus \dots \oplus M_r$ . Nous pouvons donc appliquer la récurrence.  $\square$

Une conséquence intéressante de ce théorème est la suivante.

PROPOSITION : La décomposition de  $\Lambda$  (en tant que  $\Lambda$ -module à gauche via la multiplication de l'anneau) nous fournit une liste complète (peut être avec répétitions) des types de projectifs indécomposables de  $\text{mod } \Lambda$ , lorsque  $\Lambda$  est une  $k$ -algèbre de dimension finie.

Rappel : Un module projectif de  $\text{mod } \Lambda$  est un sommand direct d'un  $\Lambda$ -module libre, i.e. d'une somme directe finie de copies du  $\Lambda$ -module  $\Lambda$ .

Preuve : Soit  $\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$  où les  $P_i$  sont indécomposables (et par définition projectifs).

Soit  $P$  un projectif indécomposable, c'est-à-dire que

$$P \oplus Q = \bigoplus_{l=1}^n \Lambda \quad \text{pour un certain } n.$$

En décomposant  $Q$ , nous obtenons une décomposition pour  $\bigoplus_{l=1}^n \Lambda$ . Mais nous en avons déjà une :

$$\bigoplus_{l=1}^n \Lambda = \bigoplus_{l=1}^n P_1 \oplus \dots \oplus \bigoplus_{l=1}^n P_n$$

Par Krull-Schmidt,  $P$  est isomorphe à l'un de ces  $P_i$ .  $\square$

§2. EQUIVALENCE DE MORITA

DEFINITION : Une k-algèbre  $\Lambda$  de dimension finie est *sobre* si les projectifs indécomposables de sa décomposition "ne se répètent pas", c'est-à-dire  $P_i \simeq P_j$  que si  $i=j$ .

THEOREME : Toute k-algèbre  $A$  de dimension finie est Morita équivalente à une k-algèbre sobre  $B$ . (Cela veut dire que les catégories  $\text{mod } A$  et  $\text{mod } B$  sont équivalentes).

Esquisse de preuve : Disons que  $A = \bigoplus_1^{n_1} P_1 \oplus \dots \oplus \bigoplus_1^{n_r} P_r$ , avec  $P_i$  projectif indécomposable et  $P_i \simeq P_j$  que si  $i=j$ . Posons  $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_r$  et  $B = (\text{End}_A P)^{\text{op}}$  qui désigne le groupe abélien des A-endomorphismes de  $P$ , muni de la structure d'anneau donnée par la multiplication  $bc = c \circ b$  ( $\circ$  est la composition habituelle des endomorphismes).

$P$  est alors un  $B$  module à droite via  $x \cdot b = b(x)$ , pour  $x \in P$  et  $b \in B$ .  $P$  était déjà un  $A$  module à gauche et c'est en fait un  $A$ - $B$  bimodule, c'est-à-dire que  $a(xb) = (ax) \cdot b$ .

Posons aussi  $Q = \text{Hom}_A(P, A)$  qui est un  $B$ - $A$  bimodule via  $b \cdot q = q \circ b$  et  $(q \cdot a)(x) = q(x)a$ , pour  $q \in Q$ ,  $b \in B$ ,  $a \in A$  et  $x \in P$ .

Nous allons décrire deux foncteurs covariants sur les objets, la description sur les morphismes étant celle qui s'impose :

$$\begin{array}{ccc}
 F : \text{mod } A & \longrightarrow & \text{mod } B \\
 M & \longmapsto & Q \otimes_A M \\
 & & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G : \text{mod } B & \longrightarrow & \text{mod } A \\
 N & \longmapsto & P \otimes_B N \\
 & & B
 \end{array}$$

Ces deux foncteurs réalisent l'équivalence de catégories, c'est-à-dire que pour chaque  $M$  il existe un isomorphisme  $\sigma_M : GFM \rightarrow M$ , naturel (donnant lieu à un diagramme commutatif pour tout morphisme  $\alpha : M \rightarrow M'$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\alpha} & M' \\
 \sigma_M \uparrow & & \uparrow \sigma_{M'} \\
 GFM & \xrightarrow{GF\alpha} & GFM'
 \end{array}$$

et de même pour  $FG$ ).

Pour obtenir  $\sigma_M : P \otimes_B (Q \otimes_A M) \rightarrow M$  : il est clair que si nous montrons que  $P \otimes_B Q \simeq A$ , alors nous aurons  $\sigma_M$ .

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_B \text{Hom}_A(P, A) & \xrightarrow{\sigma} & A \\ x \otimes q & \longrightarrow & q(x) \end{array}$$

est un isomorphisme. Il est facile de voir que  $\sigma$  est bien défini et qu'il s'agit d'un homomorphisme de  $A$ -modules.

Voyons que  $\sigma$  est injectif :

$$\text{Soit } a = \sum_{j=1}^s y_j \otimes p_j \in P \otimes_B Q \text{ avec } \sum_{j=1}^s p_j(y_j) = 0.$$

Nous voulons voir que  $a$  est nul.

$$\text{Pour } n = \sup_{i=1, \dots, r} n_i, \text{ on a une surjection } q : \bigoplus_{i=1}^n P \longrightarrow A.$$

Il existe donc  $q_i \in \text{Hom}_A(P, A)$  et  $x_i \in P$  ( $i=1, \dots, n$ ) avec  $\sum_{i=1}^n q_i(x_i) = 1$ . (Ce qui montre d'ailleurs que  $\sigma$  est surjectif).

$$\text{Donc } a = \left( \sum_j y_j \otimes p_j \right) \left( \sum_i q_i(x_i) \right) = \sum_j y_j \otimes p_j [q_i(x_i)].$$

$$\text{Construisons } \varphi_{p_j, x_i} : P \rightarrow P \\ y \mapsto p_j(y)x_i$$

qui est un endomorphisme de  $A$  modules, donc un élément de  $B$ .

Assertion :  $p_j [q_i(x_i)] = (\varphi_{p_j, x_i}) \cdot q_i$  en effet,

$$\begin{aligned} [(\varphi_{p_j, x_i}) \cdot q_i](y) &= q_i(\varphi_{p_j, x_i}(y)) = q_i(p_j(y)x_i) = p_j(y)q_i(x_i) = \\ &= (p_j \cdot [q_i(x_i)])(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } a &= \sum_{i,j} y_j \otimes (\varphi_{p_j, x_i}) \cdot q_i = \sum_{i,j} y_j \cdot (\varphi_{p_j, x_i}) \otimes q_i = \\ &= \sum_{i,j} \varphi_{p_j, x_i}(y_j) \otimes q_i = \sum_{i,j} p_j(y_j)x_i \otimes q_i = \\ &= \left( \sum_j p_j(y_j) \right) \left( \sum_i x_i \otimes q_i \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

En vertu de ce théorème, et si notre objectif est de décrire les catégories de modules, nous pouvons restreindre notre étude aux algèbres sobres de dimension finie.

§3. RADICAL ET COUVERTURES PROJECTIVES

Rappelons que les  $k$ -algèbres sont de dimension finie, et les modules de génération finie.

DEFINITION. Soit  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre. Son *radical* ( $\text{rad}\Lambda$ ) est l'intersection de tous ses idéaux à gauche maximaux.

LEMME. Il existe un seul idéal nilpotent maximal, et c'est  $\text{rad}\Lambda$ .

Rappel : Un idéal est nilpotent s'il existe un naturel  $n$  avec  $I^n = 0$ .

Preuve : 1) L'unicité découle du fait que si  $I$  et  $J$  sont des idéaux à gauche nilpotents, leur somme l'est aussi : si l'on développe un produit de  $n+m$  éléments de  $I+J$ , chaque sommand aura : soit au moins  $n$  facteurs de  $I$  (il est donc dans  $I^n=0$ ), soit au moins  $m$  facteurs de  $J$  (il est dans  $J^m=0$ ).

2) L'existence est obtenue en vertu de la  $k$ -dimension finie qui interdit des chaînes strictement croissantes d'idéaux (car ceux-ci sont, en particulier, des sous-espaces vectoriels).

3) Pour voir que ce nilpotent maximal  $N$  est dans le radical, remarquons que  $\text{rad}\Lambda \supset \text{rad}^2\Lambda \supset \dots \supset \text{rad}^n\Lambda \supset \dots$ . Toujours en vertu de la  $k$ -dimension finie cette chaîne doit se stabiliser, et donc  $\text{rad}^n\Lambda = \text{rad}^{n+1}\Lambda$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ . Le lemme de Nakayama (voir plus loin) dit alors que  $\text{rad}^n\Lambda = 0$ . Ainsi  $\text{rad}\Lambda$  est nilpotent et donc  $\text{rad}\Lambda \supset N$ .

4) Pour voir que  $N \subset \text{rad}\Lambda$ , supposons que ce n'est pas le cas, i.e. il existe un idéal maximal à gauche avec  $N \not\subset m$ . Alors  $N+m = \Lambda$  et  $1 = x+y$  avec  $x \in N$  et  $y \in m$ . Ainsi  $x$  est nilpotent et donc  $y = 1-x$  inversible (d'inverse  $1+x+\dots+x^{n-1}$ ), ce qui est absurde car alors  $m=\Lambda$ .  $\square$

Remarques :

1)  $\text{rad}\Lambda$  est en fait bilatère :

$$\begin{aligned} [(\text{rad}\Lambda)\Lambda]^n &= \text{rad}\Lambda \cdot \Lambda \text{rad}\Lambda \cdot \Lambda \dots \text{rad}\Lambda \cdot \Lambda \\ &= \text{rad}^n \Lambda \cdot \Lambda = 0. \end{aligned}$$

Ainsi  $(\text{rad}\Lambda)\Lambda$  est un idéal à gauche nilpotent, donc contenu dans  $\text{rad}\Lambda$ . Ce qui montre que  $\text{rad}\Lambda$  est bilatère.

2) La construction de ce paragraphe avec des idéaux à droite donne lieu à  $\text{rad}_d \Lambda \subset \text{rad}\Lambda$  (puisque  $\text{rad}\Lambda$  est le nilpotent maximal à gauche) et  $\text{rad}\Lambda \subset \text{rad}_d \Lambda$  pour la raison duale. Donc  $\text{rad}_d \Lambda = \text{rad}\Lambda$ .

Nous avons utilisé le LEMME DE NAKAYAMA :

Si  $M$  est un module de génération finie tel que  $(\text{rad}\Lambda)M = M$ , alors  $M=0$ .

Preuve : Supposons  $M \neq 0$  et soit  $w_1, \dots, w_n$  un système minimal de générateurs de  $M$ . Par le fait que  $(\text{rad}\Lambda)M = M$ , nous avons que  $w_1 = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$  avec des  $a_i \in \text{rad}\Lambda$ .

$$\text{Donc } (1-a_1)w_1 = a_2 w_2 + \dots + a_n w_n.$$

Or  $(1-a_1)$  est inversible à gauche : sinon soit  $I$  un idéal maximal à gauche qui le contient. Mais  $a_1 \in I$ , puisque  $a_1$  est dans tous les maximaux à la fois. Donc  $1-a_1+a_1 \in I$ , ce qui est absurde.

Donc  $w_1$  s'écrit au moyen des autres générateurs et donc  $w_2, \dots, w_n$  engendrent encore  $M$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

Avant de continuer vers la notion de radical d'un module et celle de couverture projective, il nous faut caractériser les algèbres dont le radical est nul, ce seront les algèbres "semi simples" dont l'étude est facile. Nous éviterons donc d'alourdir avec trop de preuves.



DEFINITION. Une  $k$ -algèbre  $A$  de dimension finie est *semi-simple* si tous les projectifs indécomposables sont en fait des modules simples. (Un module non nul est *simple* s'il n'a pas d'autres sous modules que 0 et lui-même).

Remarque : Si les projectifs indécomposables sont simples (i.e. l'algèbre est semi-simple) alors *tous* les indécomposables sont simples. Par ailleurs, si l'algèbre est semi-simple, tout simple est projectif.

Ainsi nous obtenons que  $A$  est semi-simple si et seulement si  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{S}(A) = \text{ind}A$ , où

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) &= \text{types de projectifs indécomposables,} \\ \mathcal{S}(A) &= \text{types de simples,} \\ \text{ind}A &= \text{types d'indécomposables.}\end{aligned}$$

(toujours de  $\text{mod}A$ , i.e. modules de génération finie).

Remarquons aussi que  $\mathcal{P}(A)$  est toujours fini (cela résulte de la proposition à la suite de Krull-Schmidt). Donc si  $A$  est semi-simple, il n'y a qu'un nombre fini de types de modules indécomposables : " $A$  est de type de représentation finie".

PROPOSITION.  $A$  est semi-simple si et seulement si  $\text{rad}A = 0$ .

Preuve : De toute façon,  $\text{rad}A \cdot S = 0$  pour tout module  $S$  simple. (Sinon  $\text{rad}A \cdot S = S$  et Nakayama dit que  $S = 0$ ).

Donc, si  $A$  est semi-simple,  $\text{rad}A \cdot A = 0$ , puisque tout projectif indécomposable est simple. Mais  $1 \in A$ , et donc  $\text{rad}A = 0$ .

Réciproquement, si  $\text{rad}A = 0$ , nous allons montrer que  $A$  (en tant que module sur lui-même) est somme directe de modules simples. Tout projectif sera donc simple, et donc  $A$  est semi-simple.

Soit donc  $L$  un sous-module simple de  $A$ . Nous allons montrer qu'il existe  $e \in A$ , idempotent ( $e^2 = e$ ) avec  $Ae = L$ . (Et donc  $A = L \oplus A(1-e)$ , et on recommence avec un sous-module simple de  $A(1-e)$ ).

Nous avons  $L^2 \neq 0$ , car  $L$  est un idéal, et il n'y a pas de nilpotents. Or  $L^2 \subset L$  qui est simple. Donc  $L^2 = L$ . Il existe  $x \in L$  t.q.  $Lx \neq 0$ . Donc  $Lx = L$  et on a un  $e \in L$  avec  $ex = x$ .

Assertion :  $e^2 = e$  ( $e \neq 0$  car sinon  $x=0$ ).

Nous avons que  $(e^2 - e)x = 0$  (puisque  $ex=x$ ). Mais  $e^2 - e \in L$  et l'on a que  $I = \{y \in L \mid yx = 0\} = 0$ . En effet,  $I$  est un sous-module de  $L$ , distinct de  $L$  puisque  $Lx = L \neq 0$ . Donc  $I=0$  et  $e^2 - e = 0$ .

Il est clair que  $Ae \subset L$ , et puisque  $Ae \neq 0$ ,  $Ae = L$ .  $\square$

DEFINITION. Le radical d'un module  $M$ , noté  $\text{rad} M$ , est l'intersection de tous ses sous-modules maximaux.

PROPOSITION.  $\text{rad} M = \text{rad} \Lambda \cdot M$ .

Preuve :  $M/\text{rad} \Lambda \cdot M$  est un  $\Lambda/\text{rad} \Lambda$  module, puisque  $\text{rad} \Lambda$  l'annule. Or  $\Lambda/\text{rad} \Lambda$  est une algèbre semi-simple (son radical est nul), et donc tout  $\Lambda/\text{rad} \Lambda$  module est somme directe de simples, donc de radical nul. C'est le cas pour  $M/\text{rad} \Lambda \cdot M$ , ce qui nous dit que l'intersection des sous-modules maximaux de  $M$  contenant  $\text{rad} \Lambda \cdot M$ , est contenue dans  $\text{rad} \Lambda \cdot M$ .

Pour voir que  $\text{rad} \Lambda \cdot M \subset \text{rad} M$ , considérons  $m$  un sous-module maximal quelconque de  $M$ . Et soit  $\pi : M \rightarrow M/m$  la projection canonique. ( $M/m$  est un module simple).

Naturellement,  $\pi(\text{rad} \Lambda \cdot M) \subset \text{rad} \Lambda \cdot (M/m)$ . Mais  $\text{rad} \Lambda \cdot (M/m) = 0$  et donc  $\text{rad} \Lambda \cdot M \subset \ker \pi = m$ .  $\square$

Une notion importante et fort utile lors de l'étude des modules d'une  $k$ -algèbre de dimension finie est celle de couverture projective :

DEFINITION : La couverture projective de  $M$  est un module projectif  $P$  et un morphisme surjectif  $f : P \rightarrow M$  tel que pour tout sous-module  $X \subset P$ ,  $f|_X$  n'est plus surjectif. (Un tel morphisme est dit essentiel).

Remarque : cette condition est équivalente à demander que  $X + \ker f \subset P$ , pour tout  $X \subset P$ .

Avant de montrer l'existence des couvertures projectives, nous verrons leur unicité.

PROPOSITION : Soient  $P$  et  $Q$  deux modules projectifs avec deux surjections essentielles  $f : P \rightarrow M$  et  $g : Q \rightarrow M$ . Il existe alors un isomorphisme  $\varphi : P \rightarrow Q$  avec  $g\varphi = f$ .

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \varphi \swarrow & & \downarrow f \\ Q & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

Preuve : Par le fait que  $P$  est projectif, il existe  $\varphi : P \rightarrow Q$  avec  $g\varphi = f$ .

Comme  $g$  est essentielle,  $\text{Im } \varphi = Q$ . (Sinon  $g|_{\text{Im } \varphi}$  serait encore surjective).

Mais  $Q$  est projectif, donc cette surjection  $\varphi$  se scinde, avec  $\varphi s = 1_Q$ . Or  $f$  est essentielle, donc  $\text{Im } s = P$ , et  $s$  est surjective. Elle était déjà injective, c'est donc un isomorphisme et  $\varphi$  son inverse.  $\square$

THEOREME Il existe toujours une couverture projective.

Preuve : Soit  $M$  un  $\Lambda$ -module. Il est isomorphe au quotient d'un libre  $L$  de génération finie par un sous-module  $R$ ,  $M \cong L/R$ .

Considérons  $E = \{f_N : L/N \rightarrow L/R, N \subset R, f_N \text{ essentielle}\}$ .  
 $f_R = 1_{L/R} \in E \neq \emptyset$ . Choisissons  $N \subset R$  de  $k$ -dimension minimale pour que  $f_N \in E$ .

Assertion :  $L/N$  est alors projectif.

Pour le voir, choisissons un sous-module  $X$  de  $L$ , minimal pour la propriété que la composition  $X \hookrightarrow L \rightarrow L/N$  est surjective. (C'est-à-dire que  $X \rightarrow L/N$  soit essentiel). Nous allons montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, donc  $L \rightarrow L/N$  se scinde et  $L/N$  est projectif.

Considérons  $q : L \rightarrow X$  obtenue en relevant la projection canonique suivant ce morphisme essentiel.  $\text{Ker } q = N' \subset N$ .

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ q \swarrow & \downarrow & \\ X & \xrightarrow{\text{ess.}} & L/N \end{array}$$

Mais on a que le triangle suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X = L/N' & \xrightarrow{f_{N'}} & L/R \\ \text{ess.} \searrow & & \nearrow f_N \text{ ess.} \\ & L/N & \end{array}$$

Ce qui implique  $f_N$ , essentielle. Mais alors  $N' = N$ , donc  $X \simeq L/N$  et  $X \rightarrow L/N$  doit être un isomorphisme.  $\square$

Remarque : Le projectif ainsi obtenu est de génération finie.

Nous voulons montrer l'additivité des couvertures projectives, i.e.

PROPOSITION : Si  $P \xrightarrow{f} M$  et  $Q \xrightarrow{g} N$  sont des couvertures projectives, alors  $P \oplus Q \xrightarrow{f \oplus g} M \oplus N$  est aussi une couverture projective.

Pour cela un lemme caractérisant les morphismes essentiels est nécessaire.

LEMME : Un morphisme surjectif  $f : N \rightarrow M$  est essentiel si et seulement si  $\text{ker } f \subset \text{rad } N$ .

Preuve :  $(\Leftarrow)$  : Soit  $X$  un sous-module de  $N$  avec  $X + \text{ker } f = N$ . Alors  $X + \text{rad } N = N$  et  $N/X = (\text{rad } N)/X = \text{rad}(N/X) = \text{rad}(N/X)$ . Par le lemme de Nakayama,  $N/X = 0$ , i.e.  $N=X$ .

$(\Rightarrow)$  : Soit  $m$  un sous-module maximal de  $N$ . Par hypothèse,  $\text{ker } f + m \subset N$ , ce qui ne se produit que si  $\text{ker } f \subset m$ , donc  $\text{ker } f \subset \text{rad } N$ .  $\square$

Preuve de la proposition : Il est clair que  $f \oplus g$  est surjectif. Voyons qu'il est essentiel :  $\ker f \oplus g = \ker f \oplus \ker g \subset \text{rad} P \oplus \text{rad} Q = \text{rad}(P \oplus Q)$ . (L'additivité du radical d'un module vient de  $\text{rad} M = \text{rad} \Lambda \cdot M$ ).

Nous pouvons établir maintenant la correspondance bijective entre types de simples et types de projectifs indécomposables.

PROPOSITION :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\Lambda) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Lambda) \\ S & \longmapsto & P_S = \text{la couverture projective de } S \end{array}$$

est une bijection.

Preuve : 1)  $P_S$  est effectivement indécomposable : si  $P_S = Q_1 \oplus Q_2 \xrightarrow{f} S$ ,  $f|_{Q_i}$  n'est plus surjective,  $i=1,2$ . Puisque  $S$  est simple, l'image de  $f|_{Q_i}$  est 0, donc  $f=0$ , ce qui est impossible.

2) Construction d'une application inverse :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\Lambda) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\Lambda) \\ P & \longrightarrow & P/\text{rad} P \end{array}$$

$P/\text{rad} P$  est au moins semi-simple (car annihilé par  $\text{rad} \Lambda$ ). Pour voir qu'il est simple, remarquons que  $P \rightarrow P/\text{rad} P$  est essentiel. Si  $P/\text{rad} P \simeq S \oplus T$ , alors  $P \simeq P_S \oplus P_T$  (par unicité et additivité de la couverture). Mais  $P$  est indécomposable.

Remarque : chaque projectif indécomposable a donc un seul sous-module maximal.

3) Il est clair que  $P_{P/\text{rad} P} \simeq P$  par unicité de la couverture projective. D'autre part  $P_S/\text{rad} P_S \simeq S$  car  $\text{rad} P_S$  est le noyau de  $P_S \rightarrow S$ , via la remarque.  $\square$

§4. DUALITE ET ENVELOPPES INJECTIVES

Le fait d'opérer en dimension finie sur un corps nous permet d'introduire une dualité entre la catégorie des modules à gauche,  $\text{mod}\Lambda$ , et celle des modules à droite  $\text{mod}_d\Lambda$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{mod}_d\Lambda & \rightarrow & \text{mod}\Lambda \\ M & \mapsto & DM = \text{Hom}_k(M, k) \end{array}$$

$DM$  est un module à gauche via  $(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(xa)$ .

La définition de ce foncteur contravariant sur les morphismes est évidente.

Nous obtenons aussi un foncteur  $D : \text{mod}\Lambda \rightarrow \text{mod}_d\Lambda$  de la même façon.

Le morphisme d'évaluation fournit un isomorphisme  $M \rightarrow DDM$ , grâce au fait que la  $k$ -dimension est finie. Ces isomorphismes sont naturels.

Remarquons maintenant que ce qui a été fait jusqu'à présent sur les modules à gauche est également valable sur les modules à droite. Nous considérons donc comme acquise l'existence des couvertures projectives, etc. pour les modules à droite.

Ces propriétés vont être transportées et "renversées" ( $D$  est contravariant) dans  $\text{mod}\Lambda$  :

DEFINITION : L'enveloppe injective de  $M$  est un module injectif  $I$  et un morphisme injectif  $f : M \hookrightarrow I$  tel que la composition  $M \hookrightarrow I \rightarrow I/X$  n'est plus injective pour tout sous-module  $X$  non nul de  $I$ .

Remarque : Cela est équivalent à dire que tout sous-module non nul  $X \subset I$  rencontre non trivialement  $M$ .

Rappel : Un module injectif  $I$  est un module tel que toute injection de  $I$  dans un autre module se scinde.

(Un module projectif  $P$  est un module tel que toute surjection d'un autre module vers  $P$  se scinde).

L'existence et l'unicité des enveloppes injectives est automatique à partir de celle des couvertures projectives, en appliquant D.

Remarque : l'existence et l'unicité des enveloppes injectives est vraie pour tout module sur tout anneau. (Eckmann, Schopf, voir [CR]p. 390). Mais on ne peut garantir la génération finie de l'enveloppe, même si le module est de génération finie (par exemple  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ). Dans notre situation, cela est vrai et résulte de l'existence de couvertures projectives plus le fait que D préserve la génération finie.

En dualisant la proposition qui établit la bijection entre simples et projectifs, on obtient :

PROPOSITION :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Lambda) &\rightarrow \mathcal{I}(\Lambda) \\ S &\mapsto I_S = \text{enveloppe injective de } S \end{aligned}$$

est une bijection.

$\mathcal{I}(\Lambda)$  = types de modules indécomposables injectifs.

Remarque 1 : Si l'on considère  $D\Lambda$  comme module à gauche ( $\Lambda$  est donc vu comme module à droite), on obtient en décomposant  $D\Lambda$  tous les types d'injectifs indécomposables.

$D\Lambda$  est appelé la 2ème représentation régulière, tandis que  $\Lambda$  est la 1ère représentation régulière.

Remarque 2 : Si  $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathcal{I}(\Lambda)$  (on dit que  $\Lambda$  est auto-injective, ou quasi-Frobenius) ce qui se produit par exemple si  $\Lambda \simeq D\Lambda$  (on dit que  $\Lambda$  est Frobenius), la bijection obtenue en composant les bijections  $\mathcal{S}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$  et  $\mathcal{S}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{I}(\Lambda)$  est appelée la permutation de Nakayama.

§5. IDEMPOTENTS

Les idempotents d'une algèbre jouent un peu le rôle des bases dans les espaces vectoriels. Ils sont utiles pour définir le carquois d'une algèbre. Nous en donnons donc ici une exposition succincte.

Choisissons une décomposition de  $\Lambda$  en tant que  $\Lambda$ -module en projectifs indécomposables :  $\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ . Le 1 de  $\Lambda$  a une écriture unique dans cette décomposition,  $1 = e_1 + \dots + e_n$ .

On vérifie sans peine que les  $e_i$  sont idempotents, orthogonaux ( $e_i e_j = 0$  si  $i \neq j$ ) et primitifs (c'est-à-dire que si  $e_i = f + g$  avec  $f$  et  $g$  idempotents orthogonaux, alors  $f = e_i$  et  $g = 0$ , ou inversement. Cela provient du fait que  $P_i$  est indécomposable).

Réciproquement, la donnée d'un tel système d'idempotents fournit une décomposition de  $\Lambda$  en projectifs indécomposables via  $\Lambda = \Lambda e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda e_n$ .

D'autre part si  $M$  est un module quelconque, il est clair que  $M$  est indécomposable si et seulement si son anneau de  $\Lambda$ -endomorphismes n'a pas d'autres idempotents que les triviaux 0 et 1. (Car si  $e \in \text{End}_\Lambda M$  est un idempotent,  $M = \text{Im} e \oplus \text{Im}(1-e)$ ).

Ceci fournit d'ailleurs la preuve que si l'anneau d'endomorphismes d'un module est local (il ne peut donc avoir d'idempotents), le module est indécomposable.

Remarquons pour finir que si  $e \in \Lambda$ ,  $e^2 = e$ , et si  $\Lambda e$  est le projectif associé, alors  $e$  est primitif (i.e.  $\Lambda e$  est indécomposable) si et seulement si  $\text{End}_\Lambda(\Lambda e)$  n'a pas d'idempotents. Mais  $\text{End}_\Lambda(\Lambda e) \simeq (e\Lambda e)^{\text{op}}$  en tant que  $k$ -algèbres, l'isomorphisme étant donné par  $f \rightarrow f(e)$ .

Donc  $e$  est primitif si et seulement si  $e\Lambda e$  n'a pas d'autre idempotents que 0 et  $e$  (qui est le 1 de  $e\Lambda e$ ).



§6. IDEMPOTENTS CENTRAUX

Voici une notion à ne pas confondre avec celle du paragraphe précédent. Etant données deux  $k$ -algèbres  $\Lambda_1, \Lambda_2$  de dimension finie, on peut fabriquer leur produit direct,  $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ , qui est à nouveau une  $k$ -algèbre : en tant qu'espace vectoriel, il s'agit de la somme directe, tandis que la multiplication se fait composante par composante.

Une  $k$ -algèbre sera dite *connexe* si on ne peut la décomposer en produit direct non trivial d'algèbres.

Clairement toute  $k$ -algèbre est produit direct fini d'algèbres connexes (car la  $k$ -dimension est finie).

Soit  $\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_r$  une telle décomposition. (Naturellement, chaque  $\Lambda_i$  est en particulier un  $\Lambda$  module projectif, mais il n'a aucune raison d'être indécomposable en tant que module).

Décomposons  $l \in \Lambda$  dans cette somme directe.  $l = e_1 + \dots + e_n$ . Les  $e_i$  sont idempotents, orthogonaux et centraux primitifs (chaque  $e_i$  commute à tous les éléments de  $\Lambda$  et si  $e_i = f + g$  avec  $f$  et  $g$  idempotents centraux orthogonaux, alors  $f = e_i$  et  $g = 0$  ou l'inverse). Cela tient exactement à ce que  $\Lambda_i$  est connexe. Remarquons que toute la différence avec le paragraphe antérieur est dans le mot "central".

Réciproquement, un tel système trouvé dans  $\Lambda$  fournit une décomposition en algèbres connexes  $\Lambda = \Lambda e_1 \times \dots \times \Lambda e_n$ .

Il est intéressant de remarquer qu'un tel système est unique; en d'autres mots il existe une seule décomposition en algèbres connexes, au sens strict du terme :

Preuve : Soit  $f_1, \dots, f_r$  un autre système. Nous obtenons  $e_1 = e_1 \cdot l = e_1 (f_1 + \dots + f_r) = e_1 f_1 + \dots + e_1 f_r$ . Mais chaque  $e_1 f_i$  est un idempotent central (puisque  $e_1$  et  $f_i$  le sont). Or  $e_1$  est primitif, donc un seul des  $e_1 f_i$  est non nul. On peut supposer, en renumérotant, que  $e_1 f_1 \neq 0$ , et donc  $e_1 = e_1 f_1$ .

De même,  $f_1 = f_1 \cdot l = f_1 (e_1 + \dots + e_r)$  et  $f_1 = f_1 e_1$ . Donc  $e_1 = e_1 f_1 = f_1 e_1 = f_1$ . La démonstration s'achève alors aisément.

Voici un résultat sur les catégories de modules qui permettra de nous restreindre à l'étude des algèbres connexes :

LEMME :  $\text{mod } \Lambda$  est isomorphe à  $\prod_{i=1}^n \text{mod } \Lambda_i$  (produit cartésien de catégories), si  $\Lambda = \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_n$  est la décomposition en algèbres connexes.

La preuve est la vérification triviale que  $M \mapsto (e_1 M, \dots, e_n M)$  et  $(M_1, \dots, M_n) \mapsto \bigoplus M_i$  sont des foncteurs inverses l'un de l'autre.  $\square$

Rappelons qu'il suffit d'étudier des algèbres sobres. Nous ne considérerons donc que des algèbres sobres connexes, étant entendu que "connexe" équivaut à ne pas avoir d'idempotents centraux autres que 0 et 1.

## CHAPITRE II

### ALGÈBRE DE CARQUOIS ET ALGÈBRES

Nous définissons ici ce qu'est un carquois, son algèbre et le quotient par un idéal de définition.

Suivent quelques propriétés : description du radical, des idempotents, ainsi que la preuve de la connexité de ces algèbres.

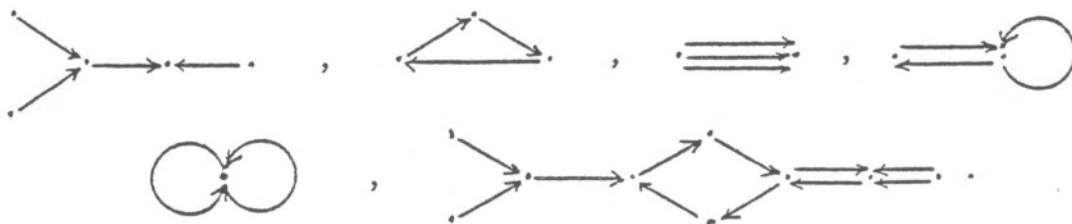
Puis nous verrons que toute  $k$ -algèbre de dimension finie, sobre et connexe, est isomorphe au quotient d'une algèbre de carquois par un idéal de définition lorsque  $k$  est algébriquement clos.

#### §1. CARQUOIS ET ALGÈBRES DE CARQUOIS

**DEFINITION** : Un *carquois*  $C$  est un graphe orienté, connexe et fini. De façon plus précise, il s'agit de la donnée d'un ensemble de "sommets"  $C_0$  et d'un ensemble d'"arêtes"  $C_1$  avec une orientation qui à chaque arête associe un sommet initial et un sommet final, donnant ainsi une "flèche".

Nous demandons que  $C_0$  et  $C_1$  soient finis et  $C$  connexe. Remarquons que les cas de lacets ou arêtes multiples ne sont pas exclus.

Exemples de carquois :



Notation :  $i \xrightarrow{\alpha} j$  signifie "la flèche  $\alpha$  commence au sommet  $i$  et finit au sommet  $j$ ".

DEFINITION : Un *chemin orienté* (de longueur  $n$ ) de  $i$  à  $j$  d'un carquois  $C$  est une suite de sommets et flèches

$(j|\alpha_n, \dots, \alpha_1|i)$  avec  $n \geq 0$ , vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{début de } \alpha_1 &= i \\ \text{fin de } \alpha_1 &= \text{début de } \alpha_2 \\ \text{fin de } \alpha_2 &= \text{début de } \alpha_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \text{fin de } \alpha_n &= j. \end{aligned}$$

Si  $n=0$ , nous demandons en plus que  $i=j$ . De cette façon, chaque sommet  $i$  se voit attribuer son *chemin trivial*  $\tau_i = (i||i)$  qui peut s'interpréter intuitivement comme "rester en  $i$ ".

Si  $n$  est positif, nous écrirons souvent  $\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1$  au lieu de  $(j|\alpha_n, \dots, \alpha_1|i)$ .

Soit maintenant  $k$  un corps que nous prenons algébriquement clos. Cette supposition est non nécessaire pour l'instant mais ce n'est qu'avec elle que l'on obtient des résultats intéressants par la suite. (Il existe une généralisation pour  $k$  non algébriquement clos via les espèces, voir [DR]).

DEFINITION : On note  $kC$  le  $k$ -espace vectoriel qui a pour base l'ensemble des chemins orientés du carquois  $C$  (y compris les triviaux, et sans limitation sur leur longueur).

Nous donnons à  $kC$  une structure d'*algèbre* en définissant d'abord la multiplication sur les éléments de la base :

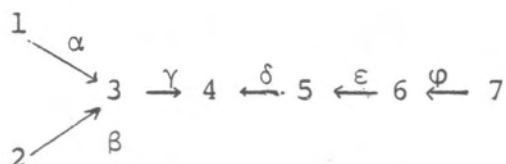
$$(m|\beta_p, \beta_{p-1}, \dots, \beta_1|h) \cdot (j|\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1|i)$$

vaut zéro si  $h \neq j$ , et vaut  $(m|\beta_p, \dots, \beta_1, \alpha_n, \dots, \alpha_1|i)$  au cas où  $h=j$  (il s'agit alors bien d'un chemin orienté).

Cette multiplication s'étend alors linéairement à tout  $kC$  de façon à obtenir une  $k$ -algèbre dont l'unité est

$\sum_{i \in C_0} \tau_i$ . Cette algèbre est dite l'algèbre du carquois  $C$ .

Voyons un exemple :



nombre de chemins de longueur 0 : 7  
 de longueur 1 : 6  
 de longueur 2 : 4  
 de longueur 3 : 1  
 de longueur 4 : 0

L'algèbre de ce carquois est donc de dimension 18, et voici quelques résultats de sa table de multiplication :

$$\begin{array}{lll} \alpha \cdot \delta = \delta \cdot \alpha = 0 & \beta \cdot \gamma = 0 & \tau_3 \cdot \gamma = 0 \\ \gamma \cdot \beta = \gamma \beta & \gamma \cdot \delta = \delta \cdot \gamma = 0 & \tau_3 \cdot \tau_3 = \tau_3 \\ \delta \cdot \epsilon \varphi = \delta \epsilon \varphi & \gamma \cdot \tau_3 = \gamma & \end{array}$$

Remarquons tout de suite que la  $k$ -algèbre obtenue,  $kC$ , est de  $k$ -dimension finie si et seulement si il n'y a pas de cycles orientés dans  $C$ , c'est-à-dire pas de chemins orientés de longueur positive avec même début et fin. Cela provient du fait que nos carquois sont des graphes finis.

Allons maintenant vers la définition des idéaux  $I$  de définition de  $kC$  qui seront tels que  $kC/I$  est de dimension finie.

## §2. RADICAL ET IDEAUX DE DEFINITION

Notation :  $F$  est l'idéal à gauche de  $kC$  ( $C$  quelconque) engendré par les flèches (i.e. chemins de longueur 1). Il est immédiat que  $F$  est bilatère et qu'il coïncide avec le sous- $k$ -espace vectoriel engendré par les chemins de longueur au moins un.

Preuve : D'abord  $F$  est nilpotent :  $C$  n'a pas de cycles orientés, il existe donc une longueur maximale,  $m$ , pour ses chemins orientés. Ainsi un quelconque produit de  $m+1$  chemins de longueur positive (i.e. de  $F$ ) sera nul. Donc  $F^{m+1} = 0$ .

Ensuite, il est maximal nilpotent car un idéal plus grand que  $F$  contiendra une  $k$ -combinaison linéaire de chemins triviaux qui n'est jamais nilpotente. (Les chemins triviaux sont en fait idempotents et orthogonaux).  $\square$

Remarque : Si  $C$  a des cycles orientés, le résultat est faux :

Soit  $C = 1 \curvearrowright \alpha$ . Il est immédiat que  $kC \cong k[x]$ , et donc  $\text{rad } kC = 0$ . Cependant  $F = \bigoplus_{n=1}^{\infty} k\alpha^n = (\alpha)$ .

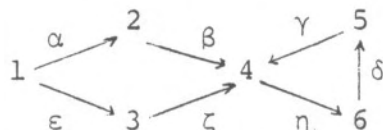
Nous verrons qu'étudier les  $k$ -algèbres de dimension finie sur un corps algébriquement clos est équivalent à étudier les quotients de  $k$ -algèbres de carquois par certains idéaux, que nous appelons de définition.

DEFINITION : Un idéal bilatère  $R$  de l'algèbre de carquois  $kC$  est de définition si

- (1)  $R$  est contenu dans  $F^2$
- (2)  $R$  contient une certaine puissance de  $F$ .

Quelques exemples d'idéaux admissibles :

- a) Pour  $C$  quelconque,  $F^n$  avec  $n \geq 2$ .
- b)  $0$  n'est admissible que si  $C$  n'a pas de cycles orientés.
- c) Soit  $C$  :



et  $R$  l'idéal bilatère engendré par  $\beta\alpha - \zeta\epsilon, \eta\beta$  et  $\gamma\delta\eta$ .

Il est clair que  $R \subset F^2$ , et l'on a que  $F^5 \subset R$ , d'où  $R$  est de définition.

PROPOSITION :  $kC/R$  est de  $k$ -dimension finie lorsque  $R$  est de définition quel que soit le carquois.

Preuve : Puisque  $F^n \subset R$ , nous avons une surjection d'algèbres  $kC/F^n \twoheadrightarrow kC/R$ . Mais les classes des chemins de longueur inférieure à  $n$  sont une  $k$ -base de  $kC/F^n$ , qui est donc de dimension finie.  $\square$

PROPOSITION : Si  $R$  est de définition,  $\text{rad } kC/R = \bar{F}$ , où  $\bar{F}$  désigne la classe de  $F$  modulo  $R$ .

Preuve : Comme  $R$  est admissible,  $F^n \subset R$  et donc  $\bar{F}^n = 0$ , ce qui montre  $\bar{F} \subset \text{rad } kC/R$ . D'autre part un idéal plus grand que  $\bar{F}$  est la classe d'un idéal contenant  $R$ , et contenant  $F$ . Il contient donc au moins une combinaison linéaire de triviaux qui ne sera jamais nilpotente : élevé à une puissance  $n$  il s'agit encore d'une  $k$ -combinaison linéaire de triviaux, qui ne peut être dans  $R$  puisque  $R \subset F^2$ . Donc  $\bar{F}$  est nilpotent maximal.  $\square$

PROPOSITION :  $\{\bar{\tau}_i\}_{i \in C_0}$  est un système d'idempotents orthogonaux primitifs et dont la somme est le 1 de  $kC/R$  lorsque  $R$  est un idéal de définition.

Preuve : Il s'agit évidemment d'un système d'idempotents orthogonaux dont la somme vaut 1. Pour voir que chacun d'eux est primitif, considérons le module projectif  $kC/R \bar{\tau}_i$  et montrons qu'il est indécomposable. Si le quotient par son radical est simple, ce sera prouvé, en vertu de la correspondance bijective entre projectifs indécomposables et simples.

Or,  $\text{rad}(kC/R \bar{\tau}_i) = \bar{F}(kC/R \bar{\tau}_i) = \bar{F} \bar{\tau}_i$  et donc  $kC/R \bar{\tau}_i / \text{rad}(kC/R \bar{\tau}_i) = \frac{kC/R}{\bar{F}} \bar{\tau}_i$ .

Mais  $\frac{kC/R}{\bar{F}} = \bigoplus_{j \in C} k\bar{\tau}_j$  et donc notre quotient est effectivement simple puisque de  $k$ -dimension 1.  $\square$

Remarque : Ce système n'est pas unique! Pour  $C = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ ,  $\{\tau_1 + \alpha, \tau_2 - \alpha\}$  en est un autre.

COROLLAIRE :  $kC/R$  est sobre si  $R$  est de définition.

En effet, le projectif de  $\bar{\tau}_i$  n'est isomorphe à celui de  $\bar{\tau}_j$  que si les simples  $k\bar{\tau}_i$  et  $k\bar{\tau}_j$  sont isomorphes, toujours grâce à la bijection. Or, si  $i \neq j$ , tout morphisme de  $kC/R$ -modules entre eux est nul :  $f : k\bar{\tau}_i \rightarrow k\bar{\tau}_j$ ,  $f(\bar{\tau}_i) = \lambda\bar{\tau}_j$ ,  $\lambda \in k$ . Mais  $f(\bar{\tau}_i) = f(\bar{\tau}_i^2) = \bar{\tau}_i f(\tau_i) = \bar{\tau}_i \lambda \bar{\tau}_j = 0$ .  $\square$

PROPOSITION :  $kC/R$  est connexe en tant qu'algèbre. (Cela tient exactement au fait que  $C$  est connexe et que  $R$  est de définition).

LEMME : Si  $\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$  est une décomposition d'une algèbre en projectifs et si  $\Lambda$  est somme non triviale de deux algèbres alors il existe une partition non triviale  $\{I, J\}$  des indices  $1, \dots, n$  telle que  $\text{Hom}_\Lambda(P_i, P_j) = \text{Hom}_\Lambda(P_j, P_i) = 0$  si  $i \in I$  et  $j \in J$ .

Preuve : Si  $\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2$ , et en utilisant Krull-Schmidt, chaque  $P_i$  est soit  $\Lambda_1$ -module, soit  $\Lambda_2$ -module. Ainsi on a une partition  $\{I, J\}$  telle que  $\Lambda_1 = \bigoplus_{i \in I} P_i$ ,  $\Lambda_2 = \bigoplus_{j \in J} P_j$ . Mais il est clair que  $\text{Hom}_\Lambda(\Lambda_1, \Lambda_2) = \text{Hom}_\Lambda(\Lambda_2, \Lambda_1) = 0$ .  $\square$

Preuve de la proposition : Considérons  $kC/R = \bigoplus_{i \in C_0} (kC/R)\bar{\tau}_i$

Nous allons voir qu'il n'existe pas de partition de  $C_0$  comme celle du lemme, et donc  $kC/R$  est connexe.

Remarquons que si  $i \xrightarrow{\alpha} j$  est une flèche de  $C$ , elle induit un morphisme de  $kC/R$ -modules  $(kC/R)\bar{\tau}_j \rightarrow (kC/R)\bar{\tau}_i$  par multiplication à droite par  $\bar{\alpha}$ . Il est non nul car l'image de  $\bar{\tau}_j$  est  $\alpha \neq 0$ , puisque  $\alpha \notin R$  ( $R \subset F^2$ , c'est-à-dire que les chemins de  $R$  sont au moins de longueur 2).

S'il existe une partition de  $C_0$  comme celle du lemme, cela implique que  $\forall i \in I, \forall j \in J$ , il n'existe pas de flèches les reliant. Mais alors les sous-carquois définis par  $I$  et  $J$  (c'est-à-dire les sommets de  $I$  et toutes les flèches reliant ces sommets, puis de même pour  $J$ ) sont deux composantes connexes, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse  $C$  connexe.  $\square$



Remarque : Il ressort clairement de tout ceci que si  $C$  est un carquois non connexe,  $kC$  est alors produit direct des algèbres  $kC_i$ , où les  $C_i$  sont les composantes connexes de  $C$ .

Nous verrons maintenant que toute  $k$ -algèbre de dimension finie, sobre et connexe, est isomorphe au quotient d'une algèbre de carquois par un idéal de définition ( $k$  est un corps algébriquement clos).

Ce résultat est intéressant : d'une part toutes les algèbres sont ainsi décrites, mais d'autre part il nous permettra de "voir" les modules de l'algèbre à travers les représentations du carquois, ce qui sera fait au chapitre III.

Nous suivons le chemin suivant :

1. Pour chaque algèbre  $\Lambda$  nous construisons un carquois associé,  $C_\Lambda$ .
2. Nous construisons ensuite un morphisme d'algèbres  $\phi : kC_\Lambda \rightarrow \Lambda$  et vérifions qu'il est surjectif.
3. En examinant le noyau de  $\phi$  nous verrons qu'il est de définition et donc  $kC_\Lambda / \ker \phi \simeq \Lambda$ .

### §3. CARQUOIS DE GABRIEL D'UNE ALGÈBRE

Soit  $\Lambda$  une algèbre de dimension finie, sobre et connexe. ( $k$  algébriquement clos).

Choisissons un système d'idempotents orthogonaux primitifs et dont la somme vaut 1 :  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . En d'autres mots choisissons une décomposition de  $\Lambda$  en projectifs indécomposables.

DEFINITION : Le carquois (de Gabriel) de  $\Lambda$ , noté  $C_\Lambda$ , est le suivant :

$C_\Lambda$  a  $n$  sommets (autant que d'idempotents, c'est-à-dire que de types de projectifs indécomposables, ou encore que de types de simples).

Le nombre de flèches allant du sommet  $i$  au sommet  $j$  est égal à  $\dim_k [e_j (\text{rad} \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda) e_i]$ .

Remarque :  $\text{rad} \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda$  est un  $\Lambda$ - $\Lambda$  bimodule. Donc  $e_j (\text{rad} \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda) e_i$  a un sens, et sa  $k$ -dimension est bien finie puisque celle de  $\Lambda$  l'est.

D'autres carquois sont souvent associés à une algèbre : (celui d'Auslander Reiten, celui des orbites, le stable, le séparé etc.). Cependant ce carquois apparaît explicitement pour la première fois dans [Gb], bien que R.M. Thrall associait certains graphes aux algèbres (travaux non publiés) et, en 1956, Yoshii utilisait  $C_\Lambda$ .

PROPOSITION :  $C_\Lambda$  ne dépend pas du choix d'idempotents.

Preuve : Le nombre de sommets ne pose pas de problèmes. Quant aux nombres de flèches de  $i$  à  $j$ , il est égal à  $\dim_k \text{Ext}^1(S_i, S_j)$ , ce qui fournit une définition intrinsèque de  $C_\Lambda$ .

( $S_i$  est le simple correspondant à  $P_i$ , i.e.  $P_i / \text{rad} P_i = S_i$ , où  $P_i$  est le projectif correspondant à  $e_i$ ,  $P_i = \Lambda e_i$ ).

Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{rad} P_i \rightarrow P_i \rightarrow S_i \rightarrow 0$$

Appliquons le foncteur  $\text{Hom}_\Lambda(-, S_j)$  :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(S_i, S_j) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(P_i, S_j) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\text{rad} P_i, S_j) \rightarrow \text{Ext}^1(S_i, S_j) \rightarrow \text{Ext}^1(P_i, S_j).$$

Le dernier Ext est nul, tandis que la première flèche est un isomorphisme puisque tout morphisme de  $P_i$  dans  $S_j$  est nul sur  $\text{rad} P_i$  (celui-ci va sur  $\text{rad} S_j = 0$ ) et donc se factorise par  $P_i / \text{rad} P_i = S_i$ .

Ainsi  $\text{Hom}_\Lambda(\text{rad} P_i, S_j) \rightarrow \text{Ext}^1(S_i, S_j)$  est un isomorphisme.

Mais tout morphisme  $\text{rad} P_i \rightarrow S_j$  est nul sur  $\text{rad}^2 P_i$ . Donc  $\text{Hom}_\Lambda(\text{rad} P_i, S_j) \simeq \text{Hom}_\Lambda(\text{rad} P_i / \text{rad}^2 P_i, S_j)$  en tant que  $k$ -espaces vectoriels.

Mais  $\text{rad} P_i / \text{rad}^2 P_i$  est semi-simple (car annulé par  $\text{rad} \Lambda$ ). Donc la  $k$ -dimension de ce dernier Hom égale le nombre de sommands directs isomorphes à  $S_j$  de  $\text{rad} P_i / \text{rad}^2 P_i$  qui, à son

tour, est égal à  $\dim_k \text{Hom}_\Lambda(S_j, \text{rad} P_i / \text{rad}^2 P_i) =$   
 $= \dim_k \text{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, (\text{rad}^\Lambda / \text{rad}^2) e_i).$

Or, pour un module  $M$  quelconque,  $\text{Hom}_\Lambda(\Lambda e_j, M) \simeq e_j M$ , par l'isomorphisme qui envoie chaque morphisme sur sa valeur en  $e_j$ .

$$\text{Donc } \dim_k \text{Ext}^1(S_i, S_j) = \dim_k e_j \frac{\text{rad}^\Lambda}{\text{rad}^2 \Lambda} e_i. \quad \square$$

COROLLAIRE (de la preuve) :  $C_\Lambda$  a autant de sommets que de simples et le nombre de flèches du simple  $S$  au simple  $T$  vaut  $\dim_k \text{Ext}(S, T)$  qui est aussi le nombre de sommands directs isomorphes à  $T$  dans  $\text{rad} P_S / \text{rad}^2 P_S$ . ( $P_S$  est la couverture projective de  $S$ ).

Exemples de construction de  $C_\Lambda$  :

a)  $\Lambda = k[x]/(x^n)$ , avec  $n \geq 1$ .  $C_\Lambda$  a un seul sommet, puisque le seul idempotent non nul est 1.

$\text{rad} \Lambda = (\bar{x})$  puisque  $(x)$  est le seul idéal maximal contenant  $(x^n)$ .  $\dim_k \text{rad} \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda = 1$ .

Ainsi  $C_\Lambda = 1 \supset \alpha$ .

b)  $\Lambda = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix}$ , l'anneau de matrices de la forme

$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \delta & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$  avec  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  et  $\epsilon$  dans  $k$ , somme et multiplication matricielles.

Un système d'idempotents primitifs orthogonaux et de somme 1 est  $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$  où  $E_{ij}$  est la matrice dont toutes les entrées sont 0 sauf la  $(i, j)$  qui est 1.

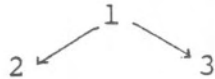
Il est facile de voir que

$$\text{rad} \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc  $\text{rad}^2 \Lambda = 0$ .

$E_{22} \text{rad} \Lambda E_{11}$  et  $E_{33} \text{rad} \Lambda E_{11}$  sont de dimension 1, les autres combinaisons doivent être nulles puisque  $\dim_k \text{rad} \Lambda = 2$ .

Ainsi  $C_\Lambda =$



Cet exemple se généralise tout de suite à

$$\Lambda = \begin{pmatrix} k & & & & & & \\ & k & k & & & 0 & \\ & & k & 0 & k & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & k & 0 & \dots & \dots & k \end{pmatrix}$$

ce qui donne  $C_\Lambda =$



- c) Si  $\Lambda = kC/R$  est le quotient d'une algèbre de carquois par un idéal de définition il faut s'attendre à ce que  $C_\Lambda$  coïncide avec  $C$  :

Nous savons que  $\{\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_n\}$  est un système complet d'idempotents.  $C_\Lambda$  a donc autant de sommets que  $C$ .

Quant à  $\bar{\tau}_j (\text{rad} \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda) \bar{\tau}_i$ , il est immédiat de voir qu'une  $k$ -base est constituée par les flèches de  $i$  à  $j$ , si l'on se souvient que  $\text{rad} \Lambda = \bar{F}$  où  $F$  est l'idéal bilatère de  $kC$  engendré par les flèches.

#### §4. CONSTRUCTION D'UN HOMOMORPHISME $\phi : kC_\Lambda \rightarrow \Lambda$

A chaque élément de la base de  $kC_\Lambda$  sera associé un élément de  $\Lambda$ , puis nous étendrons linéairement.

Nous obtiendrons un morphisme de  $k$ -algèbres, et nous verrons qu'il est surjectif.

La dimension de  $e_j (\text{rad} \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda) e_i$  est le nombre de flèches de  $i$  à  $j$  que nous avons mises dans  $C_\Lambda$ . Choisissons donc une  $k$ -base indexée par l'ensemble  $A_{ij}$  des flèches de  $i$  à  $j$  :  $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A_{ij}}$ .

Choisissons maintenant des éléments  $x_\alpha$  de  $e_j(\text{rad}\Lambda)e_i$  tels que  $\bar{x}_\alpha = y_\alpha$  pour chaque  $\alpha \in A_{ij}$  et pour chaque paire d'indices  $(i, j)$ .

Tous ces choix étant effectués décrivons maintenant l'image de chacun des éléments de base de  $kC_\Lambda$  dans  $\Lambda$  :

- chemins de longueur 0 (les triviaux) :

$$\phi(\tau_i) = e_i$$

- chemins de longueur 1 (les flèches) :

$$\phi(\alpha) = x_\alpha$$

- chemins de longueur  $n > 1$  :

$$\phi(\alpha_n \dots \alpha_1) = x_{\alpha_n} \dots x_{\alpha_1}$$

Pour vérifier que  $\phi$  est un morphisme d'algèbres, il suffit de voir que  $\phi(\delta\gamma) = \phi(\delta)\phi(\gamma)$  pour  $\delta$  et  $\gamma$  éléments de base de  $kC_\Lambda$ .

1er cas : si la longueur de  $\delta$  et celle de  $\gamma$  sont positives :

Posons  $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$ ,  $\delta = \beta_p \dots \beta_1$ . Posons aussi  $i = \text{fin de } \delta = \text{fin de } \alpha_n$  et  $j = \text{début de } \delta = \text{début de } \beta_1$ .

Si  $i=j$ , alors  $\delta\gamma = \beta_p \dots \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1$  et l'égalité cherchée est vraie grâce à la définition de  $\phi$  sur les chemins de longueur positive.

Si  $i \neq j$ , alors  $\delta\gamma = 0$ . Mais aussi  $\phi(\delta)\phi(\gamma) = 0$  puisque  $\phi(\gamma) = x_{\alpha_n} \dots x_{\alpha_1}$  avec  $x_{\alpha_n} \in e_i \text{rad}\Lambda$  et  $\phi(\delta) = x_{\beta_p} \dots x_{\beta_1}$  avec  $x_{\beta_1} \in (\text{rad}\Lambda)e_j$ , d'où  $\phi(\delta)\phi(\gamma) = x_{\beta_p} \dots x_{\beta_1} x_{\alpha_n} \dots x_{\alpha_1} = 0$  puisque  $x_{\alpha_1} x_{\beta_n} = 0$  (au vu que  $e_j e_i = 0$ ).

2ème cas :  $l(\delta) \geq 1$  et  $l(\gamma) = 0$

3ème cas :  $l(\delta) = 0$  et  $l(\gamma) \geq 1$

4ème cas :  $l(\delta) = 0$  et  $l(\gamma) = 0$

Ces trois cas se traitent de la même façon que le premier.

Exemples :

a) Pour  $\Lambda = k[x]/(x^n)$ ,  $C_\Lambda = 1 \xrightarrow{\alpha}$ , nous choisissons  $x_\alpha = \bar{x}$ , et  $\phi$  est définie par  $\phi(\tau_1) = 1$ ,  $\phi(\alpha) = \bar{x}$ . Ainsi  $\phi : kC_\Lambda \rightarrow \Lambda$  est bien surjective, de noyau  $(\alpha^n)$ , comme on pouvait s'y attendre!

b) Soit  $\Lambda$  l'anneau de matrices de l'exemple b).

$$C_\Lambda = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ 2 & & 3 \end{array} . \text{ On avait } \text{rad}^2 \Lambda = 0.$$

Choisissons  $x_\alpha = E_{21}$  et  $x_\beta = E_{31}$ . Le  $\phi$  obtenu est surjectif et il s'agit en fait d'un isomorphisme. (Nous savons que 0 est idéal de définition si  $C_\Lambda$  n'a pas de cycles orientés). Au chapitre IV nous donnons une caractérisation de ces algèbres qui sont isomorphes à une algèbre de carquois sans cycles.

c) Soit  $\Lambda = kC/R$  le quotient d'une algèbre de carquois par un idéal de définition. Nous avons vu que  $C_\Lambda = C$ . Si nous faisons les choix (nécessaires pour construire  $\phi$ ) de la façon évidente, nous obtenons  $\phi$  surjective et de noyau exactement  $R$ . Cependant, un autre choix peut mener à un noyau différent de  $R$ .

§5.  $\phi$  EST SURJECTIVE

Avant de le démontrer, voici deux lemmes.

LEMME : Si  $\Lambda$  est sobre, alors  $\Lambda/\text{rad}\Lambda$  est sobre aussi.

Preuve : Si  $\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ , avec  $\{P_i\}$  des projectifs indécomposables deux à deux non isomorphes,

$$\Lambda/\text{rad}\Lambda = P_1/\text{rad}P_1 \oplus \dots \oplus P_n/\text{rad}P_n$$

Par la correspondance bijective du 1er chapitre, ces simples sont deux à deux non isomorphes.  $\square$

LEMME : Si  $\Lambda$  est sobre,  $\Lambda/\text{rad}\Lambda$  est un produit direct de copies du corps.

Preuve : nous avons  $A = \Lambda/\text{rad}\Lambda = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ , avec  $S_i \neq S_j$  si  $i \neq j$ . Décomposons  $1 = e_1 + \dots + e_n$ .

Assertion : ces idempotents sont centraux. En effet, si  $x \in A$ ,  $x = x \cdot 1 = xe_1 + \dots + xe_n$  avec  $xe_i \in Ae_i = S_i$ , et  $x = 1 \cdot x = e_1x + \dots + e_nx$ . Si nous montrons que  $e_ix \in Ae_i = S_i$ , l'assertion est montrée, car alors  $xe_i = e_ix$  par l'unicité de la décomposition de  $x$  dans la somme directe.

Pour voir que  $e_ix \in S_i$ , décomposons-le sous la forme  $e_ix = e_ixe_1 + \dots + e_ixe_n$ . Mais le morphisme  $Ae_i \rightarrow Ae_j$  défini par  $ae_i \rightarrow ae_ixe_j$  est nul si  $i \neq j$  (puisque  $Ae_i \neq Ae_j$ ). Donc  $e_ixe_j = 0$  si  $i \neq j$  et  $e_ix = e_ixe_i \in Ae_i$ . Puisque ces idempotents sont centraux  $Ae_i$  est une  $k$ -algèbre. Or  $\text{Hom}_A(Ae_i, Ae_i) \simeq e_i Ae_i$ , comme nous l'avons déjà vu. Mais  $e_i Ae_i$  est un corps gauche extension finie de  $k$  (car c'est l'anneau d'endomorphismes d'un simple).  $k$  est algébriquement clos donc  $e_i Ae_i \simeq k$ . D'autre part nous avons vu que  $Ae_i = e_i Ae_i$ .

Donc  $\Lambda/\text{rad}\Lambda \simeq k \times \dots \times k$  en tant qu'algèbre.  $\square$

Remarque : cette démonstration est en partie celle du théorème de structure des algèbres semi-simples de Wedderburn-Artin.

THEOREME : Le morphisme  $\phi : kC_\Lambda \rightarrow \Lambda$  défini plus haut est surjectif.

Preuve : Considérons les éléments suivants de  $\Lambda$  :

$$\{e_1, \dots, e_n\} \cup \{x_\alpha \mid \alpha \in UA_{ij}\}$$

Tous ces éléments se trouvent, par construction dans l'image de  $\phi$ , qui est une sous  $k$ -algèbre de  $\Lambda$ .

Il est donc suffisant de montrer qu'il s'agit d'un système de générateurs de  $\Lambda$  en tant que  $k$ -algèbre.

C'est-à-dire que tout  $\lambda \in \Lambda$  peut s'écrire comme polynôme en ces éléments (à variables non commutatives!).

Regardons la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{rad}\Lambda \hookrightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda/\text{rad}\Lambda \rightarrow 0$$

qui se scinde en tant que suite de k-espaces vectoriels :

$$\Lambda = \text{rad}\Lambda \oplus (\text{ke}_1 \oplus \dots \oplus \text{ke}_n)$$

Ainsi, si nous montrons que tout élément de  $\text{rad}\Lambda$  s'écrit comme un k-polynôme en les  $\{x_\alpha \mid \alpha \in \text{UA}_{ij}\}$ , nous aurons fini.

C'est ce qu'affirme la proposition suivante.

Remarquons d'abord que puisque

$$\text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda \cong \bigoplus_{i,j} e_j (\text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda) e_i,$$

$\{x_\alpha \mid \alpha \in \text{UA}_{ij}\}$  est une k-base de  $\text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda$ .

**PROPOSITION** : Soit  $\Lambda$  une k-algèbre de dimension finie et soit  $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$  un ensemble quelconque d'éléments de  $\text{rad}\Lambda$  tels que  $\{\bar{x}_\alpha \mid \alpha \in A\}$  est un k-base de  $\text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda$ .

Soit B l'ensemble des éléments de  $\Lambda$  qui peuvent s'écrire comme des k-polynômes sans terme constant en les  $x_\alpha, \alpha \in A$ .

Alors  $\text{rad}\Lambda = B$ .

**LEMME** : Soit  $a_\ell \in \text{rad}^\ell \Lambda$  avec  $\ell \geq 1$ . Alors il existe  $a_{\ell+1} \in \text{rad}^{\ell+1} \Lambda$  et  $b \in B^\ell \subset B$  tels que  $a_\ell = a_{\ell+1} + b$ .

Ce lemme démontre la proposition : Naturellement,  $B \subset \text{rad}\Lambda$ . Il s'agit de voir que  $\text{rad}\Lambda \subset B$ . Mais du lemme on déduit que pour tout  $a \in \text{rad}\Lambda$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a = a_n + b$  avec  $a_n \in \text{rad}^n \Lambda$  et  $b \in B$ . Comme  $\text{rad}\Lambda$  est nilpotent, le résultat suit. Prouvons donc le lemme.

Preuve du lemme : Faisons une récurrence sur  $\ell$ . Considérons la suite exacte de k-espaces vectoriels

$$0 \rightarrow \text{rad}^2\Lambda \rightarrow \text{rad}\Lambda \rightarrow \text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda \rightarrow 0$$

et choisissons la section  $g : \text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda \rightarrow \text{rad}\Lambda$  donnée par  $g(\bar{x}_\alpha) = x_\alpha$ . Alors, en tant que k-espaces,  $\text{rad}\Lambda = \text{rad}^2\Lambda \oplus \text{Im}g$ .



Alors  $0 = \phi(a) = \sum \lambda_i e_i + \phi(x)$ . Par la construction de  $\phi$  et puisque  $x \in F$ , nous avons que  $\phi(x) \in \text{rad}$ , d'où  $\sum \lambda_i e_i \in \text{rad}\Lambda$ , qui est nilpotent.

Les  $e_i$  sont idempotents orthogonaux, donc  $\sum \lambda_i e_i$  n'est nilpotent que si les  $\lambda_i$  sont nuls.

Donc  $a = x \in F$ .

2)  $\ker\phi \subset F^2$ .

Soit  $a \in \ker\phi$ . Par ce qui précède,

$$a = \sum \lambda_\alpha \alpha + y$$

où  $y \in F^2$  et  $\alpha$  parcourt les flèches de  $C$ .

Alors  $0 = \phi(a) = \sum \lambda_\alpha x_\alpha + \phi(y)$ .

$\phi(y) \in \text{rad}^2\Lambda$ , puisque  $y \in F^2$ .

Si l'on regarde modulo  $\text{rad}^2\Lambda$ , on obtient

$$0 = \sum \lambda_\alpha \bar{x}_\alpha$$

Mais  $\{\bar{x}_\alpha \mid \alpha \in \text{UA}_{ij}\}$  est une base de  $\text{rad}\Lambda/\text{rad}^2\Lambda$ . Donc chaque  $\lambda_\alpha = 0$  et  $a = y \in F^2$ .

3)  $\ker\phi$  contient une puissance de  $F$ .

En effet,  $F^r \subset \phi^{-1}(\text{rad}^r\Lambda)$  pour chaque  $r$ , par la construction de  $\phi$ .

Mais  $\text{rad}\Lambda$  est nilpotent, disons  $\text{rad}^r\Lambda = 0$ .

Donc  $F^n \subset \phi^{-1}(0) = \ker\phi$ .  $\square$

Remarque :  $C_\Lambda$  est canoniquement déterminé par  $\Lambda$ . Il n'en va pas de même pour  $R$  :

$$C = \begin{array}{ccc} & \alpha & \beta \\ & \nearrow & \searrow \\ \cdot & & \cdot \\ & \searrow & \nearrow \\ & \gamma & \delta \end{array}$$

$R_1$  = idéal de  $kC$  engendré par  $3\alpha + \delta\gamma$

$R_2$  = idéal de  $kC$  engendré par  $3\alpha - \delta\gamma$

$R_1$  et  $R_2$  sont des idéaux de définition différents si la caractéristique de  $k$  n'est pas deux, et cependant  $kC/R_1 \cong kC/R_2$ .

### CHAPITRE III

#### REPRESENTATIONS DE CARQUOIS

Nous voulons essayer de connaître  $\text{mod } \Lambda$ , pour  $\Lambda$  une  $k$ -algèbre de dimension finie. En utilisant  $C_\Lambda$  et  $R$  (bien que celui-ci ne soit pas canoniquement donné par  $\Lambda$ ) nous verrons que les  $\Lambda$ -modules peuvent être "vus" sur  $C_\Lambda$ . En particulier, certains modules (projectifs, simples, etc.) se "voient très bien".

Pendant tout ce chapitre,  $C$  est un carquois arbitraire,  $R$  un idéal admissible de  $kC$  et  $\Lambda = kC/R$ .

#### §1. REMARQUES SUR LES IDEAUX ADMISSIBLES

Nous avons déjà montré l'intérêt des idéaux de définition. Nous allons maintenant les décrire un peu mieux. Nous verrons que l'on peut choisir un "bon" système de générateurs pour  $R$ .

Remarque : En général,  $kC$  n'est pas noethérien. Par exemple  $C = \alpha \curvearrowright \beta$ .

$$(\alpha) \subset (\alpha, \alpha\beta) \subset (\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2) \subset \dots$$

est une chaîne ascendante non stationnaire d'idéaux à gauche.

Cependant, nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION : Un idéal de définition  $R$  est de génération finie.

Preuve : Nous savons que pour un certain  $n$ , nous avons une suite exacte

$$0 \rightarrow F^n \hookrightarrow R \rightarrow R/F^n \rightarrow 0$$

$F^n$  est un  $kC$ -module de génération finie (les chemins de longueur  $n$  l'engendrent). Il suffit donc de voir que  $R/F^n$  est de génération finie.

§2. REPRESENTATIONS DE CARQUOIS AVEC RELATIONS

Dans ce paragraphe il n'y aura qu'une liste de définitions et un exemple. Puis nous verrons au paragraphe suivant que ce qui a été fait consiste à décrire la catégorie des  $\Lambda$ -modules.

1. Une *représentation*  $V$  du carquois  $C$  (une  $k$ -représentation) est la donnée de  $((V_i)_{i \in C_0}, (f_\alpha)_{\alpha \in C_1})$  où les  $V_i$  sont des  $k$ -espaces vectoriels (un par sommet de  $C$ ) et les  $f_\alpha$  sont des applications linéaires (une pour chaque flèche  $\alpha$ ). Naturellement, on demande que si  $\alpha$  est une flèche de  $i$  à  $j$  (" $i \xrightarrow{\alpha} j$ ") alors  $f : V_i \rightarrow V_j$ .
2. Un *morphisme de représentations*  $\phi : V \rightarrow W$  est la donnée d'une famille  $\phi = (\phi_i)_{i \in C_0}$ , où les  $\phi_i$  sont des transformations linéaires (une par sommet) de source  $V_i$  et de but  $W_i$ , telles que pour chaque  $i \xrightarrow{\alpha} j$  le carré

$$\begin{array}{ccc}
 V_i & \xrightarrow{f_\alpha} & V_j \\
 \phi_i \downarrow & & \downarrow \phi_j \\
 W_i & \xrightarrow{g_\alpha} & W_j
 \end{array} \quad \text{commute.}$$

C'est-à-dire que  $\phi_j f_\alpha = g_\alpha \phi_i$  pour toute  $i \xrightarrow{\alpha} j$  de  $C$ .

3. Si  $V$  est une représentation de  $C$  et  $\gamma = (j | \alpha_n, \dots, \alpha_1 | i)$  est un chemin orienté non trivial de  $C$ , nous pouvons évaluer  $V$  en  $\gamma$  :

$$V(\gamma) = f_{\alpha_n} \circ \dots \circ f_{\alpha_1}$$

et donc  $V(\gamma) : V_i \rightarrow V_j$  est une application linéaire.

Si  $\rho = \sum \lambda_\gamma \gamma$  est une relation lisible, disons de  $i$  à  $j$ , on peut évaluer  $V$  en  $\rho$  en posant

$$V(\rho) = \sum \lambda_\gamma V(\gamma)$$

et, à nouveau,  $V(\rho) : V_i \rightarrow V_j$  est linéaire.

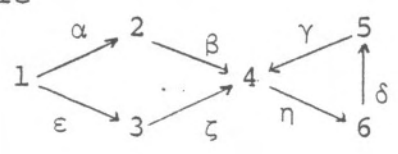
4. Soit  $V$  une représentation de  $C$  et  $\rho$  une relation lisible de  $R$ . Nous disons que  $V$  vérifie  $\rho$  s'il l'annule c'est-à-dire si  $V(\rho) = 0$ . Nous disons que  $V$  vérifie  $R$  si  $V$  satisfait chacune des relations lisibles de  $R$ .

**LEMME** : Soit  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  un système lisible de générateurs de  $R$ . Alors  $V$  vérifie  $R$  si et seulement si  $V$  satisfait  $\rho_i$  pour chaque  $i = 1, \dots, m$ .

Ainsi, pour voir si  $V$  vérifie  $R$ , un nombre fini de calculs sont nécessaires et le résultat ne dépendra pas du système lisible de générateurs choisi.

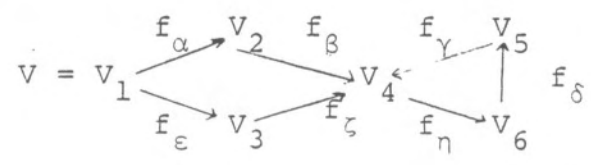
5. Notons  $\text{Mod}(C,R)$  la catégorie dont les objets sont les représentations de  $(C,R)$  (i.e. représentations de  $C$  vérifiant  $R$ ) et dont les morphismes sont ceux décrits en 2, avec la composition évidente ("sommets à sommets").  
Notons aussi  $\text{mod}(C,R)$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}(C,R)$  dont les objets sont les représentations  $V$  telles que  $V_i$  est de dimension finie pour chaque sommet.

6. Voyons un exemple



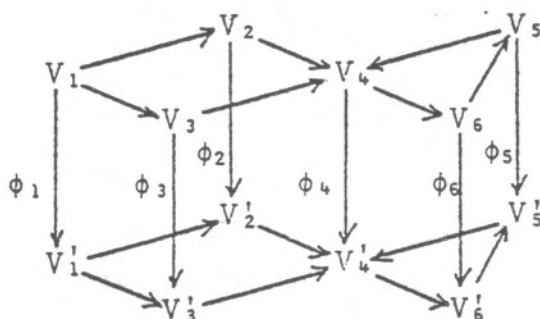
$R = \langle \beta\alpha - \zeta\epsilon, \eta\beta, \gamma\delta\eta \rangle$  est un idéal de définition de  $kC$ , car  $F^5 \subset R = F^2$ .

Le système de générateurs donné est certainement lisible  $\beta\alpha - \zeta\epsilon$  est une relation de commutativité (une relation lisible qui est la différence de deux chemins) tandis que  $\eta\beta$  et  $\gamma\delta\eta$  sont des relations zéro (ce sont des chemins).  
Un objet de  $\text{Mod}(C,R)$  est donc  $V = ((V_1, \dots, V_6), (f_\alpha, \dots, f_\eta))$  avec  $f_\beta f_\alpha - f_\zeta f_\epsilon = 0$ ,  $f_\eta f_\beta = 0$  et  $f_\gamma f_\delta f_\eta = 0$ .  
De façon plus commode à dire,  $V$  est un diagramme d'espaces vectoriels et transformations linéaires



tel que le losange de gauche commute et  $f_\eta f_\beta, f_\gamma f_\delta f_\eta$  sont nuls. Si  $W$  est une autre représentation,

$\phi = (\phi_i : V_i \rightarrow V'_i)_{i=1\dots 6}$  est un morphisme si "les carrés verticaux commutent" :



### §3. CORRESPONDANCE ENTRE MODULES ET REPRÉSENTATIONS

Rappelons que  $\Lambda = kC/R$ . D'une part  $\Lambda$  est une  $k$ -algèbre et nous disposons des catégories de modules à gauche  $\text{Mod}\Lambda$  et  $\text{mod}\Lambda$ .

D'autre part nous venons de définir les catégories de représentations  $\text{Mod}(C,R)$  et  $\text{mod}(C,R)$ .

Ces quatre catégories sont des exemples de  $k$ -catégories c'est-à-dire que chaque  $\text{Hom}(X,Y)$  est un  $k$ -espace vectoriel et que la composition de morphismes est bilinéaire.

Deux catégories  $A$  et  $B$  sont équivalentes s'il existe des foncteurs  $F : A \rightarrow B$  et  $G : B \rightarrow A$  tels que  $FG \simeq 1_B$  et  $GF \simeq 1_A$  ( $FG \simeq 1_B$  veut dire que pour chaque objet  $Y$  de  $B$ , nous disposons d'un isomorphisme  $FGY \xrightarrow{\eta_Y} Y$  et cela de façon naturelle, i.e. si  $Y'$  est un autre objet de  $B$  et  $f : Y \rightarrow Y'$  est un morphisme, alors

$$\begin{array}{ccc} & FGY & \xrightarrow{\eta_Y} & Y \\ FGf & \downarrow & & \downarrow f \\ & FGY' & \xrightarrow{\eta_{Y'}} & Y' \end{array} \quad \text{commute.}$$

Nous disons que deux  $k$ -catégories  $A$  et  $B$  sont équivalentes si les équivalences  $F$  et  $G$  sont des  $k$ -foncteurs

(c'est-à-dire que restreints à chaque  $k$ -espace de morphismes, ils sont  $k$ -linéaires).

Nous allons esquisser la preuve du

**THEOREME** : Les  $k$ -catégories  $\text{Mod}\Lambda$  et  $\text{Mod}(C;R)$  sont équivalentes, par des foncteurs qui se restreignent bien à  $\text{mod}\Lambda$  et  $\text{mod}(C,R)$ , ce qui montre que ces deux dernières  $k$ -catégories sont aussi équivalentes.

Nous allons donner les grandes lignes de la démonstration. La preuve est importante car elle fournit le moyen explicite de traduire modules en représentations et vice-versa.

#### A. Des modules aux représentations

Nous allons définir un  $k$ -foncteur  $F : \text{Mod}\Lambda \rightarrow \text{Mod}(C,R)$ .

Soit  $M$  un  $\Lambda$ -module.

Si  $i$  est un sommet de  $C$ ,  $V_i$  sera le  $k$ -espace  $\bar{\tau}_i M$ , où  $\bar{\tau}_i$  est la classe de  $\tau_i$ , le chemin trivial en  $i$ , dans  $\Lambda = kC/R$ .

Si  $i \xrightarrow{\alpha} j$  est une flèche de  $C$ , définissons

$f_{\alpha} : V_i \rightarrow V_j$  comme l'"action de  $\bar{\alpha}$ " c'est-à-dire que  $f_{\alpha}(x) = \bar{\alpha}x$  ( $= \bar{\tau}_j \alpha x \in V_j$ ).

Comme  $M$  était un  $\Lambda$ -module,  $f_{\alpha}$  est  $k$ -linéaire.

Nous avons donc construit  $V$  une représentation de  $C$ . Pour pouvoir poser  $F(M) = V$  il nous faut encore voir que  $V$  vérifie  $R$ .

Soit  $\rho = \sum \lambda_{\gamma} \gamma$  une relation lisible de  $R$ , de  $i$  à  $j$ . Supposons que chaque  $\gamma$  est de la forme  $\gamma = \alpha_n \dots \alpha_1$  (cette expression varie avec  $\gamma$ ).

Si  $x \in V_i$ , on a que  $V(\rho)(x) = \sum \lambda_{\gamma} V(\gamma)(x) = \sum \lambda_{\gamma} f_{\alpha_n} \dots f_{\alpha_1}(x) = \sum \lambda_{\gamma} \bar{\alpha}_n \dots \bar{\alpha}_1 x = (\sum \lambda_{\gamma} \bar{\gamma})x = \bar{\rho}x = 0x = 0$ .

Nous avons ainsi défini  $F$  sur les objets.

Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un morphisme de  $\text{Mod}\Lambda$ . Nous voulons un morphisme de représentations  $F\phi = (\phi_i) : V \rightarrow W$  (en posant  $F(M) = V$  et  $F(N) = W$ ).

Si  $i \in C_0$ , chaque élément  $\bar{\tau}_i x$  de  $V_i$  ( $= \bar{\tau}_i M$ ) va par  $\phi$  sur  $\bar{\tau}_i \phi(x)$ , c'est-à-dire que  $\phi$  peut bien se restreindre en  $\phi_i : V_i \rightarrow W_i$ .

La famille  $F(\phi) = (\phi_i)$  est un morphisme de  $\text{Mod}(C, R)$  : il faut vérifier que  $\phi_j f_\alpha = g_\alpha \phi_i$  pour chaque  $i \xrightarrow{\alpha} j$  de  $C$ . Cela suit des définitions et du fait que  $\phi$  est de  $\Lambda$ -modules.

Il est facile de voir que  $F$  ainsi défini est un  $k$ -foncteur.

### B. Des représentations aux modules

Nous fabriquons un  $k$ -foncteur  $G : \text{Mod}(C, R) \rightarrow \text{Mod}\Lambda$ .

Soit  $V = ((V_i), (f_\alpha))$  un objet de  $\text{Mod}(C, R)$ .

Considérons le  $k$ -espace vectoriel

$$M = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

Nous voulons donner une structure de  $\Lambda$ -module à  $M$  et poser  $G(V) = M$ .

Nous verrons d'abord que  $M$  a une structure naturelle de  $kC$  module. Nous allons définir ce que vaut  $\gamma m$ , pour  $m \in M$  et  $\gamma$  un chemin orienté. Cela se prolonge d'une seule façon pour obtenir une action de  $kC$  sur  $M$ .

Si  $\gamma$  est le chemin trivial  $\tau_i$ , alors

$$\tau_i m = m_i$$

(dans l'expression  $M = \bigoplus_{i \in C_0} V_i$ ,  $m_i$  désigne la  $i$ ème composante de  $m$ ).

Si  $\gamma$  est non trivial, considérons l'application linéaire  $V(\gamma) : V_i \rightarrow V_j$  (si  $\gamma$  va de  $i$  à  $j$ ). Comme  $m_i \in V_i$ ,  $V(\gamma)(m_i) \in V_j$  et ce sera la seule coordonnée non nulle de  $\gamma m$ , c'est-à-dire que

$$(\gamma m)_\ell = \delta_{j\ell} V(\gamma)(m_i)$$

où  $\delta_{j\ell}$  = symbole de Kronecker =  $\begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \ell \\ 1 & \text{si } j = \ell \end{cases}$

Ainsi  $M$  est un  $kC$ -module. Mais puisque  $V$  vérifie  $R$ , nous obtenons que  $RM = 0$ . Ainsi  $M$  est un  $kC/R$ -module.

Posons  $G(V) = M$ .

Si  $\phi = (\phi_i) : V \rightarrow W$  est un morphisme de représentations, nous voulons un  $\Lambda$ -morphisme

$$G(\phi) : G(V) \rightarrow G(W)$$

Puisque  $G(V) = \bigoplus_{i \in C_0} V_i$  et  $G(W) = \bigoplus_{i \in C_0} W_i$ , nous avons  $\bigoplus \phi_i : G(V) \rightarrow G(W)$ .

Il est facile de vérifier que  $\bigoplus \phi_i$  est de  $kC$ -modules (en sachant que  $(\phi_i)$  est de représentations et avec les structures de modules définies sur  $G(V)$  et  $G(W)$ ).

Il est immédiat de voir que nous obtenons un  $k$ -foncteur

$$G : \text{Mod}(C, R) \rightarrow \text{Mod} \Lambda$$

### C. L'équivalence

Il suffit de voir maintenant que nous avons des isomorphismes naturels  $\eta : FG \rightarrow \mathbb{1}_{\text{Mod}(C, R)}$  et  $f : GF \rightarrow \mathbb{1}_{\text{Mod} \Lambda}$ . En fait l'identité fait ici l'affaire, ce qui montre que les catégories sont isomorphes.

### D. Restriction de l'équivalence

Il suffit de montrer que tout objet de  $\text{mod} \Lambda$  va par  $F$  sur un objet de  $\text{mod}(C, R)$ , et réciproquement pour  $G$ .

Cela suit de l'observation du chapitre I :  $\text{mod} \Lambda$  coïncide avec la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod} \Lambda$  dont les  $\Lambda$ -modules sont de  $k$ -dimension finie.

Remarque : Par  $F$ , on peut considérer dans  $\text{Mod}(C, R)$  toutes les constructions faisables dans  $\text{Mod} \Lambda$ . Il est possible de décrire le noyau, l'image d'un morphisme de représentations, ainsi que les isomorphismes, les injections, les surjections, les suites exactes de  $\text{Mod}(C, R)$ . Si  $V$  et  $W$  sont deux représentations, leur somme directe a un sens, elle se fait sommet à sommet et l'on fait la somme directe des applications linéaires.



Nous allons donner maintenant la description diagrammatique de certains modules intéressants : les simples, les projectifs indécomposables, leur radical, les injectifs indécomposables.

#### §4. DESCRIPTION DES MODULES SIMPLES

DEFINITION : Si  $j$  est un sommet de  $C$ ,  $S_j$  est la représentation de  $C$  qui porte le corps au sommet  $j$ , 0 partout ailleurs et dont toutes les applications linéaires sont nulles.

Clairement,  $S_j$  est une représentation de  $C$  vérifiant  $R$ , quel que soit  $R$  de définition.

Elle ne possède aucune sous-représentation non triviale, elle est donc simple, le simple associé au sommet  $j$ .

Les  $(S_j)_{j \in C_0}$  sont donc simples et non isomorphes deux à deux.

La liste est complète car nous savons que  $(\bar{\tau}_i)_{i \in C_0}$  est un système d'idempotents orthogonaux primitifs dont la somme est 1 de  $kC/R$ , qui est une algèbre sobre.

Il y a donc autant de types de projectifs indécomposables que de sommets et donc autant de types de simples que de sommets. Nous avons ainsi le bon nombre de simples.

Il suit de la description des simples qu'une représentation est semi-simple si et seulement si chaque  $f_\alpha$  est 0.

#### §5. DESCRIPTION DES PROJECTIFS INDECOMPOSABLES

Il suffit de traduire chaque  $\bar{\tau}_i$  en une représentation,  $P_i = ((P_i)_j, (f_\alpha))$  de  $(C, R)$  au moyen de  $F$ , le foncteur du §3.

On obtient que

$$(P_i)_j = \bar{\tau}_j \wedge \bar{\tau}_i = \tau_j kC\tau_i / \tau_j R\tau_i$$

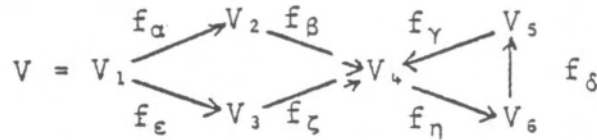
Si  $R=0$ , ou bien s'il n'y a pas de relations lisibles de  $i$  à  $j$ ,  $(P_i)_j$  est alors le  $k$ -espace vectoriel de base tous les chemins orientés de  $i$  à  $j$ . ( $i$  est le sommet fixe dont nous regardons le projectif).

S'il existe une relation lisible de  $i$  à  $j$ ,  $(P_i)_j$  est un espace de dimension strictement plus petite que le nombre de chemins orientés de  $i$  à  $j$ .

Pour chaque flèche  $j \xrightarrow{\alpha} s$  de  $C$ , l'application linéaire  $f_\alpha : \tau_j k C \tau_i / \tau_j R \tau_i \rightarrow \tau_s k C \tau_i / \tau_s R \tau_i$  est telle que  $f_\alpha(\bar{\gamma}) = \overline{\alpha\gamma}$ , pour tous les chemins  $\gamma$  de  $i$  à  $j$ .  $f_\alpha$  est donc "la prolongation" de chaque chemin de  $i$  à  $j$  avec  $\alpha$ , ce qui en fait un chemin de  $i$  à  $s$ .

Si  $R=0$ ,  $f_\alpha$  est toujours injective. Mais si  $R \neq 0$ ,  $f_\alpha$  n'est en général pas injective.

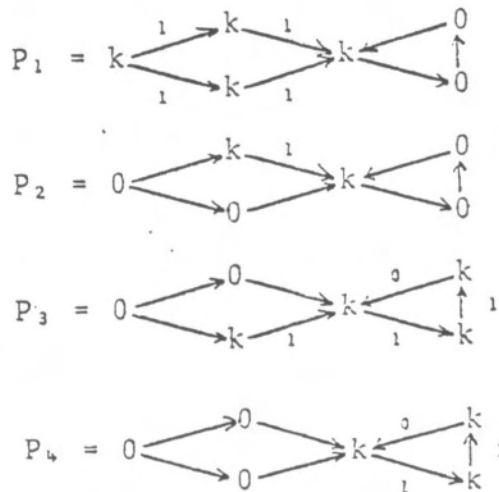
Exemple

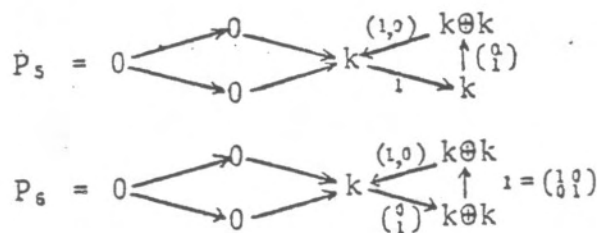


$R = \langle \beta\alpha - \zeta\eta, \eta\beta; \gamma\delta\eta \rangle$



Voici la liste des projectifs indécomposables.





§6. DESCRIPTION DE  $\text{rad}^m P_i$

Décrivons d'abord  $\text{rad} P_i$ . Comme tout à l'heure, il nous faut traduire  $\text{rad}(\Lambda \bar{\tau}_i)$  en une représentation notée

$$\text{rad} P_i = ((\text{rad} P_i)_j, (g_\alpha))$$

D'une part nous avons  $\text{rad}(\Lambda \bar{\tau}_i) = (\text{rad} \Lambda) \bar{\tau}_i$ . Mais aussi  $\text{rad} \Lambda = \bar{F}$ , puisque R est de définition.

Donc

$$(\text{rad} P_i)_j = \bar{\tau}_j \bar{F} \bar{\tau}_i = \tau_j F \tau_i / \tau_j R \tau_i$$

Il est clair que si  $i \neq j$ ,  $\tau_j F \tau_i = \tau_j k C \tau_i$ , d'où

$$(\text{rad} P_i)_j = (P_i)_j \text{ si } i \neq j.$$

Remarquons aussi que, pour  $i=j$ ,  $(P_i)_i = \tau_i k C \tau_i / \tau_i R \tau_i = k \bar{\tau}_i \oplus \tau_i F \tau_i / \tau_i R \tau_i$ ; cela est dû à  $R \subset F^2 \subset F$  et montre que

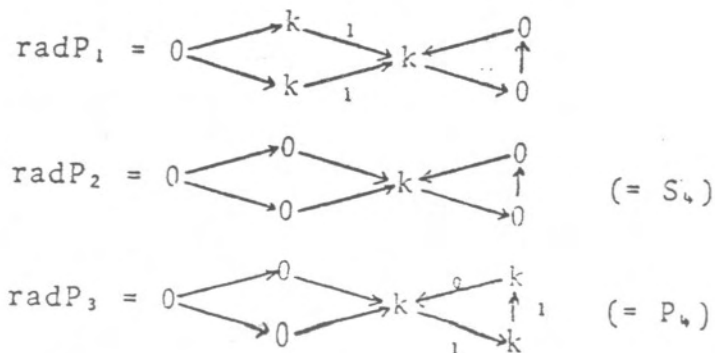
$$\dim_k (\text{rad} P_i)_i = \dim_k (P_i)_i - 1$$

qui correspond à l'élimination du chemin trivial  $\tau_i$ .

Remarquons que si C n'a pas de cycles orientés qui passent par le sommet i, alors  $(\text{rad} P_i)_i = 0$ .

Pour chaque flèche  $j \xrightarrow{\alpha} s$  de C, il est clair que  $g_\alpha$  est la restriction de  $f_\alpha$ .

Voici les radicaux des projectifs du paragraphe précédent :



$$\text{rad}P_4 = 0 \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} \rightarrow 0 \begin{array}{c} \nearrow k \\ \searrow k \end{array} \uparrow 1$$

$$\text{rad}P_5 = 0 \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} \rightarrow k \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{array} \uparrow 1 \quad (= P_4)$$

$$\text{rad}P_6 = 0 \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} \rightarrow k \begin{array}{c} \nearrow (1,0) \\ \searrow 1 \end{array} \uparrow (1) \quad (= P_5)$$

Voyons maintenant le cas où  $m \geq 2$ . Comme avant :

$$(\text{rad}^m P_i)_j = \overline{\tau_j F^m \tau_i} = \tau_j (F^m + R) \tau_i / \tau_j R \tau_i$$

Ainsi  $(\text{rad}^m P_i)_j$  est le sous-espace vectoriel de  $(P_i)_j$  engendré par les classes de chemins de  $i$  à  $j$  de longueur plus grande que  $m$ .

Quant à l'évaluation de  $\text{rad}^m P_i$  sur chaque flèche  $\alpha$ , il s'agit de la restriction de  $f_\alpha$  aux sous-espaces décrits.

Remarque : si  $m=2$ , nous pouvons être plus précis :

si  $j \neq i$ ,  $(P_i)_j = \tau_j k C \tau_i / \tau_j R \tau_i = (\tau_j F^2 \tau_i / \tau_j R \tau_i) \oplus (\oplus k \bar{\gamma})$ ,  
 $\gamma$  parcourt les flèches de  $i$  à  $j$ , cela est dû à  $R \subset F^2$ . On en déduit que si  $\# A_{ij}$  est le nombre de flèches de  $i$  à  $j$ ,

$$\dim_k (\text{rad}^2 P_i)_j = \dim_k (P_i)_j - \# A_{ij} \quad \text{si } i \neq j$$

Pour  $j=i$ ,  $(P_i)_i = (\tau_i k C \tau_i) / (\tau_i R \tau_i) =$   
 $= (\tau_i F^2 \tau_i) / (\tau_i R \tau_i) \oplus \oplus k \bar{\gamma}$  où  $\gamma$  parcourt les lacets en  $i$ . Donc

$$\dim_k (\text{rad}^2 P_i)_i = \dim_k (P_i)_i - [\# A_{ii} + 1]$$

### 37. DESCRIPTION DES MODULES INJECTIFS INDECOMPOSABLES

Nous avons vu au chapitre I qu'il existe une dualité

$$\begin{array}{ccc} D : \text{mod}_d A & \rightarrow & \text{mod} A \\ M & \mapsto & DM = \text{Hom}_k(M, k) \end{array}$$

des modules à droite vers les modules à gauche.

(DM est module à gauche via  $(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(xa)$ ).

De plus, si  $(P_i)$  est une liste de projectifs indécomposables à droite de  $\Lambda$ ,  $(DP_i)$  est une liste d'injectifs indécomposables à gauche de  $\Lambda$ .

Il est clair que les projectifs indécomposables à droite de  $\Lambda$  sont les  $(\bar{\tau}_i \Lambda)_{i \in C_0}$ .

Ainsi la liste des injectifs indécomposables est  $(D(\bar{\tau}_i \Lambda))_{i \in C_0}$ .

Considérons  $I_i = D(\bar{\tau}_i \Lambda)$ .

Par le foncteur  $F$  de traduction en représentations, on a  $(I_i)_j = \bar{\tau}_j \text{Hom}_k(\bar{\tau}_i \Lambda, k) = \text{Hom}_k(\bar{\tau}_i \Lambda \bar{\tau}_j, k) = \text{Hom}_k(\tau_i k C \tau_j / \tau_i R \tau_j, k)$ .

Si  $R=0$  (ou bien si  $\tau_i R \tau_j = 0$ ) alors  $(I_i)_j$  est le dual du  $k$ -espace vectoriel dont la base est l'ensemble des chemins qui vont de  $j$  au sommet  $i$  ( $i$  est le sommet fixe dont nous regardons l'injectif). Sinon, on obtient un espace vectoriel de dimension inférieure, mais qui est quand même engendré par les duaux des classes des chemins décrits.

Remarque : Le dual  $\gamma^*$  d'un chemin correspond à la construction de la base duale d'un espace vectoriel de base donnée, i.e.

$\gamma^*(\delta) = 0$  si  $\delta \neq \gamma$ , et  $=1$  si  $\delta = \gamma$ .

Pour chaque flèche  $j \xrightarrow{\alpha} s$ , l'application linéaire  $f_\alpha : \text{Hom}_k(\tau_i \Lambda \tau_j, k) \rightarrow \text{Hom}_k(\tau_i \Lambda \tau_s, k)$  est celle qui envoie le dual  $\gamma^*$  d'un chemin de  $j$  à  $i$  sur  $\alpha \gamma^*$ .

Mais  $\alpha \gamma^*$  évalué en un chemin  $\delta$  de  $s$  à  $i$  ne vaut 1 que si  $\delta \alpha = \gamma$ , autrement c'est 0, puisque  $\alpha \gamma^*(\delta) = \gamma^*(\delta \alpha)$ .

Donc  $\alpha \gamma^*$  vaut 0 si  $\gamma$  est un chemin dont la première flèche n'est pas  $\alpha$ , et vaut  $\delta^*$  si  $\delta \alpha = \gamma$ .

Ainsi

$$f_\alpha(\bar{\gamma}^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \text{ ne débute pas avec } \alpha, \\ \bar{\delta}^* & \text{si } \gamma = \delta \alpha. \end{cases}$$

Nous reprenons pour la dernière fois l'exemple de ce chapitre et décrivons les injectifs indécomposables :

$$I_1 = k \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} \rightarrow 0 \leftarrow \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow 0 \\ \downarrow 0 \end{array} \quad (= S_1)$$

$$I_2 = k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} k \\ \searrow 0 \end{array} \rightarrow 0 \leftarrow \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow 0 \\ \downarrow 0 \end{array} \quad \dots$$

$$I_3 = k \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{array} \rightarrow 0 \leftarrow \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow 0 \\ \downarrow 0 \end{array}$$

$$I_4 = k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} k \\ \searrow 1 \end{array} \rightarrow k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} k \\ \searrow 0 \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow k \end{array} \begin{array}{c} \uparrow k \\ \downarrow k \end{array} \begin{array}{c} \uparrow 1 \\ \downarrow k \end{array}$$

$$I_5 = 0 \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow k \end{array} \rightarrow k \begin{array}{c} \xrightarrow{(1,0)} k \oplus k \\ \searrow (0,1) k \oplus k \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \nearrow k \\ \searrow k \end{array} \begin{array}{c} \uparrow 1 \\ \downarrow k \end{array}$$

$$I_6 = 0 \begin{array}{c} \nearrow 0 \\ \searrow k \end{array} \rightarrow k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} k \\ \searrow (0,1) k \oplus k \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} \nearrow 1 \\ \searrow k \end{array} \begin{array}{c} \uparrow k \\ \downarrow k \end{array}$$

### Remarques

- 1) On appelle *puits* de  $C$  un sommet  $i$  duquel ne part aucune flèche, et *source* un sommet auquel n'aboutit aucune flèche. Il est aisé de voir que le projectif  $P_i$  n'est simple que si  $i$  est un puits, tandis que  $I_j$  ne l'est que si  $j$  est une source.
- 2) Comme conséquence de la description du radical d'un projectif et de son carré, on tire que

$$\text{rad } P_i / \text{rad}^2 P_i \simeq \bigoplus_{j \in C_0} (\# A_{ij}) S_j$$

Nous retrouvons là le résultat établi lors de la construction du carquois de Gabriel d'une algèbre : nous avons vu que  $\# A_{ij}$  = nombre de sommands directs isomorphes à  $S_j$  dans une décomposition de  $\text{rad } P_i / \text{rad}^2 P_i$ .

CHAPITRE IV

ALGÈBRES HÉRÉDITAIRES ET UNISÉRIELLES

Soit  $(C, R)$  un carquois avec relations, et  $\Lambda = kC/R$ .  
 Étant donnée une famille d'algèbres vérifiant une propriété algébrique, nous voudrions transporter cette propriété à  $C$  et à  $R$ .

Nous avons vu, par exemple, qu'une algèbre n'est de radical carré nul que si  $R = F^2$ .

§1. ALGÈBRES HÉRÉDITAIRES ET QUOTIENTS D'HERÉDITAIRES

DEFINITION : Une  $k$ -algèbre est héréditaire si tous les sous-modules des modules projectifs sont encore projectifs.

Remarque 1 : Cela signifie exactement que la dimension projective globale (qui est le maximum des longueurs des résolutions projectives par couvertures projectives des modules) est 1. Remarquons aussi que  $\Lambda$  est semi-simple si et seulement si cette dimension est 0.

Remarque 2 : Pour une  $k$ -algèbre de dimension finie il suffit de calculer le maximum des dimensions projectives des simples, pour obtenir la dimension projective globale. (voir [J1] p.56).

Ainsi,  $\Lambda$  n'est héréditaire que si le radical de chacun des projectifs indécomposables est encore projectif.

LEMME : Si  $\Lambda$  est héréditaire,  $P$  et  $Q$  des projectifs indécomposables, alors tout morphisme  $f : P \rightarrow Q$  est soit nul, soit injectif.

Preuve :  $P/\ker f \hookrightarrow Q$  et donc  $P/\ker f$  est projectif. Donc  $P \twoheadrightarrow P/\ker f$  se scinde. Mais  $P$  est indécomposable, donc  $P/\ker f \simeq P$  (et donc  $\ker f = 0$ ) ou bien  $P/\ker f = 0$  (et donc  $f=0$ ). □

PROPOSITION :  $\Lambda$  est héréditaire si et seulement si  $C$  n'a pas de cycles orientés et  $R=0$ .

Preuve : Nécessité : Supposons  $\Lambda$  héréditaire, et supposons que  $C$  possède un cycle orienté  $\gamma = (i|\alpha_n \dots \alpha_1|1)$ , avec  $n \geq 1$ .

Or chaque flèche  $s \xrightarrow{\alpha} t$  de  $C$  induit un morphisme non nul de  $\Lambda$ -modules  $(kC/R)\bar{\tau}_i \xrightarrow{\phi_\alpha} (kC/R)\bar{\tau}_s$  par multiplication à droite par  $\bar{\tau}$ . (Il est non nul car  $\bar{\tau}_t$  va sur  $\bar{\alpha}$ , et  $\alpha \notin R$ ).

Puisque  $\Lambda$  est héréditaire nous obtenons une composition  $\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_n}$  de morphismes injectifs, qui est donc un automorphisme du projectif en  $i$ .

D'autre part, cette composition est en fait le multiplication à droite par  $\bar{\gamma}$ . Mais  $\bar{\gamma} \in \bar{F} = \text{rad} \Lambda$  qui est nilpotent. Donc  $\phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_1}$  est un endomorphisme nilpotent. Cela est impossible car un isomorphisme ne peut être nilpotent.  $C$  n'a donc pas de cycles orientés.

Si maintenant  $R \neq 0$ , nous aurions deux sommets  $i$  et  $j$  de  $C$  avec une relation lisible de  $i$  à  $j$ .

Puisque  $C$  n'a pas de cycles, on a  $i \neq j$ . Pour la même raison, nous pouvons supposer que  $\rho$  est "minimale", dans le sens que si  $s$  est un sommet atteint par un chemin orienté en provenance de  $i$ , il n'y a pas de relations lisibles de  $s$  vers  $j$ .

Considérons alors le projectif  $P_i$ . Nous avons vu à la fin du chapitre précédent que  $\text{rad} P_i / \text{rad}^2 P_i$  est égal à  $\bigoplus_{t \in C_0} (\# A_{it}) S_t$  où  $\# A_{it}$  = nombre de flèches de  $i$  à  $t$ . Donc sa couverture projective est  $\bigoplus_{t \in C_0} (\# A_{it}) P_t$ . Mais la couverture projective d'un module  $M$  est la même que celle de  $M/\text{rad} M$  (car  $M \twoheadrightarrow M/\text{rad} M$  est essentiel).

Donc  $\bigoplus_{t \in C_0} (\# A_{it}) P_t$  est la couverture projective de  $\text{rad} P$ . Or  $\text{rad} P$  est projectif, puisque  $\Lambda$  est héréditaire. Donc

$$\text{rad} P \simeq \bigoplus_{t \in C_0} (\# A_{it}) P_t$$

Il est possible maintenant d'obtenir une contradiction.

Notons  $B_{xy}$  l'ensemble des chemins dirigés de  $x$  à  $y$ .



L'étude des projectifs du chapitre précédent plus la minimalité de  $\rho$  indiquent que

$$\dim_k (P_t)_j = \# B_{tj}$$

pour les  $t$  tels que  $A_{it} \neq 0$  (pour ces  $t$ , il n'y a pas de relations lisibles de  $t$  à  $j$ ).

Comme  $i \neq j$ , nous savons que la dimension du radical de  $P_t$  au sommet  $j$  est la même que celle de  $P_t$ .

$$\text{Donc } \dim_k (\text{rad } P)_j = \sum_{t \in C_0} (\# A_{it}) (\# B_{tj}) = \# B_{ij}$$

Mais nous avons remarqué que s'il existe une relation lisible de  $i$  à  $j$ , alors  $\dim_k (\text{rad } P)_j < \# B_{ij}$ .

D'où la contradiction.  $\square$

Suffisance : Supposons maintenant que  $C$  n'a pas de cycles orientés et que  $R=0$ .

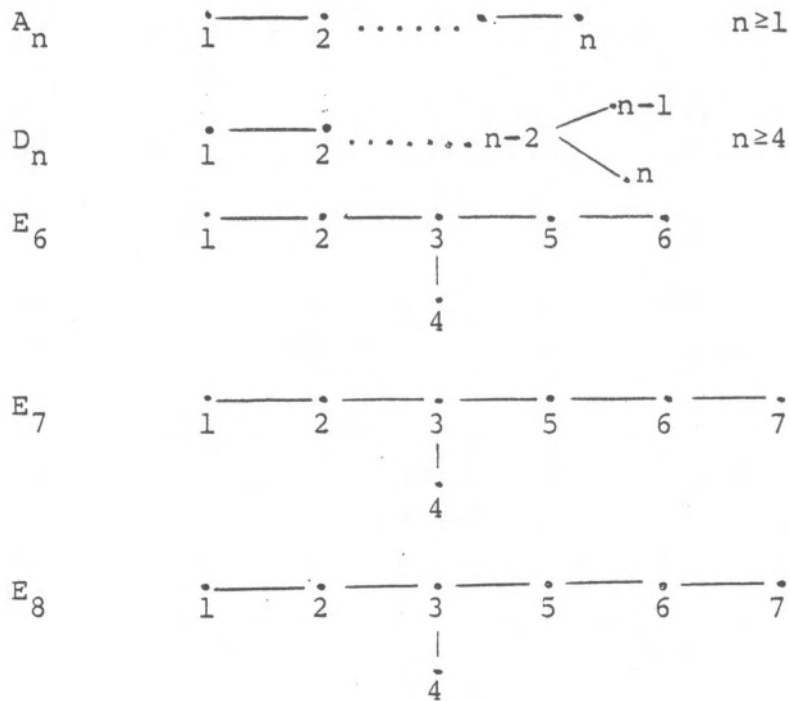
Soit  $P_i$  le projectif indécomposable du sommet  $i$ . Nous allons montrer que  $\text{rad } P_i$  est projectif, ce qui prouve que  $\Lambda$  est héréditaire au moyen de la remarque 2.

Puisqu'il n'y a ni cycles ni relations, nous avons vu que  $(\text{rad } P_i)_j =$  l'espace vectoriel de base  $B_{ij}$ , si  $i \neq j$  et  $(\text{rad } P_i)_i = 0$ . Quant à  $f_\alpha$  pour  $s \xrightarrow{\alpha} j$ , elle est obtenue en rajoutant à chaque chemin de  $B_{is}$  la flèche  $\alpha$ , ce qui en fait un chemin de  $B_{ij}$ .

Si nous prenons les  $P_t$  avec  $A_{it} \neq \emptyset$  et faisons  $\bigoplus_{t \in C_0} (\# A_{it}) P_t$ , il est clair que nous obtenons le module que nous venons de décrire, qui était  $\text{rad } P_i$ .  $\square$

Nous disons qu'une algèbre est de représentation finie si le nombre de types de modules indécomposables est fini. Le théorème suivant, donné dans démonstration, caractérise les algèbres héréditaires qui sont de représentation finie.

**THEOREME** : (Gabriel) Soit  $k$  un corps algébriquement clos. Une  $k$ -algèbre  $\Lambda$  de dimension finie et héréditaire est de représentation finie si et seulement si son carquois de Gabriel  $C_\Lambda$  débarassé de l'orientation est un diagramme de Dynkin, c'est-à-dire un des diagrammes de la liste suivante :



Une première démonstration fut donnée par Gabriel [Gb]. Puis Bernstein Gelfand et Ponomarev [B-G-P] apportèrent une preuve qui a l'avantage de produire les modules indécomposables à partir des simples de la même façon que le groupe de Weyl produit les racines positives à partir des simples.

**DEFINITION** : Une algèbre *quotient d'héréditaire* est le quotient d'un algèbre héréditaire  $\Lambda$  par un idéal  $I$  de définition.

Puisque les algèbres héréditaires sont exactement les algèbres de carquois sans cycles orientés et sans relations, nous obtenons la

PROPOSITION : Une algèbre est quotient d'héréditaire si et seulement si son carquois de Gabriel n'a pas de cycles orientés.

## §2. ALGÈBRES UNISÉRIELLES

DEFINITION :  $\Lambda$  est une  $k$ -algèbre unisérielle (ou de Nakayama) si tout module indécomposable a une unique série de composition.

Rappel : Une série de composition d'un module  $M$  est une filtration décroissante de  $M$  par des sous-modules, dont les quotients successifs sont simples.

La dimension finie de  $M$  assure qu'une telle suite finie existe toujours, et le théorème de Jordan-Hölder dit alors que deux suites de cette sorte ont même longueur et que les quotients successifs sont isomorphes (à permutation près de l'ordre d'apparition).

Nous demandons ici que chaque indécomposable ait une seule suite de composition, c'est-à-dire un seul sous-module maximal, puis un seul "sous-sous"-module maximal etc. Nous disons alors que le module est *unisériel*.

Remarque :  $M$  a une seule suite de composition si et seulement si  $M \supset \text{rad} M \supset \text{rad}^2 M \supset \dots \supset 0$  est une suite de composition. Cela provient du fait que  $\text{rad}^{i+1} M$  est l'intersection des sous-modules maximaux de  $\text{rad}^i M$ .

Les algèbres unisérielles sont toutes de type fini (c'est l'objet de la proposition suivante) et leur "traduction" en propriétés de carquois est bien agréable, grâce à un résultat de Nakayama qui les caractérise. C'est ce que nous ferons plus loin.

PROPOSITION : Si  $\Lambda$  est unisérielle, alors  $\Lambda$  est de représentation finie (c'est-à-dire que le nombre de types d'indécomposables est fini).

Preuve : Soit  $M$  indécomposable. Sa couverture projective est alors indécomposable, car elle est aussi celle de  $M/\text{rad}M$  qui est simple ( $M$  étant unisériel), et nous savons que les simples et les projectifs indécomposables sont en bijection par la flèche qui envoie chaque simple sur sa couverture projective.

Ainsi chaque indécomposable est quotient d'un projectif indécomposable. Or ceux-ci n'ont qu'un nombre fini de sous-modules (exactement ceux de leur suite de composition).

D'autre part nous savons que le nombre de types de projectifs indécomposables est fini. La proposition est ainsi démontrée.  $\square$

Remarque : Chaque indécomposable  $M$  est caractérisé par son "top" (i.e.  $M/\text{rad}M$ ), qui indique quel projectif indécomposable il faut prendre, et la longueur de sa suite de composition qui indique par quelle puissance du radical il faut quotienter le projectif pour obtenir le module  $M$ .

Naturellement chaque  $P/\text{rad}^i P$  avec  $P$  projectif indécomposable, est indécomposable puisqu'il est unisériel (il est évident que décomposable implique non unisériel).

Pour prouver la caractérisation de Nakayama des algèbres unisérielle, il nous faut un outil d'ailleurs fort utilisé en représentation d'algèbres.

DEFINITION : Le socle d'un module  $M$  ( $\text{soc} M$ ) est la somme de tous les sous-modules simples de  $M$ .

Il est facile de voir que ce sous-module de  $M$  est semi-simple et qu'il s'agit là du semi-simple maximal de  $M$ .

$\text{soc} M \hookrightarrow M$  est un morphisme essentiel, dans le sens que  $\forall X \subset M, X \cap \text{soc} M \neq 0$ , puisque tout simple de  $X$  est aussi simple de  $M$ . Réciproquement un semi-simple essentiel dans  $M$  est son socle.

Rappel : La bijection entre simples et injectifs indécomposables (§4 chapitre I) est obtenue en envoyant chaque simple sur son enveloppe injective. Le socle de celle-ci est alors le simple de départ.

PROPOSITION : (Nakayama) : Il suffit que les projectifs et injectifs indécomposables de  $\text{mod } \Lambda$  soient unisériels pour que  $\Lambda$  soit unisérielle. (La réciproque est vraie par la définition même d'une algèbre unisérielle).

Preuve : Soit  $M$  un module quelconque de  $\text{mod } \Lambda$ . Nous allons montrer qu'il est somme directe d'un unisériel et d'un autre module. Nous pourrons alors recommencer avec ce dernier et obtenir (en un nombre fini de pas puisque  $M$  est de  $k$ -dimension finie) que tout module est somme d'unisériels, ce qui montre que tout indécomposable est unisériel.

Soit  $W$  un sous-module unisériel de  $M$  de  $k$ -dimension maximale. Et soit  $X \subset M$  un sous-module maximal pour la propriété  $X \cap W = 0$ .

Considérons  $M/X$ . Affirmation :  $\text{soc}(M/X)$  est simple. En effet, le noyau de  $W \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/X$  est  $W \cap X$  qui est nul. Donc la composition est injective. Elle est en plus essentielle car si  $Y$  est un sous-module de  $M/X$ , son relevé dans  $M$  contient  $X$  et donc intersecte  $W$ . Si l'on compose deux morphismes essentiels, le résultat est clairement essentiel. Ainsi  $\text{soc } W \hookrightarrow W \hookrightarrow M/X$  est essentiel, d'où  $\text{soc } W \cong \text{soc}(M/X)$ . Or  $\text{soc } W$  est simple, puisque  $W$  est unisériel, et l'affirmation est prouvée.

Soit  $I$  l'enveloppe injective de  $M/X$ . C'est aussi celle de  $\text{soc } M/X$ , car  $\text{soc } M/X \hookrightarrow M/X \hookrightarrow I$  est le composé de deux morphismes essentiels. Ainsi  $I$  est indécomposable et donc unisériel par hypothèse.

$M/X$  est donc sous-module d'unisériel, donc lui-même unisériel. Nous en tirons que son top est simple, et que sa couverture projective  $P$  est indécomposable, donc unisérielle.

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & \swarrow & \downarrow \\
 g & & \\
 M & \xrightarrow{\pi} & M/X
 \end{array}$$

En relevant la couverture projective en  $g : P \rightarrow M$ , nous obtenons  $g(P) \subset M$ , qui est isomorphe à un quotient de l'unisériel  $P$ . Ainsi  $g(P)$  est unisériel.

Evaluons la  $k$ -dimension de  $g(P)$  pour la comparer à celle de  $W$  : puisque  $\pi g$  est surjective,  $\pi|_{g(P)}$  est surjective et donc  $g(P)+X = M$ .

Donc  $\dim g(P) \geq \dim M - \dim X$ .

Mais nous avons  $W \oplus X \subset M$ , puisque  $W \cap X = 0$ .

Donc  $\dim W \leq \dim M - \dim X$ .

Mais  $W$  était unisériel de dimension maximale dans  $M$ .  
Donc  $\dim W = \dim g(P) = \dim M - \dim X$ , et nous en tirons alors que  $W \oplus X = M$ .  $\square$

Pour donner une description du carquois d'une algèbre unisérielle, voici deux définitions intermédiaires :

DEFINITIONS :  $\Lambda$  est unisérielle à gauche si tous les projectifs indécomposables sont unisériels.

$\Lambda$  est unisérielle à droite si tous les injectifs indécomposables sont unisériels. (A droite car la condition équivaut à l'uniserialité de tous les projectifs à droite indécomposables via la dualité).

Remarque : Grâce à la proposition de Nakayama, sérielle à gauche et à droite est équivalent à unisériel.

LEMME : Si  $\text{rad} P / \text{rad}^2 P$  est simple (i.e.  $\text{rad}^2 P$  est le seul maximal de  $\text{rad} P$ ) ou nul (i.e.  $\text{rad} P$  est simple) pour tous les projectifs indécomposables, cela suffit déjà pour que  $\Lambda$  soit sérielle à gauche. (La condition étant évidemment nécessaire).

Preuve : Soit  $P$  un projectif indécomposable. Si  $\text{rad} P / \text{rad}^2 P = 0$ , alors  $P \supset \text{rad} P \supset 0$  est une suite de composition, c'est donc la seule.

Si  $\text{rad} P / \text{rad}^2 P$  est simple, nous allons voir que  $\text{rad}^2 P / \text{rad}^3 P$  est simple ou nul.

Soit  $Q \xrightarrow{f} \text{rad} P$  la couverture projective de  $\text{rad} P$ . C'est aussi celle de  $\text{rad} P / \text{rad}^2 P$  puisque  $\text{rad} P \twoheadrightarrow \text{rad} P / \text{rad}^2 P$  est essentiel, donc  $Q$  est projectif indécomposable.

Tout morphisme  $g : M \longrightarrow N$  vérifie :

$$g(\text{rad} M) = g(\text{rad} \Lambda \cdot M) = \text{rad} \Lambda g(M) = \text{rad} \Lambda \cdot N = \text{rad} N.$$

Nous obtenons donc  $f' : \text{rad} Q \longrightarrow \text{rad}^2 P$  et  $f'' : \text{rad}^2 Q \longrightarrow \text{rad}^3 P$  ce qui nous fournit  $f : \text{rad} Q / \text{rad}^2 Q \longrightarrow \text{rad}^2 P / \text{rad}^3 P$ .

Donc  $\text{rad}^2 P / \text{rad}^3 P$  est un quotient de  $\text{rad} Q / \text{rad}^2 Q$  qui est en fait simple (par hypothèse, puisque  $Q$  est projectif indécomposable).

Ainsi  $\text{rad}^2 P / \text{rad}^3 P$  est soit simple (et isomorphe à  $\text{rad} Q / \text{rad}^2 Q$ ) soit nul.

Nous pouvons alors recommencer le procédé avec  $\text{rad}^2 P / \text{rad}^3 P$  et montrer que  $\text{rad}^3 P / \text{rad}^4 P$  est soit simple, soit nul. Et le lemme est ainsi prouvé.  $\square$

PROPOSITION :  $\Lambda$  est sérielle à gauche si et seulement si son carquois de Gabriel  $C_\Lambda$  vérifie que de chaque sommet part au plus une flèche.

Preuve : Nous avons vu que le nombre de flèches allant du sommet du simple  $S$  à celui du simple  $T$  est égal au nombre de sommands directs isomorphes à  $T$  dans une décomposition du semi-simple  $\text{rad} P_S / \text{rad}^2 P_S$ . La proposition est alors évidente grâce au lemme.  $\square$

PROPOSITION :  $\Lambda$  est sérielle à droite si et seulement si son carquois de Gabriel  $C_\Lambda$  vérifie qu'à chaque sommet arrive au plus une flèche.

Cette proposition découle immédiatement de la précédente lorsque l'on remarque que :

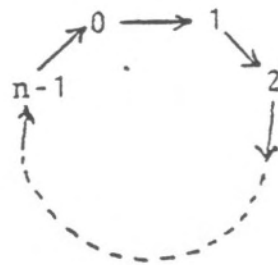
- \* Un  $\Lambda$ -module à droite  $M$  est automatiquement un  $\Lambda^{\text{op}}$ -module à gauche ( $\Lambda^{\text{op}}$  désigne le même  $k$ -espace vectoriel que  $\Lambda$ , mais la structure d'algèbre est donnée par  $a \cdot b = ba$ .  $M$  est alors  $\Lambda^{\text{op}}$  à gauche via  $a \cdot m = ma$ ). Si  $P$  est  $\Lambda$  projectif à droite, il est  $\Lambda^{\text{op}}$ -projectif à gauche.

- \*  $\Lambda$  sérielle à droite veut alors dire  $\Lambda^{\text{op}}$  sérielle à gauche.
- \* Donc  $C_{\Lambda^{\text{op}}}$  vérifie la proposition antérieure. Mais  $C_{\Lambda^{\text{op}}} = (C_{\Lambda})^{\text{op}}$ , où  $(C_{\Lambda})^{\text{op}}$  désigne le carquois obtenu en renversant l'orientation de chacune des flèches de  $C_{\Lambda}$ .
- \* La proposition précédente qui est vraie pour  $(C_{\Lambda})^{\text{op}}$  implique donc celle-ci pour  $C_{\Lambda}$ .

COROLLAIRE :  $\Lambda$  est unisérielle si et seulement si son carquois de Gabriel  $C_{\Lambda}$  est l'un des carquois suivants :

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \dots \longrightarrow n \quad (n \geq 1)$$

$\delta$



$$(n \geq 1).$$

Cela est immédiat à partir de l'imposition simultanée à  $C_{\Lambda}$  des deux conditions des propositions précédentes.  $\square$

Remarque 1 : L'idéal des relations peut être absolument quelconque pour autant qu'il soit de définition.

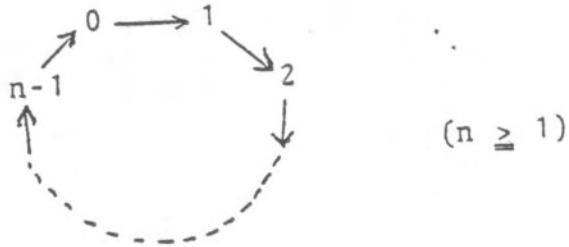
Remarque 2 : Si  $n=1$ , le premier carquois est un point ( $\Lambda=k$ ), tandis que le deuxième est un sommet avec une boucle ( $\Lambda$  est un quotient de l'anneau de polynôme  $k[X]$ ).

Rappel :  $\Lambda$  est *auto-injective* si tout module projectif est injectif (voir chapitre I).

Voici la caractérisation des algèbres unisérielles auto-injectives :



**PROPOSITION** :  $\Lambda$  est unisérielle auto-injective si et seulement si  $C_\Lambda$  est du type



et d'idéal admissible  $R = F^h$  pour un  $h \geq 2$ . ( $F$  désigne l'idéal de  $kC$  engendré par les flèches), ou bien  $\Lambda = k$ .

**Preuve** : Supposons  $\Lambda$  unisérielle auto-injective.  $C_\Lambda$  ne peut être du type  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n$  avec  $n > 1$ , car  $P_n = \Lambda \bar{\tau}_n$  est un projectif simple non injectif.

Ainsi  $C_\Lambda$  est du type indiqué. Analysons maintenant  $R$ , l'idéal admissible.

**Notation** :  $\gamma_i^\ell$  désigne le chemin de  $C$  débutant en  $i$  et de longueur  $\ell$ .

$$\lambda_i = \min\{\ell \in \mathbb{N} \text{ tq } \gamma_i^\ell \in R\}$$

**Assertion** :  $\{\gamma_0^{\lambda_0}, \gamma_1^{\lambda_1}, \dots, \gamma_{n-1}^{\lambda_{n-1}}\}$  est un système de générateurs de  $R$ . En effet, si  $\gamma \in R$ ,

$$\gamma = \gamma \tau_0 + \gamma \tau_1 + \dots + \gamma \tau_{n-1}$$

et  $\gamma \tau_i \in R$  pour tout  $i$  car  $R$  est bilatère. Or  $\gamma \tau_i$  est un chemin qui débute en  $i$  et contenu dans  $R$ , il est donc de longueur supérieure à  $\lambda_i$ , il s'agit alors d'un multiple de  $\gamma_i^{\lambda_i}$ .

Pour voir que  $R = F^h$  pour un  $h \geq 2$ , il nous faut voir que  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = h$ .

Posons  $h = \max\{\lambda_i\}$ . Supposons qu'il existe un  $\lambda_j$  vérifiant  $\lambda_j > h$ . Choisissons  $j$  de façon à ce que le sommet qui le précède réalise le maximum  $h$ .

En renumérotant les sommets si cela est nécessaire, nous nous ramenons au cas  $\lambda_0 = h$  et  $\lambda_1 < h$ .

Assertion :  $P_1 \subset P_0$ . (D'où la contradiction car  $P_1$  est injectif par hypothèse, donc cette inclusion se scinde et  $P_1$  est sommand direct de  $P_0$  qui est indécomposable, donc  $P_0 \simeq P_1$ , ce qui n'est pas le cas).

Description de  $P_0$  :  $(P_0)_i$  est le  $k$ -espace vectoriel dont la base est l'ensemble des chemins de 0 à  $i$  de longueur inférieure à  $h$ .

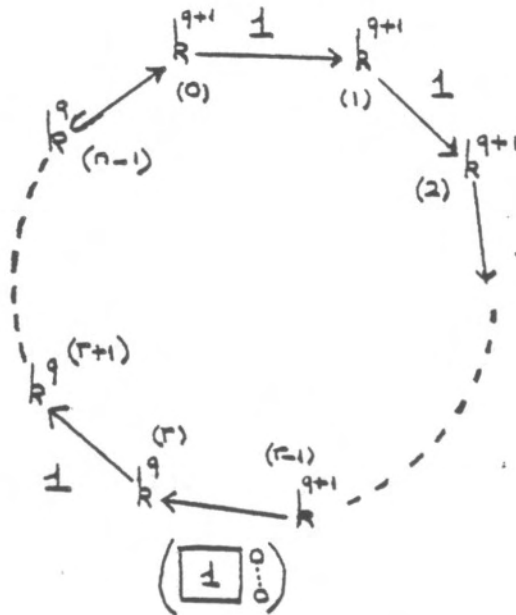
Pour les compter, faisons la division de  $h$  par  $n$ ,  
 $h = qn+r$ , avec  $r < n$ .

$$\dim_k (P_0)_i = \begin{cases} q+1 & \text{si } i < r \\ q & \text{si } i \geq r \end{cases}$$

Chacune des flèches est représentée par l'identité, sauf deux exceptions :

$r-1 \rightarrow r$  (lorsque  $r \geq 1$ ) est représentée par l'application qui envoie le chemin de 0 à  $r-1$  de longueur  $qn+(r-1)$  sur 0, tandis que chaque autre chemin est envoyé sur le chemin obtenu en le faisant suivre de  $r-1 \rightarrow r$ .

$n-1 \rightarrow 0$  se représente par une inclusion car le chemin  $\tau_0$  de  $(P_0)_0$  ne peut être atteint.



Une description semblable de  $P_1$  fait apparaître des inclusions naturelles de chaque  $(P_1)_i$  dans  $(P_0)_i$  qui font commuter les représentations des flèches.

(Un élément de base de  $(P_1)_i$  est un chemin de 1 à  $i$  de longueur  $< \lambda_1 < h$ . En le faisant précéder par  $0 \rightarrow 1$ , nous obtenons un chemin de 0 à  $i$  de longueur un de plus, mais toujours  $< h$ , donc un élément de la base de  $(P_0)_i$ ).

Réciproquement : Si  $R = F^h$ , contentons-nous de signaler que la description du projectif du sommet  $i$  coïncide avec celle de l'injectif du sommet  $[i+h]$  où  $[i+h]$  désigne le représentant mod  $n$  de  $i+h$  compris entre 0 et  $n-1$ .  $\square$

Remarque : La permutation de Nakayama (c.f. chapitre I) reçoit alors cette même description, i.e.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$[i] \mapsto [i+h]$$

REFERENCES

- [A1] M. Auslander. "Représentation theory of artin algebras II". Comm.Algebra 1, (1974),269-310.
- [A2] M. Auslander. "Large modules over artin algebras, Algebra, Topology and Categories", Academic Press (1976), 1-17.
- [B-G-P] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, V.A. Ponomarev. "Coxeter functors and Gabriel's theorem". Uspechi, Mat. Nauk. 28 (1973). Traduit en anglais dans Russian Math. Surveys 28, (1973) 17-32.
- [B] K. Bongartz, "Algebras and quadratic forms" preprint.
- [C-R] Ch.W. Curtis et I. Reiner, "Representation theory of finite groups and associative algebras. Interscience Publishers, New York, (1962).
- [D-R] V. Dlab et C.M. Ringel. "Indecomposable representations of graphs and algebras, Mem.Amer.Math. Soc. No 173, Providence (1976).
- [Gb] P. Gabriel "Unzerlegbare Darstellungen I", Manuscripta Math 6 (1972), 71-103.
- [H] D.G. Higman "Indecomposable representations at characteristic p", Duke Math. J. 21, (1954), 377-381.
- [J1] J.P. Jans. "Rings and homology". Holt, Rinehart and Winston New York (1964).
- [J2] J.P. Jans. "On the indecomposable representations of algebras" Ann. of Math. 66 (1957),418-429.

- [L] M. Loupias. "Indecomposable representations of finite ordered sets", Representations of algebras SLN 488, (1975), 201-209.
- [Re] I. Reiten. "The use of almost split sequences in the representation theory of artin algebras" SLN 944, (1970), 29-104.
- [Ri] C.M. Ringel. "Report on the Brauer Thrall conjectures". SLN 831, (1980), 104-136.
- [Rt] A.V. Rojter. "Unbounded dimensionality of the indecomposable representations...". Math. USSR. Izvestija, Vol. 2, (1968) No 6, 1223-1230.

\* \* \*

UNIVERSITE DE GENEVE  
Section de Mathématiques  
2-4, rue du Lièvre  
Case Postale 240  
1211 GENEVE 24