



HAL
open science

Les (a,b) -algèbres à homotopie près

Walid Aloulou

► **To cite this version:**

| Walid Aloulou. Les (a,b) -algèbres à homotopie près. 2008. hal-00295013

HAL Id: hal-00295013

<https://hal.science/hal-00295013>

Preprint submitted on 11 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES (a, b) -ALGÈBRES À HOMOTOPIE PRÈS

WALID ALOULOU

ABSTRACT. We study in this article the concepts of algebra up to homotopy for a structure defined by two operations \cdot and $[\ , \]$. Having determined the structure of G_∞ algebras and P_∞ algebras, we generalize this construction and we define a structure of (a, b) -algebra up to homotopy. Given a structure of commutative and differential graded Lie algebra for two shifts degree given by a and b , we will give an explicit construction of the associate algebra up to homotopy.

Résumé.

On étudie dans cet article les notions d'algèbre à homotopie près pour une structure définie par deux opérations \cdot et $[\ , \]$. Ayant déterminé la structure des G_∞ algèbres et des P_∞ algèbres, on généralise cette construction et on définit la structure des (a, b) -algèbres à homotopie près. Étant donnée une structure d'algèbre commutative et de Lie différentielle graduée pour deux décalages des degrés donnés par a et b , on donnera une construction explicite de l'algèbre à homotopie près associée.

1. INTRODUCTION

Considérons une algèbre \mathcal{A} pour une opération m (m est par exemple une multiplication associative ou un crochet de Lie) munie d'une différentielle d . On dira juste que \mathcal{A} est une algèbre de type \mathcal{P} . Dans beaucoup de cas, on sait définir la notion d'algèbre de type \mathcal{P} à homotopie près et construire l'algèbre à homotopie près enveloppante de \mathcal{A} . Cette algèbre donne naturellement les complexes d'homologie et de cohomologie associés à ce type d'algèbre pour \mathcal{A} et ses modules.

Lorsque \mathcal{A} possède deux opérations avec des relations de compatibilité, la construction de l'algèbre à homotopie près enveloppante correspondante est plus difficile. En particulier, le complexe de Poisson et celui de Gerstenhaber consiste à composer les structures de la cogèbre cocommutative colibre et de la cogèbre de Lie colibre associées à chaque algèbre. On obtient une bicogèbre codifférentielle colibre. Cette composition tient compte des degrés. Les structures de bicogèbre obtenues diffèrent. Pour chaque type, on appelle la bicogèbre obtenue l'algèbre à homotopie près, c'est la P_∞ algèbre pour une algèbre de Poisson et la G_∞ algèbre pour une algèbre de Gerstenhaber.

Le présent travail consiste à unifier ces constructions d'algèbre à homotopie près dans les cas des algèbres de Poisson et des algèbres de Gerstenhaber, ce qui nous permet de définir la structure d'une (a, b) -algèbre à homotopie près. Disons qu'une (a, b) -algèbre différentielle est un espace vectoriel gradué \mathcal{A} muni d'un produit commutatif \cdot de degré $a \in \mathbb{Z}$ ($|\cdot| = a$), d'un crochet $[\ , \]$ de degré $b \in \mathbb{Z}$ ($[[\ , \]] = b$) et d'une différentielle d de degré 1 tel que $(\mathcal{A}[-a], \cdot, d)$ est une algèbre commutative associative différentielle graduée et $(\mathcal{A}[-b], [\ , \], d)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée. Le produit et le crochet vérifient une relation de compatibilité entre eux dite identité de Leibniz donnée par:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}, \quad [\alpha, \beta \cdot \gamma] = [\alpha, \beta] \cdot \gamma + (-1)^{(|\beta|+a)(|\alpha|+b)} \beta \cdot [\alpha, \gamma].$$

Ce travail a été effectué dans le cadre de l'accord CMCU 06 S 1502. W. Aloulou remercie l'Université de Bourgogne pour l'accueil dont il a bénéficié au cours de ses séjours.

Dans le cas où $a = 0$ et $b = -1$, on retrouve les algèbres de Gerstenhaber et dans le cas où $a = b = 0$, on retrouve les algèbres de Poisson graduées.

Dans cet article, on reviendra dans la deuxième section à la construction des algèbres de Gerstenhaber à homotopie près. Dans la troisième section, on donnera la construction de la structure des algèbres de Poisson à homotopie près. Dans la quatrième section, on généralisera la construction des algèbres de Gerstenhaber et de Poisson à homotopie près et on donnera la structure des (a, b) -algèbres à homotopie près. Dans la cinquième section, on donnera quelques exemples de (a, b) -algèbres différentielles graduées en introduisant, en particulier, les super-crochets de Schouten et de Poisson pour un super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$.

2. LES ALGÈBRES DE GERSTENHABER À HOMOTOPIE PRÈS

2.1. Définitions.

Soit $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$ un espace vectoriel gradué. On note par $V[k]$ l'espace V muni de la graduation $V[k]_i = V_{i+k}$.

Soit W un autre espace gradué. Une application linéaire f de degré k de V dans W sera notée $f : V \rightarrow W[k]$.

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué \mathcal{G} muni d'une multiplication commutative et associative graduée $\cdot : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ de degré 0 et d'un crochet $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ de degré -1 tel que (\mathcal{G}, \cdot) est une algèbre commutative associative graduée et $(\mathcal{G}[1], [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie graduée et que, pour tout α homogène, l'application $[\alpha, \cdot]$ est une dérivation graduée pour la multiplication \cdot . En notant $|\alpha|$ le degré d'un élément homogène α de \mathcal{G} , on a donc:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \cdot \alpha, \\ \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma, \\ [\alpha, \beta] &= -(-1)^{(|\alpha|-1)(|\beta|-1)} [\beta, \alpha], \\ (-1)^{(|\alpha|-1)(|\gamma|-1)} [[\alpha, \beta], \gamma] &+ (-1)^{(|\beta|-1)(|\alpha|-1)} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{(|\gamma|-1)(|\beta|-1)} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0, \\ [\alpha, \beta \cdot \gamma] &= [\alpha, \beta] \cdot \gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)} \beta \cdot [\alpha, \gamma] \end{aligned}$$

et donc aussi:

$$[\alpha \cdot \beta, \gamma] = \alpha \cdot [\beta, \gamma] + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)} [\alpha, \gamma] \cdot \beta.$$

Si de plus, on a une différentielle $d : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}[1]$ (ou $d : \mathcal{G}[1] \rightarrow \mathcal{G}[2]$) de degré 1 telle que $d \circ d = 0$, $d(\alpha \cdot \beta) = d\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \cdot d\beta$ et $d([\alpha, \beta]) = [d\alpha, \beta] + (-1)^{|\alpha|-1} [\alpha, d\beta]$, on dit que $(\mathcal{G}, \cdot, [\cdot, \cdot], d)$ est une algèbre de Gerstenhaber différentielle graduée. (Voir [G])

Le degré sur $\mathcal{G}[1]$ sera noté dg , défini par: $dg(\alpha) = |\alpha| - 1$. Alors, le degré du crochet devient 0 et celui du produit vaut 1 ($dg([\cdot, \cdot]) = 0$, $dg(\cdot) = 1$).

Le produit \cdot était commutatif et associatif pour $|\cdot|$ mais il ne l'est plus pour dg .

Pour chaque k , l'espace $\bigwedge^k(\mathcal{G}[1])$ est linéairement isomorphe à l'espace $S^k(\mathcal{G})[k]$. Cet isomorphisme n'est pas canonique. Nous choisissons ici l'isomorphisme défini dans [AAC1]:

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \mapsto (-1)^{\sum_{i=1}^k (k-i)dg(\alpha_i)} \alpha_1 \cdots \alpha_k.$$

On transforme donc le produit \cdot en l'application μ sur $\mathcal{G}[1]$ défini par: $\mu(\alpha, \beta) = (-1)^{dg(\alpha)}\alpha\cdot\beta$. Le produit μ est anticommutatif et antiassociatif de degré 1:

$$\begin{aligned}\mu(\alpha, \beta) &= -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)}\mu(\beta, \alpha) \\ \mu(\mu(\alpha, \beta), \gamma) &= -(-1)^{dg(\alpha)}\mu(\alpha, \mu(\beta, \gamma))\end{aligned}$$

et

$$d(\mu(\alpha, \beta)) = -\mu(d\alpha, \beta) + (-1)^{dg(\alpha)+1}\mu(\alpha, d\beta).$$

Le crochet $[\ , \]$ est antisymétrique de degré 0 dans $\mathcal{G}[1]$ vérifiant Jacobi et Leibniz:

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta] &= -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)}[\beta, \alpha], \\ (-1)^{dg(\alpha)dg(\gamma)}[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{dg(\beta)dg(\alpha)}[[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{dg(\gamma)dg(\beta)}[[\gamma, \alpha], \beta] &= 0, \\ [\alpha, \mu(\beta, \gamma)] &= (-1)^{dg(\alpha)}\mu([\alpha, \beta], \gamma) + (-1)^{dg(\alpha)(dg(\beta)+1)}\mu(\beta, [\alpha, \gamma])\end{aligned}$$

ou encore

$$[\mu(\alpha, \beta), \gamma] = \mu(\alpha, [\beta, \gamma]) + (-1)^{dg(\beta)dg(\gamma)}\mu([\alpha, \gamma], \beta).$$

De plus, on a

$$d([\alpha, \beta]) = [d\alpha, \beta] + (-1)^{dg(\alpha)}[\alpha, d\beta].$$

2.2. Produit battement.

Soit V un espace vectoriel gradué. Notons ici le degré d'un vecteur homogène α_i de V par la même lettre α_i et $\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)})$ la signature de la permutation σ^{-1} en tenant compte des degrés, c'est à dire, la signature de la restriction de σ^{-1} aux indices des vecteurs de degré impair.

Rappelons qu'un (p, q) -battement ($p, q \geq 1$) est une permutation $\sigma \in S_{p+q}$ telle que:

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q).$$

On appelle $Bat(p, q) = \{\sigma \in S_{p+q}/\sigma \text{ est un } (p, q)\text{-battement}\}$ l'ensemble de tous les (p, q) -battements. Pour deux tenseurs $\alpha = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$ et $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q}$, on définit le produit battement de α et β par:

$$\begin{aligned}bat_{p,q}(\alpha, \beta) &= \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\ &= \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon(\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)})\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.\end{aligned}$$

Ceci représente la somme signée de tous les tenseurs $\alpha_{i_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{i_n}$ dans lesquels les vecteurs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}$ apparaissent rangés dans leur ordre naturel. (Voir [GH] et [Lo])

On note $\underline{\bigotimes}^n(\mathcal{G}[1])$ l'espace quotient $\bigotimes^n(\mathcal{G}[1]) / \sum_{\substack{p+q=n \\ p, q \geq 1}} Im(bat_{p,q})$ de $\bigotimes^n \mathcal{G}[1]$ par la somme de

toutes les images des applications linéaires $bat_{p,q}$ telles que $p+q=n$.

On pose

$$\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+(\mathcal{G}[1]) = \bigoplus_{n \geq 1} \left(\underline{\bigotimes}^n(\mathcal{G}[1]) \right).$$

L'espace \mathcal{H} est engendré par les 'paquets' X qui sont les classes des tenseurs $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n$ dans le quotient. On notera ces classes par $X = \alpha_{[1,n]} = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$.

Leur degré est:

$$x = dg(X) = dg(\alpha_1) + \dots + dg(\alpha_n).$$

Proposition 2.1.

Le produit battement est associatif et commutatif gradué de degré 0: Pour tout $\alpha \in \otimes^p \mathcal{G}[1]$, $\beta \in \otimes^q \mathcal{G}[1]$, $\gamma \in \otimes^r \mathcal{G}[1]$,

- (i) $bat_{p,q}(\alpha, \beta) = (-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)} bat_{q,p}(\beta, \alpha)$,
- (ii) $bat_{p+q,r}(bat_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma) = bat_{p,q+r}(\alpha, bat_{q,r}(\beta, \gamma))$.

2.3. Complexe de Gerstenhaber.

La théorie des opérades dit que le dual d'une structure d'algèbre commutative est une structure de cogèbre de Lie. On considère, alors, la cogèbre de Lie $(\mathcal{H} = \underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1]), \delta)$ où δ est le cocrochet sur $\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])$ défini pour $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \in \mathcal{H}$ par

$$\begin{aligned} \delta(X) &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n - \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_j & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \alpha_{j+1} \dots \alpha_n & \alpha_1 \dots \alpha_j \end{smallmatrix} \right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \\ &= \sum_{\substack{U \otimes V = X \\ U, V \neq \emptyset}} U \otimes V - (-1)^{vu} V \otimes U. \end{aligned}$$

Le cocrochet δ est coantisymétrique de degré 0 et vérifie l'identité de coJacobi:

- (i) $\tau \circ \delta = -\delta$,
- (ii) $(id^{\otimes 3} + \tau_{12} \circ \tau_{23} + \tau_{23} \circ \tau_{12}) \circ (\delta \otimes id) \circ \delta = 0$,

où τ est la volte définie pour $X, Y \in \mathcal{H}$ par: $\tau(X \otimes Y) = (-1)^{xy} Y \otimes X$, $\tau_{12} = \tau \otimes id$ et $\tau_{23} = id \otimes \tau$.

Grâce à notre décalage, μ et d sont de même degré 1 dans $\mathcal{G}[1]$. On peut maintenant les réunir en une seule opération homogène sur \mathcal{H} .

On prolonge le produit μ et la différentielle d à $\mathcal{H} = \underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])$ comme des codérivations μ_1 et d_1 du cocrochet δ de degré 1 en posant:

$$d_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{\sum_{i < k} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} d(\alpha_k) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k < n} (-1)^{\sum_{i < k} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors,

$$(\mu_1 \otimes id + id \otimes \mu_1) \circ \delta = \delta \circ \mu_1, \mu_1 \circ \mu_1 = 0, (d_1 \otimes id + id \otimes d_1) \circ \delta = \delta \circ d_1 \text{ et } d_1 \circ d_1 = 0.$$

Rappelons qu'une codérivation D de la cogèbre (\mathcal{H}, δ) est entièrement déterminée par une suite d'application $D_r : \underline{\otimes}^r \mathcal{G}[1] \longrightarrow \mathcal{G}[2]$. Plus précisément, on a:

$$D(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 0 \leq j \leq n-r}} (-1)^{\sum_{i \leq j} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes D_r(\alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{j+r}) \underline{\otimes} \alpha_{j+r+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Si on pose $D_1 = d$, $D_2 = \mu$, $D_k = 0$, pour $k \geq 3$, alors, $D = d_1 + \mu_1$ est l'unique codérivation de δ de degré 1 qui prolonge d et μ à \mathcal{H} . Elle vérifie

$$D \circ D = 0 \text{ et } (D \otimes id + id \otimes D) \circ \delta = \delta \circ D.$$

On obtient que $(\mathcal{H} = \underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1]), \delta, D = d_1 + \mu_1)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle, c'est à dire, une algèbre commutative à homotopie près ou une C_∞ -algèbre.

Etudions maintenant le crochet $[\ , \]$ défini sur $\mathcal{G}[1]$. D'abord, on le prolonge à \mathcal{H} comme l'unique crochet de degré 0 compatible avec le cocrochet δ vérifiant:

$$\delta \circ [\ , \] = ([\ , \] \otimes id) \circ (\tau_{23} \circ (\delta \otimes id) + id \otimes \delta) + (id \otimes [\ , \]) \circ (\delta \otimes id + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta)).$$

Pour $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$, ce prolongement est donné par:

$$[X, Y] = \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ k, \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Ce crochet est bien défini sur \mathcal{H} . On a

Proposition 2.2.

L'espace \mathcal{H} , muni du crochet $[\ , \]$ et de l'opérateur D est une algèbre de Lie différentielle graduée: Pour tout X, Y et Z de \mathcal{H} , on a:

- (i) $[X, Y] = -(-1)^{xy}[Y, X]$,
- (ii) $(-1)^{xz} [[X, Y], Z] + (-1)^{yx} [[Y, Z], X] + (-1)^{zy} [[Z, X], Y] = 0$,
- (iii) $D([X, Y]) = [D(X), Y] + (-1)^x [X, D(Y)]$.

L'espace \mathcal{H} est maintenant muni d'une opération D à un argument de degré 1 et d'un crochet $[\ , \]$ à deux arguments de degré 0.

La théorie des opérades dit aussi que le dual d'une structure d'algèbre de Lie est une structure de cogèbre cocommutative coassociative. $(\mathcal{H}, [\ , \], D)$ étant une algèbre de Lie différentielle graduée, on considère l'espace $\mathcal{H}[1]$ et le degré $dg'(X) = dg(X) - 1 := x'$ et on construit la cogèbre cocommutative coassociative $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta)$, où $S^+(\mathcal{H}[1]) = \bigoplus_{n \geq 1} S^n(\mathcal{H}[1])$ et Δ est le coproduit défini par: $\forall X_1 \dots X_n \in S^n(\mathcal{H}[1])$,

$$\Delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ \#I, \#J > 0}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_I x'_J \end{matrix} \right) X_I \otimes X_J.$$

On a noté par X_I le produit $X_{i_1} \dots X_{i_r}$ si $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ et par X_J le produit $X_{j_1} \dots X_{j_{n-r}}$ si $J = \{j_1 < \dots < j_{n-r}\}$.

Le coproduit Δ est cocommutatif et coassociatif:

$$\tau' \circ \Delta = \Delta \text{ et } (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta,$$

où τ' est la volte dans $S^+(\mathcal{H}[1])$.

Le crochet $[\ , \]$ était antisymétrique sur \mathcal{H} de degré 0, il devient sur $\mathcal{H}[1]$ un crochet $\ell_2(X, Y) = (-1)^x [X, Y]$ symétrique, de degré 1 et vérifie l'identité de Jacobi graduée. De plus, D est une différentielle graduée de ℓ_2 qui est aussi de degré 1. On a donc:

- (i) $\ell_2(X, Y) = (-1)^{x'y'} \ell_2(Y, X)$,
- (ii) $(-1)^{x'z'} \ell_2(\ell_2(X, Y), Z) + (-1)^{y'x'} \ell_2(\ell_2(Y, Z), X) + (-1)^{z'y'} \ell_2(\ell_2(Z, X), Y) = 0$,
- (iii) $D(\ell_2(X, Y)) = -\ell_2(D(X), Y) + (-1)^{x'+1} \ell_2(X, D(Y))$.

On peut maintenant réunir ℓ_2 et D en une seule opération Q sur $S^+(\mathcal{H}[1])$.

On prolonge ℓ_2 à $S^+(\mathcal{H}[1])$ comme une codérivation ℓ de Δ de degré 1:

$$\ell(X_1 \dots X_n) = \sum_{i < j} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_i x'_j x'_1 \dots \widehat{i j} \dots x'_n \end{matrix} \right) \ell_2(X_i, X_j) \cdot X_1 \dots \widehat{i j} \dots X_n.$$

On prolonge aussi D à $S^+(\mathcal{H}[1])$ comme une codérivation m de Δ toujours de degré 1:

$$m(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_i x'_1 \dots \widehat{i} \dots x'_n \end{matrix} \right) D(X_i) \cdot X_1 \dots \widehat{i} \dots X_n.$$

En posant $Q_1 = D$, $Q_2 = \ell_2$, $Q_k = 0$, si $k \geq 3$ et

$$Q(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_I x'_J \end{matrix} \right) Q_{\#I}(X_I) \cdot X_J.$$

Alors, $Q = m + \ell$ est l'unique codérivation de Δ , de degré 1, prolongeant D et ℓ_2 à $S^+(\mathcal{H}[1])$. Elle vérifie

$$Q^2 = 0 \text{ et } (Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \Delta = \Delta \circ Q.$$

Donc, $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, Q = \ell + m)$ est une cogèbre cocommutative coassociative et codifférentielle, c'est à dire, c'est une L_∞ algèbre ou algèbre de Lie à homotopie près. (Voir [AMM])

D'autre part, (\mathcal{H}, δ, D) est une cogèbre de Lie codifférentielle, on définit un cocrochet κ sur $\mathcal{H}[1]$ par:

$$\kappa(X) = \sum_{\substack{U \otimes V = X \\ U, V \neq \emptyset}} (-1)^{u'} (U \otimes V + (-1)^{v'u'} V \otimes U), \quad \forall X \in \mathcal{H}[1].$$

Puis κ se prolonge à $S^+(\mathcal{H}[1])$ par:

$$\kappa(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_I x'_s x'_J \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{x'_I + u'_s} (X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + (-1)^{v'_s u'_s} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J).$$

Alors, κ est un cocrochet cosymétrique sur $S^+(\mathcal{H}[1])$ de degré 1 vérifiant l'identité de coJacobi:

$$\tau' \circ \kappa = \kappa \text{ et } (id^{\otimes 3} + \tau'_{12} \circ \tau'_{23} + \tau'_{23} \circ \tau'_{12}) \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa = 0.$$

De plus, $Q = \ell + m$ est une codérivation de $S^+(\mathcal{H}[1])$ pour κ de degré 1.

Alors, $(S^+(\mathcal{H}[1]), \kappa, Q)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle graduée, donc, c'est encore une C_∞ algèbre.

Le cocrochet κ et le coproduit Δ vérifient, enfin, l'identité de coLeibniz:

$$(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau'_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta.$$

On dit que $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, \kappa, Q)$ est une cogèbre de Gerstenhaber codifférentielle graduée.

Définition 2.3.

Une G_∞ algèbre (V, Δ, κ, Q) est une bicogèbre codifférentielle colibre telle que Q est une codérivation pour le coproduit cocommutatif et coassociatif Δ et pour le cocrochet de Lie κ , de degré 1 et de carré nul.

La G_∞ algèbre $\left(S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa, Q = \ell + m \right)$ est appelée la G_∞ algèbre enveloppante de l'algèbre de Gerstenhaber \mathcal{G} .

(Voir [AAC2] et [BGHHW])

3. LES ALGÈBRES DE POISSON À HOMOTOPIE PRÈS

3.1. Définition.

Une algèbre de Poisson graduée est un espace vectoriel gradué \mathcal{P} muni d'un produit commutatif et associatif gradué $\cdot : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de degré 0 et d'un crochet $\{ , \} : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de degré 0 tel que (\mathcal{P}, \cdot) est une algèbre commutative graduée, $(\mathcal{P}, \{ , \})$ est une algèbre de Lie graduée et que, pour tout α homogène, l'application $\{ \alpha, \cdot \}$ soit une dérivation graduée pour le produit \cdot . En notant $|\alpha|$ le degré d'un élément homogène α de \mathcal{P} , on a donc :

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &= (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \cdot \alpha, \\ \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma, \\ \{ \alpha, \beta \} &= -(-1)^{|\alpha||\beta|} \{ \beta, \alpha \}, \\ (-1)^{|\alpha||\gamma|} \{ \{ \alpha, \beta \}, \gamma \} + (-1)^{|\beta||\alpha|} \{ \{ \beta, \gamma \}, \alpha \} + (-1)^{|\gamma||\beta|} \{ \{ \gamma, \alpha \}, \beta \} &= 0, \\ \{ \alpha, \beta \cdot \gamma \} &= \{ \alpha, \beta \} \cdot \gamma + (-1)^{|\beta||\alpha|} \beta \cdot \{ \alpha, \gamma \} \end{aligned}$$

et donc aussi :

$$\{ \alpha \cdot \beta, \gamma \} = \alpha \cdot \{ \beta, \gamma \} + (-1)^{|\beta||\alpha|} \{ \alpha, \gamma \} \cdot \beta.$$

Si de plus, on a une différentielle $d : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}[1]$ de degré 1 telle que

$$d \circ d = 0, \quad d(\alpha \cdot \beta) = d\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \cdot d\beta \quad \text{et} \quad d(\{ \alpha, \beta \}) = \{ d\alpha, \beta \} + (-1)^{|\alpha|} \{ \alpha, d\beta \},$$

on dit que $(\mathcal{P}, \cdot, \{ , \}, d)$ est une algèbre de Poisson différentielle graduée. (Voir [F])

Pour construire la structure de l'algèbre de Poisson à homotopie près, on va reprendre la construction précédente dans le cas des algèbres de Poisson différentielles graduées.

On considère, donc, l'espace $\mathcal{P}[1]$ et la graduation $dg(\alpha) = |\alpha| - 1$. On transforme le produit \cdot en μ en posant $\mu(\alpha, \beta) = (-1)^{dg(\alpha)} \alpha \cdot \beta$ et le crochet $\{ , \}$ en $[,]$ en posant $[\alpha, \beta] = (-1)^{dg(\alpha)} \{ \alpha, \beta \}$.

Le produit μ devient anticommutatif, antiassociatif de degré 1 et le crochet $[,]$ devient symétrique de degré 1, vérifiant l'identité de Jacobi graduée et celle de Leibniz avec μ :

$$\begin{aligned} dg(\mu) &= dg([,]) = dg(d) = 1, \\ \mu(\alpha, \beta) &= -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)} \mu(\beta, \alpha), \\ \mu(\mu(\alpha, \beta), \gamma) &= -(-1)^{dg(\alpha)} \mu(\alpha, \mu(\beta, \gamma)), \\ [\alpha, \beta] &= -(-1)^{dg(\alpha)dg(\beta)} [\beta, \alpha], \\ (-1)^{dg(\alpha)dg(\gamma)} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{dg(\beta)dg(\alpha)} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{dg(\gamma)dg(\beta)} [[\gamma, \alpha], \beta] &= 0, \\ [\alpha, \mu(\beta, \gamma)] &= (-1)^{dg(\alpha)+1} \mu([\alpha, \beta], \gamma) + (-1)^{(dg(\alpha)+1)(dg(\beta)+1)} \mu(\beta, [\alpha, \gamma]), \end{aligned}$$

ou encore

$$[\mu(\alpha, \beta), \gamma] = (-1)^{dg(\alpha)+1} \mu(\alpha, [\beta, \gamma]) + (-1)^{dg(\beta)dg(\gamma)+1} \mu([\alpha, \gamma], \beta).$$

De plus, on a

$$d(\mu(\alpha, \beta)) = -\mu(d\alpha, \beta) + (-1)^{dg(\alpha)+1} \mu(\alpha, d\beta) \quad \text{et} \quad d([\alpha, \beta]) = -[d\alpha, \beta] + (-1)^{dg(\alpha)+1} [\alpha, d\beta].$$

3.2. Complexe de Poisson.

Comme dans le cas d'une algèbre de Gerstenhaber, on réunit d'abord μ et d :

On considère l'espace $\mathcal{H} = \underline{\bigotimes}^+ (\mathcal{P}[1]) = \bigoplus_{n \geq 1} \left(\underline{\bigotimes}^n (\mathcal{P}[1]) \right)$ avec le degré

$$dg(X) = x = dg(\alpha_1) + \cdots + dg(\alpha_n), \quad \text{pour} \quad X = \alpha_1 \underline{\otimes} \cdots \underline{\otimes} \alpha_n \in \mathcal{H}.$$

On munit cet espace du cocrochet δ défini par

$$\delta(X) = \sum_{\substack{U \otimes V = X \\ U, V \neq \emptyset}} U \otimes V - (-1)^{vu} V \otimes U.$$

Alors, le complexe (\mathcal{H}, δ) est une cogèbre de Lie.

On prolonge d et μ à \mathcal{H} comme des codérivations d_1 et μ_1 du cocrochet δ de degré 1 en posant:

$$d_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{\sum_{i < k} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} d(\alpha_k) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k < n} (-1)^{\sum_{i < k} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors,

$$(\mu_1 \otimes id + id \otimes \mu_1) \circ \delta = \delta \circ \mu_1, \mu_1 \circ \mu_1 = 0, (d_1 \otimes id + id \otimes d_1) \circ \delta = \delta \circ d_1 \text{ et } d_1 \circ d_1 = 0.$$

Or, on sait qu'une codérivation D de la cogèbre (\mathcal{H}, δ) est entièrement déterminée par une suite d'application $D_r : \underline{\otimes}^r \mathcal{P}[1] \rightarrow \mathcal{P}[2]$. Plus précisément, on a:

$$D(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 0 \leq j \leq n-r}} (-1)^{\sum_{i \leq j} dg(\alpha_i)} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \underline{\otimes} D_r(\alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{j+r}) \underline{\otimes} \alpha_{j+r+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Si on pose $D_1 = d$, $D_2 = \mu$, $D_k = 0$, pour $k \geq 3$, alors, $D = d_1 + \mu_1$ est l'unique codérivation de δ de degré 1 qui prolonge d et μ à \mathcal{H} . Elle vérifie

$$D \circ D = 0 \text{ et } (D \otimes id + id \otimes D) \circ \delta = \delta \circ D.$$

Alors, $(\mathcal{H} = \underline{\otimes}^+(\mathcal{P}[1]), \delta, D = d_1 + \mu_1)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle, donc, c'est une C_∞ -algèbre.

Bien qu'il ne soit pas antisymétrique, on prolonge le crochet $[\ , \]$ défini sur $\mathcal{P}[1]$ à \mathcal{H} comme l'unique "crochet" de degré 1 compatible avec le cocrochet δ , c'est à dire, vérifiant:

$$\delta \circ [\ , \] = ([\ , \] \otimes id) \circ (\tau_{23} \circ (\delta \otimes id) + id \otimes \delta) + (id \otimes [\ , \]) \circ (\delta \otimes id + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta)).$$

Ce prolongement est donné pour $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$ par:

$$[X, Y] = \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ k, \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) (-1)^{\sum_{i < k} dg(\alpha_{\sigma^{-1}(i)})} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Puisque $[\ , \]$ n'était pas antisymétrique sur $\mathcal{P}[1]$, son prolongement ne l'est pas non plus sur \mathcal{H} . On se ramène à un vrai crochet de degré 0 en décalant \mathcal{H} par -1 .

On considère l'espace $\mathcal{H}[-1]$ muni de la graduation $dg'(X) = x' = dg(X) + 1$, pour $X \in \mathcal{H}[-1]$. On construit sur $\mathcal{H}[-1]$ le crochet $\{X, Y\} = (-1)^{-x'} [X, Y]$. Alors, on a

Proposition 3.1.

L'espace $\mathcal{H}[-1]$, muni du crochet $\{ \ , \ }$ et de l'opérateur D est une algèbre de Lie différentielle graduée: Pour tout X, Y et Z de $\mathcal{H}[-1]$, on a:

- (i) $\{X, Y\} = -(-1)^{x'y'} \{Y, X\}$,
- (ii) $(-1)^{x'z'} \{\{X, Y\}, Z\} + (-1)^{y'x'} \{\{Y, Z\}, X\} + (-1)^{z'y'} \{\{Z, X\}, Y\} = 0$,
- (iii) $D(\{X, Y\}) = \{D(X), Y\} + (-1)^{x'} \{X, D(Y)\}$.

Maintenant, $(\mathcal{H}[-1], \{ , \}, D)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée. On peut donc lui associer une cogèbre cocommutative coassociative $(S^+(\mathcal{H}[-1][1]), \Delta)$ avec une codérivation Q construite à partir de $\{ , \}$ et D . Mais ici $\mathcal{H}[-1][1] = \mathcal{H}$ et on préfère réutiliser le crochet $[,]$ sur \mathcal{H} défini plus haut plutôt que $(-1)^x \{X, Y\} = -[X, Y]$.

On prolonge donc D et $[,]$ à $S^+(\mathcal{H})$ comme des codérivations m et ℓ de Δ de degré 1 et de carré nul en posant:

$$m(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_i x_1 \dots \widehat{i} \dots x_n \end{matrix} \right) D(X_i) \cdot X_1 \dots \widehat{i} \dots X_n$$

et

$$\ell(X_1 \dots X_n) = \sum_{i < j} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_i x_j x_1 \dots \widehat{i} \widehat{j} \dots x_n \end{matrix} \right) [X_i, X_j] \cdot X_1 \dots \widehat{i} \widehat{j} \dots X_n.$$

Puis, on pose $Q_1 = D$, $Q_2 = \ell_2$, $Q_k = 0$, si $k \geq 3$ et

$$Q(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_I x_J \end{matrix} \right) Q_{\#I}(X_I) \cdot X_J.$$

Alors, $Q = m + \ell$ est l'unique codérivation de Δ , de degré 1, prolongeant D et $[,]$ à $S^+(\mathcal{H})$. Elle vérifie

$$Q^2 = 0 \text{ et } (Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \Delta = \Delta \circ Q.$$

Donc, $(S^+(\mathcal{H}), \Delta, Q)$ est une L_∞ algèbre.

D'autre part, (\mathcal{H}, δ, D) étant une C_∞ algèbre, on prolonge le cocrochet δ à $S^+(\mathcal{H})$ par:

$$\delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_I x_s x_J \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \left(X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J - (-1)^{v_s u_s} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \right).$$

Alors, δ est un cocrochet coantisymétrique sur $S^+(\mathcal{H})$ de degré 0 vérifiant l'identité de coJacobi graduée. De plus, $Q = \ell + m$ est une codérivation de $S^+(\mathcal{H})$ pour δ . Donc, $(S^+(\mathcal{H}), \delta, Q)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle graduée, c'est à dire, c'est encore une C_∞ algèbre.

De plus, le cocrochet δ et le coproduit Δ vérifient l'identité de coLeibniz:

$$(id \otimes \Delta) \circ \delta = (\delta \otimes id) \circ \Delta + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta) \circ \Delta.$$

On dit que $(S^+(\mathcal{H}), \Delta, \delta, Q)$ est une cogèbre de Poisson codifférentielle graduée.

Définition 3.2.

Une P_∞ algèbre (V, Δ, δ, Q) est une bicogèbre codifférentielle colibre telle que Q est une codérivation pour le coproduit cocommutatif et coassociatif Δ et pour le cocrochet de Lie δ , de degré 1 et de carré nul.

La P_∞ algèbre $\left(S^+(\underline{\otimes}^+ \mathcal{P}[1]), \Delta, \delta, Q = \ell + m \right)$ est appelée la P_∞ algèbre enveloppante de l'algèbre de Poisson \mathcal{P} .

4. LES (a, b) -ALGÈBRES À HOMOTOPIE PRÈS

4.1. Définition.

Considérons un espace vectoriel \mathcal{A} gradué. Le degré d'un élément homogène α de \mathcal{A} est noté $|\alpha|$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, l'espace \mathcal{A} est muni d'un produit \cdot de degré a ($|\cdot| = a$) et d'un crochet $[\cdot, \cdot]$ de degré b ($||[\cdot, \cdot]| = b$) tel que $(\mathcal{A}[-a], \cdot)$ est une algèbre commutative et associative graduée et $(\mathcal{A}[-b], [\cdot, \cdot])$ est une algèbre de Lie graduée. De plus, l'application linéaire $ad : \mathcal{A}[-b] \longrightarrow \text{Der}(\mathcal{A}[-a], \cdot)$; $\alpha \longmapsto ad_\alpha$ est telle que ad_α soit une dérivation graduée pour le produit \cdot .

On dit que $(\mathcal{A}, \cdot, [\cdot, \cdot])$ est une (a, b) -algèbre graduée. Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$, on a les propriétés suivantes:

- (i) $\alpha \cdot \beta = (-1)^{(|\alpha|+a)(|\beta|+a)} \beta \cdot \alpha$,
- (ii) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,
- (iii) $[\alpha, \beta] = -(-1)^{(|\alpha|+b)(|\beta|+b)} [\beta, \alpha]$,
- (iv) $(-1)^{(|\alpha|+b)(|\gamma|+b)} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{(|\beta|+b)(|\alpha|+b)} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{(|\gamma|+b)(|\beta|+b)} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$,
- (v) $[\alpha, \beta \cdot \gamma] = [\alpha, \beta] \cdot \gamma + (-1)^{(|\beta|+a)(|\alpha|+b)} \beta \cdot [\alpha, \gamma]$
qui s'écrit encore $[\alpha \cdot \beta, \gamma] = \alpha \cdot [\beta, \gamma] + (-1)^{(|\beta|+a)(|\gamma|+b)} [\alpha, \gamma] \cdot \beta$.

De plus, si on a une différentielle $d : \mathcal{A}[-a] \longrightarrow \mathcal{A}[-a+1]$ (ou $d : \mathcal{A}[-b] \longrightarrow \mathcal{A}[-b+1]$) de degré 1 vérifiant

$$d \circ d = 0, \quad d(\alpha \cdot \beta) = d\alpha \cdot \beta + (-1)^{|\alpha|+a} \alpha \cdot d\beta \quad \text{et} \quad d([\alpha, \beta]) = [d\alpha, \beta] + (-1)^{|\alpha|+b} [\alpha, d\beta],$$

on dira que $(\mathcal{A}, \cdot, [\cdot, \cdot], d)$ est une (a, b) -algèbre différentielle graduée.

Comme ci-dessus, on utilise un décalage pour homogénéiser le produit et la différentielle. On considère l'espace $\mathcal{A}[-a+1]$ muni de la graduation $dg(\alpha) = |\alpha| + a - 1$ que l'on note simplement par α . Sur $\mathcal{A}[-a+1]$, le produit \cdot n'est plus commutatif et le crochet $[\cdot, \cdot]$ n'est plus antisymétrique. On construit, donc, un nouveau produit μ sur $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-a][1]$ de degré 1 défini par

$$\mu(\alpha, \beta) = (-1)^{1 \cdot \alpha} \alpha \cdot \beta$$

et un nouveau crochet ℓ sur $\mathcal{A}[-a+1] = \mathcal{A}[-b][b-a+1]$ de degré $b-a+1$ défini par

$$\ell(\alpha, \beta) = (-1)^{(b-a+1) \cdot \alpha} [\alpha, \beta].$$

Et on a

- (i) $\mu(\alpha, \beta) = -(-1)^{\alpha\beta} \mu(\beta, \alpha)$,
- (ii) $\mu(\mu(\alpha, \beta), \gamma) = -(-1)^{\alpha} \mu(\alpha, \mu(\beta, \gamma))$,
- (iii) $\ell(\alpha, \beta) = -(-1)^{b-a+1} (-1)^{\alpha\beta} \ell(\beta, \alpha)$,
- (iv) $(-1)^{\alpha\gamma} \ell(\ell(\alpha, \beta), \gamma) + (-1)^{\beta\alpha} \ell(\ell(\beta, \gamma), \alpha) + (-1)^{\gamma\beta} \ell(\ell(\gamma, \alpha), \beta) = 0$,
- (v) $\ell(\alpha, \mu(\beta, \gamma)) = (-1)^{\alpha+b-a+1} \mu(\ell(\alpha, \beta), \gamma) + (-1)^{(\alpha+b-a+1)(\beta+1)} \mu(\beta, \ell(\alpha, \gamma))$,
ou encore $\ell(\alpha, \mu(\beta, \gamma)) = (-1)^{(b-a+1)(\alpha+1)} \mu(\alpha, \ell(\beta, \gamma)) + (-1)^{b-a+1+\beta\gamma} \mu(\ell(\alpha, \gamma), \beta)$.

De plus, d reste encore une dérivation pour μ et ℓ , elle vérifie:

$$d(\mu(\alpha, \beta)) = -\mu(d\alpha, \beta) + (-1)^{\alpha+1} \mu(\alpha, d\beta) \quad \text{et} \quad d(\ell(\alpha, \beta)) = (-1)^{b-a+1} \ell(d\alpha, \beta) + (-1)^{\alpha+b-a+1} \ell(\alpha, d\beta).$$

4.2. Extension de la multiplication et du crochet à la cogèbre de Lie codifférentielle.

On considère comme précédemment l'espace $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 1} (\bigotimes^n \mathcal{A}[-a+1]) = \bigotimes^+ (\mathcal{A}[-a+1])$ et pour $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \in \mathcal{H}$, le degré $dg(X) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ noté simplement par x . Sur cet espace, on définit un cocrochet δ de degré 0 par:

$$\begin{aligned} \delta(X) &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n - \varepsilon \left(\begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_j & \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \\ \alpha_{j+1} \dots \alpha_n & \alpha_1 \dots \alpha_j \end{matrix} \right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \\ &= \sum_{\substack{U \underline{\otimes} V = X \\ \bar{U}, \bar{V} \neq \emptyset}} U \otimes V - (-1)^{vu} V \otimes U. \end{aligned}$$

On prolonge μ et d à \mathcal{H} comme des codérivations μ_1 et d_1 de δ de degré 1 en posant:

$$d_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{\sum_{i < k} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} d(\alpha_k) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{1 \leq k < n} (-1)^{\sum_{i < k} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors,

$$(\mu_1 \otimes id + id \otimes \mu_1) \circ \delta = \delta \circ \mu_1, \mu_1 \circ \mu_1 = 0, (d_1 \otimes id + id \otimes d_1) \circ \delta = \delta \circ d_1 \text{ et } d_1 \circ d_1 = 0.$$

(Voir [AAC2])

En posant $D_1 = d$, $D_2 = \mu$, $D_k = 0$, si $k \geq 3$ et

$$D(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 0 \leq j \leq n-r}} (-1)^{\sum_{i \leq j} \alpha_i} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \underline{\otimes} D_r(\alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{j+r}) \underline{\otimes} \alpha_{j+r+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n.$$

Alors, $D = d_1 + \mu_1$ est l'unique codérivation de δ de degré 1 qui prolonge d et μ à \mathcal{H} . Elle vérifie

$$D \circ D = 0 \text{ et } (D \otimes id + id \otimes D) \circ \delta = \delta \circ D.$$

On obtient que (\mathcal{H}, δ, D) est une cogèbre de Lie codifférentielle, donc, c'est une C_∞ -algèbre.

On prolonge, ensuite, le crochet ℓ à \mathcal{H} .

Proposition 4.1.

Sur \mathcal{H} , il existe un unique "crochet" ℓ_2 , de degré $b - a + 1$, vérifiant:

$$\delta \circ \ell_2 = (\ell_2 \otimes id) \circ (\tau_{23} \circ (\delta \otimes id) + id \otimes \delta) + (id \otimes \ell_2) \circ (\delta \otimes id + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta)) : (*).$$

Ce crochet est défini pour $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$ par:

$$\ell_2(X, Y) = \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ k, \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) (-1)^{(b-a+1) \sum_{s < k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Preuve:

Le prolongement ℓ_2 défini ci-dessus vérifie bien (*), en effet:

$$\begin{aligned}
& \delta \circ \ell_2(X, Y) = \\
& \delta \left(\sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ k, \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s < k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \right) \\
& = \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ 1 \leq j < k \leq p+q-1 \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s < k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} \times \\
& \quad \times \left[\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon \left(\begin{array}{c} \alpha_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(j)]} \\ \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \dots \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \dots \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\ \alpha_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(j)]} \end{array} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \right] \\
& + \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ 1 \leq k < j \leq p+q-1 \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s < k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} \times \\
& \quad \times \left[\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \right. \\
& \quad \left. - \varepsilon \left(\begin{array}{c} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \dots \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \dots \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \\ \alpha_{[\sigma^{-1}(j+1), \sigma^{-1}(p+q)]} \\ \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \dots \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \dots \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \end{array} \right) \times \right. \\
& \quad \left. \times \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \right] \\
& = \text{(I)} + \text{(II)} + \text{(III)} + \text{(IV)}.
\end{aligned}$$

Dans (I), on fixe j et σ et on pose

$$I = \{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(j)\}, I_1 = I \cap \{1, \dots, p\} = \{i_1, \dots, i_r\} \text{ et } I_2 = I \cap \{p+1, \dots, p+q\} = \{i_{r+1}, \dots, i_j\}.$$

Si $I \not\subset \{1, \dots, p\}$ ou $I \not\subset \{p+1, \dots, p+q\}$, on fixe $k > j$ tel que $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)$ et on fixe $(\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)) = (i_{j+1}, \dots, i_{p+q})$.

Alors, l'ensemble

$$\{\sigma \in \text{Bat}(p, q) / \sigma^{-1}(\{1, \dots, j\}) = I \text{ et } (\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)) = (i_{j+1}, \dots, i_{p+q})\}$$

est en bijection avec l'ensemble

$$\{\rho \in \text{Bat}(r, j-r) \text{ défini sur } I = I_1 \cup I_2\}.$$

Et on a, $\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) = \varepsilon_\alpha(\rho^{-1})$. Dans ce cas, les termes de (I) sont de la forme

$$\pm \text{bat}_{r, j-r}(\alpha_{i_1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{i_r}, \alpha_{i_{r+1}} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{i_j}) \otimes \alpha_{i_{j+1}} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{i_k}, \alpha_{i_{k+1}}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{i_{p+q}}.$$

Ils sont nuls dans $\underline{\otimes}^+ \mathcal{A}[-a+1]$. Donc, dans (I), on peut supposer que $I \subset \{1, \dots, p\}$, dans ce cas la somme correspondante est notée (I₁), ou que $I \subset \{p+1, \dots, p+q\}$, dans ce cas la somme correspondante est notée (I₂).

Ce même raisonnement est vrai pour (II) = (II₁) + (II₂).

Concernant (III) et (IV), on pose $I = \{\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}$ et on applique le même raisonnement, pour la même raison, il ne nous reste que les termes où $I \subset \{1, \dots, p\}$ dans ce cas les sommes correspondantes sont notées (III₁) et (IV₁) et les termes où $I \subset \{p+1, \dots, p+q\}$ dans ce cas les sommes correspondantes sont notées (III₂) et (IV₂).

Alors,

$$\delta \circ \ell_2(X, Y) = (\text{I}_1) + (\text{II}_1) + (\text{I}_2) + (\text{II}_2) + (\text{III}_1) + (\text{IV}_1) + (\text{III}_2) + (\text{IV}_2).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \left((\ell_2 \otimes id) \circ \left(\tau_{23} \circ (\delta \otimes id) + id \otimes \delta \right) + (id \otimes \ell_2) \circ \left(\delta \otimes id + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta) \right) \right) (X, Y) = \\ & (\ell_2 \otimes id) \circ \tau_{23} \left[\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_j & \alpha_{j+1} \dots \alpha_p \\ \alpha_{j+1} \dots \alpha_p & \alpha_1 \dots \alpha_j \end{smallmatrix} \right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right] \\ & + (\ell_2 \otimes id) \left[\sum_{i=p+1}^{p+q-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{p+1} \dots \alpha_i & \alpha_{i+1} \dots \alpha_{p+q} \\ \alpha_{i+1} \dots \alpha_{p+q} & \alpha_{p+1} \dots \alpha_i \end{smallmatrix} \right) \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \right] \\ & + (id \otimes \ell_2) \left[\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_j & \alpha_{j+1} \dots \alpha_p \\ \alpha_{j+1} \dots \alpha_p & \alpha_1 \dots \alpha_j \end{smallmatrix} \right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right] \\ & + (id \otimes \ell_2) \circ \tau_{12} \left[\sum_{i=p+1}^{p+q-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon \left(\begin{smallmatrix} \alpha_{p+1} \dots \alpha_i & \alpha_{i+1} \dots \alpha_{p+q} \\ \alpha_{i+1} \dots \alpha_{p+q} & \alpha_{p+1} \dots \alpha_i \end{smallmatrix} \right) \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \right] \\ & = (\ell_2 \otimes id) \left[\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\alpha_{[i+1, p]} \alpha_{[p+1, p+q]}} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \otimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{\alpha_{[j+1, p+q]} \alpha_{[1, j]}} \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \right] \\ & + (\ell_2 \otimes id) \left[\sum_{j=p+1}^{p+q-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=p+1}^{p+q-1} (-1)^{\alpha_{[p+1, i]} \alpha_{[i+1, p+q]}} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \right] \\ & + (id \otimes \ell_2) \left[\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\alpha_{[i+1, p]} \alpha_{[1, i]}} \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right] \\ & + (id \otimes \ell_2) \left[\sum_{i=p+1}^{p+q-1} (-1)^{\alpha_{[p+1, i]} \alpha_{[1, p]}} \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_i \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{i+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=p+1}^{p+q-1} (-1)^{\alpha_{[j+1, p+q]} \alpha_{[1, j]}} \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p \otimes \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \Big] \\
& = (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8).
\end{aligned}$$

Dans (I_1) , il apparaissait des termes de la forme

$$\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

avec le signe $\varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}}$.

On construit une permutation ρ sur $\{j+1, \dots, p+q\}$ telle que $\rho^{-1}(s) = \sigma^{-1}(s)$, $\forall j+1 \leq s \leq p+q$. Alors, $\rho \in \text{Bat}(p-j, q)$ vérifiant $j+1 \leq \rho^{-1}(k) \leq p < \rho^{-1}(k+1)$ et $\varepsilon_\alpha(\rho^{-1}) = \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})$.

De plus, on a $(-1)^{(b-a+1)\sum_{s<k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} = (-1)^{(b-a+1)\sum_{j<s<k} \alpha_{\rho^{-1}(s)}} (-1)^{(b-a+1)\alpha_{[1, j]}}$.

Alors, le terme précédent s'écrit:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{(b-a+1)\alpha_{[1, j]}} \varepsilon_\alpha(\rho^{-1}) (-1)^{(b-a+1)\sum_{j<s<k} \alpha_{\rho^{-1}(s)}} \times \\
& \times \alpha_{[1, j]} \otimes \alpha_{\rho^{-1}(j+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\rho^{-1}(k)}, \alpha_{\rho^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\rho^{-1}(p+q)}.
\end{aligned}$$

Ce même terme apparaît une seule fois dans le second membre et plus précisément dans (5) accompagné du même signe provenant de $(-1)^{(b-a+1)\alpha_{[1, j]}} \alpha_{[1, j]} \otimes \ell_2(\alpha_{[j+1, p]}, \alpha_{[p+1, p+q]})$.

On obtient, donc, $(I_1) = (5)$.

Pour (I_2) , on a $\{\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\} \subset \{p+1, \dots, p+q\}$, on pose

$$\{\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\} = \{p+1, \dots, i\}$$

avec $p+q-j = i-p$, alors, lorsque j varie de 1 à $q-1$, on trouve que i varie de $p+1$ à $p+q-1$. Et on obtient $(I_2) = (7)$.

Pour (III_1) , on a $\{\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\} \subset \{1, \dots, p\}$, on pose

$$\{\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\} = \{i+1, \dots, p\}$$

avec $p+q-j = p-i$, alors, lorsque j varie de $q+1$ à $p+q-1$, on trouve que i varie de 1 à $p-1$. Et on obtient $(III_1) = (1)$.

Pour les autres termes, on démontre que $(II_1) = (2)$, $(II_2) = (4)$, $(III_2) = (3)$, $(IV_1) = (6)$ et $(IV_2) = (8)$.

L'unicité de ℓ_2 est une conséquence du fait que (\mathcal{H}, δ) est une cogèbre de Lie colibre. (Voir [BGHHW]) \square

4.3. Algèbre de Lie différentielle graduée associée à une (a, b) -algèbre différentielle.

On considère, maintenant, l'espace $\mathcal{H}[a-b-1]$ muni de la graduation $dg'(X) = dg(X) - a + b + 1$ noté simplement par x' pour $X \in \mathcal{H}[a-b-1]$. On pose $\ell'_2(X, Y) = (-1)^{(a-b-1)dg'(X)} \ell_2(X, Y)$. Alors, le crochet ℓ'_2 est de degré 0 dans $\mathcal{H}[a-b-1]$ et la différentielle D reste de degré 1. Et on a

Proposition 4.2.

L'espace $\mathcal{H}[a-b-1]$, muni du crochet ℓ'_2 et de la différentielle D est une algèbre de Lie différentielle graduée: Pour tout X, Y et Z de $\mathcal{H}[a-b-1]$, on a:

- (i) $\ell'_2(X, Y) = -(-1)^{x'y'} \ell'_2(Y, X)$,
- (ii) $(-1)^{x'z'} \ell'_2(\ell'_2(X, Y), Z) + (-1)^{y'x'} \ell'_2(\ell'_2(Y, Z), X) + (-1)^{z'y'} \ell'_2(\ell'_2(Z, X), Y) = 0$,

$$(iii) \quad D(\ell'_2(X, Y)) = \ell'_2(D(X), Y) + (-1)^{x'} \ell'_2(X, D(Y)).$$

Preuve

(i) Soient $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$. On sait que

$$\begin{aligned} \ell'_2(X, Y) &= (-1)^{(a-b-1)x'} \ell_2(X, Y) = \\ &(-1)^{(a-b-1)x'} \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ k; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) (-1)^{(b-a+1) \sum_{s < k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

Fixons un couple (σ, k) dans cette somme tel que $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)$. On définit deux permutations τ et ρ de S_{p+q} par:

$$\tau(j) = \begin{cases} j+p, & \text{si } 1 \leq j \leq q \\ j-q, & \text{si } q < j \leq q+p. \end{cases} \quad \text{et} \quad \rho = \sigma \circ \tau.$$

On vérifie que $\rho \in \text{Bat}(q, p)$ tel que $\rho^{-1}(k+1) \leq q < \rho^{-1}(k)$. En posant $\beta_j = \alpha_{\tau(j)}$, $(1 \leq j \leq p+q)$, on aura $\beta_{\rho^{-1}(j)} = \alpha_{\sigma^{-1}(j)}$ et $\varepsilon_\beta(\rho^{-1}) = (-1)^{xy} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1})$.

On construit ensuite une nouvelle permutation ν de S_{p+q} définie par:

$$\nu^{-1}(j) = \rho^{-1}(j), \quad \forall j \notin \{k, k+1\}, \quad \nu^{-1}(k) = \rho^{-1}(k+1) \quad \text{et} \quad \nu^{-1}(k+1) = \rho^{-1}(k).$$

On vérifie que $\nu \in \text{Bat}(q, p)$ tel que

$$\begin{aligned} \nu^{-1}(k) &\leq q < \nu^{-1}(k+1) \quad \text{et} \\ \varepsilon_\beta(\nu^{-1}) &= (-1)^{\beta_{\rho^{-1}(k)} \beta_{\rho^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\beta(\rho^{-1}) = (-1)^{\alpha_{\sigma^{-1}(k)} \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}} (-1)^{xy} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}). \end{aligned}$$

De plus l'application $(\sigma, k) \mapsto (\nu, k)$ est une bijection sur les ensembles correspondants. Alors,

$$\begin{aligned} \ell'_2(X, Y) &= (-1)^{(a-b-1)x'} (-1)^{xy} \times \\ &\times \sum_{\substack{\nu \in \text{Bat}(q, p) \\ k; \nu^{-1}(k) \leq q < \nu^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\beta(\nu^{-1}) (-1)^{\beta_{\nu^{-1}(k)} \beta_{\nu^{-1}(k+1)}} \beta_{\nu^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\beta_{\nu^{-1}(k+1)}, \beta_{\nu^{-1}(k)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \beta_{\nu^{-1}(p+q)} \\ &= (-1)^{(a-b-1)x'} (-1)^{xy+b-a} \sum_{\substack{\nu \in \text{Bat}(q, p) \\ k; \nu^{-1}(k) \leq q < \nu^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\beta(\nu^{-1}) \beta_{\nu^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \ell(\beta_{\nu^{-1}(k)}, \beta_{\nu^{-1}(k+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \beta_{\nu^{-1}(p+q)} \\ &= -(-1)^{x'y'} \ell'_2(Y, X). \end{aligned}$$

(ii) Soient $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$, $Y = \beta_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \beta_q$ et $Z = \gamma_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \gamma_r$. Posons

$$\xi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ \beta_{i-p} & \text{si } p+1 \leq i \leq p+q \\ \gamma_{i-p-q} & \text{si } p+q+1 \leq i \leq p+q+r. \end{cases}$$

On revient à ℓ_2 en écrivant l'identité de Jacobi sous la forme:

$$\begin{aligned} &(-1)^{x'z'} \ell'_2(\ell'_2(X, Y), Z) + (-1)^{y'x'} \ell'_2(\ell'_2(Y, Z), X) + (-1)^{z'y'} \ell'_2(\ell'_2(Z, X), Y) = \\ &(-1)^{(a-b-1)(x+y+z+1)} \{(-1)^{xz} \ell_2(\ell_2(X, Y), Z) + (-1)^{yx} \ell_2(\ell_2(Y, Z), X) + (-1)^{zy} \ell_2(\ell_2(Z, X), Y)\}. \end{aligned}$$

En écrivant $(-1)^{xz} \ell_2(\ell_2(X, Y), Z)$, on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(I_1) &: (-1)^{xz} \varepsilon_\xi(\rho_{I_1}^{-1}) \xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{m_1}} \otimes \ell(\alpha_i, \beta_j) \otimes \xi_{i_{m_1+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n_1}} \otimes \ell(\beta_k, \gamma_l) \otimes \xi_{i_{n_1+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{p+q+r}} \\
(I_2) &: (-1)^{xz} \varepsilon_\xi(\rho_{I_2}^{-1}) \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_{m_2}} \otimes \ell(\beta_j, \gamma_l) \otimes \xi_{j_{m_2+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{j_{n_2}} \otimes \ell(\alpha_i, \beta_k) \otimes \xi_{j_{n_2+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{j_{p+q+r}} \\
(I_3) &: (-1)^{xz} \varepsilon_\xi(\rho_{I_3}^{-1}) \xi_{k_1} \otimes \dots \otimes \xi_{k_{m_3}} \otimes \ell(\alpha_i, \beta_j) \otimes \xi_{k_{m_3+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{k_{n_3}} \otimes \ell(\alpha_k, \gamma_l) \otimes \xi_{k_{n_3+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{k_{p+q+r}} \\
(I_4) &: (-1)^{xz} \varepsilon_\xi(\rho_{I_4}^{-1}) \xi_{l_1} \otimes \dots \otimes \xi_{l_{m_4}} \otimes \ell(\alpha_i, \gamma_l) \otimes \xi_{l_{m_4+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{l_{n_4}} \otimes \ell(\alpha_k, \beta_j) \otimes \xi_{l_{n_4+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{l_{p+q+r}} \\
(I_5) &: (-1)^{xz} \varepsilon_\xi(\rho_{I_5}^{-1}) \xi_{s_1} \otimes \dots \otimes \xi_{s_{m_5}} \otimes \ell(\ell(\alpha_i, \beta_j), \gamma_k) \otimes \xi_{s_{m_5+4}} \otimes \dots \otimes \xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

En écrivant $(-1)^{yx} \ell_2(\ell_2(Y, Z), X)$, on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(II_1) &: (-1)^{yx} \varepsilon_\xi(\rho_{II_1}^{-1}) \xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{m_1}} \otimes \ell(\beta_j, \alpha_i) \otimes \xi_{i_{m_1+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{n_1}} \otimes \ell(\beta_k, \gamma_l) \otimes \xi_{i_{n_1+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{i_{p+q+r}} \\
(II_2) &: (-1)^{yx} \varepsilon_\xi(\rho_{II_2}^{-1}) \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes \xi_{j_{m_2}} \otimes \ell(\beta_j, \gamma_l) \otimes \xi_{j_{m_2+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{j_{n_2}} \otimes \ell(\beta_k, \alpha_i) \otimes \xi_{j_{n_2+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{j_{p+q+r}} \\
(II_3) &: (-1)^{yx} \varepsilon_\xi(\rho_{II_3}^{-1}) \xi_{t_1} \otimes \dots \otimes \xi_{t_{m_6}} \otimes \ell(\beta_j, \gamma_k) \otimes \xi_{t_{m_6+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{t_{n_6}} \otimes \ell(\gamma_l, \alpha_i) \otimes \xi_{t_{n_6+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{t_{p+q+r}} \\
(II_4) &: (-1)^{yx} \varepsilon_\xi(\rho_{II_4}^{-1}) \xi_{r_1} \otimes \dots \otimes \xi_{r_{m_7}} \otimes \ell(\gamma_k, \alpha_i) \otimes \xi_{r_{m_7+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{r_{n_7}} \otimes \ell(\beta_j, \gamma_l) \otimes \xi_{r_{n_7+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{r_{p+q+r}} \\
(II_5) &: (-1)^{yx} \varepsilon_\xi(\rho_{II_5}^{-1}) \xi_{s_1} \otimes \dots \otimes \xi_{s_{m_5}} \otimes \ell(\ell(\beta_j, \gamma_k), \alpha_i) \otimes \xi_{s_{m_5+4}} \otimes \dots \otimes \xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

En écrivant $(-1)^{zy} \ell_2(\ell_2(Z, X), Y)$, on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(III_1) &: (-1)^{zy} \varepsilon_\xi(\rho_{III_1}^{-1}) \xi_{k_1} \otimes \dots \otimes \xi_{k_{m_3}} \otimes \ell(\alpha_i, \beta_j) \otimes \xi_{k_{m_3+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{k_{n_3}} \otimes \ell(\gamma_l, \alpha_k) \otimes \xi_{k_{n_3+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{k_{p+q+r}} \\
(III_2) &: (-1)^{zy} \varepsilon_\xi(\rho_{III_2}^{-1}) \xi_{l_1} \otimes \dots \otimes \xi_{l_{m_4}} \otimes \ell(\gamma_l, \alpha_i) \otimes \xi_{l_{m_4+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{l_{n_4}} \otimes \ell(\alpha_k, \beta_j) \otimes \xi_{l_{n_4+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{l_{p+q+r}} \\
(III_3) &: (-1)^{zy} \varepsilon_\xi(\rho_{III_3}^{-1}) \xi_{r_1} \otimes \dots \otimes \xi_{r_{m_7}} \otimes \ell(\gamma_k, \alpha_i) \otimes \xi_{r_{m_7+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{r_{n_7}} \otimes \ell(\gamma_l, \beta_j) \otimes \xi_{r_{n_7+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{r_{p+q+r}} \\
(III_4) &: (-1)^{zy} \varepsilon_\xi(\rho_{III_4}^{-1}) \xi_{t_1} \otimes \dots \otimes \xi_{t_{m_6}} \otimes \ell(\gamma_k, \beta_j) \otimes \xi_{t_{m_6+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{t_{n_6}} \otimes \ell(\gamma_l, \alpha_i) \otimes \xi_{t_{n_6+3}} \otimes \dots \otimes \xi_{t_{p+q+r}} \\
(III_5) &: (-1)^{zy} \varepsilon_\xi(\rho_{III_5}^{-1}) \xi_{s_1} \otimes \dots \otimes \xi_{s_{m_5}} \otimes \ell(\ell(\gamma_k, \alpha_i), \beta_j) \otimes \xi_{s_{m_5+4}} \otimes \dots \otimes \xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

On vérifie grâce à la $(b-a+1)$ -antisymétrie de ℓ que:

$$(I_1) + (II_1) = 0, (I_2) + (II_2) = 0, (I_3) + (III_1) = 0, (I_4) + (III_2) = 0, (II_3) + (III_4) = 0, (II_4) + (III_3) = 0.$$

Et grâce à la relation de Jacobi pour ℓ que: $(I_5) + (II_5) + (III_5) = 0$.

(iii) On rappelle que $D = d_1 + \mu_1$ où

$$d_1(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{\sum_{s < i} \alpha_s} \alpha_1 \otimes \dots \otimes d(\alpha_i) \otimes \dots \otimes \alpha_n$$

et

$$\mu_1(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n) = \sum_{1 \leq i < n} (-1)^{\sum_{s < i} \alpha_s} \alpha_1 \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \otimes \dots \otimes \alpha_n.$$

Vérifions d'abord que $\mu_1(\ell'_2(X, Y)) = \ell'_2(\mu_1(X), Y) + (-1)^{x'} \ell'_2(X, \mu_1(Y))$.

Soient $X = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$ et $Y = \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q}$.

D'une part, on développe $\mu_1(\ell'_2(X, Y))$, on trouve les types de termes suivants:

$$(I) : \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

où $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$, $i < k-1$ et $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)$,

$$(II) : \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

où $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$, $i > k + 1$ et $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1)$,

$$(III) : \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k-1)}, \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

où $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$, $1 \leq k \leq p + q - 1$ et $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1)$,

$$(IV) : \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu(\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}), \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

où $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$, $1 \leq k \leq p + q - 1$ et $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1)$.

Parmi les termes de (I), on distingue quatre cas:

(I₁) lorsque $\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i + 1)\} \subset \{1, \dots, p\}$,

(I₂) lorsque $\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i + 1)\} \subset \{p + 1, \dots, p + q\}$,

(I₃) lorsque $\sigma^{-1}(i) \leq p < \sigma^{-1}(i + 1)$,

(I₄) lorsque $\sigma^{-1}(i + 1) \leq p < \sigma^{-1}(i)$.

Et de même pour (II). Il y a des simplifications entre les termes de (I₃) et (I₄) et aussi entre les termes de (II₃) et (II₄). Il ne reste que (I₁), (I₂), (II₁) et (II₂).

On sépare aussi les termes de type (III) et (IV) en deux catégories. On a donc:

(III₁) lorsque $\sigma^{-1}(k - 1) < \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1)$,

(III₂) lorsque $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k - 1) < \sigma^{-1}(k + 1)$,

(IV₁) lorsque $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k + 2) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1)$,

(IV₂) lorsque $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1) < \sigma^{-1}(k + 2)$.

Alors,

$$\mu_1(\ell_2^l(X, Y)) = (I_1) + (I_2) + (II_1) + (II_2) + (III_1) + (III_2) + (IV_1) + (IV_2).$$

D'autre part, dans le second membre, on a

$$\begin{aligned} \ell_2^l(\mu_1(X), Y) &= (-1)^{(a-b-1)(x'+1)} \sum_{\substack{i < k-1 \\ \sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ 1 \leq i < p \\ k \notin \{i, i+1\}; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon_\alpha(\sigma^{-1}) (-1)^{\sum_{s < i} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} (-1)^{(b-a+1) \sum_{s < k} \alpha_{\sigma^{-1}(s)}} (-1)^{(b-a+1)} \times \\ &\quad \times \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

On trouve les types de termes suivants:

$$(I') : \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

où $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$, $i < k - 1$, $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1)$ et $1 \leq \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i + 1) \leq p$,

$$(II') : \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

où $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$, $i > k + 1$, $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k + 1)$ et $1 \leq \sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i + 1) \leq p$

et (III') : $\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \ell(\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}), \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$

où $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$, $1 \leq k \leq p + q - 2$ et $\sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k + 1) \leq p < \sigma^{-1}(k + 2)$.

Or, d'après l'identité de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} \ell(\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}), \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}) &= (-1)^{(b-a+1)(\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)})} \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)})) \\ &\quad + (-1)^{b-a+1+\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}\alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}} \mu(\ell(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}), \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}), \end{aligned}$$

on sépare, alors, (III') en $(III'_1) + (III'_2)$.

Donc, $\ell'_2(\mu_1(X), Y) = (I') + (II') + (III'_1) + (III'_2)$.

De même, on trouve que $(-1)^{x'} \ell'_2(X, \mu_1(Y)) = (I'') + (II'') + (III''_1) + (III''_2)$.

On vérifie, enfin, que $(I_1) = (I')$, $(II_1) = (II')$, $(III_1) = (III'_1)$, $(IV_1) = (III'_2)$, $(I_2) = (I'')$, $(II_2) = (II'')$, $(IV_2) = (III''_1)$ et $(III_2) = (III''_2)$.

De même, on vérifie que $D_1(\ell'_2(X, Y)) = \ell'_2(D_1(X), Y) + (-1)^{x'} \ell'_2(X, D_1(Y))$. \square

4.4. La L_∞ -algèbre $S^+(\mathcal{H}[a-b])$.

Dans le paragraphe précédent, on a montré que $(\mathcal{H}[a-b-1], \ell'_2, D)$ est une algèbre de Lie différentielle graduée. On considère l'espace $\mathcal{H}[a-b]$ muni de la graduation

$$dg''(X) = dg'(X) - 1 = dg(X) - a + b := x'', \text{ pour tout } X \in \mathcal{H}[a-b].$$

On voudrait construire la cogèbre cocommutative coassociative $(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \Delta)$, où $S^+(\mathcal{H}[a-b]) = \bigoplus_{n \geq 1} S^n(\mathcal{H}[a-b])$ et Δ est son coproduit qui est de degré 0 et défini par:

$$\forall X_1 \dots X_n \in S^n(\mathcal{H}[a-b]),$$

$$\Delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ \#I, \#J > 0}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I x''_J \end{matrix} \right) X_I \otimes X_J.$$

Le crochet ℓ'_2 était antisymétrique de degré 0 sur $\mathcal{H}[a-b-1]$. Comme l'on veut une codérivation de degré 1 pour Δ , on pose $\ell''_2(X, Y) = (-1)^{x''} \ell'_2(X, Y)$ qui est une application symétrique sur $\mathcal{H}[a-b]$ de degré 1. On a

Proposition 4.3.

Pour tout $X, Y, Z \in \mathcal{H}[a-b]$, on a:

- (i) $\ell''_2(X, Y) = (-1)^{x''y''} \ell''_2(Y, X)$,
- (ii) $(-1)^{x''z''} \ell''_2(\ell''_2(X, Y), Z) + (-1)^{y''x''} \ell''_2(\ell''_2(Y, Z), X) + (-1)^{z''y''} \ell''_2(\ell''_2(Z, X), Y) = 0$,
- (iii) $D(\ell''_2(X, Y)) = -\ell''_2(D(X), Y) + (-1)^{1+x''} \ell''_2(X, D(Y))$.

Preuve:

(i) On a

$$\begin{aligned} \ell''_2(X, Y) &= (-1)^{x''} \ell'_2(X, Y) = (-1)^{x''} (-1)^{x'y'+1} \ell'_2(Y, X) \\ &= (-1)^{x''+(x''+1)(y''+1)+1} (-1)^{y''} \ell''_2(Y, X) \\ &= (-1)^{x''y''} \ell''_2(Y, X). \end{aligned}$$

(ii) On a

$$\begin{aligned} &(-1)^{x''z''} \ell''_2(\ell''_2(X, Y), Z) + (-1)^{y''x''} \ell''_2(\ell''_2(Y, Z), X) + (-1)^{z''y''} \ell''_2(\ell''_2(Z, X), Y) = \\ &(-1)^{x'+y'+z'+1} \left((-1)^{x'z'} \ell'_2(\ell'_2(X, Y), Z) + (-1)^{y'x'} \ell'_2(\ell'_2(Y, Z), X) + (-1)^{z'y'} \ell'_2(\ell'_2(Z, X), Y) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(iii) On a

$$\begin{aligned} D(\ell_2''(X, Y)) &= (-1)^{x''} D(\ell_2'(X, Y)) = (-1)^{x''} \left(\ell_2'(D(X), Y) + (-1)^{x'} \ell_2'(X, D(Y)) \right) \\ &= (-1)^{x''} \left((-1)^{x''+1} \ell_2''(D(X), Y) + (-1)^{x'+x''} \ell_2''(X, D(Y)) \right) \\ &= -\ell_2''(D(X), Y) + (-1)^{1+x''} \ell_2''(X, D(Y)). \end{aligned}$$

□

On prolonge ℓ_2'' à $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ de façon unique comme une codérivation ℓ'' de Δ de degré 1 en posant:

$$\ell''(X_1 \dots X_n) = \sum_{i < j} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_n'' \\ x_i'' x_j'' x_1'' \dots \widehat{i} j \dots x_n'' \end{matrix} \right) \ell_2''(X_i, X_j) \cdot X_1 \dots \widehat{i} j \dots X_n.$$

En utilisant l'identité de Jacobi, on peut vérifier que $\ell'' \circ \ell'' = 0$.

On prolonge, aussi, la différentielle D à $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ comme l'unique codérivation m de Δ toujours de degré 1 en posant:

$$m(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_n'' \\ x_i'' x_1'' \dots \widehat{i} \dots x_n'' \end{matrix} \right) D(X_i) \cdot X_1 \dots \widehat{i} \dots X_n.$$

Elle vérifie $m \circ m = 0$.

Si on pose $Q_1 = D$, $Q_2 = \ell_2''$, $Q_k = 0$, si $k \geq 3$ et

$$Q(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_n'' \\ x_I'' x_J'' \end{matrix} \right) Q_{\#I}(X_I) \cdot X_J.$$

Alors, $Q = m + \ell''$ et vérifie $Q^2 = 0$ et $(Q \otimes id + id \otimes Q) \circ \Delta = \Delta \circ Q$.

Donc, le complexe $(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \Delta, Q)$ est une cogèbre cocommutative coassociative et codifférentielle, alors, c'est une L_∞ algèbre.

4.5. La C_∞ -algèbre $S^+(\mathcal{H}[a-b])$.

L'espace (\mathcal{H}, δ, D) étant une cogèbre de Lie codifférentielle, on définit un cocrochet δ'' de degré $a-b$ sur $\mathcal{H}[a-b]$ par:

$$\delta''(X) = \sum_{\substack{U \otimes V = X \\ U, V \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)u''} \left(U \otimes V + (-1)^{u''v''+a-b+1} V \otimes U \right), \quad \forall X \in \mathcal{H}[a-b].$$

On prolonge δ'' à $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ par:

$$\begin{aligned} \delta''(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_n'' \\ x_I'' x_s'' x_J'' \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x_I''+u_s'')} \times \\ &\quad \times \left(X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + (-1)^{u_s''v_s''+a-b+1} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \right). \end{aligned}$$

Alors, δ'' est un cocrochet sur $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ de degré $a-b$. En notant τ'' la volte dans $S^+(\mathcal{H}[a-b])$, δ'' vérifie:

Proposition 4.4.

- (i) $\tau'' \circ \delta'' = -(-1)^{a-b}\delta''$: (δ'' est $(a-b)$ -coantisymétrique),
(ii) $(id^{\otimes 3} + \tau''_{12} \circ \tau''_{23} + \tau''_{23} \circ \tau''_{12}) \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta'' = 0$: (l'identité de coJacobi),
(iii) $(id \otimes \Delta) \circ \delta'' = (\delta'' \otimes id) \circ \Delta + \tau''_{12} \circ (id \otimes \delta'') \circ \Delta$: (l'identité de coLeibniz).

Preuve:

(i) On a

$$\begin{aligned}
\tau'' \circ \delta''(X_1 \dots X_n) &= \tau'' \left[\sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J x''_s x''_I \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_J + u''_s)} \times \right. \\
&\quad \left. \times (X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_I + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_J \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_I) \right] \\
&= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J x''_s x''_I \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_J + u''_s)} \times \\
&\quad \times \left[(-1)^{(x''_I + v''_s)(x''_J + u''_s)} V_s \cdot X_I \otimes X_J \cdot U_s + (-1)^{(x''_J + v''_s)(x''_I + u''_s)} (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} U_s \cdot X_I \otimes X_J \cdot V_s \right] \\
&= (-1)^{a-b+1} \left[\sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I x''_s x''_J \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} \times \right. \\
&\quad \left. \times (X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J) \right] \\
&= (-1)^{a-b+1} \delta''(X_1 \dots X_n).
\end{aligned}$$

(ii) On calcule $(\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$, on trouve des termes produit et produit tensoriel de facteurs $X_I, X_J, X_K, U_s, V_s, U_t, V_t$ pour $I \cup J \cup K \cup \{s, t\} = \{1, \dots, n\}$, $s \neq t$, $X_s = U_s \otimes V_s$ et $X_t = U_t \otimes V_t$ et des termes produit et produit tensoriel de facteurs $X_I, X_J, X_K, U_s, V_s, W_s$ pour $I \cup J \cup K \cup \{s\} = \{1, \dots, n\}$ et $X_s = U_s \otimes V_s \otimes W_s$.

Pour retrouver les termes du premier type, on part de $X_I \otimes X_J \otimes X_K$ et on ajoute les U_s, V_s, U_t, V_t en suivant le tableau:

$$\begin{array}{cccc}
U_t \otimes V_t \cdot U_s \otimes V_s, & V_t \otimes U_t \cdot U_s \otimes V_s, & U_t \otimes V_t \cdot V_s \otimes U_s, & V_t \otimes U_t \cdot V_s \otimes U_s, \\
U_s \cdot U_t \otimes V_t \otimes V_s, & U_s \cdot V_t \otimes U_t \otimes V_s, & V_s \cdot U_t \otimes V_t \otimes U_s, & V_s \cdot V_t \otimes U_t \otimes U_s, \\
U_s \otimes U_t \otimes V_s \cdot V_t, & U_s \otimes V_t \otimes V_s \cdot U_t, & V_s \otimes U_t \otimes U_s \cdot V_t, & V_s \otimes V_t \otimes U_s \cdot U_t.
\end{array}$$

Pour retrouver les termes du deuxième type, on part de $X_I \otimes X_J \otimes X_K$ et on ajoute les U_s, V_s, W_s en suivant le tableau:

$$U_s \otimes V_s \otimes W_s, \quad V_s \otimes U_s \otimes W_s, \quad V_s \otimes W_s \otimes U_s, \quad W_s \otimes V_s \otimes U_s.$$

Par exemple, le premier élément $U_t \otimes V_t \cdot U_s \otimes V_s$ du tableau correspond au terme

$$(1) : X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_K.$$

Pour $s < t$, ce terme apparaît deux fois dans $(id^{\otimes 3} + \tau''_{12} \circ \tau''_{23} + \tau''_{23} \circ \tau''_{12}) \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$:

1) Une fois dans $id^{\otimes 3} \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ avec le signe ε_1 obtenu ainsi:

- On part de $X_1 \dots X_n$, on le ramène en $X_I \cdot X_t \cdot X_J \cdot X_s \cdot X_K$ avec le signe $\varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I x''_t x''_J x''_s x''_K \end{matrix} \right)$.

- On applique δ'' sur $X_I.X_t.X_J.X_s.X_K$ et précisément lorsqu'on coupe X_s , il apparaît le terme $X_I.X_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K$ une seule fois avec le signe

$$(-1)^{(a-b)(x'_I+x''_t+x'_J+u''_s)} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I \ x''_t \ x'_J \ x''_s \ x''_K \end{array} \right).$$

- Ensuite, on applique $(\delta'' \otimes id)$ sur $X_I.X_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K$ et précisément on coupe X_t , on obtient une seule fois le terme $X_I.U_t \otimes V_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K$ avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{(a-b)(x'_I+x''_t+x'_J+u''_s)} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I \ x''_t \ x'_J \ x''_s \ x''_K \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x'_I+u''_t)} \\ & = (-1)^{(a-b)(x'_J+v''_t+u''_s+a-b)} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I \ x''_t \ x'_J \ x''_s \ x''_K \end{array} \right) = \varepsilon_1. \end{aligned}$$

2) Le terme (1) apparaît une autre fois dans $\tau''_{12} \circ \tau''_{23} \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ avec le signe ε'_1 :

- On part de $X_1 \dots X_n$, on le ramène en $X_J.X_s.X_K.X_t.X_I$ avec le signe $\varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x'_J \ x''_s \ x''_K \ x''_t \ x'_I \end{array} \right)$.

- On applique δ'' sur $X_J.X_s.X_K.X_t.X_I$ et plus précisément, lorsqu'on coupe X_t , alors, le terme $X_J.X_s.X_K.V_t \otimes U_t.X_I$ apparaît une seule fois avec le signe

$$(-1)^{(a-b)(x'_J+x''_s+x''_K+u''_t)} (-1)^{u''_t v''_t+a-b+1} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J \ x''_s \ x''_K \ x''_t \ x'_I \end{array} \right)$$

qui s'écrit encore $V_t.X_J.X_s.X_K \otimes X_I.U_t$ accompagné du signe

$$(-1)^{(a-b)(x'_J+x''_s+x''_K+u''_t)+u''_t v''_t+a-b+1} (-1)^{u''_t x'_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J \ x''_s \ x''_K \ x''_t \ x'_I \end{array} \right).$$

- Ensuite, on applique $(\delta'' \otimes id)$ sur $V_t.X_J.X_s.X_K \otimes X_I.U_t$ et précisément on coupe X_s , on obtient une seule fois le terme $V_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K \otimes X_I.U_t$ avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{(a-b)(x'_J+x''_s+x''_K+u''_t)+u''_t v''_t+a-b+1+u''_t x'_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J \ x''_s \ x''_K \ x''_t \ x'_I \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(v''_t+x''_J+u''_s)} \\ & = (-1)^{(a-b)(x''_t+x''_K+v''_s)+u''_t v''_t+a-b+1} (-1)^{u''_t x'_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J \ x''_s \ x''_K \ x''_t \ x'_I \end{array} \right). \end{aligned}$$

- Puis, on applique $\tau''_{12} \circ \tau''_{23}$, on obtient le terme (1) = $X_I.U_t \otimes V_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K$ avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{(a-b)(x''_t+x''_K+v''_s)+u''_t v''_t+a-b+1} (-1)^{u''_t x'_I+v''_t(x''_K+x''_s+x''_J)} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J \ x''_s \ x''_K \ x''_t \ x'_I \end{array} \right) \times \\ & \times (-1)^{(x'_I+u''_t)(v''_t+x''_J+u''_s+v''_s+x''_K)+x'_I u''_t} \\ & = (-1)^{(a-b)(x'_J+v''_t+u''_s+a-b)+1} \varepsilon \left(\begin{array}{c} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I \ x''_t \ x'_J \ x''_s \ x''_K \end{array} \right) \\ & = -\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Finalement, ces deux termes se simplifient.

Un calcul pénible montre, de même, que tous les termes du tableau se simplifient dans $(id^{\otimes 3} + \tau''_{12} \circ \tau''_{23} + \tau''_{23} \circ \tau''_{12}) \circ (\delta'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$.

(iii) D'une part, on a

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I x''_s x''_J \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} \times \\
&\quad \times (id \otimes \Delta) \left[X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \right] \\
&= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I x''_s x''_J \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} \times \\
&\quad \times \sum_{K \cup L = J} \left[\varepsilon \left(\begin{matrix} v''_s x''_J \\ x''_K v''_s x''_L \end{matrix} \right) X_I \cdot U_s \otimes X_K \otimes V_s \cdot X_L + \varepsilon \left(\begin{matrix} v''_s x''_J \\ v''_s x''_L x''_K \end{matrix} \right) X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_L \otimes X_K \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} \left(\varepsilon \left(\begin{matrix} u''_s x''_J \\ x''_K u''_s x''_L \end{matrix} \right) X_I \cdot V_s \otimes X_K \otimes U_s \cdot X_L + \varepsilon \left(\begin{matrix} u''_s x''_J \\ u''_s x''_L x''_K \end{matrix} \right) X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_L \otimes X_K \right) \right] \\
&= (I) + (II) + (III) + (IV).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
(id \otimes \delta'') \circ \Delta(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{K \cup J = \{1, \dots, n\} \\ K, J \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K x''_J \end{matrix} \right) (id \otimes \delta'')(X_K \otimes X_J) \\
&= \sum_{\substack{K \cup J = \{1, \dots, n\} \\ K, J \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K x''_J \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)x''_K} \sum_{\substack{s \in J \\ I \cup L = J \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_J \\ x''_I x''_s x''_L \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s + a - b)} \times \\
&\quad \times \left[X_K \otimes X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_L + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_K \otimes X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_L \right].
\end{aligned}$$

Alors, en appliquant τ''_{12} , on obtient

$$\begin{aligned}
\tau''_{12} \circ (id \otimes \delta'') \circ \Delta(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\} \\ K \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K x''_J \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)x''_K} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_K x''_J \\ x''_K x''_I x''_s x''_L \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} \times \\
&\quad \times \left[(-1)^{x''_K(x''_I + u''_s)} X_I \cdot U_s \otimes X_K \otimes V_s \cdot X_L + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1 + x''_K(x''_I + v''_s)} X_I \cdot V_s \otimes X_K \otimes U_s \cdot X_L \right] \\
&= (1) + (2).
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
(\delta'' \otimes id) \circ \Delta(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{K \cup J = \{1, \dots, n\} \\ K, J \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J x''_K \end{matrix} \right) (\delta'' \otimes id)(X_J \otimes X_K) \\
&= \sum_{\substack{K \cup J = \{1, \dots, n\} \\ K, J \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J x''_K \end{matrix} \right) \sum_{\substack{s \in J \\ I \cup L = J \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_J \\ x''_I x''_s x''_L \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} \times \\
&\quad \times \left[X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_L \otimes X_K + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_L \otimes X_K \right] \\
&= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\} \\ K \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_J x''_K \end{matrix} \right) \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_J x''_K \\ x''_I x''_s x''_L x''_K \end{matrix} \right) \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[X_I.U_s \otimes V_s.X_L \otimes X_K + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_I.V_s \otimes U_s.X_L \otimes X_K \right] \\ & = (3) + (4). \end{aligned}$$

En examinant les monômes de type (I), (II), (III) ou (IV) du premier membre, on constate qu'ils apparaissent chaque fois dans un des types bien déterminé du second membre et chacun apparaît une fois et une seule. Il suffit, alors, de vérifier l'égalité des signes. Par exemple:

Dans (I), le terme $X_I.U_s \otimes X_K \otimes V_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{(a-b)(x'_I + u''_s)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I \ x''_s \ x''_J \end{matrix} \right) \varepsilon \left(\begin{matrix} v''_s \ x''_J \\ x''_K \ v''_s \ x''_L \end{matrix} \right) \\ & = (-1)^{(a-b)(x'_I + u''_s)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I \ x''_s \ x''_J \end{matrix} \right) \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_I \ u''_s \ v''_s \ x''_J \\ x''_I \ u''_s \ x''_K \ v''_s \ x''_L \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Or

$$\varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_I \ x''_s \ x''_J \end{matrix} \right) = \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots u''_s \ v''_s \dots x''_n \\ x''_I \ u''_s \ v''_s \ x''_J \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b) \sum_{i \in J} x''_i} (-1)^{(a-b) \sum_{i \in I} x''_i}.$$

Le signe total de (I) est:

$$\begin{aligned} & (-1)^{(a-b)(x'_I + u''_s)} (-1)^{(a-b) \sum_{i \in K \cup L} x''_i} (-1)^{(a-b) \sum_{i \in I} x''_i} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots u''_s \ v''_s \dots x''_n \\ x''_I \ u''_s \ x''_K \ v''_s \ x''_L \end{matrix} \right) \\ & = (-1)^{(a-b)u''_s} (-1)^{(a-b) \sum_{i < s} x''_i} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots u''_s \ v''_s \dots x''_n \\ x''_I \ u''_s \ x''_K \ v''_s \ x''_L \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Dans (1), le terme $X_I.U_s \otimes X_K \otimes V_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{(a-b)x''_K} (-1)^{(a-b)(x'_I + u''_s)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_K \ x''_I \ x''_s \ x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{x''_K(x'_I + u''_s)} \\ & = (-1)^{(a-b)(x'_I + x''_K + u''_s) + x''_K(x'_I + u''_s)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots u''_s \ v''_s \dots x''_n \\ x''_K \ x''_I \ u''_s \ v''_s \ x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b) \sum_{i \in L} x''_i} (-1)^{(a-b) \sum_{i \in K \cup I} x''_i} \\ & = (-1)^{(a-b)u''_s} (-1)^{x''_K(x'_I + u''_s)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots u''_s \ v''_s \dots x''_n \\ x''_K \ x''_I \ u''_s \ v''_s \ x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b) \sum_{i < s} x''_i} \\ & = (-1)^{(a-b)u''_s} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots u''_s \ v''_s \dots x''_n \\ x''_I \ u''_s \ x''_K \ v''_s \ x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b) \sum_{i < s} x''_i}. \end{aligned}$$

Alors, on a (I) = (1).

De même, on vérifie que (II) = (3), (III) = (2) et (IV) = (4). \square

On a prouvé que $(S^+(\mathcal{H}[a-b]), \delta'')$ est une cogèbre de Lie. Montrons qu'avec $Q = m + \ell''$, elle est codifférentielle. Revenons, donc, aux opérateurs m et ℓ'' définis sur $S^+(\mathcal{H}[a-b])$ par:

$$m(X_1 \dots X_n) = \sum_{i=1}^n \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_i \ x''_1 \dots \widehat{i} \dots x''_n \end{matrix} \right) m(X_i).X_1 \dots \widehat{i} \dots X_n$$

et

$$\ell''(X_1 \dots X_n) = \sum_{i < j} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_n \\ x''_i \ x''_j \ x''_1 \dots \widehat{ij} \dots x''_n \end{matrix} \right) \ell''_2(X_i, X_j).X_1 \dots \widehat{ij} \dots X_n.$$

Proposition 4.5.

m et ℓ'' sont des codérivations de δ'' de degré 1, ils vérifient:

- (i) $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \delta'' = (-1)^{a-b} \delta'' \circ m$.
- (ii) $(\ell'' \otimes id + id \otimes \ell'') \circ \delta'' = (-1)^{a-b} \delta'' \circ \ell''$.

Preuve:

(i) D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\delta'' \circ m(X_1 \dots X_n) &= \delta'' \left[\sum_{s=1}^n (-1)^{\sum_{i<s} x''_i} X_1 \dots m(X_s) \dots X_n \right] \\
&= \sum_{\substack{t < s \\ U_t \otimes V_t = X_t \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x''_i} \left[(-1)^{(a-b)(x''_t + u''_t)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_t \dots m(x_s)'' \dots x''_n \\ x''_t \quad x''_t \quad m(x_s)'' \quad x''_t \end{matrix} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left(X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot m(X_s) \cdot X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I \cdot V_t \otimes U_t \cdot m(X_s) \cdot X_J \right) \\
&\quad + (-1)^{(a-b)(x''_t + u''_t + x''_s + 1)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots x''_t \dots m(x_s)'' \dots x''_n \\ x''_t \quad m(x_s)'' \quad x''_t \quad x''_t \end{matrix} \right) \times \\
&\quad \times \left(X_I \cdot m(X_s) \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I \cdot m(X_s) \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \right) \Big] \\
&+ \sum_{\substack{t > s \\ U_t \otimes V_t = X_t \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x''_i} \left[(-1)^{(a-b)(x''_t + u''_t)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots m(x_s)'' \dots x''_t \dots x''_n \\ x''_t \quad x''_t \quad m(x_s)'' \quad x''_t \end{matrix} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left(X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot m(X_s) \cdot X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I \cdot V_t \otimes U_t \cdot m(X_s) \cdot X_J \right) \\
&\quad + (-1)^{(a-b)(x''_t + u''_t + x''_s + 1)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots m(x_s)'' \dots x''_t \dots x''_n \\ x''_t \quad m(x_s)'' \quad x''_t \quad x''_t \end{matrix} \right) \times \\
&\quad \times \left(X_I \cdot m(X_s) \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I \cdot m(X_s) \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \right) \Big] \\
&+ \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ U_s \otimes V_s = X_s \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i<s} x''_i} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 \dots m(x_s)'' \dots x''_n \\ x''_t \quad m(x_s)'' \quad x''_t \end{matrix} \right) \times \\
&\quad \times \left[(-1)^{(a-b)(x''_t + u''_t + 1)} \left(X_I \cdot m(U_s) \otimes V_s \cdot X_J + (-1)^{(u''_t + 1)v''_t + a - b + 1} X_I \cdot V_s \otimes m(U_s) \cdot X_J \right) \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{(a-b)(x''_t + u''_t)} (-1)^{u_s} \left(X_I \cdot U_s \otimes m(V_s) \cdot X_J + (-1)^{(v''_t + 1)u''_t + a - b + 1} X_I \cdot m(V_s) \otimes U_s \cdot X_J \right) \right] \\
&= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum \pm \left(X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot m(X_s) \cdot X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I \cdot V_t \otimes U_t \cdot m(X_s) \cdot X_J \right), \\
&\text{etc ...} \\
(4) &= \sum \pm \left(X_I \cdot m(X_s) \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I \cdot m(X_s) \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \right), \\
(5) &= \sum \pm X_I \cdot m(U_s) \otimes V_s \cdot X_J, \quad (6) = \sum \pm X_I \cdot V_s \otimes m(U_s) \cdot X_J, \\
(7) &= \sum \pm X_I \cdot U_s \otimes m(V_s) \cdot X_J, \quad (8) = \sum \pm X_I \cdot m(V_s) \otimes U_s \cdot X_J.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
(m \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) &= \\
&\sum_{\substack{t < s \\ U_t \otimes V_t = X_t \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_t & \dots & x''_s & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_s & & x''_t & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + x''_s + u''_t)} (-1)^{x''_I} \times \\
&\quad \times \left(X_I.m(X_s).U_t \otimes V_t.X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I.m(X_s).V_t \otimes U_t.X_J \right) \\
+ &\sum_{\substack{t > s \\ U_t \otimes V_t = X_t \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_s & \dots & x''_t & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_s & & x''_t & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + x''_s + u''_t)} (-1)^{x''_I} \times \\
&\quad \times \left(X_I.m(X_s).U_t \otimes V_t.X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I.m(X_s).V_t \otimes U_t.X_J \right) \\
+ &\sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ U_s \otimes V_s = X_s \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_s & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_s & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} (-1)^{x''_I} X_I.m(U_s) \otimes V_s.X_J \\
+ &\sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ U_s \otimes V_s = X_s \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_s & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_s & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} (-1)^{x''_I} (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_I.m(V_s) \otimes U_s.X_J \\
&= (I_1) + (I_2) + (I_3) + (I_4).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(id \otimes m) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) &= \\
&\sum_{\substack{t < s \\ U_t \otimes V_t = X_t \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_t & \dots & x''_s & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_t & & x''_s & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_t)} (-1)^{x''_I + u''_t + v''_t} \times \\
&\quad \times \left(X_I.U_t \otimes V_t.m(X_s).X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I.V_t \otimes U_t.m(X_s).X_J \right) \\
+ &\sum_{\substack{t > s \\ U_t \otimes V_t = X_t \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s, t\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_s & \dots & x''_t & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_t & & x''_s & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_t)} (-1)^{x''_I + u''_t + v''_t} \times \\
&\quad \times \left(X_I.U_t \otimes V_t.m(X_s).X_J + (-1)^{u''_t v''_t + a - b + 1} X_I.V_t \otimes U_t.m(X_s).X_J \right) \\
+ &\sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ U_s \otimes V_s = X_s \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_s & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_s & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} (-1)^{x''_I + u''_s} X_I.U_s \otimes m(V_s).X_J \\
+ &\sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ U_s \otimes V_s = X_s \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left(\begin{array}{cccc} x''_1 & \dots & x''_s & \dots & x''_n \\ x''_I & & x''_s & & x''_J \end{array} \right) (-1)^{(a-b)(x''_I + u''_s)} (-1)^{x''_I + v''_s} (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_I.V_s \otimes m(U_s).X_J \\
&= (II_1) + (II_2) + (II_3) + (II_4).
\end{aligned}$$

On vérifie que les termes (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) et (8) de $\delta'' \circ m(X_1 \dots X_n)$ apparaissent aussi dans $(m \otimes id + id \otimes m) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ à un signe $(-1)^{a-b}$ près.

Par exemple, le terme $X_I.U_t \otimes V_t.m(X_s).X_J + (-1)^{u_t v_t + a - b + 1} X_I.V_t \otimes U_t.m(X_s).X_J$ de (1) apparaît dans $\hat{\delta}'' \circ m(X_1 \dots X_n)$ avec le signe

$$\varepsilon_1 = (-1)^{\sum_{i < s} x_i''} (-1)^{(a-b)(x_I'' + u_t'')} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_t'' \dots m(x_s)'' \dots x_n'' \\ x_I'' \ x_t'' \ m(x_s)'' \ x_J'' \end{matrix} \right).$$

$$\text{Or } \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_t'' \dots m(x_s)'' \dots x_n'' \\ x_I'' \ x_t'' \ m(x_s)'' \ x_J'' \end{matrix} \right) = \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_t'' \dots x_s'' \dots x_n'' \\ x_I'' \ x_t'' \ x_s'' \ x_J'' \end{matrix} \right) (-1)^{\sum_{i \in J} x_i''} (-1)^{\sum_{i > s} x_i''},$$

alors,

$$\varepsilon_1 = (-1)^{(a-b)(x_I'' + u_t'')} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_t'' \dots x_s'' \dots x_n'' \\ x_I'' \ x_t'' \ x_s'' \ x_J'' \end{matrix} \right) (-1)^{x_I'' + x_t''}.$$

Le même terme apparaît dans $(id \otimes m) \circ \hat{\delta}''(X_1 \dots X_n)$, et précisément dans (II_1) , avec le signe

$$\varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_t'' \dots x_s'' \dots x_n'' \\ x_I'' \ x_t'' \ x_s'' \ x_J'' \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x_I'' + u_t'')} (-1)^{x_I'' + u_t'' + v_t''} = (-1)^{a-b} \varepsilon_1.$$

Alors, on trouve que (1) = $(-1)^{(a-b)}(II_1)$.

De même, on démontre que (2) = $(-1)^{(a-b)}(I_1)$, (3) = $(-1)^{(a-b)}(II_2)$, (4) = $(-1)^{(a-b)}(I_2)$, (5) = $(-1)^{(a-b)}(I_3)$, (6) = $(-1)^{(a-b)}(II_4)$, (7) = $(-1)^{(a-b)}(II_3)$ et (8) = $(-1)^{(a-b)}(I_4)$.

(ii) On a

$$\hat{\delta}'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n) = \delta'' \left[\sum_{\substack{i < j \\ K = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x_1'' \dots x_n'' \\ x_i'' \ x_j'' \ x_j'' \end{matrix} \right) \ell_2''(X_i, X_j).X_K \right].$$

Dans $\hat{\delta}'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$ apparaît des termes de la forme

$$\begin{aligned} (1) : \ell_2''(X_i, X_j).X_K.U_s \otimes V_s.X_L, \\ (2) : \ell_2''(X_i, X_j).X_K.V_s \otimes U_s.X_L, \\ (3) : X_K.U_s \otimes V_s.\ell_2''(X_i, X_j).X_L, \\ (4) : X_K.V_s \otimes U_s.\ell_2''(X_i, X_j).X_L, \end{aligned}$$

pour $K \cup L \cup \{i, j, s\} = \{1, \dots, n\}$, $i < j$ et $X_s = U_s \otimes V_s$.

Et d'autres termes dans le cas où on coupe $\ell_2''(X_i, X_j)$ par δ'' de la forme

$$\begin{aligned} (5) : X_K.U_{ij} \otimes V_{ij}.X_L, \\ (6) : X_K.V_{ij} \otimes U_{ij}.X_L, \end{aligned}$$

pour $K \cup L \cup \{i, j\} = \{1, \dots, n\}$, $i < j$ et $\ell_2''(X_i, X_j) = U_{ij} \otimes V_{ij}$.

De plus, en écrivant le premier membre de (ii), on a d'une part,

$$\begin{aligned}
& (\ell'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n) = \\
& (\ell'' \otimes id) \left[\sum_{i < j} \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, s\}} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_i & x''_j & x''_K & x''_s & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_i + x''_j + x''_K + u''_s)} \times \right. \\
& \quad \left. \times (X_i \cdot X_j \cdot X_K \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_L + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_i \cdot X_j \cdot X_K \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_L) \right] \\
& = \sum_{i < j} \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, s\}} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_i & x''_j & x''_K & x''_s & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_i + x''_j + x''_K + u''_s)} \times \\
& \quad \times (\ell''_2(X_i, X_j) \cdot X_K \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_L + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} \ell''_2(X_i, X_j) \cdot X_K \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_L) \\
& + \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} \sum_{\substack{U_j \otimes V_j = X_j \\ U_j, V_j \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_K & x''_i & x''_j & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_K + x''_i + u''_j) + x''_K} \times \\
& \quad \times (X_K \cdot \ell''_2(X_i, U_j) \otimes V_j \cdot X_L + (-1)^{u''_j v''_j + a - b + 1} X_K \cdot \ell''_2(X_i, V_j) \otimes U_j \cdot X_L) \\
& + \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} \sum_{\substack{U_i \otimes V_i = X_i \\ U_i, V_i \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_K & x''_j & x''_i & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_K + x''_j + u''_i) + x''_K} \times \\
& \quad \times (X_K \cdot \ell''_2(X_j, U_i) \otimes V_i \cdot X_L + (-1)^{u''_i v''_i + a - b + 1} X_K \cdot \ell''_2(X_j, V_i) \otimes U_i \cdot X_L) \\
& = (I_1) + (I_2) + (I_3) + (I_4) + (I_5) + (I_6).
\end{aligned}$$

Et d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& (id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n) = \\
& (id \otimes \ell'') \left[\sum_{i < j} \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, s\}} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_K & x''_s & x''_i & x''_j & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_K + u''_s)} \times \right. \\
& \quad \left. \times (X_K \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_i \cdot X_j \cdot X_L + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_K \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_i \cdot X_j \cdot X_L) \right] \\
& = \sum_{i < j} \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, s\}} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_K & x''_s & x''_i & x''_j & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_K + u''_s)} (-1)^{x''_K + u''_s + v''_s} \times \\
& \quad \times (X_K \cdot U_s \otimes V_s \cdot \ell''_2(X_i, X_j) \cdot X_L + (-1)^{u''_s v''_s + a - b + 1} X_K \cdot V_s \otimes U_s \cdot \ell''_2(X_i, X_j) \cdot X_L) \\
& + \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} \sum_{\substack{U_i \otimes V_i = X_i \\ U_i, V_i \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_K & x''_i & x''_j & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_K + u''_i) + x''_K} \times \\
& \quad \times ((-1)^{u''_i} X_K \cdot U_i \otimes \ell''_2(V_i, X_i) \cdot X_L + (-1)^{u''_i v''_i + a - b + 1 + v''_i} X_K \cdot V_i \otimes \ell''_2(U_i, X_j) \cdot X_L) \\
& + \sum_{K \cup L = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} \sum_{\substack{U_j \otimes V_j = X_j \\ U_j, V_j \neq \emptyset}} \varepsilon \left(\begin{matrix} x''_1 & \dots & x''_n \\ x''_K & x''_j & x''_i & x''_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x''_K + u''_j) + x''_K} \times \\
& \quad \times ((-1)^{u''_j} X_K \cdot U_j \otimes \ell''_2(V_j, X_i) \otimes X_L + (-1)^{u''_j v''_j + a - b + 1 + v''_j} X_K \cdot V_j \otimes \ell''_2(U_j, X_i) \cdot X_L) \\
& = (II_1) + (II_2) + (II_3) + (II_4) + (II_5) + (II_6).
\end{aligned}$$

Examinons les termes de $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$ et cherchons les termes correspondants dans le premier membre.

- Dans $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$, le terme (1) : $\ell''_2(X_i, X_j).X_K.U_s \otimes V_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_1 = (-1)^{(a-b)(x'_i+x'_j+1+x'_K+u'_s)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_i \ x'_j \ x'_K \ x'_s \ x'_L \end{matrix} \right).$$

Il correspond au terme (I_1) de $(\ell'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_i \ x'_j \ x'_K \ x'_s \ x'_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x'_i+x'_j+x'_K+u'_s)} = (-1)^{a-b} \varepsilon_1.$$

- Dans $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$, le terme (2) : $\ell''_2(X_i, X_j).X_K.V_s \otimes U_s.X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_2 = (-1)^{(a-b)(x'_i+x'_j+1+x'_K+u'_s)} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_i \ x'_j \ x'_K \ x'_s \ x'_L \end{matrix} \right) (-1)^{u'_s v'_s + a - b + 1}.$$

Il correspond au terme (I_2) de $(\ell'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_i \ x'_j \ x'_K \ x'_s \ x'_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x'_i+x'_j+x'_K+u'_s)} (-1)^{u'_s v'_s + a - b + 1} = (-1)^{a-b} \varepsilon_2.$$

- Dans $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$, le terme (3) : $X_K.U_s \otimes V_s.\ell''_2(X_i, X_j).X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_3 = (-1)^{(a-b)(x'_K+u'_s)} (-1)^{x'_s+x'_K} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_K \ x'_s \ x'_i \ x'_j \ x'_L \end{matrix} \right).$$

Il correspond au terme (II_1) de $(id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_K \ x'_s \ x'_i \ x'_j \ x'_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x'_K+u'_s)} (-1)^{x'_K+u'_s+v'_s} = (-1)^{a-b} \varepsilon_3.$$

- Dans $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$, le terme (4) : $X_K.V_s \otimes U_s.\ell''_2(X_i, X_j).X_L$ apparaît avec le signe

$$\varepsilon_4 = (-1)^{(a-b)(x'_K+u'_s)} (-1)^{x'_s+x'_K} \varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_K \ x'_s \ x'_i \ x'_j \ x'_L \end{matrix} \right) (-1)^{u'_s v'_s + a - b + 1}.$$

Il correspond au terme (II_2) de $(id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ qui apparaît avec le signe

$$\varepsilon \left(\begin{matrix} x'_1 \dots x'_n \\ x'_K \ x'_s \ x'_i \ x'_j \ x'_L \end{matrix} \right) (-1)^{(a-b)(x'_K+u'_s)} (-1)^{x'_K+u'_s+v'_s} (-1)^{u'_s v'_s + a - b + 1} = (-1)^{a-b} \varepsilon_4.$$

Le cas où on coupe $\ell''_2(X_i, X_j)$ par δ'' correspond aux termes (5) et (6) de $\delta'' \circ \ell''(X_1 \dots X_n)$, $(I_3), (I_4), (I_5), (I_6)$ de $(\ell'' \otimes id) \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$ et $(II_3), (II_4), (II_5), (II_6)$ de $(id \otimes \ell'') \circ \delta''(X_1 \dots X_n)$. On pourra voir ce cas comme si on a uniquement deux paquets X et Y . Il suffit de montrer que:

$$(-1)^{a-b} \delta'' \circ \ell''_2(X, Y) = (\ell''_2 \otimes id + id \otimes \ell''_2) \circ \delta''(X, Y) : (**).$$

Mais, le crochet et le cocrochet ℓ''_2 et δ'' étaient ℓ_2 et δ sur \mathcal{H} . Ils vérifient une relation de compatibilité donnée par:

$$\delta \circ \ell_2(X, Y) = \left((\ell_2 \otimes id) \circ (\tau_{23} \circ (\delta \otimes id) + id \otimes \delta) + (id \otimes \ell_2) \circ (\delta \otimes id + \tau_{12} \circ (id \otimes \delta)) \right) (X, Y).$$

En décalant \mathcal{H} par $a - b$ et en écrivant ℓ''_2 et δ'' sur $S^2(\mathcal{H}[a - b])$, la symétrisation de la relation précédente donne (**). Ceci achève la démonstration. \square

La proposition précédente nous montre que $Q = \ell'' + m$ est une codérivation de $S^+(\mathcal{H}[a - b])$ pour δ'' de degré 1. Alors, le complexe $(S^+(\mathcal{H}[a - b]), \delta'', Q)$ est une cogèbre de Lie codifférentielle graduée, donc, c'est aussi une C_∞ algèbre.

Enfin, le cocrochet δ'' et le coproduit Δ vérifient l'identité de coLeibniz:

$$(id \otimes \Delta) \circ \delta'' = (\delta'' \otimes id) \circ \Delta + \tau'_{12} \circ (id \otimes \delta'') \circ \Delta.$$

Alors, $(S^+(\mathcal{H}[a - b]), \Delta, \delta'', Q)$ est une bicogèbre codifférentielle graduée.

Définition 4.6.

Soit \mathcal{A} est une (a, b) -algèbre différentielle. Alors, la bicogèbre colibre et codifférentielle

$$\left(S^+ \left(\left(\underline{\otimes}^+ \mathcal{A}[-a+1] \right) [a-b] \right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m \right)$$

est la (a, b) -algèbre à homotopie près enveloppante de \mathcal{A} .

Remarque 4.7.

- Dans le cas où $a = 0$, $b = -1$ et \mathcal{A} est une algèbre de Gerstenhaber différentielle, on retrouve l'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près enveloppante de \mathcal{A} :

$$\left(S^+ \left(\left(\underline{\otimes}^+ \mathcal{A}[1] \right) [1] \right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m \right).$$

- Dans le cas où $a = b = 0$ et \mathcal{A} est une algèbre de Poisson différentielle graduée, on retrouve le complexe de l'algèbre de Poisson à homotopie près enveloppante de \mathcal{A} :

$$\left(S^+ \left(\underline{\otimes}^+ \mathcal{A}[1] \right), \Delta, \delta'', Q = \ell'' + m \right).$$

On conclut que notre construction généralise celle des algèbres de Gerstenhaber et de Poisson à homotopie près.

5. EXEMPLES

5.1. Exemple 1.

On considère l'espace vectoriel $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ des multichamps de vecteurs totalement antisymétrique sur \mathbb{R}^d . Cet espace muni du crochet de Schouten $[,]_S$, du produit extérieur \wedge et de la graduation $\text{degré}(\alpha) = k$, si α est un k -tenseur, est bien sûr une algèbre de Gerstenhaber.

On appelle E le sous espace vectoriel de $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ engendré par les tenseurs

$$\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k}(x) \partial x_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x_{i_k},$$

où $\alpha^{i_1, \dots, i_k}(x)$ est un polynôme homogène de degré m .

On peut munir E de la graduation: $|\alpha| = 2m + k$, si α est un k -tenseur et $\alpha^{i_1 \dots i_k}(x)$ est un polynôme homogène de degré m .

En fait, l'espace E est stable par le produit extérieur \wedge et par le crochet de Schouten $[,]_S$. Si on considère deux tenseurs α et β de E de degré respectivement $|\alpha| = 2m + k$ et $|\beta| = 2n + \ell$. Alors, on a pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in E$,

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha \quad \text{et} \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

Le produit extérieur \wedge est alors un produit commutatif et associatif gradué de E . Il est de degré 0 puisque $|\alpha \wedge \beta| = 2(n + m) + (k + \ell) = |\alpha| + |\beta|$.

On obtient que (E, \wedge) est une algèbre commutative et associative graduée.

D'autre part, le crochet de Schouten est de degré -3 dans E puisque $[[\alpha, \beta]_S] = 2(n + m - 1) + (k + \ell - 1) = |\alpha| + |\beta| - 3$.

On considère, alors, l'espace $E[3]$ et la graduation $\deg(\alpha) = |\alpha| - 3 = 2m + k - 3$.

Sur $E[3]$, le crochet de Schouten sera de degré 0 et vérifie:

$$[\alpha, \beta]_S = -(-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)}[\beta, \alpha]_S$$

$$\text{et } (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\gamma)}[[\alpha, \beta]_S, \gamma]_S + (-1)^{\deg(\beta)\deg(\alpha)}[[\beta, \gamma]_S, \alpha]_S + (-1)^{\deg(\gamma)\deg(\beta)}[[\gamma, \alpha]_S, \beta]_S = 0.$$

Alors, $(E[3], [\ , \]_S)$ est une algèbre de Lie graduée. De plus, le crochet $[\ , \]_S$ et le produit \wedge vérifient l'identité de Leibniz donnée par:

$$[\alpha, \beta \wedge \gamma]_S = [\alpha, \beta]_S \wedge \gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-3)}\beta \wedge [\alpha, \gamma]_S.$$

Donc, $(E, [\ , \]_S, \wedge)$ est une $(0, -3)$ -algèbre.

Enfin, si on munit E de la différentielle nulle $d = 0$, on obtient que $(E, [\ , \]_S, \wedge, 0)$ est une $(0, -3)$ -algèbre différentielle et on sait construire l'algèbre à homotopie près associée à E .

5.2. Exemple 2.

On considère $S(\mathbb{R}^d)$ l'algèbre symétrique de \mathbb{R}^d . Un élément homogène f de $S(\mathbb{R}^d)$ est un polynôme homogène de degré k . On munit $S(\mathbb{R}^d)$ de la graduation:

$$|f| = 2k, \text{ si } f \text{ est un polynôme de degré } k.$$

Sur $S(\mathbb{R}^d)$, on considère la multiplication usuelle \cdot des polynômes. Elle vérifie pour tout $f, g, h \in S(\mathbb{R}^d)$:

$$f \cdot g = (-1)^{|f||g|}g \cdot f \text{ et } f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h.$$

La multiplication \cdot est une opération de degré 0 sur $S(\mathbb{R}^d)$ puisque $|f \cdot g| = 2(k + \ell) = |f| + |g|$.

D'autre part, on munit $S(\mathbb{R}^d)$ d'un crochet de Poisson défini par:

$$\{f, g\} = \sum_{i,j} \alpha^{i,j}(x) \partial_{x_i}(f) \cdot \partial_{x_j}(g),$$

où pour tout i, j , les coefficients $\alpha^{i,j}(x)$ est un polynôme homogène de degré m .

Ce crochet est de degré $2m - 4$ puisque $|\{f, g\}| = 2(m + k - 1 + \ell - 1) = |f| + |g| + 2m - 4$.

On considère, alors, l'espace $S(\mathbb{R}^d)[-2m + 4]$ et la graduation $\deg(f) = |f| + 2m - 4$.

Sur $S(\mathbb{R}^d)[-2m + 4]$, le crochet de Poisson sera de degré 0 et vérifie:

$$\{f, g\} = -(-1)^{\deg(f)\deg(g)}\{g, f\}$$

$$\text{et } (-1)^{\deg(f)\deg(\gamma)}\{\{f, g\}, \gamma\} + (-1)^{\deg(g)\deg(f)}\{\{g, \gamma\}, f\} + (-1)^{\deg(\gamma)\deg(g)}\{\{\gamma, f\}, g\} = 0.$$

Alors, $(S(\mathbb{R}^d)[-2m + 4], \{ \ , \ \}, \cdot)$ est une algèbre de Lie graduée. De plus, le crochet $\{ \ , \ \}$ et le produit \cdot vérifient l'identité de Leibniz donnée par:

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + (-1)^{|g|(|f|+2m-4)}g \cdot \{f, h\}.$$

Donc, $(S(\mathbb{R}^d), \{ \ , \ \}, \cdot)$ est une $(0, 2m - 4)$ -algèbre.

Enfin, si on munit $S(\mathbb{R}^d)$ de la différentielle nulle $d = 0$, on obtient que $(S(\mathbb{R}^d), \{ \ , \ \}, \cdot, 0)$ est une $(0, 2m - 4)$ -algèbre différentielle et on sait construire l'algèbre à homotopie près associée à $S(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 5.1.

Dans ces deux derniers exemples, pour tenir compte du degré des fonctions polynômes, on a muni les fonctions linéaires $x \mapsto x_i$ sur \mathbb{R}^d du degré 2. En effet, puisqu'on veut que \wedge restreint à $S(\mathbb{R}^d) \subset E$ ou \cdot sur $S(\mathbb{R}^d)$ soit la multiplication usuelle et puisque $x_i x_j = x_j x_i$, pour tout i, j , on doit donner à ces variables un degré pair.

On veut généraliser, maintenant, ces exemples à un super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ pour lequel $S(\mathbb{R}^{p|q}) \simeq S(\mathbb{R}^p) \otimes \wedge(\mathbb{R}^q)$ admet une base notée $(x_{i_1} \dots x_{i_k} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_r})$ avec $i_1 \leq \dots \leq i_k$ et $j_1 < \dots < j_r$.

5.3. Exemple 3. (Le crochet de Schouten sur le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$)

On reprend l'article [AMM] dans le cas d'un super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_p | \xi_1, \dots, \xi_q)$. Les variables x_i commutent donc elles sont de degré pair. On pose

$$d^\circ x_i = 2.$$

Les variables ξ_j anticommulent donc elles sont de degré impair. On pose

$$d^\circ \xi_j = 1.$$

Les champs de vecteurs ∂_{x_i} et ∂_{ξ_j} associés sont des dérivations graduées de l'algèbre des polynômes en x_i et ξ_j :

$$S(\mathbb{R}^{p|q}) \simeq S(\mathbb{R}^p) \otimes \wedge(\mathbb{R}^q)$$

de degré

$$d^\circ \partial_{x_i} = -2 \text{ et } d^\circ \partial_{\xi_j} = -1.$$

Comme dans [AMM], on modifie ces degrés pour obtenir la graduation naturelle de $T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})$. On va donc poser:

$$|x_i| = 2, |\xi_j| = 1, |\partial_{x_i}| = -3 \text{ et } |\partial_{\xi_j}| = -2.$$

Le produit extérieur usuel \wedge_0 était défini par:

$$\partial_i \wedge_0 \partial_j = \partial_i \otimes \partial_j - (-1)^{d^\circ(\partial_i)d^\circ(\partial_j)} \partial_j \otimes \partial_i,$$

où ∂_i est soit ∂_{x_i} soit ∂_{ξ_i} .

Pour tenir compte du décalage, on pose maintenant

$$\partial_i \wedge \partial_j = (-1)^{|\partial_i|} \partial_i \wedge_0 \partial_j.$$

On complète ce produit extérieur avec le produit usuel, on aura

$$x_i \wedge x_j = x_i x_j, x_i \wedge \xi_j = \xi_j \wedge x_i = \xi_j x_i, \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i, x_i \wedge \partial_j = x_i \partial_j, \xi_i \wedge \partial_j = -\xi_i \partial_j.$$

L'espace $T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q}) = \left(S(\mathbb{R}^p) \otimes \wedge(\mathbb{R}^q) \right) \otimes \left(\wedge(\mathbb{R}^p)^* \otimes S(\mathbb{R}^q)^* \right)$ est maintenant muni d'un produit \wedge associatif et commutatif gradué, de degré $|\wedge| = 0$.

Un élément $\alpha \in T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})$ s'écrit:

$$\alpha = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq p \\ 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_m \leq q}} \sum_{\substack{1 \leq s_1 < \dots < s_r \leq p \\ 1 \leq t_1 \leq \dots \leq t_u \leq q}} \alpha_{s_1 \dots s_r t_1 \dots t_u}^{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} x_{s_1} \dots x_{s_r} \xi_{t_1} \dots \xi_{t_u} \partial_{x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{x_{i_n}} \wedge \partial_{\xi_{j_1}} \wedge \dots \wedge \partial_{\xi_{j_m}},$$

ce qu'on notera simplement par:

$$\alpha = \sum_{S, T, I, J} \alpha_{ST}^{IJ} x_S \xi_T \partial_{x_I} \wedge \partial_{\xi_J}.$$

On a $|\alpha| = 2\#S + \#T - 3\#I - 2\#J$.

Sur $T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})$, la multiplication \wedge est définie par:

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{S,T,I,J \\ A,B,C,D}} (-1)^{\#B\#I} \alpha_{ST}^{IJ} \beta_{AB}^{CD} x_S x_A \xi_T \xi_B \partial_{x_I} \wedge \partial_{x_C} \wedge \partial_{\xi_J} \wedge \partial_{\xi_D}.$$

D'autre part, les champs de vecteurs $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{p|q})$ de la forme $X = \sum_i \tilde{X}^i(x, \xi) \partial_i$ sur le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ ont été étudiés par plusieurs auteurs [BB]. Cet espace est muni d'un crochet défini par:

$$[X, Y] = X \circ Y - (-1)^{(|X|-1)(|Y|-1)} Y \circ X.$$

On étend ce crochet au crochet de Schouten des multichamps de vecteurs en posant:

$$[X_1 \wedge \cdots \wedge X_n, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_m]_S = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^m (-1)^{|X_s|(|X_{s+1}|+\cdots+|X_n|)+|Y_t|(|Y_1|+\cdots+|Y_{t-1}|)} X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_s \wedge \cdots \wedge X_n \wedge [X_s, Y_t] \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge \hat{Y}_t \wedge \cdots \wedge Y_m.$$

(Voir par exemple [AAC1], [AIPP-B], [K], [Le]...)

Ceci revient à imposer une relation de Leibniz de la forme:

$$[X, Y \wedge Z] = [X, Y] \wedge Z + (-1)^{|Y|(|X|-1)} Y \wedge [X, Z].$$

En fait le degré naturel sur $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{p|q})$ pour ce crochet est

$$deg(X) = |X| + 1$$

puisque $[[,]] = 1$. On trouve que $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^{p|q})$ muni de deg et $[,]$ est une algèbre de Lie graduée.

De même, si on pose

$$deg(X_1 \wedge \cdots \wedge X_n) = |X_1 \wedge \cdots \wedge X_n| + 1,$$

alors, $(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})[-1], [,]_S)$ est une algèbre de Lie graduée (pour deg).

On peut, comme dans [AMM], réécrire ces opérations ainsi:

Pour deux champs de vecteurs $X = \sum_i \tilde{X}^i(x, \xi) \partial_i$ et $Y = \sum_j \tilde{Y}^j(x, \xi) \partial_j$, on a:

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \tilde{X}^i(x, \xi) \partial_i (\tilde{Y}^j(x, \xi)) \partial_j - (-1)^{deg(X)deg(Y)} \tilde{Y}^j(x, \xi) \partial_j (\tilde{X}^i(x, \xi)) \partial_i.$$

Pour deux tenseurs

$$\alpha = \sum_{i_1, \dots, i_n} \tilde{\alpha}^{i_1 \dots i_n}(x, \xi) \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_n} = \sum_I \tilde{\alpha}^I(x, \xi) \partial_I$$

et

$$\beta = \sum_{j_1, \dots, j_m} \tilde{\beta}^{j_1 \dots j_m}(x, \xi) \partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_m} = \sum_J \tilde{\beta}^J(x, \xi) \partial_J,$$

on a:

$$[\alpha, \beta]_S = \sum_{I,J} \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{|\partial_{i_s}|(|\partial_{i_1}|+\cdots+|\partial_{i_{s-1}}|)+(|\tilde{\beta}^J|+1)(|\partial_I|-|\partial_{i_s}|)} \tilde{\alpha}^I(x, \xi) \partial_{i_s} (\tilde{\beta}^J(x, \xi)) \partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\partial}_{i_s} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_n} \wedge \partial_J \right. \\ \left. - \sum_{t=1}^m (-1)^{|\partial_{j_t}|(|\partial_{j_1}|+\cdots+|\partial_{j_{t-1}}|)+(|\tilde{\beta}^J|+|\partial_{j_t}|+1)(|\alpha|+1)} \tilde{\beta}^J(x, \xi) \partial_{j_t} (\tilde{\alpha}^I(x, \xi)) \partial_I \wedge \partial_{j_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\partial}_{j_t} \wedge \cdots \wedge \partial_{j_m} \right).$$

Ce qu'on peut l'écrire comme dans [AMM]:

$$[\alpha, \beta]_S = (-1)^{|\alpha|+1} \alpha \bullet \beta - (-1)^{|\alpha|(|\beta|+1)} \beta \bullet \alpha,$$

avec

$$\alpha \bullet \beta = \sum_{s=1}^n (-1)^{|\alpha|+1+|\partial_{i_s}|(|\partial_{i_1}|+\dots+|\partial_{i_{s-1}}|)+(|\tilde{\beta}^J|+1)(|\partial_I|-|\partial_{i_s}|)} \tilde{\alpha}^I(x, \xi) \partial_{i_s}(\tilde{\beta}^J(x, \xi)) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{s} \wedge \dots \wedge \partial_{i_n} \wedge \partial_J.$$

Finalement, on a une relation de Leibniz de la forme:

$$[\alpha, \beta \wedge \gamma]_S = [\alpha, \beta]_S \wedge \gamma + (-1)^{(deg(\beta)-1)deg(\alpha)} \beta \wedge [\alpha, \gamma]_S.$$

On en déduit que $(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q}), \wedge, [,]_S, d = 0)$ est une $(0, 1)$ -algèbre différentielle graduée puisque $(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q}), \wedge)$ est une algèbre commutative graduée et $(T_{poly}(\mathbb{R}^{p|q})[-1], [,]_S)$ est une algèbre de Lie graduée telle que \wedge et $[,]_S$ vérifie l'identité de Leibniz.

5.4. Exemple 4. (Le crochet de Poisson sur le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$)

Reprenons le super-espace $\mathbb{R}^{p|q}$ avec les variables x_i et ξ_j de degrés:

$$|x_i| = 2 \text{ et } |\xi_j| = 1.$$

L'algèbre $S(\mathbb{R}^{p|q}) = S(\mathbb{R}^p) \otimes \wedge(\mathbb{R}^q)$ devient une algèbre commutative graduée pour ce degré:

$$f \cdot g = (-1)^{|f||g|} g \cdot f.$$

Cette algèbre admet des dérivations graduées ∂_{x_i} et ∂_{ξ_j} avec $|\partial_{x_i}| = -2$ et $|\partial_{\xi_j}| = -1$. Suivant [AIPP-B], on définit un crochet de Poisson homogène de degré $m \in \mathbb{Z}$ sur $S(\mathbb{R}^{p|q})$ en posant:

$$\{f, g\} = (-1)^{m|f|} \sum_{i,j} (-1)^{|\partial_j|(|f|+|\partial_i|)} \omega^{ij}(x, \xi) \partial_i(f) \partial_j(g),$$

où ω^{ij} est une fonction polynôme. Dire que $\{ , \}$ est un crochet de Poisson, c'est à dire que $(S(\mathbb{R}^{p|q})[-m], \{ , \})$ est une algèbre de Lie graduée. Ceci se traduit par trois conditions sur les ω^{ij} :

- (i) : $|\omega^{ij}| + |\partial_i| + |\partial_j| = m, \forall i, j,$
- (ii) : $\omega^{ij}(x, \xi) = (-1)^{|\partial_i||\partial_j|+m+1} \omega^{ji}(x, \xi), \forall i, j,$
- (iii) : $\sum_k (-1)^{|\partial_\ell|(m+|\partial_i|)} \omega^{\ell,k}(x, \xi) \partial_k(\omega^{ji}(x, \xi)) + (-1)^{|\partial_j|(m+|\partial_\ell|)} \omega^{j,k}(x, \xi) \partial_k(\omega^{i\ell}(x, \xi))$
 $+ (-1)^{|\partial_i|(m+|\partial_j|)} \omega^{i,k}(x, \xi) \partial_k(\omega^{\ell j}(x, \xi)) = 0, \forall i, j, \ell.$

Enfin, la relation de Leibniz est bien vérifiée pour \cdot et $\{ , \}$. Elle s'écrit:

$$\{f, g \cdot h\} = \{f, g\} \cdot h + (-1)^{|g|(|f|+m)} g \cdot \{f, h\}.$$

On obtient, donc, que $(S(\mathbb{R}^{p|q}), \cdot, \{ , \}, d = 0)$ est une $(0, m)$ -algèbre différentielle graduée.

REFERENCES

- [AAC1] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels*, Pacific J of Math, vol 229, no 2 (2007), 257-292.
- [AAC2] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologies associées*, preprint Université de Bourgogne (2007).
- [AIPP-B] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, A. M. Perelemov, J. C. Pérez-Bueno, *The \mathbb{Z}_2 -graded Schouten-Nijenhuis bracket and generalized super-Poisson structures*, preprint arXiv:hep-th/9612186v2 5 Apr 1997.
- [AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, Pacific J of Math, vol 203, no 1 (2002), 23-66.
- [BB] I. Basdouri, M. Ben ammar, *Cohomology of $\mathfrak{osp}(1|2)$ acting on linear differential operators on the supercircle $S^{1|1}$* , Preprint arXiv:0709.1768v1 [math.RT] 12 Sep 2007.
- [BGHHW] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H.C. Herbig, S. Waldmann, *Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur des sous variétés coisotropes*, math.QA/0504276 v 1 13 Apr 2005.
- [F] B. Fresse, *Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson*, Annales mathématiques Blaise Pascal Vol 13. N° 2, 2006, 237-312.
- [G] G. Ginot, *Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 11, no 1 (2004), 95-126.
- [GH] G. Ginot, G. Halbout, *A formality theorem for Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. Vol 66 (2003), 37-64.
- [K] B. Kupersmidt, *Odd and even Poisson brackets in dynamical systems*, Lett. Math. Phys. Vol 9 (1985), 323-330.
- [Le] D. A. Leites, *New superalgebras and mechanics*, Sov. Math. Dokl. Vol 18 (1977), 1277-1280.
- [Lo] J.L. Loday, *Cyclic Homology*, Second Edition, Volume 301, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, A series of comprehensive studies in mathematics, Springer.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, FACULTÉ DES SCIENCES DE MONASTIR, AVENUE DE L'ENVIRONNEMENT, 5019 MONASTIR, TUNISIE,

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE, UMR CNRS 5584, UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE, U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES B.P. 47870, F-21078 DIJON CEDEX, FRANCE
E-mail address: `Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn`