



**HAL**  
open science

# Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologie de Chevalley-Harrison

Walid Aloulou, Didier Arnal, Ridha Chatbouri

► **To cite this version:**

Walid Aloulou, Didier Arnal, Ridha Chatbouri. Algèbres et cogèbres de Gerstenhaber et cohomologie de Chevalley-Harrison. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2009, 133 (1), pp.1-50. hal-00294976

**HAL Id: hal-00294976**

**<https://hal.science/hal-00294976v1>**

Submitted on 11 Jul 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ALGÈBRES ET COGÈBRES DE GERSTENHABER ET COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY-HARRISON

WALID ALOULOU, DIDIER ARNAL ET RIDHA CHATBOURI

ABSTRACT. The fundamental example of Gerstenhaber algebra is the space  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  of polyvector fields on  $\mathbb{R}^d$ , equipped with the wedge product and the Schouten bracket.

In this paper, we explicitly describe what is the enveloping  $G_\infty$  algebra of a Gerstenhaber algebra  $\mathcal{G}$ . This structure gives us a definition of the Chevalley-Harrison cohomology operator for  $\mathcal{G}$ .

We finally show the nontriviality of a Chevalley-Harrison cohomology group for a natural Gerstenhaber subalgebra in  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ .

**Résumé.** Un prototype des algèbres de Gerstenhaber est l'espace  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  des champs de tenseurs sur  $\mathbb{R}^d$  muni du produit extérieur et du crochet de Schouten.

Dans cet article, on décrit explicitement la structure de la  $G_\infty$  algèbre enveloppante d'une algèbre de Gerstenhaber. Cette structure permet de définir une cohomologie de Chevalley-Harrison sur cette algèbre.

On montre que cette cohomologie à valeur dans  $\mathbb{R}$  n'est pas triviale dans le cas de la sous algèbre de Gerstenhaber des tenseurs homogènes  $T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$ .

## 1. INTRODUCTION ET MOTIVATION

L'espace  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  des champs de tenseurs antisymétriques est une algèbre de Lie graduée pour le crochet de Schouten. Afin d'étudier la cohomologie de Chevalley de cette algèbre pour la représentation adjointe, on peut se restreindre comme dans [AAC1] à des cochaînes très simples: les cochaînes linéaires ou vectorielles définies sur les champs de vecteurs (respectivement les tenseurs linéaires). Dans les deux cas, la cohomologie est donnée par les mêmes cochaînes caractérisées par leur valeur sur les champs de vecteurs linéaires

$$\alpha = \sum \alpha^i(x) \partial_i, \quad \alpha^i(x) \text{ linéaire.}$$

Mais  $\mathcal{G} = T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  possède une structure plus riche: c'est une algèbre de Gerstenhaber pour le produit extérieur et le crochet de Schouten. Grâce à cette structure, on peut définir une cohomologie de Chevalley-Harrison dont les cochaînes sont les applications linéaires de

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18G55, 16W30, 16E45, 53D55.

*Key words and phrases.* Algèbres homotopiques, cogèbres, algèbres différentielles graduées, cohomologie.

Ce travail a été effectué dans le cadre de l'accord CMCU 06 S 1502. W. Aloulou et R. Chatbouri remercient l'Université de Bourgogne pour l'accueil dont ils ont bénéficié au cours de leurs séjours, D. Arnal remercie la Faculté des Sciences de Monastir pour l'accueil dont il a bénéficié au cours de ses séjours.

$S^+((\underline{\otimes}^+ \mathcal{G}[1])[1])$  dans  $\mathcal{G}[1]$  (la définition de cette bicogèbre est donnée dans les sections 6 et 7). Cette dernière cohomologie est triviale (voir [GH] ou [T]).

Les champs de vecteurs ou les tenseurs linéaires ne sont que des sous algèbres de Lie de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ . Une sous algèbre de Gerstenhaber simple (et intéressante) de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  est formée par l'espace noté  $T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$  des tenseurs homogènes, c'est à dire des tenseurs

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k}(x) \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}, \quad \text{avec } \alpha^{i_1 \dots i_k}(x) \text{ polynôme homogène de degré } k.$$

En particulier, cette sous algèbre est de dimension finie et elle contient toutes les structures de Poisson quadratiques. Les cocycles de Chevalley fondamentaux sur les champs de vecteurs et les tenseurs linéaires décrits dans [AAC1] et [AAC2] ne sont pas nuls sur  $T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$ .

Le but de cet article est d'étudier plus en détail cette situation. Tout d'abord, nous reprenons explicitement et complètement la construction de la structure de cogèbre de Gerstenhaber et de  $G_\infty$ -algèbre induites par celle d'algèbre de Gerstenhaber sur l'espace  $S^+((\underline{\otimes}^+ \mathcal{G}[1])[1])$ , ceci nous permet de préciser à chaque étape les signes apparaissant dans les prolongements des opérateurs définis sur  $\mathcal{G}$ . Plus précisément, une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué  $\mathcal{G}$  muni de deux opérations  $\wedge$  et  $[\ , \ ]$  de degrés respectifs 0 et  $-1$  et respectivement commutatif et antisymétrique gradués. Malheureusement les axiomes usuels de cette structure ne satisfont pas la règle des signes de Koszul sur  $\mathcal{G}$ . On procède donc à un premier décalage en considérant l'espace  $\mathcal{G}[1]$ . On obtient deux opérations  $\mu_2$  et  $[\ , \ ]$ , dont la symétrie est l'opposée de celle de  $\wedge$  et  $[\ , \ ]$  et dont les axiomes vérifient bien la règle des signes de Koszul.

On effectue, alors, le prolongement en  $\mu$  et  $[\ , \ ]$  de ces deux structures sur le quotient  $\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])$  de  $T(\mathcal{G}[1])$  par l'espace engendré par les images de toutes les applications battements.

Sur  $\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])$ , on a un cocrochet naturel  $\delta$ . Le produit  $\mu$  est une codérivation de  $\delta$  telle que  $\mu \circ \mu = 0$ .

Revenant au crochet  $[\ , \ ]$ , on l'étend à  $\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])$  de façon à en faire une algèbre de Lie. La construction classique consiste à considérer l'espace  $S^+((\underline{\otimes}^+ \mathcal{G}[1])[1])$  et à le munir d'un coproduit  $\Delta$  et d'une codérivation  $\ell$  telle que  $\ell \circ \ell = 0$ . Il reste à décaler  $\delta$  et  $\mu$  respectivement en  $\kappa$  et  $m$  pour les étendre aussi à  $S^+((\underline{\otimes}^+ \mathcal{G}[1])[1])$ . Cependant,  $m$  et  $\ell$  sont des codérivations de  $\Delta$  et  $\kappa$  telles que  $(m + \ell) \circ (m + \ell) = 0$ . Cette construction est explicitement décrite dans les sections 5 et 6.

Finalement, on montre que le 3-cocycle de Chevalley fondamental  $C$  défini sur les champs de vecteurs à valeurs dans  $C^\infty(\mathbb{R}^d)$  donne sur  $T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$  une cochaîne à valeurs dans  $\mathbb{R}$  notée  $f$ . Nous montrons que  $f$  est un cocycle de Chevalley-Harrison non trivial.

## 2. $A_\infty$ ALGÈBRES ET COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD

Soit  $A$  une algèbre associative  $|$ -graduée, son produit  $A \otimes A \longrightarrow A$ ,  $\alpha \otimes \beta \longmapsto \alpha.\beta$  est associatif de degré 0. On considère l'espace  $A[1]$  et la graduation  $\deg(\alpha) = |\alpha| - 1$  qu'on note simplement par la lettre  $\alpha$ . On construit un nouveau produit  $m_2$  sur  $A[1]$  défini par  $m_2(\alpha \otimes \beta) = (-1)^\alpha \alpha.\beta$ . Alors,  $m_2$  devient un produit antiassociatif de degré 1 sur  $A[1]$ :

$$m_2(m_2(\alpha, \beta), \gamma) = -(-1)^\alpha m_2(\alpha, m_2(\beta, \gamma)).$$

On considère, maintenant, l'algèbre tensorielle de  $A[1]$  sans unité:  $T^+(A[1]) = \bigoplus_{p \geq 1} (\otimes^p A[1])$ .

Cette algèbre munie du coproduit de déconcaténation

$$\Delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p)$$

est une cogèbre coassociative. En effet, on a

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta) \circ \Delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) &= (id \otimes \Delta) \left( \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \right) \\ &= \sum_{1 \leq k < j \leq p-1} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_j) \otimes (\alpha_{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes id) \circ \Delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) &= (\Delta \otimes id) \left( \sum_{j=1}^{p-1} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_j) \otimes (\alpha_{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \right) \\ &= \sum_{1 \leq k < j \leq p-1} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_j) \otimes (\alpha_{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p). \end{aligned}$$

Donc,  $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$  et la cogèbre  $(T^+(A[1]), \Delta)$  est alors coassociative. Cette cogèbre est colibre, ce qui permet de prolonger toute application linéaire  $Q_k : \otimes^k A[1] \longrightarrow A[1]$  en une codérivation de façon unique. En particulier, on prolonge le produit  $m_2$  à  $(T^+(A[1]), \Delta)$  comme une codérivation  $m$  de cette cogèbre  $((m \otimes id + id \otimes m) \circ \Delta = \Delta \circ m)$  en posant:

$$m(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{\sum_{i < j} \alpha_i} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{j-1} \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{j+2} \otimes \cdots \otimes \alpha_p.$$

La codérivation  $m$  est de degré 1 dans  $T^+(A[1])$ , elle vérifie  $m \circ m = 0$ .

En effet, d'une part on a

$$\begin{aligned}
(m \otimes id + id \otimes m) \circ \Delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) &= (m \otimes id + id \otimes m) \left( \sum_{k=1}^{p-1} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes \alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p-1} \left( \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=k+1}^{p-1} (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \right) \\
&= \sum_{1 \leq j < k \leq p-1} (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \\
&\quad + \sum_{1 \leq k < j \leq p-1} (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_p).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\Delta \circ m(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p) &= \Delta \left( \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{j-1} \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{j+2} \otimes \cdots \otimes \alpha_p \right) \\
&= \sum_{1 \leq j < k \leq p-1} (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \\
&\quad + \sum_{1 \leq k < j \leq p-1} (-1)^{\sum_{i<j} \alpha_i} (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) \otimes (\alpha_{k+1} \otimes \cdots \otimes m_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \otimes \cdots \otimes \alpha_p) \\
&= (m \otimes id + id \otimes m) \circ \Delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p).
\end{aligned}$$

$m$  étant une codérivation de degré impair,  $m \circ m = 0$  est aussi une codérivation. Avec les notations précédentes,  $m \circ m$  est l'unique prolongement de  $(m \circ m)_3$  et puisque

$$(m \circ m)_3(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3) = m_2(m_2(\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes \alpha_3) + (-1)^{a_1} \alpha_1 \otimes m_2(\alpha_2 \otimes \alpha_3) = 0.$$

Par unicité de la codérivation qui prolonge les  $(m \circ m)_k$ , on en déduit que  $m \circ m = 0$ .

### Définition 2.1. ( $A_\infty$ algèbre)

Une  $A_\infty$  algèbre est une cogèbre codifférentielle graduée coassociative de la forme  $(T^+(A[1]), \Delta, m)$  où  $\Delta$  est le coproduit de déconcaténation et  $m$  est une codérivation de  $\Delta$  de degré 1 et de carré nul.

Soit  $F : (T^+(A[1]), \Delta) \longrightarrow (T^+(B[1]), \Delta')$  un morphisme de cogèbres  $((F \otimes F) \circ \Delta = \Delta' \circ F)$ . On définit la projection  $F_n$  sur  $B[1]$  parallèlement à  $\bigoplus_{n \geq 1} (\otimes^n B[1])$  de la restriction de  $F$  à  $T^n(A[1])$ . L'application  $F_n : T^n(A[1]) \longrightarrow B[1]$  est  $n$ -linéaire. Si on connaît la

suite des  $(F_n)_n$ , on montre qu'on peut reconstruire  $F$  de façon unique, plus précisément:

$$F(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{0 < r_1 < \cdots < r_k < n} F_{r_1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{r_1}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{r_{k-1}+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n)$$

Nous exposons en détail cette preuve dans la section 4 dans le cas commutatif.

**Définition 2.2.** (morphisme de  $A_\infty$  algèbres)

Un morphisme de  $A_\infty$  algèbres  $A$  et  $B$  est un morphisme de cogèbres coassociatives codifférentielles  $F : (T^+(A[1]), m^A) \longrightarrow (T^+(B[1]), m^B)$  tel que  $m^B \circ F = F \circ m^A$ .

L'équation de  $A_\infty$  morphisme  $m^B \circ F = F \circ m^A$  écrite sur les applications  $F_n : T^n(A[1]) \longrightarrow B[1]$  définissant  $F$  prend la forme suivante: Posons  $\alpha_{\{1, \dots, n\}} = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ .

D'une part, on a

$$\begin{aligned} m^B \circ F(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= \sum_{k, 0 < r_1 < \cdots < r_k < n} m^B \left( F_{r_1}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{r_1}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{r_{k-1}+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n) \right) \\ &= \sum_{0 < j < k} \sum_{0 < r_1 < \cdots < r_k < n} (-1)^{\sum_{i < r_j} \alpha_i} F_{r_1}(\alpha_{\{1, \dots, r_1\}}) \otimes \cdots \otimes F_{r_{j-1}}(\alpha_{\{r_{j-2}+1, \dots, r_{j-1}\}}) \otimes \\ & m^B \left( F_{r_j}(\alpha_{\{r_{j-1}+1, \dots, r_j\}}) \otimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{\{r_{j+1}, \dots, r_{j+1}\}}) \right) \otimes F_{r_{j+2}}(\alpha_{\{r_{j+1}+1, \dots, r_{j+2}\}}) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{r_{k-1}+1, \dots, r_k\}}). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F \circ m^A(\alpha_{\{1, \dots, n\}}) &= F \left( \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1, \dots, j-1\}}} \alpha_{\{1, \dots, j-1\}} \otimes m^A(\alpha_j \otimes \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2, \dots, n\}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1, \dots, j-1\}}} \sum_{k, 0 < r_1 < \cdots < r_k < n} F_{r_1}(\alpha_{\{1, \dots, r_1\}}) \otimes \cdots \otimes F_{r_t} \left( \alpha_{\{r_{t-1}+1, \dots, j-1\}} \otimes m^A(\alpha_j \otimes \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2, \dots, r_t\}} \right) \otimes \cdots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{r_{k-1}+1, \dots, r_k\}}). \end{aligned}$$

Il n'y a pas de  $F_n$  dans l'équation  $(m^B \circ F - F \circ m^A)(\alpha_{\{1, \dots, n\}}) = 0$ , cherchons les termes où  $F_{n-1}$  apparaît: ce sont

$$\begin{aligned} & m^B(F_{n-1}(\alpha_{\{1, \dots, n-1\}}) \otimes F_1(\alpha_n)) + m^B(F_1(\alpha_1) \otimes F_{n-1}(\alpha_{\{2, \dots, n\}})) \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1, \dots, j-1\}}} F_{n-1}(\alpha_{\{1, \dots, j-1\}} \otimes m^A(\alpha_j \otimes \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2, \dots, n\}}) \\ & = (-1)^{\alpha_{\{1, \dots, n-1\}}+1} F_{n-1}(\alpha_{\{1, \dots, n-1\}}) \cdot F_1(\alpha_n) + (-1)^{\alpha_1+1} F_1(\alpha_1) \cdot F_{n-1}(\alpha_{\{2, \dots, n\}}) \\ & - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{\alpha_{\{1, \dots, j\}}+1} F_{n-1}(\alpha_{\{1, \dots, j-1\}} \otimes (\alpha_j \cdot \alpha_{j+1}) \otimes \alpha_{\{j+2, \dots, n\}}) \\ & = (d_H F_{n-1})(\alpha_{\{1, \dots, n\}}) \end{aligned}$$

On retrouve l'opérateur de cobord de Hochschild  $d_H$ .

Finalement, si  $V$  un  $A$  bimodule gradué, on note  $V[p]$  l'espace gradué  $V$  tel que si  $v$  est de degré  $i$  dans  $V$ , il sera de degré  $i - p$  dans  $V[p]$ . L'espace  $B = A \oplus \sum_{p>0} V[p]$  muni du produit

$$m'((\alpha + \sum u_p), (\beta + \sum v_q)) = (m_2(\alpha, \beta) + \sum \alpha v_p + u_p \beta)$$

est une algèbre associative et l'application  $f : A \longrightarrow B$ , définie par  $f(\alpha) = (\alpha, 0)$  est un morphisme d'algèbres.

Un morphisme de cogèbres coassociatives différentielles  $F = f + C$  sera appelé une  $A_\infty$  formalité de module s'il est défini par des  $F_n$  homogènes de degré 0, de la forme  $F_1 = f + C_1$ , où  $C_1$  est linéaire de  $A[1]$  dans  $V$ , et pour  $p > 1$ ,  $F_p = C_p$ , où les  $C_p$  sont  $p$ -linéaires de  $\otimes^p A[1]$  dans  $V$ .

On retrouve la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives à valeurs dans un module  $V$ .

Plus précisément, cette formalité est dite triviale s'il existe un morphisme  $G$  tel que  $C = m^B \circ G + G \circ m^A$ ,  $G$  étant de degré  $-1$  et  $G = \sum B_p$  avec  $B_p : \otimes^p(A[1]) \longrightarrow V[p]$ .

On retrouve ainsi la cohomologie de Hochschild des algèbres associatives, puisque

**Proposition 2.3.** ( $A_\infty$  formalités et cohomologie de Hochschild)

*Avec les notations précédentes,  $F$  est une  $A_\infty$  formalité si et seulement si*

$$d_H C_k = 0 \quad \text{pour tout } k > 0.$$

*$F$  est triviale si et seulement si*

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad C_k = d_H B_k \quad \text{pour tout } k > 1.$$

### 3. $L_\infty$ ALGÈBRES ET COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur un corps  $\mathbb{K}$ . Soit  $V$  un  $\mathfrak{g}$  module. La cohomologie de Chevalley de  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $V$  est définie de la façon suivante:

Une  $n$ -cochaîne  $C$  est une application  $n$ -linéaire alternée de  $\mathfrak{g}^n$  dans  $V$ :

$$C \in C^n(\mathfrak{g}, V) = \text{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}, V),$$

son cobord de Chevalley  $d_C C \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$  est la cochaîne définie comme:

$$d_C C(X_0, \dots, X_n) =$$

$$= \sum_{j=0}^n (-1)^j X_j C(X_0, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} C([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_n).$$

On a  $d_C \circ d_C = 0$  et le  $n^{\text{eme}}$  groupe de cohomologie  $H^n(\mathfrak{g}, V)$  est le quotient de l'espace  $Z^n(\mathfrak{g}, V)$  des  $n$  cocycles (les cochaînes  $C$  telles que  $d_C C = 0$ ) par l'espace  $B^n(\mathfrak{g}, V)$  des  $n$  cobords (les cochaînes  $C$  telles qu'il existe  $b \in C^{n-1}(\mathfrak{g}, V)$  tel que  $C = d_C b$ ).

Afin de présenter cette cohomologie de façon plus algébrique et intrinsèque, on regarde  $\mathfrak{g}$  comme une  $L_\infty$  algèbre. Cela permettra entre autres de généraliser immédiatement la cohomologie au cas des algèbres de Lie différentielles et graduées.

Rappelons d'abord la règle des signes de Koszul: si dans les axiomes d'une structure algébrique on a une somme de quantités qui sont des compositions ou des produits d'objets  $X_1, \dots, X_n$  de degrés respectifs  $x_1, \dots, x_n$ , dans divers ordres, lorsqu'on veut définir la structure graduée correspondante, on ajoute devant la quantité composée des objets dans l'ordre  $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$  la signature de la permutation graduée  $\binom{x_1 \dots x_n}{x_{i_1} \dots x_{i_n}}$ , c'est à dire le signe

$$\varepsilon \left( \begin{array}{c} x_1 \dots x_n \\ x_{i_1} \dots x_{i_n} \end{array} \right)$$

$\varepsilon$  est un morphisme et sur la transposition  $(x_i, x_{i+1})$ , on a  $\varepsilon(x_i, x_{i+1}) = (-1)^{x_i x_{i+1}}$ .

Par exemple les axiomes d'une algèbre de Lie sont:

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Les axiomes d'une algèbre de Lie graduée seront donc:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= -\varepsilon \left( \begin{array}{c} xy \\ yx \end{array} \right) [Y, X] = (-1)^{xy} [Y, X], \\ 0 &= [[X, Y], Z] + \varepsilon \left( \begin{array}{c} xyz \\ yzx \end{array} \right) [[Y, Z], X] + \varepsilon \left( \begin{array}{c} xyz \\ zxy \end{array} \right) [[Z, X], Y] \\ &= [[X, Y], Z] + (-1)^{x(y+z)} [[Y, Z], X] + (-1)^{z(x+y)} [[Z, X], Y]. \end{aligned}$$

Pour une algèbre de Lie graduée différentielle, on ajoute la différentielle qui est une application  $d: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  de degré 1 et telle que:

$$d[X, Y] = [dX, Y] + (-1)^x [X, dY].$$

La première étape de notre construction consiste en un décalage des degrés. Les signes apparaissant dans la formule de  $d_C$  pour une algèbre de Lie usuelle seront alors directement donnés par la règle de Koszul et la généralisation  $\ell$  de  $d_C$  sera de degré 1. On munit donc les vecteurs  $X$  de  $\mathfrak{g}$  du degré  $\text{degré}(X) = x = -1$ . On note  $\mathfrak{g}[1]$  cet espace gradué. Le crochet devient une application graduée symétrique  $\ell: S^2(\mathfrak{g}[1]) \rightarrow \mathfrak{g}[1]$  homogène de degré 1. De même l'algèbre  $\bigwedge \mathfrak{g}$  est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à l'algèbre  $S(\mathfrak{g}[1])$ . Il n'y a pas d'isomorphisme d'algèbre entre ces deux espaces, il n'y a pas non plus d'isomorphisme linéaire canonique. Nous choisissons l'isomorphisme donné dans [AAC1]:

$$X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_n} \longrightarrow (-1)^{\sum_j (n-j)x_{i_j}} X_{i_1} \dots X_{i_n}.$$

Alors  $\ell_2(X, Y) = (-1)^x [X, Y]$  et si  $\mathfrak{g}$  est différentielle, on posera  $\ell_1(X) = dX$ .

On considère  $S^+(\mathfrak{g}[1]) = \sum_{n>0} S^n(\mathfrak{g}[1])$  comme une cogèbre pour la comultiplication  $\Delta$  déduite de la déconcaténation de  $T^+(\mathfrak{g}[1])$ , défini de la manière suivante:

soit  $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$  une partie de  $\{1, \dots, n\}$ , on note  $X_I$  le produit  $X_{i_1} \dots X_{i_k}$ .  $\Delta$  est alors la comultiplication de degré 0 définie par:

$$\Delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ |I| > 0, |J| > 0}} \varepsilon \left( \begin{array}{c} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I, x_J \end{array} \right) X_I \otimes X_J.$$



Remarquons que lorsque chaque  $x_i = -1$ , le signe est simplement la signature de la permutation  $\binom{1, \dots, n}{I, J}$ .

La cogèbre ainsi obtenue est une cogèbre cocommutative et coassociative : on note  $\tau$  la volte graduée

$$\tau(X \otimes Y) = \varepsilon \begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix} Y \otimes X.$$

alors

$$\begin{aligned} \tau \circ \Delta &= \Delta \\ (id \otimes \Delta) \circ \Delta &= (\Delta \otimes id) \circ \Delta. \end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \tau \circ \Delta(X_{\{1, \dots, n\}}) &= \tau \left( \sum_{I, J} \varepsilon \begin{pmatrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I, x_J \end{pmatrix} X_I \otimes X_J \right) \\ &= \sum_{I, J} \varepsilon \begin{pmatrix} x_I, x_J \\ x_J, x_I \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I, x_J \end{pmatrix} X_J \otimes X_I \\ &= \sum_{I, J} \varepsilon \begin{pmatrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_J, x_I \end{pmatrix} X_J \otimes X_I = \Delta(X_{\{1, \dots, n\}}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta) \circ \Delta(X_{\{1, \dots, n\}}) &= \sum_{I, J} (id \otimes \Delta) \varepsilon \begin{pmatrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I, x_J \end{pmatrix} X_I \otimes X_J \\ &= \sum_{I \sqcup J = \{1 \dots n\}} \sum_{K \sqcup L = J} \varepsilon \begin{pmatrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I, x_J \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} x_J \\ x_K, x_L \end{pmatrix} X_I \otimes X_K \otimes X_L \\ &= \sum_{I \sqcup K \sqcup L = \{1 \dots n\}} \varepsilon \begin{pmatrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I, x_K, x_L \end{pmatrix} X_I \otimes X_K \otimes X_L \\ &= (\Delta \otimes id) \circ \Delta(X_{\{1, \dots, n\}}). \end{aligned}$$

Toute application linéaire  $f : (\mathcal{C}, c) \longrightarrow (\mathfrak{g}[1], \Delta)$  où  $(\mathcal{C}, c)$  est une cogèbre cocommutative, coassociative et nilpotente (c'est à dire que pour tout  $c$ ,

$$(\Delta \otimes id^{\otimes n}) \circ (\Delta \otimes id^{\otimes n-1}) \circ \dots \circ \Delta c = 0$$

pour  $n$  assez grand) se prolonge d'une façon unique en un morphisme de cogèbre  $F : (\mathcal{C}, c) \longrightarrow (S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta)$ .

On dira que c'est la cogèbre cocommutative et coassociative libre (sans co-unité) engendrée par  $\mathfrak{g}[1]$ . On peut donc prolonger de façon unique l'application  $\ell_1 + \ell_2$  en une codérivation de degré 1 de notre cogèbre. Ce prolongement est donné par (voir [AMM]):

$$\begin{aligned} \ell(X_1, \dots, X_n) &= \sum_j (-1)^{\sum_{i < j} x_i} X_1 \dots \ell_1(X_j) \dots X_n \\ &\quad + \sum_{i < j} \varepsilon \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_i x_j x_1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots x_n \end{pmatrix} \ell_2(X_i, X_j) \cdot X_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_n. \end{aligned}$$

$\ell$  est une codérivation veut dire que, en tenant compte de la règle des signes de Koszul dans la définition du produit tensoriel des applications,

$$(id \otimes \ell + \ell \otimes id) \circ \Delta = \Delta \circ \ell.$$

Elle est de carré nul  $\ell \circ \ell = 0$  (voir [AMM], [K]).

**Définition 3.1.** ( $L_\infty$  algèbre)

Une  $L_\infty$  algèbre est une cogèbre différentielle de la forme  $(S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta, \ell)$  où  $\Delta$  est défini ci-dessus et  $\ell$  est une codifférentielle de  $\Delta$  est de carré nul.

Si  $(\mathfrak{g}, [\ , \ ], d)$  est une algèbre de Lie graduée différentielle, la  $L_\infty$  algèbre  $L(\mathfrak{g}) = (S^+(\mathfrak{g}[1]), \Delta, \ell)$  telle que

$$\ell_1(X) = dX, \quad \ell_2(X.Y) = (-1)^x[X, Y], \quad \ell_k = 0, \quad k = 3, 4, \dots$$

s'appelle la  $L_\infty$  algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ .

Un morphisme de  $L_\infty$  algèbre entre  $S^+(\mathfrak{g}[1])$  et  $S^+(\mathfrak{h}[1])$  est une application  $F$  entre ces espaces qui est un morphisme de cogèbres différentielles. Puisque  $S^+(\mathfrak{h}[1])$  est libre, un tel morphisme est caractérisé par la donnée d'une suite d'applications:

$$F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1],$$

homogène de degré 0.  $F$  est un morphisme de cogèbre si et seulement si, pour tout  $n$ ,

$$F(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = \sum_{j>0} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_j = \{1, \dots, n\} \\ I_1 \dots I_j \neq \emptyset}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_{I_1} \dots x_{I_j} \end{matrix} \right) F_{|I_1|}(X_{I_1}) \cdot \dots \cdot F_{|I_j|}(X_{I_j}).$$

Enfin,  $F$  est un morphisme de cogèbres différentielles si et seulement si  $\ell^{\mathfrak{h}} \circ F = F \circ \ell^{\mathfrak{g}}$ . Ceci donne une équation sur les  $F_n$ , appelée équation de formalité. Si  $\ell^{\mathfrak{g}}$  (resp  $\ell^{\mathfrak{h}}$ ) est la codérivation caractérisée par les applications  $\ell_p^{\mathfrak{g}} : S^p(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{g}[1]$  (resp.  $\ell_q^{\mathfrak{h}} : S^q(\mathfrak{h}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1]$ ) et si  $F$  est caractérisée par les applications  $F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1]$ , cette équation s'écrit:

$$0 = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ I_1 \sqcup \dots \sqcup I_p = \{1, \dots, n\} \\ 0 < |I_1|, \dots, |I_p| < n}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_{I_1} \dots x_{I_p} \end{matrix} \right) \ell_p^{\mathfrak{h}}(F_{|I_1|}(X_{I_1}) \cdot \dots \cdot F_{|I_p|}(X_{I_p})) - \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ |J| = p-1}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I x_J \end{matrix} \right) F_p(\ell_{|I|}^{\mathfrak{g}}(X_I) \cdot X_J).$$

Supposons maintenant que  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  soient deux algèbres de Lie graduées et  $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme de degré 0 d'algèbres de Lie. Cherchons tous les morphismes de  $L_\infty$  algèbres  $F : S^+(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow S^+(\mathfrak{h}[1])$  tels que  $F_1 = \varphi$ . Cela revient à chercher toutes les suites d'applications  $(F_n)$  ( $F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h}[1]$ ) telles que:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ 0 < |I|, |J| < n}} \frac{1}{2} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I x_J \end{matrix} \right) \ell_2^{\mathfrak{h}}(F_{|I|}(X_I) \cdot F_{|J|}(X_J)) \\ & - \sum_{0 < i < j < n+1} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_i x_j x_1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots x_n \end{matrix} \right) F_{n-1}(\ell_2^{\mathfrak{g}}(X_i \cdot X_j) \cdot X_1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots X_n). \end{aligned} \tag{n}$$

Cette suite d'équations peut se résoudre par récurrence sur  $n$ . L'équation est vérifiée pour  $n = 2$  puisque  $\varphi$  est un morphisme. Si on a résolu les équations (2),  $\dots$ , ( $n$ ) qui portent sur  $F_1 = \varphi, F_2, \dots, F_{n-1}$ , l'équation ( $n$ ) devient une équation en  $F_n$  de la forme:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n+1\} \\ 1 < |I|, |J| < n}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_{\{1, \dots, n+1\}} \\ x_I x_J \end{matrix} \right) \ell_2^{\mathfrak{h}}(F_{|I|}(X_I) \cdot F_{|J|}(X_J)) \\ & = \sum_i \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_{n+1} \\ x_i x_1 \dots \hat{i} \dots x_{n+1} \end{matrix} \right) \ell_2^{\mathfrak{h}}(\varphi(X_i) \cdot F_n(X_1 \dots \hat{i} \dots X_{n+1})) - \\ & - \sum_{i < j} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_{n+1} \\ x_i x_j x_1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots x_{n+1} \end{matrix} \right) F_n(\ell_2^{\mathfrak{g}}(X_i \cdot X_j) \cdot X_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_{n+1}). \end{aligned}$$

On peut donc définir la  $L_\infty$  cohomologie.

**Définition 3.2.** ( $L_\infty$  cohomologie)

Soit  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  deux algèbres de Lie graduées et  $\varphi$  un homomorphisme d'algèbres de Lie de degré 0 de  $\mathfrak{g}$  dans  $\mathfrak{h}$ . On appelle  $n$  cochaîne sur  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $\mathfrak{h}$  une application  $F_n$  de degré  $f_n$  de  $S^n(\mathfrak{g}[1])$  dans  $\mathfrak{h}[1]$ . L'opérateur de cobord  $d_L$  associée à cette cochaîne  $F_n$  la cochaîne

$$\begin{aligned} d_L F_n(X_1 \dots X_{n+1}) & = \ell^{\mathfrak{h}} \circ F_n - (-1)^{f_n} F_n \circ \ell^{\mathfrak{g}} \\ & = \sum_i \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_{n+1} \\ x_i x_1 \dots \hat{i} \dots x_{n+1} \end{matrix} \right) \ell_2^{\mathfrak{h}}(\varphi(X_i) \cdot F_n(X_1 \dots \hat{i} \dots X_{n+1})) - \\ & - (-1)^{f_n} \sum_{i < j} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_{n+1} \\ x_i x_j x_1 \dots \hat{i} \hat{j} \dots x_{n+1} \end{matrix} \right) F_n(\ell_2^{\mathfrak{g}}(X_i \cdot X_j) \cdot X_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_{n+1}). \end{aligned}$$

Si  $F_n$  est de degré  $f_n$ ,  $d_L F_n$  est de degré  $f_n + 1$ , donc

$$\begin{aligned} d_L \circ d_L(F_n) & = \ell^{\mathfrak{h}} \circ d_L F_n - (-1)^{f_n+1} d_L F_n \circ \ell^{\mathfrak{g}} \\ & = \ell^{\mathfrak{h}} \circ \ell^{\mathfrak{h}} \circ F_n - (-1)^{f_n} \ell^{\mathfrak{h}} \circ F_n \circ \ell^{\mathfrak{g}} - (-1)^{f_n+1} \ell^{\mathfrak{h}} \circ F_n \circ \ell^{\mathfrak{g}} - F_n \circ \ell^{\mathfrak{g}} \circ \ell^{\mathfrak{g}} = 0. \end{aligned}$$

On retrouve en particulier la cohomologie de Chevalley usuelle. En effet soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et  $V$  un  $\mathfrak{g}$  module.  $V$  permet de construire immédiatement une algèbre de Lie graduée en posant

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \sum_{p=-1}^{\infty} V[p], \quad [X + \sum_p u_p, Y + \sum_q v_q] = [X, Y] + \sum_p X v_p - Y u_p$$

et un morphisme  $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$  défini par  $\varphi(X) = X$ .

Un morphisme de cogèbres différentielles  $F = f + C$  sera appelé une formalité de module s'il est défini par des  $F_n$  homogènes de degré 0, de la forme  $F_1 = \varphi + C_1$ ,  $C_1$  linéaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $V$ , et pour  $p > 1$ ,  $F_p = C_p$ ,  $C_p$   $p$  linéaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $V$ .

De même une formalité de module  $F$  est dite triviale s'il y a un morphisme de cogèbres  $B$  défini par  $B_p$   $p$  linéaire de  $\mathfrak{g}$  dans  $V$ , de degré -1 tel que  $F = \varphi + \ell^{\mathfrak{h}} \circ B + B \circ \ell^{\mathfrak{g}}$ .

**Proposition 3.3.** (Expression de la cohomologie de Chevalley)

L'équation de formalité de module pour un morphisme  $F = \varphi + C$  est

$$d_C C_n = 0 \quad \forall n > 0.$$

De plus,  $F = \varphi + \ell_{\mathfrak{h}} \circ B + B \circ \ell_{\mathfrak{g}}$  si et seulement si

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad C_n = d_C B_{n-1} \quad \forall n > 1.$$

**Remarque 3.4.**

L'espace  $S^+(\mathfrak{g}[1])$  a, en plus de sa structure de cogèbre libre, une structure d'algèbre commutative graduée libre. Nous n'utiliserons pas cette structure qui peut s'interpréter comme issue de l'opérateur  $Com$  qui est duale de l'opérateur  $Lie$ .

#### 4. $C_\infty$ ALGÈBRES ET COHOMOLOGIE DE HARRISON

##### 4.1. Cohomologie de Harrison des algèbres commutatives.

La méthode de la section précédente s'applique aussi aux algèbres commutatives. Soit  $A$  une algèbre associative et commutative et  $V$  un  $A$  module vu comme un bimodule tel que  $av = va$  pour tout  $v$  de  $V$  et tout  $a$  de  $A$ . La cohomologie de Harrison de  $A$  à valeurs dans  $V$  est définie de la façon suivante.

On définit d'abord les  $p, q$  battements de  $n = p + q$  lettres comme les permutations  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  telles que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$  et  $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$ . On appelle  $Bat(p, q)$  l'ensemble de tous ces battements et on définit le produit battement de deux tenseurs  $\alpha = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$  et  $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q}$  par

$$bat_{p,q}(\alpha, \beta) = \sum_{\sigma \in Bat(p,q)} \varepsilon(\sigma^{-1}) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Ceci représente la somme signée de tous les tenseurs  $\alpha_{i_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{i_n}$  dans lesquels les vecteurs  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  et les vecteurs  $\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q}$  apparaissent rangés dans leur ordre naturel.

Par définition, l'espace  $\underline{A}^{\otimes n}$  est le quotient de  $A^{\otimes n}$  par la somme de toutes les images des applications linéaires  $bat_{p,n-p}$  ( $0 < p < n$ ) (voir [G], [L]). Une  $n$  cochaîne  $C$  est une application linéaire de  $\underline{A}^{\otimes n}$  dans  $V$ . L'espace de ces cochaînes est noté  $C^n(A, V)$ . L'opérateur de cobord de Harrison est l'application  $d_{Ha} : C^{n-1}(A, V) \rightarrow C^n(A, V)$  définie par

$$\begin{aligned} d_{Ha} C(\underline{\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n}) &= \alpha_1 C(\underline{\alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_n}) - C(\underline{\alpha_1 \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_n}) + \\ &+ C(\underline{\alpha_1 \otimes \alpha_2 \alpha_3 \otimes \dots \otimes \alpha_n}) + \dots + (-1)^{n-1} C(\underline{\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{n-1} \alpha_n}) + \\ &+ (-1)^n C(\underline{\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{n-1}}) \alpha_n. \end{aligned}$$

(On a bien sûr noté  $\underline{\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n}$  la classe de  $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n$  dans  $\underline{A}^{\otimes n}$ .)

On a  $d_{Ha} \circ d_{Ha} = 0$ , le noyau de  $d_{Ha} : C^n(A, V) \rightarrow C^{n+1}(A, V)$  est noté  $Z^n(A, V)$ , c'est l'espace des  $n$  cocycles, l'image de  $d_{Ha} : C^{n-1}(A, V) \rightarrow C^n(A, V)$  est noté  $B^n(A, V)$ , c'est l'espace des  $n$  cobords. Le  $n^{eme}$  espace de cohomologie de Harrison de  $A$  à valeurs dans  $V$

est le quotient  $H^n(A, V)$  de  $Z^n(A, V)$  par  $B^n(A, V)$ .

#### 4.2. La cogèbre $(\underline{\otimes}^+(A[1]), \delta)$ .

La construction de la section précédente a un équivalent ici. On commence comme plus haut par décaler les degrés et considérer l'espace  $A[1]$ . La construction suivante est valable lorsque  $A$  est graduée. Le degé de  $\alpha, \beta$  dans  $A[1]$  est noté  $a, b$ .

Le produit battement dans  $T(A[1])$  est défini par:

$$\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta) = \sum_{\sigma \in \text{Bat}(p,q)} \varepsilon(a_{\sigma^{-1}(1)}^{a_1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)}^{a_n}) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(n)}.$$

On notera  $\underline{\otimes}^n(A[1])$  le quotient de  $A[1]^{\otimes n}$  par la somme des images des applications  $\text{bat}_{p,n-p}$  ( $0 < p < n$ ) et de façon abusive  $\alpha_{[1,n]} = \alpha_1 \underline{\otimes} \cdots \underline{\otimes} \alpha_n$  la classe de  $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ , lorsque les  $\alpha_i$  appartiennent à  $A[1]$ . Ceci ne veut pas dire que  $\underline{\otimes}$  soit une multiplication associative dans  $\underline{\otimes}^+(A[1]) = \sum_{n>0} \underline{\otimes}^n(A[1])$ .

**Remarque 4.1.** 1. *En fait ce dernier espace peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie libre mais nous n'utiliserons pas cette structure.*

2. *Une base de l'espace  $\underline{\otimes}^n(A[1])$ . Prenons une base  $(e_i)_i$  de  $A[1]$  composée d'éléments homogènes.*

*Pour chaque suite croissante  $\mathbf{i} = (i_1 \leq \cdots \leq i_p)$ , on pose  $e_{\mathbf{i}} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$  et pour chaque  $\sigma$  de  $S_p$ ,  $e_{\sigma(\mathbf{i})} = e_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(i_p)}$ .*

*On note  $V(e_{\mathbf{i}})$  l'espace engendré par ces vecteurs dans  $A[1]^{\otimes p}$  et  $W(e_{\mathbf{i}})$  le sous-espace:*

$$W(e_{\mathbf{i}}) = \text{Vect} \left( \sum_{\sigma} \text{bat}_{r,s}((e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(r)}}), (e_{i_{\sigma(r+1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(r+s)}})) \right).$$

*On choisit enfin pour chaque  $e_{\mathbf{i}}$ , une base d'un supplémentaire de  $W(e_{\mathbf{i}})$  dans  $V(e_{\mathbf{i}})$  de la forme:*

$$\mathcal{B}(e_{\mathbf{i}}) = \{e_{\sigma(\mathbf{i})}, \sigma \in \Sigma(e_{\mathbf{i}})\}.$$

*Une base de  $\underline{\otimes}^n(A[1])$  est donnée par*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{|\mathbf{i}|=n} \bigcup_{\sigma \in \Sigma(e_{\mathbf{i}})} \{e_{\sigma(\mathbf{i})}\}.$$

Rappelons maintenant les propriétés du produit battement.

**Lemme 4.2.** (Associativité de  $\text{bat}$ )

*Le produit battement est associatif et commutatif gradué de degré 0: pour tout  $\alpha \in A[1]^{\otimes p}$ ,  $\beta \in A[1]^{\otimes q}$ ,  $\gamma \in A[1]^{\otimes r}$ ,*

- (i)  $\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta) = (-1)^{ab} \text{bat}_{q,p}(\beta, \alpha)$ ,
- (ii)  $\text{bat}_{p+q,r}(\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma) = \text{bat}_{p,q+r}(\alpha, \text{bat}_{q,r}(\beta, \gamma))$ .

**Preuve**

(i) Soient  $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$  et  $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$ . On a

$$\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta) = \sum_{\sigma \in \text{Bat}(p,q)} \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Pour chaque  $\sigma \in \text{Bat}(p, q)$ , on construit deux permutations  $\tau$  et  $\rho$  de  $S_{p+q}$  en posant:

$$\tau(k) = \begin{cases} k + p, & \text{si } 1 \leq k \leq q \\ k - q, & \text{si } q < k \leq p + q. \end{cases} \quad \text{et} \quad \rho = \sigma \circ \tau.$$

On vérifie que  $\rho$  appartient à  $\text{Bat}(q, p)$  et que l'application  $\sigma \mapsto \rho$  est une bijection de  $\text{Bat}(p, q)$  sur  $\text{Bat}(q, p)$ .

Posons  $\beta_k = \alpha_{\tau(k)}$ , pour tout  $k$  ( $1 \leq k \leq p + q$ ), on a  $\beta_{\rho^{-1}(k)} = \alpha_{\tau \circ \rho^{-1}(k)} = \alpha_{\sigma^{-1}(k)}$  et

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( \begin{matrix} b_1 & \cdots & b_{p+q} \\ b_{\rho^{-1}(1)} & \cdots & b_{\rho^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) &= \varepsilon \left( \begin{matrix} b_1 & \cdots & b_q & b_{q+1} & \cdots & b_{p+q} \\ b_{q+1} & \cdots & b_{p+q} & b_1 & \cdots & b_q \end{matrix} \right) \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) \\ &= \varepsilon \left( \begin{matrix} a_{p+1} & \cdots & a_{p+q} & a_1 & \cdots & a_p \\ a_1 & \cdots & a_q & a_{q+1} & \cdots & a_{p+q} \end{matrix} \right) \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) \\ &= (-1)^{ab} \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta) = (-1)^{ab} \text{bat}_{q,p}(\beta, \alpha).$$

(ii) Disons qu'une permutation  $\sigma$  de  $S_{p+q+r}$  est un  $(p, q, r)$ -battement si elle vérifie

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q) \quad \text{et} \quad \sigma(p+q+1) < \cdots < \sigma(p+q+r).$$

Notons  $\text{Bat}(p, q, r)$  l'ensemble des  $(p, q, r)$ -battements.

Soient  $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$ ,  $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$  et  $\gamma = \alpha_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q+r}$ . On définit le produit  $\text{bat}_{p,q,r}(\alpha, \beta, \gamma)$  par:

$$\text{bat}_{p,q,r}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{\rho \in \text{Bat}(p,q,r)} \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_{p+q+r} \\ a_{\rho^{-1}(1)} & \cdots & a_{\rho^{-1}(p+q+r)} \end{matrix} \right) \alpha_{\rho^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\rho^{-1}(p+q+r)}.$$

On a en fait

$$\text{bat}_{p,q,r}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{bat}_{p+q,r}(\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma) = \text{bat}_{p,q+r}(\alpha, \text{bat}_{q,r}(\beta, \gamma)).$$

Il suffit de montrer que  $\text{bat}_{p,q,r}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{bat}_{p+q,r}(\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma)$ , l'autre égalité se prouvant de la même façon.

Fixons  $\sigma_1 \in \text{Bat}(p, q)$ , on construit une permutation  $(\sigma_1 \times id)$  sur  $\{1, \dots, p+q+r\}$  en posant:

$$(\sigma_1 \times id)(k) = \begin{cases} \sigma_1(k), & \text{si } 1 \leq k \leq p+q, \\ k, & \text{si } p+q+1 \leq k \leq p+q+r. \end{cases}$$

Par construction,  $(\sigma_1 \times id)$  appartient à  $\text{Bat}(p, q, r)$ .

Soit maintenant  $\sigma_2$  une permutation de  $\text{Bat}(p+q, r)$ , on définit la permutation  $\rho$  de  $S_{p+q+r}$  par:  $\rho = \sigma_2 \circ (\sigma_1 \times id)$ . On vérifie que  $\rho$  appartient à  $\text{Bat}(p, q, r)$ , que l'application

$\varphi : (\sigma_2, \sigma_1) \mapsto \rho = \sigma_2 \circ (\sigma_1 \times id)$  est une bijection de  $Bat(p+q, r) \times Bat(p, q)$  sur  $Bat(p, q, r)$  et que

$$\varepsilon \left( \begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_{p+q+r} \\ a_{\rho^{-1}(1)} & \cdots & a_{\rho^{-1}(p+q+r)} \end{array} \right) = \varepsilon \left( \begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_{p+q+r} \\ a_{\sigma_2^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma_2^{-1}(p+q+r)} \end{array} \right) \varepsilon \left( \begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_{p+q} \\ a_{\sigma_1^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma_1^{-1}(p+q)} \end{array} \right).$$

On a donc bien  $bat_{p+q,r}(bat_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma) = bat_{p,q,r}(\alpha, \beta, \gamma)$ .

□

Maintenant on introduit un cocrochet de Lie  $\delta$  sur  $\underline{\otimes}^+(A[1])$  en posant d'abord:

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n) &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n \\ &\quad - \varepsilon \left( \begin{array}{ccc} a_1 \cdots a_{n-j} & a_{n-j+1} \cdots a_n \\ a_{j+1} \cdots a_n & a_1 \cdots a_j \end{array} \right) \alpha_{j+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_n \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_j. \end{aligned}$$

Cette formule permet de définir  $\delta$  sur l'espace quotient  $\underline{\otimes}^n(A[1])$ . En effet, si  $p+q=n$ , on a, en posant  $\alpha = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p$  et  $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{p+q}$ ,

$$\begin{aligned} \delta(bat_{p,q}(\alpha, \beta)) &= \sum_{\substack{\sigma \in Bat(p,q) \\ 0 < j < n}} \varepsilon \left( \begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_n \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \cdots & a_{\sigma^{-1}(n)} \end{array} \right) \\ &\quad \left( \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(n)} \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \left( \begin{array}{cc} a_{I_\sigma} & a_{J_\sigma} \\ a_{J_\sigma} & a_{I_\sigma} \end{array} \right) \alpha_{\sigma^{-1}(j+1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(n)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(j)} \right). \end{aligned}$$

Dans cette formule, on a posé  $I_\sigma = \{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(j)\}$  et  $J_\sigma = \{\sigma^{-1}(j+1), \dots, \sigma^{-1}(n)\}$ .

Posons maintenant  $I_\sigma^k = I_\sigma \cap \{1, \dots, p\}$ ,  $I_\sigma^{j-k} = I_\sigma \cap \{p+1, \dots, n\}$  et de même  $J_\sigma^r = J_\sigma \cap \{1, \dots, p\}$ ,  $J_\sigma^{n-j-r} = J_\sigma \cap \{p+1, \dots, n\}$ , ( $k = |I_\sigma^k|$  et  $r = |J_\sigma^r|$ ). On peut alors écrire:

$$\delta(bat_{p,q}(\alpha, \beta)) = \sum_{\substack{0 < j < n \\ I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ I, J \neq \emptyset}} \sum_{\substack{\sigma \in Bat(p,q) \\ I_\sigma = I}} \varepsilon \left( \begin{array}{cc} a_{\{1, \dots, n\}} \\ a_{I_\sigma} & a_{J_\sigma} \end{array} \right) \left( \alpha_{I_\sigma} \otimes \alpha_{J_\sigma} - \varepsilon \left( \begin{array}{cc} a_{I_\sigma} & a_{J_\sigma} \\ a_{J_\sigma} & a_{I_\sigma} \end{array} \right) \alpha_{J_\sigma} \otimes \alpha_{I_\sigma} \right).$$

- Cas 1  $I \neq \{1, \dots, p\}$  ou  $I \neq \{p+1, \dots, n\}$ .

On vérifie qu'alors l'application  $(\sigma|_{I_\sigma}, \sigma|_{J_\sigma}) \mapsto \sigma = \sigma|_{I_\sigma} \otimes \sigma|_{J_\sigma}$  est une bijection entre  $Bat(k, j-k) \times Bat(r, n-j-r)$  et  $\{\sigma \in Bat(p, q) / I_\sigma = I\}$ .

Dans ce cas, la seconde somme est un produit  $\otimes$  de produits battements. Elle est donc nulle lorsque l'on passe au quotient.

- Cas 2  $I = \{1, \dots, p\}$  ou  $I = \{p+1, \dots, n\}$ .

Les termes restant s'écrivent

$$\begin{aligned} \delta(bat_{p,q}(\alpha, \beta)) &= \alpha \otimes \beta - (-1)^{ab} \beta \otimes \alpha \\ &\quad + (-1)^{ab} (\beta \otimes \alpha - (-1)^{ab} \alpha \otimes \beta) = 0. \end{aligned}$$

On notera  $\alpha_{[i,j]} = \alpha_i \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j$ ,  $\delta$  est donc le cocrochet de  $\underline{\otimes}^+(A[1])$  donnée par

$$\delta(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{0 < j < n} \alpha_{[1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,n]} - (-1)^{a_{[1,j]} a_{[j+1,n]}} \alpha_{[j+1,n]} \otimes \alpha_{[1,j]}.$$

**Proposition 4.3.** (La structure de cogèbre)

L'espace  $\underline{\otimes}^+(A[1])$  équipé de  $\delta$  est une cogèbre de Lie, c'est à dire que  $\delta$  est coantisymétrique de degré 0 et vérifie l'identité de coJacobi: si  $\tau$  est la volte,

$$\tau \circ \delta = -\delta, \quad \left( id^{\otimes 3} + (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) + (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \right) \circ (\delta \otimes id) \circ \delta = 0.$$

**Preuve**

D'une part, en notant toujours  $\tau$  la volte, on a

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) &= \delta(\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \left( \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon \left( \begin{matrix} a_{\{1,\dots,n\}} \\ a_{\{j+1,\dots,n\}} & a_{\{1,\dots,j\}} \end{matrix} \right) \alpha_{j+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \otimes \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_j \right) \\ &= \sum_{0 < j < n} \left( \alpha_{[1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,p]} - \tau(\alpha_{[1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,p]}) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\tau \circ \delta(\alpha) = \sum_{j=1}^{n-1} \tau(\alpha_{[1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,p]}) - \alpha_{[1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,p]} = -\delta(\alpha).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} (\delta \otimes id) \circ \delta(\alpha) &= \sum_{0 < i < j < n} \alpha_{[1,i]} \otimes \alpha_{[i+1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,n]} \\ &\quad - \varepsilon \left( \begin{matrix} a_{[1,i]} & a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} \\ a_{[i+1,j]} & a_{[1,i]} & a_{[j+1,n]} \end{matrix} \right) \alpha_{[i+1,j]} \otimes \alpha_{[1,i]} \otimes \alpha_{[j+1,n]} \\ &\quad - \varepsilon \left( \begin{matrix} a_{[1,i]} & a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} \\ a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} & a_{[1,i]} \end{matrix} \right) \alpha_{[i+1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,n]} \otimes \alpha_{[1,i]} \\ &\quad + \varepsilon \left( \begin{matrix} a_{[1,i]} & a_{[i+1,j]} & a_{[j+1,n]} \\ a_{[j+1,n]} & a_{[i+1,j]} & a_{[1,i]} \end{matrix} \right) \alpha_{[j+1,n]} \otimes \alpha_{[i+1,j]} \otimes \alpha_{[1,i]}. \end{aligned}$$



Donc, en notant  $(i) = [1, i]$ ,  $(j) = [i + 1, j]$  et  $(n) = [j + 1, n]$ ,

$$\begin{aligned}
& \left( id^{\otimes 3} + (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) + (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \right) \circ (\delta \otimes id) \circ \delta(\alpha) \\
&= \sum_{0 < i < j < n} \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(n)} - \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(j)} & a_{(i)} & a_{(n)} \end{pmatrix} \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(n)} \\
&- \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(j)} & a_{(n)} & a_{(i)} \end{pmatrix} \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(i)} + \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(n)} & a_{(j)} & a_{(i)} \end{pmatrix} \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(i)} \\
&+ \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(n)} & a_{(i)} & a_{(j)} \end{pmatrix} \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(j)} - \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(n)} & a_{(j)} & a_{(i)} \end{pmatrix} \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(i)} \\
&- \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(n)} + \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(i)} & a_{(n)} & a_{(j)} \end{pmatrix} \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(j)} \\
&+ \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(j)} & a_{(n)} & a_{(i)} \end{pmatrix} \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(i)} - \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(i)} & a_{(n)} & a_{(j)} \end{pmatrix} \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(j)} \\
&- \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(n)} & a_{(i)} & a_{(j)} \end{pmatrix} \alpha_{(n)} \otimes \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(j)} + \varepsilon \begin{pmatrix} a_{(i)} & a_{(j)} & a_{(n)} \\ a_{(j)} & a_{(i)} & a_{(n)} \end{pmatrix} \alpha_{(j)} \otimes \alpha_{(i)} \otimes \alpha_{(n)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

### 4.3. Morphismes et codérivations.

La structure de cogèbre de Lie de  $(\underline{\otimes}^+(A[1]), \delta)$  est libre. C'est à dire que si  $(\mathcal{C}, c)$  est une cogèbre de Lie nilpotente quelconque, tout  $f : (\mathcal{C}, c) \rightarrow A[1]$  linéaire se prolonge en  $F : (\mathcal{C}, c) \rightarrow \underline{\otimes}^+(A[1])$  qui est un morphisme de cogèbre. Nous montrons ici comment définir des codérivations  $Q$  et des morphismes  $F$  de cette structure à partir de leurs 'série de Taylor'.

Soit  $F : \underline{\otimes}^+(A[1]) \rightarrow \underline{\otimes}^+(B[1])$  un morphisme de cogèbres de Lie. On suppose toujours  $F$  homogène de degré 0. On appelle  $F_n$  la projection sur  $B[1]$  parallèlement à  $\underline{\oplus}^{k>1} B[1]$  de la restriction de  $F$  à  $\underline{\otimes}^n(A[1])$ :  $F_n$  est une application linéaire de  $\underline{\otimes}^n(A[1])$  dans  $B[1]$ .

De même soit  $Q : \underline{\otimes}^+(A[1]) \rightarrow \underline{\otimes}^+(A[1])$  une codérivation de cogèbres de Lie. On suppose  $Q$  homogène de degré  $q$ . On appelle  $Q_n$  la projection sur  $A[1]$  parallèlement à  $\underline{\oplus}^{k>1} A[1]$  de la restriction de  $Q$  à  $\underline{\otimes}^n(A[1])$ :  $Q_n$  est une application linéaire de  $\underline{\otimes}^n(A[1])$  dans  $A[1]$ .

#### Proposition 4.4. (Reconstruction de $F$ et $Q$ )

La suite d'applications  $(F_n)$  (resp.  $(Q_n)$ ) permet de reconstruire  $F$  (resp.  $Q$ ) de façon unique. On a explicitement

$$F(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{\substack{k>0, 0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} F_{r_1}(\alpha_{[1,r_1]}) \underline{\otimes} F_{r_2}(\alpha_{[r_1+1, r_1+r_2]}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{[n-r_k+1, n]})$$

et

$$Q(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n \\ 0 \leq j \leq n-r}} (-1)^{qa_{[1,j]}} \alpha_{[1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1, j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1, n]}.$$

Plus précisément, toute suite d'applications  $(\varphi_n)$  peut se relever d'une seule façon en un morphisme (resp. une codérivation).

### Preuve

La preuve est semblable à celle de [AMM]. Pour un morphisme, si tous les  $F_n$  sont nuls,  $F(\alpha_1)$  est nul pour tout  $\alpha_1 \in A[1]$ , et si tous les  $F(\alpha_{[1,p]})$  sont nuls quelque soit  $p < n$ , alors

$$\begin{aligned} \delta \circ F(\alpha_{[1,n]}) &= (F \otimes F) \circ \delta(\alpha_{[1,n]}) \\ &= \sum_{0 < j < n} F(\alpha_{[1,j]}) \otimes F(\alpha_{[j+1,n]}) - (-1)^{a_{[1,j]}} F(\alpha_{[j+1,n]}) \otimes F(\alpha_{[1,j]}) = 0 \end{aligned}$$

donc  $F(\alpha_{[1,n]}) = F_n(\alpha_{[1,n]}) \in A[1]$  est aussi nul et par induction,  $F$  est nul. Le même argument s'applique pour une dérivation  $Q$ . Ceci prouve l'unicité.

Il reste juste à montrer que les formules de la proposition définissent bien un morphisme (resp. une codérivation).

$F$  est bien défini.

D'abord  $F$  est bien défini, c'est à dire l'application  $\overline{F}$  définie par la même formule mais sur  $\alpha_{\{1,\dots,n\}} = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n$  passe bien au quotient. Il suffit pour cela de montrer que

$$\overline{F}(\text{bat}_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})) = 0.$$

En fait, si on pose

$$\tilde{F}^k(\alpha_{\{1,\dots,n\}}) = \sum_{\substack{0 < r_1, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} F_{r_1}(\alpha_{[1,r_1]}) \otimes F_{r_2}(\alpha_{[r_1+1,r_1+r_2]}) \otimes \dots \otimes F_{r_k}(\alpha_{[n-r_k+1,n]}),$$

alors  $\tilde{F}^k(\text{bat}_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}}))$  est une somme de produits battements de la forme

$$\tilde{F}^k(\text{bat}_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})) = \sum \text{bat}_{r,s}(\tilde{F}^r(\alpha_J), \tilde{F}^s(\alpha_J)),$$

ce qui prouve que  $F$  est bien défini. Prouvons cette dernière relation.

On a

$$\text{bat}_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}}) = \sum_{\sigma \in \text{Bat}(p,q)} \varepsilon \left( a_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}}^{a_{\{1,\dots,p+q\}}} \right) \alpha_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \tilde{F}^k(\text{bat}_{p,q}(\alpha_{\{1,\dots,p\}}, \alpha_{\{p+1,\dots,p+q\}})) &= \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ r_1, \dots, r_k}} \varepsilon \left( a_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}}^{a_{\{1,\dots,p+q\}}} \right) F_{r_1}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(r_1)\}}) \otimes \dots \\ &\quad \dots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(p+q-r_k+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}}). \end{aligned}$$

Fixons un battement  $\sigma \in \text{Bat}(p,q)$ . Posons  $s_j = r_1 + \dots + r_j$ . S'il existe un  $j$  tel que  $I_j = \{\sigma^{-1}(s_{j-1} + 1), \dots, \sigma^{-1}(s_j)\}$  n'est inclus ni dans  $\{1, \dots, p\}$  ni dans  $\{p+1, \dots, p+q\}$ , alors cet ensemble peut s'écrire  $I_j = \{i_1, \dots, i_{t_j}, i_{t_j+1}, \dots, i_{r_j}\}$  avec  $0 < i_1 < \dots < i_{t_j} < p+1$

et  $p < i_{t_j+1} < \dots < i_{r_j} < p + q + 1$  et bien sûr  $0 < t_j < r_j$ . L'ensemble  $Bat_{I_j}(p, q)$  des battements  $\rho \in Bat(p, q)$  tels que  $\rho^{-1}(u) = \sigma^{-1}(u)$  pour tous les  $u$  de  $\{1, \dots, p+q\} \setminus \{s_{j-1} + 1, \dots, s_j\}$  est en bijection avec  $Bat(t_j, r_j - t_j)$  puisque chaque battement  $\mu$  de  $Bat(t_j, r_j - t_j)$  peut se prolonger en un battement  $\tilde{\mu}$  de  $Bat(p, q)$  défini par  $\tilde{\mu}^{-1}(u) = \sigma^{-1}(u)$  si  $u$  est dans  $\{1, \dots, p+q\} \setminus \{s_{j-1} + 1, \dots, s_j\}$  et  $\tilde{\mu}(i_v) = i_{\mu(v)}$  pour  $0 < v < r_j + 1$ . Alors:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\rho \in Bat_{I_j}(p, q)} \varepsilon \left( a_{\{\rho^{-1}(1), \dots, \rho^{-1}(p+q)\}}^{a_{\{1, \dots, p+q\}}} \right) F_{r_1}(\alpha_{\{\rho^{-1}(1), \dots, \rho^{-1}(r_1)\}}) \otimes \dots \\
& \quad \dots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{\rho^{-1}(p+q-r_k+1), \rho^{-1}(p+q)\}}) \\
& = \pm \varepsilon \left( a_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\} \setminus \{s_{j-1}+1, \dots, s_j\}}^{a_{\{1, \dots, p+q\} \setminus \{s_{j-1}+1, \dots, s_j\}}} \right) F_{r_1}(\alpha_{I_1}) \otimes \dots \otimes F_{r_{j-1}}(\alpha_{I_{r_{j-1}}}) \otimes \\
& \quad \otimes \sum_{\mu \in Bat(t_j, r_j - t_j)} \varepsilon \left( a_{\{i_{\mu^{-1}(1)}, \dots, i_{\mu^{-1}(r_j)}\}}^{a_{\{1, \dots, i_{r_j}\}}} \right) F_{r_j}(\alpha_{i_{\mu^{-1}(1)}}) \otimes \dots \otimes F_{r_j}(\alpha_{i_{\mu^{-1}(r_j)}}) \otimes \\
& \quad \otimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{I_{r_{j+1}}}) \otimes \dots \otimes F_{r_k}(\alpha_{I_k}) \\
& = 0
\end{aligned}$$

en posant  $\beta_v = \alpha_{i_v}$  et en remarquant que  $F_{r_j}$  s'annule sur

$$bat(t_j, r_j - t_j)(\beta_{\{1, \dots, t_j\}}, \beta_{\{t_j+1, \dots, r_j\}}).$$

Il ne reste donc que la somme sur les battements  $\sigma$  tels que pour tout  $j$ , on ait soit  $I_j \subset \{1, \dots, p\}$  soit  $I_j \subset \{p+1, \dots, p+q\}$ . Dans ce cas, les nombres  $\sigma^{-1}(s_{j-1} + 1), \dots, \sigma^{-1}(s_j)$  sont rangés dans leur ordre naturel, puisque  $\sigma$  est un battement. Notons maintenant  $J_1, \dots, J_r$  les ensembles  $I_j$  tels que  $I_j \subset \{1, \dots, p\}$  et  $J_{s+1}, \dots, J_{s+r}$  les autres. Posons  $J_j = \{g_1^j < g_2^j < \dots < g_{h_j}^j\}$ . La somme sur tous les battements  $\sigma$  tels que  $\{I_1, \dots, I_k\} = \{J_1, \dots, J_{r+s}\}$  (à l'ordre près) est isomorphe à une somme sur tous les  $(r, s)$  battements  $\nu$ : étant donné un tel battement  $\nu$ , on construit le  $(p, q)$  battement  $\tilde{\nu}$  en posant, pour tout  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$  et tout  $t$ ,  $1 \leq t \leq r_j$ :

$$\tilde{\nu}^{-1}(s_{j-1} + t) = g_t^{\nu^{-1}(j)}.$$

Alors, si  $s_j = |J_j|$ ,

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\sigma \in Bat(p, q) \\ \{I_1, \dots, I_k\} = \{J_1, \dots, J_k\}}} \varepsilon \left( a_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}}^{a_{\{1, \dots, p+q\}}} \right) F_{r_1}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(r_1)\}}) \otimes \dots \\
& \quad \dots \otimes F_{r_k}(\alpha_{\{\sigma^{-1}(p+q-r_k+1), \sigma^{-1}(p+q)\}}) = \\
& = \sum_{\mu \in Bat(r, s)} \varepsilon \left( a_{\{i_{\mu^{-1}(1)}, \dots, i_{\mu^{-1}(k)}\}}^{a_{J_1 \dots J_k}} \right) F_{s_{\mu^{-1}(1)}}(\alpha_{J_{\mu^{-1}(1)}}) \otimes \dots \otimes F_{s_{\mu^{-1}(k)}}(\alpha_{J_{\mu^{-1}(k)}}) \\
& = bat_{r, s}(F_{s_1}(\alpha_{J_1}) \otimes \dots \otimes F_{s_r}(\alpha_{J_r}), F_{s_{r+1}}(\alpha_{J_{r+1}}) \otimes \dots \otimes F_{s_{r+s}}(\alpha_{J_{r+s}})).
\end{aligned}$$

C'est l'égalité annoncée.

$F$  est un morphisme.

En gardant nos notations et en ajoutant  $(r_j) = [s_{j-1} + 1, s_j]$ , on a par définition:

$$\begin{aligned} \delta \circ F(\alpha_{[1,n]}) &= \sum_{r_1, \dots, r_k} \sum_{0 < j < k} F_{r_1}(\alpha_{(r_1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_j}(\alpha_{(r_j)}) \otimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{(r_k)}) \\ &\quad - (-1)^{a_{[1,s_j]} a_{[s_j+1,n]}} F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{(r_k)}) \otimes F_{r_1}(\alpha_{(r_1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_j}(\alpha_{(r_j)}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (F \otimes F) \circ \delta(\alpha_{[1,n]}) &= (F \otimes F) \left( \sum_{0 < s < n} \alpha_{[1,s]} \otimes \alpha_{[s+1,n]} - (-1)^{a_{[1,s]} a_{[s+1,n]}} \alpha_{[s+1,n]} \otimes \alpha_{[1,s]} \right) \\ &= \sum_{0 < s < n} \sum_{\substack{r_1, \dots, r_j \\ r_1 + \dots + r_j = s}} \sum_{\substack{r_{j+1}, \dots, r_k \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \\ &\quad F_{r_1}(\alpha_{(r_1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_j}(\alpha_{(r_j)}) \otimes F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{(r_k)}) - \\ &\quad - (-1)^{a_{[1,s]} a_{[s+1,n]}} F_{r_{j+1}}(\alpha_{(r_{j+1})}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{(r_k)}) \otimes F_{r_1}(\alpha_{(r_1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_j}(\alpha_{(r_j)}). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que chaque terme de la première expression apparaît une fois et une seule dans la seconde et réciproquement. On a donc

$$\delta \circ F = (F \otimes F) \circ \delta.$$

$Q$  est bien défini.

Il s'agit là encore de montrer que la définition de  $\tilde{Q}$ :

$$\tilde{Q}(\alpha_{\{1, \dots, n\}}) = \sum_{\substack{0 < r \\ 1 \leq j \leq n-r}} (-1)^{qa_{\{1, \dots, j\}}} \alpha_{\{1, \dots, j\}} \otimes Q_r(\alpha_{\{j+1, \dots, j+r\}}) \otimes \alpha_{\{j+r+1, \dots, n\}}$$

passé au quotient. On calcule donc  $Q(\text{bat}_{p,q}(\alpha_{\{1, \dots, p\}}, \alpha_{\{p+1, \dots, p+q\}}))$ . Le même argument que ci-dessus, nous dit d'abord qu'il ne reste que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 < r \\ 1 \leq j \leq n-r}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, p\} \\ \text{ou} \\ I \subset \{p+1, \dots, p+q\}}} \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ \sigma^{-1}(\{j+1, \dots, j+r\}) = I}} (-1)^{qa_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(j)\}}} \varepsilon \left( a_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}} \right) \\ \alpha_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(j)\}} \otimes Q_r(\alpha_I) \otimes \alpha_{\{\sigma^{-1}(j+r+1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme  $\sigma$  est un battement, les éléments de  $I$  sont rangés dans leur ordre naturel  $I = \{t, t+1, \dots, t+r-1\}$ . Supposons (par exemple) que  $I \subset \{1, \dots, p\}$ , alors les  $\alpha$  d'indices dans  $\{1, \dots, p\}$  et précédant ceux de  $I$  apparaissent avant le terme en  $Q_r$ . On pose donc  $t = \sigma^{-1}(s_{j-1} + 1)$  et:

$$\begin{cases} \beta_i = \alpha_i & \text{si } \sigma^{-1}(i) \notin I \\ \beta_t = Q_r(\alpha_I) \end{cases}$$

Il y a donc  $p + q - r + 1$   $\beta$ , indicés par  $\{1, \dots, t-1, t, t+r, \dots, p, p+1, \dots, p+q\}$ . On a  $\beta_i = \alpha_i$  si  $\sigma^{-1}(i) \notin I$  et  $\beta_t = q + a_I$ . Les battements  $\sigma$  considérés sont en bijection avec les

battements  $\rho$  qu'ils induisent sur les  $\beta$ . On a

$$\begin{aligned} (-1)^{qa_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(j)\}}} \varepsilon \left( a_{\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(p+q)\}}^{\alpha_{\{1, \dots, p+q\}}} \right) &= \\ &= (-1)^{qa_{\{1, \dots, t-1\}}} \varepsilon \left( b_{\{\rho^{-1}(1), \dots, \rho^{-1}(t), \rho^{-1}(t+r), \dots, \rho^{-1}(p+q)\}}^{b_{\{1, \dots, t, t+r, \dots, p+q\}}} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Q(\text{bat}_{p,q}(\alpha_{\{1, \dots, p\}}, \alpha_{\{p+1, \dots, p+q\}})) &= \\ &= \sum_{0 < r < t} \sum_{t+r-1 \leq p} (-1)^{qa_{\{1, \dots, t-1\}}} \text{bat}_{p-r+1,q}(\beta_{\{1, \dots, t, t+r, \dots, p\}}, \beta_{\{p+1, \dots, p+q\}}) \\ &\quad + \sum_{p < t} (-1)^{qa_{\{p+1, \dots, t-1\}}} \text{bat}_{p,q-r+1}(\beta_{\{1, \dots, p\}}, \beta_{\{p+1, \dots, t, t+r, \dots, p+q\}}). \end{aligned}$$

Comme ci-dessus,  $Q$  est donc bien définie.

$Q$  est une codérivation.

On a

$$\delta \circ Q(\alpha_{[1,n]}) = \delta \left( \sum_{r,j} (-1)^{qa_{[1,j]}} \alpha_{[1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,n]} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta \circ Q(\alpha_{[1,n]}) &= \sum_{r, 0 < k < j} (-1)^{qa_{[1,j]}} \alpha_{[1,k]} \otimes \alpha_{[k+1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,n]} - \\ &\quad - (-1)^{qa_{[1,j]} + a_{[1,k]}(a_{[k+1,n]} + q)} \alpha_{[k+1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,n]} \otimes \alpha_{[1,k]} + \\ &\quad + \sum_{r, 0 < j < k-r} (-1)^{qa_{[1,j]}} \alpha_{[1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,k]} \otimes \alpha_{[k+1,n]} - \\ &\quad - (-1)^{qa_{[1,j]} + (a_{[1,k]} + q)a_{[k+1,n]}} \alpha_{[k+1,n]} \otimes \alpha_{[1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,k]}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (id \otimes Q + Q \otimes id) \circ \delta(\alpha_{[1,n]}) &= \\ &= (id \otimes Q + Q \otimes id) \sum_{0 < k < n} \alpha_{[1,k]} \otimes \alpha_{[k+1,n]} - (-1)^{a_{[1,k]}a_{[k+1,n]}} \alpha_{[k+1,n]} \otimes \alpha_{[1,k]} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& (id \otimes Q + Q \otimes id) \circ \delta(\alpha_{[1,n]}) = \\
& = \sum_{0 < k < j < n-r+1} (-1)^{q(a_{[1,k]} + a_{[k+1,j]})} \alpha_{[1,k]} \otimes \alpha_{[k+1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,n]} \\
& \quad - \sum_{0 < j < k-r+1 < n-r+1} (-1)^{q(a_{[k+1,n]} + a_{[1,j]}) + a_{[1,k]} a_{[k+1,n]}} \alpha_{[k+1,n]} \otimes \\
& \quad \quad \quad \otimes \alpha_{[1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,k]} \\
& + \sum_{0 < j < k-r+1 < n-r+1} (-1)^{q a_{[1,j]}} \alpha_{[1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,k]} \otimes \alpha_{[k+1,n]} \\
& - \sum_{0 < k < j < n-r+1} (-1)^{q a_{[k+1,j]} + a_{[1,k]} a_{[k+1,n]}} \alpha_{[k+1,j]} \underline{\otimes} Q_r(\alpha_{[j+1,j+r]}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+r+1,n]} \otimes \alpha_{[1,k]}.
\end{aligned}$$

$Q$  est donc une codérivation et la proposition est prouvée.  $\square$

#### 4.4. $C_\infty$ algèbre, morphismes de $C_\infty$ algèbre.

Lorsque  $A$  est une algèbre commutative,  $A[1]$  est muni d'un produit  $m_2$  défini par  $m_2(\alpha, \beta) = (-1)^a \alpha \beta$  qui devient de degré 1, anticommutatif et antiassociatif:

$$m_2(\beta, \alpha) = -(-1)^{ab} m_2(\alpha, \beta), \quad m_2(m_2(\alpha, \beta), \gamma) = -(-1)^a m_2(\alpha, m_2(\beta, \gamma)).$$

Le produit  $m_2$  étant anticommutatif est défini de  $\underline{\otimes}^2(A[1])$  dans  $A[1]$ . Il se prolonge donc, grâce à la proposition précédente, en une unique codérivation  $m$  du crochet  $\delta$ . Comme  $m$  est de degré 1, le prolongement à  $\underline{\otimes}^n(A[1])$  est

$$m(\alpha_{[1,n]}) = \sum_{0 < k < n} (-1)^{a_{[1,k-1]}} \alpha_{[1,k-1]} \underline{\otimes} m_2(\alpha_k, \alpha_{k+1}) \underline{\otimes} \alpha_{[k+2,n]}.$$

**Lemme 4.5.** (Propriétés de  $m$ )

$m$  est l'unique codérivation de  $\delta$  qui prolonge  $m_2$  sur  $\underline{\otimes}^2(A[1])$ . Elle vérifie  $m \circ m = 0$ .

**Preuve**

Remarquons que,  $m$  étant une codérivation de degré impair,  $m \circ m$  est aussi une codérivation. Avec les notations précédentes,  $(m \circ m)_k = 0$  si  $k \neq 3$  et, puisque  $m_2$  est antiassociative,

$$(m \circ m)_3(\alpha_1 \underline{\otimes} \alpha_2 \underline{\otimes} \alpha_3) = m_2(m_2(\alpha_1 \underline{\otimes} \alpha_2) \underline{\otimes} \alpha_3) + (-1)^{a_1} \alpha_1 \underline{\otimes} m_2(\alpha_2 \underline{\otimes} \alpha_3) = 0.$$

Par unicité de la codérivation qui prolonge les  $(m \circ m)_k$ , on en déduit que  $m \circ m = 0$ .  $\square$

**Définition 4.6.** ( $C_\infty$  algèbre)

Une  $C_\infty$  algèbre est une cogèbre différentielle de la forme  $(\underline{\otimes}^+(A[1]), \delta, m)$  où  $\delta$  est le cocrochet de Lie défini ci-dessus et  $m$  est une codérivation de  $\delta$  de carré nul.

Si  $A$  est une algèbre commutative graduée, la cogèbre de Lie différentielle  $C(A) = (\underline{\otimes}^+(A[1]), \delta, m)$  où  $m_k = 0$  pour tout  $k \neq 2$  et  $m_2(\alpha \otimes \beta) = (-1)^a \alpha \wedge \beta$  s'appelle la  $C_\infty$  algèbre enveloppante de  $(A, \wedge)$ .

Un morphisme de  $C_\infty$  algèbres  $A$  et  $B$  est un morphisme de cogèbres de Lie  $F : \underline{\otimes}^+(A[1]) \longrightarrow \underline{\otimes}^+(B[1])$  tel que  $m^B \circ F = F \circ m^A$ .

Puisqu'une codérivation  $m$  est caractérisée par la suite des  $m_k$ , on voit qu'une  $C_\infty$  algèbre est la  $C_\infty$  algèbre enveloppante d'une algèbre commutative si et seulement si elle est telle que  $m_k = 0$  pour tout  $k \neq 2$ .

De même, un morphisme d'algèbres commutatives  $f : A \longrightarrow B$  se relève d'une façon et une seule en un morphisme de leur  $C_\infty$  algèbres enveloppantes  $F : \underline{\otimes}^+(A[1]) \longrightarrow \underline{\otimes}^+(B[1])$  tel que  $F_1 = f$  et  $F_k = 0$  si  $k > 1$ .

L'équation de  $C_\infty$  morphisme  $m^B \circ F = F \circ m^A$  pour un morphisme  $F$  de cogèbres de Lie, écrite sur les applications  $F_n : \underline{\otimes}^n(A[1]) \longrightarrow B[1-n]$ , s'appelle l'équation de  $C_\infty$  formalité.

D'une part, on a

$$\begin{aligned} m^B \circ F(\alpha_{[1,n]}) &= \sum_{k, r_1 + \dots + r_k = n} m^B(F_{r_1}(\alpha_{[1, s_1]}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{[s_{k-1}+1, s_k]})) \\ &= \sum_{0 < j < k} (-1)^{a[1, s_{j-1}]} F_{r_1}(\alpha_{[1, s_1]}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_{j-1}}(\alpha_{[s_{j-2}+1, s_{j-1}]} \underline{\otimes} \\ &\quad m^B(F_{r_j}(\alpha_{[s_{j-1}+1, s_j]}) \underline{\otimes} F_{r_{j+1}}(\alpha_{[s_j+1, s_{j+1}]})) \underline{\otimes} F_{r_{j+2}}(\alpha_{[s_{j+1}+1, s_{j+2}]} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{[s_{k-1}+1, s_k]})). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} F \circ m^A(\alpha_{[1,n]}) &= F\left(\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{a[1, j-1]} \alpha_{[1, j-1]} \underline{\otimes} m^A(\alpha_j \underline{\otimes} \alpha_{j+1}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+2, n]}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{a[1, j-1]} \sum_{k, r_1 + \dots + r_k = n-1} \\ &\quad F_{r_1}(\alpha_{[1, s_1]}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_t}(\alpha_{[s_{t-1}+1, j-1]} \underline{\otimes} m^A(\alpha_j \underline{\otimes} \alpha_{j+1}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+1, s_t]}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} F_{r_k}(\alpha_{[s_{k-1}+1, s_k]}). \end{aligned}$$

En écrivant  $(m^B \circ F - F \circ m^A)(\alpha_{[1,n]})$  à l'ordre  $n-1$ , on trouve les termes

$$\begin{aligned}
& m^B(F_{n-1}(\alpha_{[1,n-1]}) \underline{\otimes} F_1(\alpha_n)) + m^B(F_1(\alpha_1) \underline{\otimes} F_{n-1}(\alpha_{[2,n]})) \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{a_{[1,j-1]}} F_{n-1}(\alpha_{[1,j-1]} \underline{\otimes} m^A(\alpha_j \underline{\otimes} \alpha_{j+1}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+2,n]}) \\
& = (-1)^{a_{[1,n-1]}+1} F_{n-1}(\alpha_{[1,n-1]}) \wedge F_1(\alpha_n) + (-1)^{a_1+1} F_1(\alpha_1) \wedge F_{n-1}(\alpha_{[2,n]}) \\
& - \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{a_{[1,j]}+1} F_{n-1}(\alpha_{[1,j-1]} \underline{\otimes} (\alpha_j \wedge \alpha_{j+1}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+2,n]}) \\
& = (d_{Ha} F_{n-1})(\alpha_{[1,n-1]})
\end{aligned}$$

On retrouve l'opérateur de cobord de Harrison  $d_{Ha}$ .

Finalement, comme pour les algèbres de Lie, si  $A$  est une algèbre commutative et  $V$  un  $A$  module vu comme un bimodule, l'espace  $B = A \oplus \sum_{p>0} V[p]$  muni du produit

$$(\alpha + \sum u_p)(\beta + \sum v_q) = (\alpha\beta + \sum \alpha v_p + u_p \beta)$$

est une algèbre commutative et l'application  $f : A \rightarrow B$ , définie par  $f(\alpha) = (\alpha, 0)$  est un morphisme d'algèbres.

Comme pour les algèbres de Lie, un morphisme de cogèbres de Lie  $F$  tel que  $F_1 = f + C_1$ ,  $F_k = C_k$  ( $k > 1$ ) avec  $C_k : \underline{\otimes}^k(A[1]) \rightarrow V[k]$  est un morphisme de  $C_\infty$  algèbres sera appelé une  $C_\infty$  formalité.

Cette formalité est dite triviale s'il existe un morphisme  $G$  tel que  $C = m^B \circ G + G \circ m^A$ ,  $G$  étant de degré -1 et  $G = \sum B_p$  avec  $B_p : \underline{\otimes}^p(A[1]) \rightarrow V[p]$ .

On retrouve ainsi la cohomologie de Harrison des algèbres commutatives, puisque

**Proposition 4.7.** ( $C_\infty$  formalités et cohomologie de Harrison)

*Avec les notations précédentes,  $F$  est une  $C_\infty$  formalité si et seulement si*

$$d_{Ha} C_k = 0 \quad \text{pour tout } k > 0.$$

*$F$  est triviale si et seulement si*

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad C_k = d_{Ha} B_k \quad \text{pour tout } k > 1.$$

## 5. ALGÈBRE DE LIE DIFFÉRENTIELLE ASSOCIÉE À UNE ALGÈBRE DE GERSTENHABER



### 5.1. Algèbres de Gerstenhaber.

Le prototype des algèbres de Gerstenhaber est l'espace  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  des champs de tenseurs sur  $\mathbb{R}^d$ . Cet espace gradué est muni du produit extérieur  $\wedge$  et du crochet  $[\ , \ ]_S$  de Schouten. Les axiomes usuels d'une algèbre de Gerstenhaber sont donc les suivants.

Une algèbre de Gerstenhaber est un espace vectoriel gradué  $\mathcal{G}$  muni d'une multiplication commutative graduée et associative  $\wedge : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  de degré 0 et d'un crochet  $[\ , \ ] : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  de degré  $-1$  tel que  $(\mathcal{G}[1], [\ , \ ])$  soit une algèbre de Lie graduée et que, pour tout  $\alpha$  homogène, l'application  $[\alpha, \cdot]$  soit une dérivation graduée pour la multiplication  $\wedge$ . En notant  $|\alpha|$  le degré d'un élément homogène  $\alpha$  de  $\mathcal{G}$ , on a donc:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha, \\ \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &= (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma, \\ [\alpha, \beta] &= -(-1)^{(|\alpha|-1)(|\beta|-1)} [\beta, \alpha], \\ 0 &= (-1)^{(|\alpha|-1)(|\gamma|-1)} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{(|\beta|-1)(|\alpha|-1)} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{(|\gamma|-1)(|\beta|-1)} [[\gamma, \alpha], \beta], \\ [\alpha, \beta \wedge \gamma] &= [\alpha, \beta] \wedge \gamma + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)} \beta \wedge [\alpha, \gamma] \end{aligned}$$

et donc aussi:

$$[\alpha \wedge \beta, \gamma] = \alpha \wedge [\beta, \gamma] + (-1)^{|\beta|(|\alpha|-1)} [\alpha, \gamma] \wedge \beta.$$

Remarquons qu'il n'y a pas d'équivalent non gradué à la structure d'algèbre de Gerstenhaber. En particulier, une algèbre de Poisson graduée n'est pas une algèbre de Gerstenhaber.

La dernière identité ne vérifie malheureusement pas la règle des signes de Koszul qui s'écrirait ici:

$$\begin{aligned} [\alpha \wedge \beta, \gamma] &= [\ , \ ](\wedge(\alpha, \beta), \gamma) \\ &= \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & |\alpha| & |\beta| & |\gamma| \\ 0 & |\alpha| & 1 & |\beta| & |\gamma| \end{pmatrix} \alpha \wedge [\beta, \gamma] + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & |\alpha| & |\beta| & |\gamma| \\ 0 & 1 & |\alpha| & |\beta| & |\gamma| \end{pmatrix} [\alpha, \gamma] \wedge \beta \\ &= (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge [\beta, \gamma] + (-1)^{|\beta||\gamma|} [\alpha, \gamma] \wedge \beta. \end{aligned}$$

Pour éviter ce problème, on écrit les axiomes des algèbres de Gerstenhaber dans  $\mathcal{G}[1]$ , après un décalage de degré.

On note comme ci-dessus  $a, b, \dots$  les degrés de  $\alpha, \beta, \dots$ . Le produit  $\wedge$  donne un produit  $\mu_2$  :

$$\mu_2(\alpha, \beta) = (-1)^a \alpha \wedge \beta.$$

On a vu que  $\mu_2$  est anticommutatif et antiassociatif et de degré 1. Le crochet  $[\ , \ ]$  est un crochet d'algèbre de Lie graduée sur  $\mathcal{G}[1]$  (de degré 0.) De plus, l'application  $[\alpha, \cdot]$  est une dérivation graduée pour la multiplication  $\mu_2$  qui vérifie bien la règle des signes de Koszul:

$$[\alpha, \mu_2(\beta, \gamma)] = (-1)^a \mu_2([\alpha, \beta], \gamma) + (-1)^{a(b+1)} \mu_2(\beta, [\alpha, \gamma])$$

et

$$[\mu_2(\alpha, \beta), \gamma] = \mu_2(\alpha, [\beta, \gamma]) + (-1)^{bc} \mu_2([\alpha, \gamma], \beta).$$

## 5.2. La $C_\infty$ algèbre vue comme une algèbre de Lie.

Comme dans la section précédente, on peut construire la  $C_\infty$  algèbre naturellement associée à l'algèbre commutative  $(\mathcal{G}, \wedge)$ . On notera cette cogèbre différentielle:

$$(\mathcal{H}, \delta, \mu) = \left( \underline{\bigotimes}^+ (\mathcal{G}[1]), \delta, \mu \right).$$

Avec, comme plus haut,

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_{[1,n]}) &= \sum_{0 < j < n} \left( \alpha_{[1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,n]} - \tau(\alpha_{[1,j]} \otimes \alpha_{[j+1,n]}) \right), \\ \mu(\alpha_{[1,n]}) &= \sum_{0 < j < n} (-1)^{a_{[1,j-1]}} \alpha_{[1,j-1]} \underline{\otimes} \mu_2(\alpha_j, \alpha_{j+1}) \underline{\otimes} \alpha_{[j+2,n]}. \end{aligned}$$

Maintenant, il faut prolonger la définition du crochet de  $\mathcal{G}[1]$  à  $\mathcal{H}$ . On pose donc: On prolonge d'abord l'opérateur  $[\ , \ ]$  sur l'espace  $\mathcal{G}^{\otimes p} \wedge \mathcal{G}^{\otimes q}$  en définissant le crochet de

$$\alpha = \alpha_{\{1, \dots, p\}} = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p \quad \text{et} \quad \beta = \alpha_{\{p+1, \dots, p+q\}} = \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q}$$

par:

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta] &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon \left( a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(p+q)} \right) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} [\sigma.(\alpha \otimes \beta)]_k. \end{aligned}$$

Maintenant, on peut passer au quotient par les battements puisque:

### Lemme 5.1.

Soient  $\alpha \in \mathcal{G}[1]^{\otimes p}$ ,  $\beta \in \mathcal{G}[1]^{\otimes q}$  et  $\gamma \in \mathcal{G}[1]^{\otimes r}$ . On a alors:

$$[\text{bat}_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma] = \text{bat}_{p,q+r-1}(\alpha, [\beta, \gamma]) + (-1)^{ab} \text{bat}_{q,p+r-1}(\beta, [\alpha, \gamma]).$$

### Preuve

Notons  $\alpha = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$ ,  $\beta = \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q}$  et  $\gamma = \alpha_{p+q+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+q+r}$ . On a

$$\begin{aligned}
[bat_{p,q}(\alpha, \beta), \gamma] &= \sum_{\substack{\sigma_2 \in Bat(p+q,r) \\ \sigma_2^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_2^{-1}(k+1)}} [\sigma_2 \cdot (bat_{p,q}(\alpha, \beta) \otimes \gamma)]_k \\
&= \sum_{\substack{\sigma_2 \in Bat(p+q,r), \sigma_1 \in Bat(p,q) \\ \sigma_2^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_2^{-1}(k+1)}} [\sigma_2 \circ (\sigma_1 \otimes id_{\{p+q+1, \dots, p+q+r\}}) \cdot (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_k \\
&= \sum_{\substack{\rho \in Bat(p,q,r) \\ \rho^{-1}(k) \leq p+q < \rho^{-1}(k+1)}} [\rho \cdot (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_k \\
&= \sum_{\substack{\rho \in Bat(p,q,r) \\ p < \rho^{-1}(k) \leq p+q < \rho^{-1}(k+1)}} [\rho \cdot (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_k + \sum_{\substack{\rho \in Bat(p,q,r) \\ \rho^{-1}(k) \leq p < p+q < \rho^{-1}(k+1)}} [\rho \cdot (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_k \\
&= (I) + (II).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi

$$[\beta, \gamma] = \sum_{\substack{\sigma_1 \in Bat(q,r) \\ p < \sigma_1^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_1^{-1}(k+1)}} [\sigma_1 \cdot (\beta \otimes \gamma)]_k.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\alpha \otimes [\beta, \gamma] &= \sum_{\substack{(id \otimes \sigma_1) \in Bat(p,q,r) \\ p < \sigma_1^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_1^{-1}(k+1)}} [(id \otimes \sigma_1) \cdot (\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_k \\
&= \sum_{\substack{(id \otimes \sigma_1) \in Bat(p,q,r) \\ p < \sigma_1^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_1^{-1}(k+1)}} \varepsilon \left( a_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(1)}^{a_1} \dots a_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(p+q+r)}^{a_{p+q+r}} \right) \beta_1^{\sigma_1} \otimes \dots \otimes \beta_{p+q+r-1}^{\sigma_1},
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\beta_j^{\sigma_1} = \begin{cases} \alpha_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(j)}, & \text{si } 1 \leq j < k, \\ [\alpha_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(k)}, \alpha_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(k+1)}], & \text{si } j = k, \\ \alpha_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(j+1)}, & \text{si } k < j \leq p+q+r-1. \end{cases}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
bat_{p,q+r-1}(\alpha, [\beta, \gamma]) &= \sum_{\sigma_2 \in Bat(p,q+r-1)} \sum_{\substack{\sigma_1 \in Ba(q,r) \\ p < \sigma_1^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_1^{-1}(k+1)}} \varepsilon \left( \begin{matrix} \beta_1 & \dots & \beta_{p+q+r-1} \\ \beta_{\sigma_2^{-1}(1)} & \dots & \beta_{\sigma_2^{-1}(p+q+r-1)} \end{matrix} \right) \\
&\quad \varepsilon \left( a_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(1)}^{a_1} \dots a_{(id \otimes \sigma_1)^{-1}(p+q+r)}^{a_{p+q+r}} \right) \beta_{\sigma_2^{-1}(1)}^{\sigma_1} \otimes \dots \otimes \beta_{\sigma_2^{-1}(p+q+r-1)}^{\sigma_1}.
\end{aligned}$$

En posant  $k' = \sigma_2^{-1}(k)$ , on voit que l'application  $(\sigma_1, \sigma_2, k) \mapsto (\rho, k')$  est une bijection entre les ensembles

$$\{(\sigma_1, \sigma_2, k) \in \text{Bat}(q, r) \times \text{Bat}(p, q+r-1) \times [1, p+q+r-1], p < \sigma_1^{-1}(k) \leq p+q < \sigma_1^{-1}(k+1)\}$$

et

$$\{(\rho, k') \in \text{Bat}(p, q, r) \times [1, p+q+r-1], p < \rho^{-1}(k') \leq p+q < \rho^{-1}(k'+1)\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{bat}_{p, q+r-1}(\alpha, [\beta, \gamma]) &= \sum_{\substack{\rho \in \text{Bat}(p, q, r) \\ p < \rho^{-1}(k') \leq p+q < \rho^{-1}(k'+1)}} [\varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \dots & a_{p+q+r} \\ a_{\rho^{-1}(1)} & \dots & a_{\rho^{-1}(p+q+r)} \end{matrix} \right) \alpha_{\rho^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \alpha_{\rho^{-1}(p+q+r)}]_{k'} \\ &= \sum_{\substack{\rho \in \text{Bat}(p, q, r) \\ p < \rho^{-1}(k') \leq p+q < \rho^{-1}(k'+1)}} [\rho.(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_{k'} \\ &= (I). \end{aligned}$$

On montre de même que

$$(-1)^{ab} \text{bat}_{q, p+r-1}(\beta, [\alpha, \gamma]) = \sum_{\substack{\rho \in \text{Bat}(p, q, r) \\ \rho^{-1}(k') \leq p < p+q < \rho^{-1}(k'+1)}} [\rho.(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)]_k = (II).$$

D'où le lemme. □

Le lemme nous permet de définir  $[\ , \ ]$  par la même expression sur l'espace  $\underline{\otimes}^p(\mathcal{G}[1]) \wedge \underline{\otimes}^q(\mathcal{G}[1])$ . On obtient un crochet sur  $\mathcal{H}$  qui vérifie les identités de Jacobi et de Leibniz.

**Théorème 5.2.** ( $\mathcal{H}$  est une algèbre de Lie différentielle graduée)

*L'espace  $\mathcal{H}$ , muni du crochet  $[\ , \ ]$  et de l'opérateur  $\mu$  est une algèbre de Lie différentielle graduée: Pour tout  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  de  $\mathcal{H}$ , on a:*

- (i)  $[\alpha, \beta] = -(-1)^{ab}[\beta, \alpha]$ ,
- (ii)  $(-1)^{ac} [[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{ba} [[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{cb} [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$ ,
- (iii)  $\mu([\alpha, \beta]) = [\mu(\alpha), \beta] + (-1)^a [\alpha, \mu(\beta)]$ .

**Preuve**

(i) On sait que

$$\begin{aligned} [\alpha_{[1, p]}, \alpha_{[p+1, p+q]}] &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) \\ &\quad \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

Fixons un couple  $(\sigma, k)$  dans cette somme (tel que  $\sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)$ .) On définit trois permutations  $\tau$ ,  $\rho$  et  $\nu$  de  $S_{p+q}$  par:

$$\tau(j) = \begin{cases} j+p, & \text{si } 1 \leq j \leq q \\ j-q, & \text{si } q < j \leq q+p. \end{cases}, \quad \rho = \sigma \circ \tau \quad \text{et} \quad \nu^{-1}(i) = \begin{cases} \rho^{-1}(i), & \text{si } i \notin \{k, k+1\} \\ \rho^{-1}(k+1), & \text{si } i = k, \\ \rho^{-1}(k), & \text{si } i = k+1. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que  $\nu$  appartient à  $Bat(q, p)$  et que  $\nu^{-1}(k) \leq q < \nu^{-1}(k+1)$ . De plus l'application  $(\sigma, k) \mapsto (\nu, k)$  est une bijection sur les ensembles correspondants.

Posons maintenant  $\beta_j = \alpha_{\tau(j)}$ . On a:

$$\varepsilon \left( \begin{matrix} b_1 & \dots & b_{p+q} \\ b_{\nu^{-1}(1)} & \dots & b_{\nu^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) = \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) (-1)^{a_{\sigma^{-1}(k)} a_{\sigma^{-1}(k+1)}} (-1)^{a_{[1,p]} a_{[p+1,p+q]}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} [\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[p+1,p+q]}] &= (-1)^{a_{[1,p]} a_{[p+1,p+q]}} \sum_{\substack{\nu \in Bat(q,p) \\ \nu^{-1}(k) \leq q < \nu^{-1}(k+1)}} \varepsilon \left( \begin{matrix} b_1 & \dots & b_{p+q} \\ b_{\nu^{-1}(1)} & \dots & b_{\nu^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right) \\ &\quad (-1)^{b_{\nu^{-1}(k)} b_{\nu^{-1}(k+1)}} \beta_{\nu^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes [\beta_{\nu^{-1}(k+1)}, \beta_{\nu^{-1}(k)}] \otimes \dots \otimes \beta_{\nu^{-1}(p+q)} \\ &= (-1)^{a_{[1,p]} a_{[p+1,p+q]}} [\alpha_{[p+1,p+q]}, \alpha_{[1,p]}]. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

(ii) Soient  $\alpha = \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p$ ,  $\beta = \beta_1 \otimes \dots \otimes \beta_q$  et  $\gamma = \gamma_1 \otimes \dots \otimes \gamma_r$ . Pour alléger les notations, pour toute permutation  $\rho \in S_{p+q+r}$ , notons  $\varepsilon(\rho)$  le signe:

$$\varepsilon(\rho) = \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 & \dots & x_{p+q+r} \\ x_{\rho^{-1}(1)} & \dots & x_{\rho^{-1}(p+q+r)} \end{matrix} \right),$$

si

$$\xi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ \beta_{i-p} & \text{si } p+1 \leq i \leq p+q \\ \gamma_{i-p-q} & \text{si } p+q+1 \leq i \leq p+q+r \end{cases}$$

Grâce à l'associativité du produit battement, on a

$$\begin{aligned} (-1)^{ac} \text{bat}_{p,q,r}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) &= (-1)^{ba} \text{bat}_{q,r,p}(\beta \otimes \gamma \otimes \alpha) \\ &= (-1)^{cb} \text{bat}_{r,p,q}(\gamma \otimes \alpha \otimes \beta). \end{aligned}$$

Plus précisément, il y a deux bijections canoniques:

$$\begin{array}{ccc} Bat(p, q, r) & \longrightarrow & Bat(q, r, p) \quad \text{et} \quad Bat(p, q, r) \longrightarrow Bat(r, p, q) \\ \rho_1 & \mapsto & \rho_2 = \rho_1 \circ \tau \quad \rho_1 \quad \mapsto \quad \rho_3 = \rho_1 \circ \tau'. \end{array}$$

Avec

$$\tau(i) = \begin{cases} i+p, & \text{si } 1 \leq i \leq q+r \\ i-(q+r), & \text{si } q+r < i \leq q+r+p. \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau'(i) = \begin{cases} i+p+q, & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ i-r, & \text{si } r < i \leq q+r+p. \end{cases}$$

On a alors

$$(-1)^{ac} \rho_1.(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) = (-1)^{ba} \rho_2.(\beta \otimes \gamma \otimes \alpha) = (-1)^{cb} \rho_3.(\gamma \otimes \alpha \otimes \beta).$$

En écrivant  $(-1)^{ac}[[\alpha, \beta], \gamma]$ , on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(1.1) &: (-1)^{ac} \varepsilon(\rho_{11}) \xi_{i_1} \otimes \dots \otimes [\alpha_i, \beta_j] \otimes \dots \otimes [\beta_k, \gamma_l] \otimes \dots \otimes \xi_{i_{p+q+r}} \\
(1.2) &: (-1)^{ac} \varepsilon(\rho_{12}) \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes [\beta_j, \gamma_l] \otimes \dots \otimes [\alpha_i, \beta_k] \otimes \dots \otimes \xi_{j_{p+q+r}} \\
(1.3) &: (-1)^{ac} \varepsilon(\rho_{13}) \xi_{k_1} \otimes \dots \otimes [\alpha_i, \beta_j] \otimes \dots \otimes [\alpha_k, \gamma_l] \otimes \dots \otimes \xi_{k_{p+q+r}} \\
(1.4) &: (-1)^{ac} \varepsilon(\rho_{14}) \xi_{l_1} \otimes \dots \otimes [\alpha_i, \gamma_l] \otimes \dots \otimes [\alpha_k, \beta_j] \otimes \dots \otimes \xi_{l_{p+q+r}} \\
(1.5) &: (-1)^{ac} \varepsilon(\rho_{15}) \xi_{s_1} \otimes \dots \otimes [[\alpha_i, \beta_j], \gamma_k] \otimes \dots \otimes \xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

En écrivant  $(-1)^{ba}[[\beta, \gamma], \alpha]$ , on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(2.1) &: (-1)^{ba} \varepsilon(\rho_{21}) \xi_{i_1} \otimes \dots \otimes [\beta_j, \alpha_i] \otimes \dots \otimes [\beta_k, \gamma_l] \otimes \dots \otimes \xi_{i_{p+q+r}} \\
(2.2) &: (-1)^{ba} \varepsilon(\rho_{22}) \xi_{j_1} \otimes \dots \otimes [\beta_j, \gamma_l] \otimes \dots \otimes [\beta_k, \alpha_i] \otimes \dots \otimes \xi_{j_{p+q+r}} \\
(2.3) &: (-1)^{ba} \varepsilon(\rho_{23}) \xi_{t_1} \otimes \dots \otimes [\beta_j, \gamma_k] \otimes \dots \otimes [\gamma_l, \alpha_i] \otimes \dots \otimes \xi_{t_{p+q+r}} \\
(2.4) &: (-1)^{ba} \varepsilon(\rho_{24}) \xi_{r_1} \otimes \dots \otimes [\gamma_k, \alpha_i] \otimes \dots \otimes [\beta_j, \gamma_l] \otimes \dots \otimes \xi_{r_{p+q+r}} \\
(2.5) &: (-1)^{ba} \varepsilon(\rho_{25}) \xi_{s_1} \otimes \dots \otimes [[\beta_j, \gamma_k], \alpha_i] \otimes \dots \otimes \xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

En écrivant  $(-1)^{cb}[[\gamma, \alpha], \beta]$ , on trouve des termes de la forme:

$$\begin{aligned}
(3.1) &: (-1)^{cb} \varepsilon(\rho_{31}) \xi_{k_1} \otimes \dots \otimes [\alpha_i, \beta_j] \otimes \dots \otimes [\gamma_l, \alpha_k] \otimes \dots \otimes \xi_{k_{p+q+r}} \\
(3.2) &: (-1)^{cb} \varepsilon(\rho_{32}) \xi_{l_1} \otimes \dots \otimes [\gamma_l, \alpha_i] \otimes \dots \otimes [\alpha_k, \beta_j] \otimes \dots \otimes \xi_{l_{p+q+r}} \\
(3.3) &: (-1)^{cb} \varepsilon(\rho_{33}) \xi_{r_1} \otimes \dots \otimes [\gamma_k, \alpha_i] \otimes \dots \otimes [\gamma_l, \beta_j] \otimes \dots \otimes \xi_{r_{p+q+r}} \\
(3.4) &: (-1)^{cb} \varepsilon(\rho_{34}) \xi_{t_1} \otimes \dots \otimes [\gamma_k, \beta_j] \otimes \dots \otimes [\gamma_l, \alpha_i] \otimes \dots \otimes \xi_{t_{p+q+r}} \\
(3.5) &: (-1)^{cb} \varepsilon(\rho_{35}) \xi_{s_1} \otimes \dots \otimes [[\gamma_k, \alpha_i], \beta_j] \otimes \dots \otimes \xi_{s_{p+q+r}}.
\end{aligned}$$

Considérons les termes (1.1) et (2, 1), on voit que  $\rho_{21}$  est définie par  $\rho_{21}^{-1} = (a_i, b_j) \circ (\rho_{11} \circ \tau)^{-1}$ . On en déduit que la somme de ces deux termes s'annule.

De même, on vérifie que: (1.2) + (2.2) = 0, (1.3) + (3.1) = 0, (1.4) + (3.2) = 0, (2.3) + (3.4) = 0 et (2.4) + (3.3) = 0.

D'autre part, par construction

$$\varepsilon(\rho_{25}) = (-1)^{a_i(b_j+c_k)} (-1)^{a(b+c)} \varepsilon(\rho_{15}) \quad \text{et} \quad \varepsilon(\rho_{35}) = (-1)^{c_k(a_i+b_j)} (-1)^{c(a+b)} \varepsilon(\rho_{15}).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&(1.5) + (2.5) + (3.5) = \\
&= \varepsilon(\rho_{15}) (-1)^{ac} \xi_{s_1} \otimes \dots \otimes \\
&\quad \otimes \left( [[\alpha_i, \beta_j], \gamma_k] + (-1)^{a_i(b_j+c_k)} [[\beta_j, \gamma_k], \alpha_i] + (-1)^{c_k(a_i+b_j)} [[\gamma_k, \alpha_i], \beta_j] \right) \otimes \dots \otimes \xi_{s_{p+q+r}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(iii) On conserve la notation

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon \left( \begin{matrix} a_1 & \dots & a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} & \dots & a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{matrix} \right).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mu([\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[p+1,p+q]}]) &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ i < k-1; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < i} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\quad \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ i > k+1; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < i} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\quad \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ k; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < k-1} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\quad \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k-1)}, [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}]) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ k; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < k} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\quad \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu([\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}], \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&= (I) + (II) + (III) + (IV).
\end{aligned}$$

Dans la somme (I) (resp. (II)), on distingue quatre cas:

- 1) si  $\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\} \subset \{1, \dots, p\}$ : on note  $(I_1)$  (resp.  $(II_1)$ ) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.
- 2) si  $\{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\} \subset \{p+1, \dots, p+q\}$ : on note  $(I_2)$  (resp.  $(II_2)$ ) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.
- 3) si  $\sigma^{-1}(i) \leq p < \sigma^{-1}(i+1)$ : on note  $(I_3)$  (resp.  $(II_3)$ ) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.
- 4) si  $\sigma^{-1}(i+1) \leq p < \sigma^{-1}(i)$ : on note  $(I_4)$  (resp.  $(II_4)$ ) la restriction de (I) (resp. (II)) à ce cas.

On vérifie directement que  $(I_3) + (I_4) = 0$  et  $(II_3) + (II_4) = 0$ .

Dans la somme (III), on distingue deux cas:

- 1) si  $\sigma^{-1}(k-1) \in \{1, \dots, p\}$ : on note  $(III_1)$  la restriction de (III) à ce cas.
- 2) si  $\sigma^{-1}(k-1) \in \{p+1, \dots, p+q\}$ : on note  $(III_2)$  la restriction de (III) à ce cas.

Dans la somme (IV), on distingue deux cas:

- 1) si  $\sigma^{-1}(k+2) \in \{1, \dots, p\}$ : on note  $(IV_1)$  la restriction de (IV) à ce cas.
- 2) si  $\sigma^{-1}(k+2) \in \{p+1, \dots, p+q\}$ : on note  $(IV_2)$  la restriction de (IV) à ce cas.

Donc  $\mu([X, Y])$  s'écrit:

$$\mu([\alpha_{[1,p]}, \alpha_{[p+1,p+q]}]) = (I_1) + (I_2) + (II_1) + (II_2) + (III_1) + (III_2) + (IV_1) + (IV_2).$$

D'autre part, on sait que

$$\mu(\text{bat}_{p,q}(\alpha_{[1,p]}, \beta_{[p+1,p+q]})) = \text{bat}_{p-1,q}(\mu(\alpha_{[1,p]}), \alpha_{[p+1,p+q]}) + (-1)^{a_{[1,p]}} \text{bat}_{p,q-1}(\alpha_{[1,p]}, \mu(\alpha_{[p+1,p+q]})).$$

Donc

$$\begin{aligned}
[\mu(\alpha_{[1,p]}), \alpha_{[p+1,p+q]}] &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ i < k-1; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1) \\ \{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\} \subset \{1, \dots, p\}}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < i} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \otimes \dots \otimes [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ i > k+1; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1) \\ \{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\} \subset \{1, \dots, p\}}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < i} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ k; \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1) \leq p < \sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < k} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes [\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}), \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}] \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&= (I') + (II') + (III').
\end{aligned}$$

On vérifie que  $(I') = (I_1)$ ,  $(II') = (II_1)$ . De plus, en appliquant l'identité de Leibniz pour  $[\mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}), \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}]$ , on obtient,

$$\begin{aligned}
(III') &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ k; \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1) \leq p < \sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < k} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, [\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}]) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ k; \sigma^{-1}(k) < \sigma^{-1}(k+1) \leq p < \sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{r < k} a_{\sigma^{-1}(r)}} (-1)^{a_{\sigma^{-1}(k+1)} a_{\sigma^{-1}(k+2)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \mu([\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)}], \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}) \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&= (III_1) + (IV_1).
\end{aligned}$$



De même, on vérifie que

$$\begin{aligned}
(-1)^{a_{[1,p]}}[\alpha_{[1,p]}, \mu(\alpha_{[p+1,p+q]})] &= \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ i < k-1; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1) \\ \{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\} \subset \{p+1, \dots, p+q\}}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r < i} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ i > k+1; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1) \\ \{\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(i+1)\} \subset \{p+1, \dots, p+q\}}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r < i} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \alpha_{\sigma^{-1}(i+1)}) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&+ \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p,q) \\ k; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1) < \sigma^{-1}(k+2)}} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sum_{r < k+1} a_{\sigma^{-1}(r)}} \\
&\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \mu(\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+2)})] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\
&= (I'') + (II'') + (III'').
\end{aligned}$$

On vérifie comme plus haut que  $(I'') = (I_2)$ ,  $(II'') = (II_2)$  et  $(III'') = (III_2) + (IV_2)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

## 6. $G_\infty$ ALGÈBRE

### 6.1. $L_\infty$ algèbre associée à $\mathcal{H}$ .

Par convention, dans toute la suite on notera le degré d'un élément  $\alpha_{[1,n]} = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \in \underline{\otimes}^n(\mathcal{G}[1])$  par  $a_{[1,n]} = \sum_{i=1}^n a_i$  et on utilisera des lettres capitales pour les paquets, c'est à dire, pour un paquet  $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_n \in (\underline{\otimes}^n(\mathcal{G}[1]))[1] \subset \mathcal{H}[1]$  le degré sera noté  $x = \sum_{i=1}^n a_i - 1 = a_{[1,n]} - 1$ .

Le degré d'un élément  $X_1 \dots X_n \in S^n(\mathcal{H}[1])$  est alors  $x_1 + \dots + x_n$ .

$(\mathcal{H}, \mu, [ , ])$  étant une algèbre de Lie différentielle graduée. En suivant l'étude qu'on a fait dans la section 2, on pourra construire une  $L_\infty$  algèbre associée à  $\mathcal{H}$  notée  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, \ell + m)$ , avec

$$(\ell + m)_2 = \ell_2 = [ , ] \text{ et } (\ell + m)_1 = m_1 = \mu.$$

La comultiplication  $\Delta$  est définie sur  $S^+(\mathcal{H}[1])$  par

$$\Delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \sqcup J = \{1, \dots, n\} \\ \#I > 0, \#J > 0}} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_{\{1, \dots, n\}} \\ x_I, x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \otimes X_J.$$

Le crochet  $[ , ]$  sur  $\mathcal{H}$  était antisymétrique de degré 0. Comme l'on veut une codérivation de degré 1 pour  $\Delta$ , on pose  $\ell_2(X, Y) = (-1)^x [X, Y]$ .  $\ell_2$  devient une application symétrique

sur  $S^2(\mathcal{H}[1])$  de degré 1. Elle vérifie:

- (i)  $\ell_2(X, Y) = (-1)^{xy} \ell_2(Y, X)$ ,
- (ii)  $(-1)^{xz} \ell_2(\ell_2(X, Y), Z) + (-1)^{yx} \ell_2(\ell_2(Y, Z), X) + (-1)^{zy} \ell_2(\ell_2(Z, X), Y) = 0$ ,
- (iii)  $m_1(\ell_2(X, Y)) = -\ell_2(m_1(X), Y) + (-1)^{1+x} \ell_2(X, m_1(Y))$ .

On prolonge le crochet  $\ell_2$  à  $S^+(\mathcal{H}[1])$  de façon unique en une codérivation de degré 1 de la cogèbre  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta)$ . Ce prolongement est donné par:

$$\ell(X_1 \dots X_n) = \sum_{i < j} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_i & x_j & x_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots x_n \end{matrix} \right) \ell_2(X_i, X_j) \cdot X_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots X_n.$$

$\ell$  est de carré nul  $\ell \circ \ell = 0$ .

On prolonge, de même,  $m_1$  à  $S^n(\mathcal{H}[1])$  en une dérivation  $m$  de degré 1 par:

$$m(X_1 \dots X_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{\sum_{1 \leq r < j} x_r} X_1 \dots m_1(X_j) \dots X_n.$$

$m$  est commutative et vérifie  $m \circ m = 0$ .

De plus, grâce à la propriété (iii), on a  $(\ell + m) \circ (\ell + m) = 0$ .

On peut voir alors  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, \ell + m)$  comme une  $L_\infty$  algèbre.

## 6.2. Le cocrochet $\kappa$ .

$(\mathcal{H}, \delta, m_1)$  étant une  $C_\infty$  algèbre. Le cocrochet  $\delta$  sur  $\underline{\otimes}^p(\mathcal{G}[1])$  devient un cocrochet  $\kappa$  sur  $\underline{\otimes}^p(\mathcal{G}[1])[1]$  défini par:

Pour  $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$ ,

$$\begin{aligned} \kappa(X) &= \sum_{j=1}^{p-1} \left( (-1)^{a_{[1,j]}} \alpha_{[1,j]} \underline{\otimes} \alpha_{[j+1,p]} - \varepsilon \left( \begin{matrix} a_{[1,n]} \\ a_{[j+1,n]} & a_{[1,j]} \end{matrix} \right) (-1)^{a_{[j+1,p]}} \alpha_{[j+1,p]} \underline{\otimes} \alpha_{\{1, \dots, j\}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{u_j+1} \left( U_j \underline{\otimes} V_j + \varepsilon \left( \begin{matrix} u_j & v_j \\ v_j & u_j \end{matrix} \right) \alpha_{[j+1,p]} \underline{\otimes} \alpha_{[1,j]} \right). \end{aligned}$$

où  $U_j = \alpha_{[1,j]}$ ,  $V_j = \alpha_{[j+1,p]}$ ,  $u_j = a_{[1,j]} - 1$  et  $v_j = a_{[j+1,p]} - 1$ .

Autrement,

$$\kappa(X) = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{u_j+1} \left( U_j \underline{\otimes} V_j + \tau(U_j \underline{\otimes} V_j) \right).$$

Le cocrochet  $\kappa$  sur  $\underline{\otimes}^p(\mathcal{G}[1])[1]$  est alors cosymétrique ( $\kappa = \tau \circ \kappa$ ) et de degré 1.

On prolonge  $\kappa$  à  $S^+(\mathcal{H}[1])$  par:

$$\begin{aligned} \kappa(X_1 \dots X_n) = & \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i < s} x_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{u_s+1} \times \\ & \times \left( \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ u_s \ v_s \ x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J + \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ v_s \ u_s \ x_J \end{smallmatrix} \right) X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \right), \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ u_s \ v_s \ x_J \end{smallmatrix} \right) = \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_s \ x_J \end{smallmatrix} \right) (-1)^{\sum_{i \in J} i < s} (-1)^{\sum_{i \in I} i > s}.$$

En posant  $\tau_{12} = \tau \otimes id$  et  $\tau_{23} = id \otimes \tau$ ,  $\kappa$  vérifie les identités de coJacobi et de coLeibniz:

**Proposition 6.1.**

- (i)  $(id^{\otimes 3} + \tau_{12} \circ \tau_{23} + \tau_{23} \circ \tau_{12}) \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa = 0$ . (*identité de coJacobi graduée*)
- (ii)  $(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta$ . (*identité de coLeibniz graduée*)  
(Voir [BGHHW])

**Preuve:**

(i) On calcule d'abord,  $(\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_1 \dots X_n)$ , on trouve pour  $t \neq s$  des termes de la forme:

$$(1) : \varepsilon_1 \cdot X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_K$$

$$(2) : \varepsilon_2 \cdot X_I \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_K$$

$$(3) : \varepsilon_3 \cdot X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_K$$

$$(4) : \varepsilon_4 \cdot X_I \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_K$$

$$(5) : \varepsilon_5 \cdot X_I \cdot U_s \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \otimes V_s \cdot X_K$$

$$(6) : \varepsilon_6 \cdot X_I \cdot U_s \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \otimes V_s \cdot X_K$$

$$(7) : \varepsilon_7 \cdot X_I \cdot V_s \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \otimes U_s \cdot X_K$$

$$(8) : \varepsilon_8 \cdot X_I \cdot V_s \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \otimes U_s \cdot X_K$$

Et pour  $t = s$ , si  $X_s = U_s \otimes V_s \otimes W_s$  on trouve des termes de la forme:

$$(9) : \varepsilon_9 \cdot X_I \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_J \otimes W_s \cdot X_K$$

$$(10) : \varepsilon_{10} \cdot X_I \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_J \otimes W_s \cdot X_K$$

$$(11) : \varepsilon_{11} \cdot X_I \cdot V_s \otimes W_s \cdot X_J \otimes U_s \cdot X_K$$

$$(12) : \varepsilon_{12} \cdot X_I \cdot W_s \otimes V_s \cdot X_J \otimes U_s \cdot X_K$$

On s'intéresse par exemple au terme (1) =  $\varepsilon_1 \cdot X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_K$  de  $(\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_1 \dots X_n)$  et on cherche le terme correspondant dans  $(id^{\otimes 3} + \tau_{12} \circ \tau_{23} + \tau_{23} \circ \tau_{12}) \circ (\kappa \otimes$

$id) \circ \kappa(X_1, \dots, X_n)$ . Il apparaît uniquement dans  $\tau_{12} \circ \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_1, \dots, X_n)$  avec le signe  $-\varepsilon_1$ .

En effet, le signe  $\varepsilon_1$  dans (1) est déterminé par:

- On part de  $X_1, \dots, X_n$ , on le ramène en  $X_I, X_t, X_J, X_s, X_K$  accompagné du signe  $\varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_t \ x_J \ x_s \ x_K \end{smallmatrix} \right)$ .

- On applique  $\kappa$ , le terme  $X_I.X_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K$  apparaît une seule fois avec le signe

$$(-1)^{x_I+x_t+x_J+u_s+1} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_t \ x_J \ x_s \ x_K \end{smallmatrix} \right).$$

- Après en appliquant  $(\kappa \otimes id)$ , on obtient une seule fois le terme  $X_I.U_t \otimes V_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K$  avec le signe

$$(-1)^{x_t+x_J+u_s+u_t} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_t \ x_J \ x_s \ x_K \end{smallmatrix} \right) = (-1)^{v_t+u_s+x_J+1} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_t \ x_J \ x_s \ x_K \end{smallmatrix} \right) = \varepsilon_1.$$

On cherche maintenant le signe du terme (1) dans  $\tau_{12} \circ \tau_{23} \circ (\kappa \otimes id) \circ \kappa(X_1, \dots, X_n)$ .

- On part de  $X_1, \dots, X_n$ , on le ramène en  $X_J, X_s, X_K, X_t, X_I$  accompagné du signe  $\varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_s \ x_K \ x_t \ x_I \end{smallmatrix} \right)$ .

- On applique  $\kappa$ , le terme  $X_J.X_s.X_K.V_t \otimes U_t.X_I$  apparaît une seule fois avec le signe

$$(-1)^{x_J+x_s+x_K+u_t+1+u_t v_t} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_s \ x_K \ x_t \ x_I \end{smallmatrix} \right)$$

qui s'écrit encore  $V_t.X_J.X_s.X_K \otimes X_I.U_t$  accompagné du signe

$$(-1)^{x_J+x_s+x_K+u_t+1+u_t v_t+u_t x_I+v_t(x_K+x_s+x_J)} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_s \ x_K \ x_t \ x_I \end{smallmatrix} \right).$$

- Après en appliquant  $(\kappa \otimes id)$ , on obtient une seule fois le terme  $V_t.U_s \otimes V_s.X_K \otimes X_I.U_t$  avec le signe

$$(-1)^{x_J+x_s+x_K+u_t+1+u_t v_t+u_t x_I+v_t(x_K+x_s+x_J)+x_J+v_t+u_s+1} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_s \ x_K \ x_t \ x_I \end{smallmatrix} \right).$$

- On applique ensuite  $\tau_{12} \circ \tau_{23}$ , on obtient le terme  $X_I.X_t.U_t \otimes V_t.X_J.U_s \otimes V_s.X_K$  avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{x_J+x_s+x_K+u_t+1+u_t v_t+u_t x_I+v_t(x_K+x_s+x_J)+x_J+v_t+u_s+1} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_s \ x_K \ x_t \ x_I \end{smallmatrix} \right) \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} v_t \ x_J \ u_s \ v_s \ x_K \ x_I \ u_t \\ x_I \ u_t \ v_t \ x_J \ u_s \ v_s \ x_K \end{smallmatrix} \right) \\ &= (-1)^{x_J+x_s+x_K+u_t+1+u_t v_t+u_t x_I+v_t(x_K+x_s+x_J)+x_J+v_t+u_s+1} \times \\ & \times \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_s \ x_K \ x_t \ x_I \end{smallmatrix} \right) \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} x_J \ x_s \ x_K \ x_t \ x_I \\ x_I \ x_t \ x_J \ x_s \ x_K \end{smallmatrix} \right) (-1)^{x_I+(v_t+1)(x_J+x_K+x_s)+u_t+v_t(x_I+u_t)+x_t x_I} \\ &= -\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Les autres termes se simplifient de façon pareille.

(ii) D'une part, on a

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \kappa(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} (-1)^{\sum_{i < s} x_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{u_s+1} \times \\
&\times \left( \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ u_s \ x_I \ v_s \ x_K \end{matrix} \right) X_J \cdot U_s \otimes X_I \otimes V_s \cdot X_K + \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ u_s \ v_s \ x_K \ x_I \end{matrix} \right) X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_K \otimes X_I \right. \\
&+ \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ v_s \ x_I \ u_s \ x_K \end{matrix} \right) X_J \cdot V_s \otimes X_I \otimes U_s \cdot X_K + \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ v_s \ u_s \ x_K \ x_I \end{matrix} \right) X_J \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_K \otimes X_I \Big) \\
&= (1) + (2) + (3) + (4).
\end{aligned}$$

$$\text{D'autre part, on sait que } \Delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ \#I, \#J > 0}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_J \end{matrix} \right) X_I \otimes X_J.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(id \otimes \kappa) \circ \Delta(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_J \ x_s \ x_K \end{matrix} \right) (-1)^{x_I} (-1)^{\sum_{i \in J} x_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{u_s+1} \\
&\times \left( \varepsilon \left( \begin{matrix} x_I \ x_J \ x_s \ x_K \\ x_I \ x_J \ u_s \ v_s \ x_K \end{matrix} \right) X_I \otimes X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_K + \varepsilon \left( \begin{matrix} x_I \ x_J \ x_s \ x_K \\ x_I \ x_J \ v_s \ u_s \ x_K \end{matrix} \right) X_I \otimes X_J \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_K \right).
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\tau_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_I \ x_J \ x_s \ x_K \end{matrix} \right) (-1)^{x_I} (-1)^{\sum_{i \in J} x_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{u_s+1} \\
&\times \left( \varepsilon \left( \begin{matrix} x_I \ x_J \ u_s \ v_s \ x_K \\ x_J \ u_s \ x_I \ v_s \ x_K \end{matrix} \right) X_J \cdot U_s \otimes X_I \otimes V_s \cdot X_K + \varepsilon \left( \begin{matrix} x_I \ x_J \ u_s \ v_s \ x_K \\ x_J \ v_s \ x_I \ u_s \ x_K \end{matrix} \right) X_J \cdot V_s \otimes X_I \otimes U_s \cdot X_K \right) \\
&= (5) + (6).
\end{aligned}$$

De plus, en écrivant que  $\Delta(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \cup J = \{1, \dots, n\} \\ \#I, \#J > 0}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_I \end{matrix} \right) X_J \otimes X_I$ , on a

$$\begin{aligned}
(\kappa \otimes id) \circ \Delta(X_1 \dots X_n) &= \sum_{\substack{1 \leq s \leq n \\ I \cup J \cup K = \{1, \dots, n\} \setminus \{s\}}} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ x_s \ x_K \ x_I \end{matrix} \right) (-1)^{\sum_{i \in J} x_i} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{u_s+1} \\
&\times \left( \varepsilon \left( \begin{matrix} x_J \ x_s \ x_K \ x_I \\ x_J \ u_s \ v_s \ x_K \ x_I \end{matrix} \right) X_J \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_K \otimes X_I + \varepsilon \left( \begin{matrix} x_J \ x_s \ x_K \ x_I \\ x_J \ v_s \ u_s \ x_K \ x_I \end{matrix} \right) X_J \cdot V_s \otimes U_s \cdot X_K \otimes X_I \right) \\
&= (7) + (8).
\end{aligned}$$

Un calcul nous montre que (1) = (5), (2) = (7), (3) = (6) et (4) = (8). Montrons par exemple que (1) = (5).

En effet, dans (1), le terme  $X_J \cdot U_s \otimes X_I \otimes V_s \cdot X_K$  apparaît avec le signe

$$(-1)^{\sum_{i < s} x_i + u_s + 1} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ x_J \ u_s \ x_I \ v_s \ x_K \end{matrix} \right).$$

Dans (5), ce terme apparaît avec le signe

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots x_n & & & \\ x_I & x_J & x_s & x_K \\ x_s & x_K & & \end{array} \right) (-1)^{\sum_{i \in J} x_i + x_I + u_s + 1} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_I & x_J & u_s & v_s & x_K \\ x_J & u_s & x_I & v_s & x_K \end{array} \right) \\ &= (-1)^{\sum_{i > s} x_i} \sum_{i \in I \cup J} (-1)^{\sum_{i < s} x_i} (-1)^{\sum_{i \in J} x_i + x_I + u_s + 1} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots x_n & & & \\ x_I & x_J & u_s & v_s & x_K \\ x_s & x_K & & \end{array} \right) \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_I & x_J & u_s & v_s & x_K \\ x_J & u_s & x_I & v_s & x_K \end{array} \right) \\ &= (-1)^{\sum_{i < s} x_i + u_s + 1} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots x_n & & & \\ x_J & u_s & x_I & v_s & x_K \end{array} \right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que (1) = (5).

Donc, on trouve que  $(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta$ .  $\square$

Finalement, l'espace  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \kappa)$  est une cogèbre de Lie. On vérifie que  $m$  est une codérivation de degré 1 de  $S^+(\mathcal{H}[1])$  pour le cocrochet  $\kappa$ .

**Proposition 6.2.**

$$(id \otimes m + m \otimes id) \circ \kappa = -\kappa \circ m.$$

**Preuve:**

On a

$$\begin{aligned} \kappa \circ m(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{s=1}^n (-1)^{\sum_{i < s} x_i} \kappa(X_1, \dots, m(X_s), \dots, X_n) \\ &= \sum_{t < s} (-1)^{\sum_{i < s} x_i + u_t + 1 + \sum_{i < t} x_i} \left( \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & u_t & v_t & (x_s + 1) & x_J \end{array} \right) X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot m(X_s) \cdot X_J + \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & (x_s + 1) & u_t & v_t & x_J \end{array} \right) X_I \cdot m(X_s) \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \right. \\ &+ \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & v_t & u_t & (x_s + 1) & x_J \end{array} \right) X_I \cdot V_t \otimes U_t \cdot m(X_s) \cdot X_J + \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & (x_s + 1) & v_t & u_t & x_J \end{array} \right) X_I \cdot m(X_s) \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \left. \right) \\ &+ \sum_{t > s} (-1)^{\sum_{i < s} x_i + u_t + 1 + \sum_{i < t} x_i + 1} \left( \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & u_t & v_t & (x_s + 1) & x_J \end{array} \right) X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot m(X_s) \cdot X_J + \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & (x_s + 1) & u_t & v_t & x_J \end{array} \right) X_I \cdot m(X_s) \cdot U_t \otimes V_t \cdot X_J \right. \\ &+ \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & v_t & u_t & (x_s + 1) & x_J \end{array} \right) X_I \cdot V_t \otimes U_t \cdot m(X_s) \cdot X_J + \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s + 1) \dots x_n \\ x_I & (x_s + 1) & v_t & u_t & x_J \end{array} \right) X_I \cdot m(X_s) \cdot V_t \otimes U_t \cdot X_J \left. \right) \\ &+ \sum_{s=1}^n (-1)^{\sum_{i < s} x_i + (u_s + 1) + 1} \left( \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots (u_s + 1) & v_s \dots x_n \\ x_I & (u_s + 1) & v_s & x_J \end{array} \right) X_I \cdot m(U_s) \otimes V_s \cdot X_J + \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots (u_s + 1) & v_s \dots x_n \\ x_I & v_s & (u_s + 1) & x_J \end{array} \right) X_I \cdot V_s \otimes m(U_s) \cdot X_J \right) \\ &+ (-1)^{\sum_{i < s} x_i + u_s + 1} \left( \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_s & (v_s + 1) \dots x_n \\ x_I & u_s & (v_s + 1) & x_J \end{array} \right) X_I \cdot U_s \otimes m(V_s) \cdot X_J + \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_s & (v_s + 1) \dots x_n \\ x_I & (v_s + 1) & u_s & x_J \end{array} \right) X_I \cdot m(V_s) \otimes U_s \cdot X_J \right) \\ &= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) + (7) + (8) + (9) + (10) + (11) + (12). \end{aligned}$$

Après, en calculant  $(id \otimes m) \circ \kappa(X_1, \dots, X_n)$ , on obtient  $-(1) - (3) - (5) - (7) - (10) - (11)$  et en calculant  $(m \otimes id) \circ \kappa(X_1, \dots, X_n)$ , on obtient  $-(2) - (4) - (6) - (8) - (9) - (12)$ . Par

exemple, le terme  $X_I \cdot U_t \otimes V_t \cdot m(X_s) \cdot X_J$  de (1) apparaît dans  $\kappa \circ m(X_1 \dots X_n)$  avec le signe

$$(-1)^{\sum_{i<s} x_i + u_t + 1 + \sum_{i<t} x_i} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s+1) \dots x_n \\ x_I \ u_t \ v_t \ (x_s+1) \ x_J \end{array} \right).$$

Ce même terme apparaît dans  $(id \otimes m) \circ \kappa(X_1 \dots X_n)$  avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sum_{i<t} x_i + u_t + 1} (-1)^{x_I + u_t + v_t} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots x_s \dots x_n \\ x_I \ u_t \ v_t \ x_s \ x_J \end{array} \right) \\ &= \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s+1) \dots x_n \\ x_I \ u_t \ v_t \ (x_s+1) \ x_J \end{array} \right) (-1)^{\sum_{i<t} x_i + u_t + 1} (-1)^{x_I + u_t + v_t} (-1)^{\sum_{i \in J} x_i + \sum_{i > s} x_i} \\ &= (-1)^{v_t + \sum_{t < i < s} x_i + 1} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_t v_t \dots (x_s+1) \dots x_n \\ x_I \ u_t \ v_t \ (x_s+1) \ x_J \end{array} \right). \end{aligned}$$

D'où, le résultat.  $\square$

Aussi, on vérifie aussi que le crochet  $\ell$  est une codérivation de degré 1 de  $S^+(\mathcal{H}[1])$  pour  $\kappa$ :

**Proposition 6.3.**

$$(id \otimes \ell + \ell \otimes id) \circ \kappa = -\kappa \circ \ell.$$

**Preuve:**

On a d'une part,

$$\begin{aligned} \kappa \circ \ell(X_1 \dots X_n) &= \kappa \left( \sum_{i<j} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_1 \dots \hat{i} \dots \hat{j} \dots x_n \end{array} \right) \ell_2(X_i, X_j) X_1 \dots \check{i} \dots \check{j} \dots X_n \right) \\ &= \kappa \left( \sum_{\substack{i<j \\ J=\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}}} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_J \end{array} \right) \ell_2(X_i, X_j) \cdot X_J \right) \end{aligned}$$

Dans  $\kappa \circ \ell(X_1 \dots X_n)$ , il apparaît un terme  $(I)$  de la forme

$$\ell_2(X_i, X_j) \cdot X_{J_1} \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_{J_2}$$

avec le signe

$$\varepsilon_1 = (-1)^{x_i + x_j + x_{J_1} + u_s} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_J \end{array} \right)$$

où on a posé  $J = J_1 \cup \{s\} \cup J_2$ .

D'autre part, cherchons le terme correspondant dans  $(\ell \otimes id) \circ \kappa(X_1 \dots X_n)$ .

On a

$$\begin{aligned} (\ell \otimes id) \circ \kappa(X_1 \dots X_n) &= (\ell \otimes id) \left( \sum_{i<j} \sum_{\substack{s \\ J_1 \cup J_2 = \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, s\}}} \sum_{\substack{U_s \otimes V_s = X_s \\ U_s, V_s \neq \emptyset}} (-1)^{\sum_{r<s} x_r + u_s + 1} \times \right. \\ &\times \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_s \ v_s \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_{J_1} \ u_s \ v_s \ x_{J_2} \end{array} \right) X_i \cdot X_j \cdot X_{J_1} \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_{J_2} + \dots \left. \right) \\ &= (-1)^{\sum_{r<s} x_r + u_s + 1} \varepsilon \left( \begin{array}{cccc} x_1 \dots u_s \ v_s \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_{J_1} \ u_s \ v_s \ x_{J_2} \end{array} \right) \ell_2(X_i, X_j) \cdot X_{J_1} \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_{J_2} + \dots \end{aligned}$$

Le premier terme  $(1) = \ell_2(X_i, X_j) \cdot X_{J_1} \cdot U_s \otimes V_s \cdot X_{J_2}$  apparaît donc avec le signe

$$\begin{aligned} & (-1)^{\sum_{r<s} x_r + u_s + 1} (-1)^{\sum_{r \in J_2} x_r} (-1)^{\sum_{r \in J_1 \cup \{i, j\}} x_r} \varepsilon \left( \begin{array}{c} x_1 \dots x_s \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_{J_1} \ x_s \ x_{J_2} \end{array} \right) \\ & = (-1)^{x_i + x_j + x_{J_1} + u_s + 1} \varepsilon \left( \begin{array}{c} x_1 \dots x_n \\ x_i \ x_j \ x_J \end{array} \right) = -\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Alors,  $(I) = -(1)$ . De même, les autres termes apparaissent dans le premier membre et le second membre à un signe  $(-1)$  près.

Juste le cas où on coupe  $\ell_2(X_i, X_j)$  par  $\kappa$ , on va l'étudier comme le cas où on a deux paquets.

En effet, si  $X = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p$  et  $Y = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$ , on sait que

$$\begin{aligned} \ell_2(X, Y) &= \\ (-1)^x & \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon \left( \begin{array}{c} a_1 \dots a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{array} \right) \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \kappa \circ \ell_2(X, Y) &= (-1)^x \sum_{\substack{\sigma \in \text{Bat}(p, q) \\ k; \sigma^{-1}(k) \leq p < \sigma^{-1}(k+1)}} \varepsilon \left( \begin{array}{c} a_1 \dots a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{array} \right) \sum_{t < k} \left( \right. \\ & (-1)^{\sum_{i \leq t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\ & - (-1)^{\sum_{i > t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \varepsilon \left( \begin{array}{c} a_1 \dots a_{p+q} \\ a_{[\sigma^{-1}(t+1), \sigma^{-1}(p+q)]}, a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(t)]} \end{array} \right) \\ & \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \left. \right) \\ & + \sum_{t > k} \left( \right. \\ & (-1)^{\sum_{i \leq t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \\ & - (-1)^{\sum_{i > t} a_{\sigma^{-1}(i)}} \varepsilon \left( \begin{array}{c} a_1 \dots a_{p+q} \\ a_{[\sigma^{-1}(t+1), \sigma^{-1}(p+q)]}, a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(t)]} \end{array} \right) \\ & \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \left. \right) \\ & = (1) + (2) + (3) + (4). \end{aligned}$$

Sachant que  $\kappa$  passe au quotient modulo les battements, alors, par exemple pour le terme  $(1) = \alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$  qui apparaît dans  $\kappa \circ \ell_2(X, Y)$ , on a nécessairement  $\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(t)}$  appartiennent tous à  $X$  ou à  $Y$ . Alors, on a nécessairement  $\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} = \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_t$  ou  $\alpha_{\sigma^{-1}(1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(t)} = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+t}$ .

Supposons, par exemple, que le terme  $(1)$  s'écrit:

$$\alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+t} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Il apparaît dans  $\kappa \circ \ell_2(X, Y)$  avec le signe  $(-1)^x \varepsilon \left( \begin{array}{c} a_1 \dots a_{p+q} \\ a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{array} \right) (-1)^{\sum_{p+1 \leq i \leq p+t} a_i}$ .



Cherchons le terme correspondant dans  $(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X, Y)$ .

Posons  $U = \alpha_{p+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+t}$  et  $V = \alpha_{p+t+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}$ . On sait que

$$\kappa(X, Y) = \sum_{t=1}^q (-1)^{x+u+1} \varepsilon \begin{pmatrix} x & u & v \\ u & v & x \end{pmatrix} U \bigotimes (\alpha_{p+t+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q}) \cdot (\alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p) + \text{d'autres termes...}$$

En appliquant  $(id \otimes \ell_2)$ , on obtient:

$$(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X, Y) = \sum_{t=1}^q (-1)^u (-1)^{x+u+1} \varepsilon \begin{pmatrix} x & u & v \\ u & v & x \end{pmatrix} U \bigotimes \ell_2(\alpha_{p+t+1} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p+q} \cdot \alpha_1 \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_p) + \text{d'autres termes...}$$

On considère une permutation  $\lambda$  de  $S_{p+q}$  définie par:

$$\lambda(i) = \begin{cases} p+i, & \text{si } 1 \leq i \leq q; \\ i-q, & \text{si } q+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

Posons  $\beta_i = \alpha_{\lambda(i)}$ . Alors,

$$(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X, Y) = \sum_{\substack{t < k \\ \eta \in \text{Bat}(q-t, p); \eta^{-1}(k) \leq q < \eta^{-1}(k+1)}} (-1)^{x+v} \varepsilon \begin{pmatrix} x & u & v \\ u & v & x \end{pmatrix} \varepsilon \begin{pmatrix} b_{[t+1, p+q]} \\ b_{[\eta^{-1}(t+1), \eta^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix} U \bigotimes \beta_{\eta^{-1}(t+1)} \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} [\beta_{\eta^{-1}(k)}, \beta_{\eta^{-1}(k+1)}] \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \beta_{\eta^{-1}(p+q)} + \text{d'autres termes...}$$

où  $\eta$  est un battement de  $\text{Bat}(q-t, p)$  définie sur  $\{t+1, \dots, p+q\}$ .

Dans la somme précédente, fixant  $\eta \in \text{Bat}(q-t, p)$  telle que  $\eta(i) = \sigma \circ \lambda(i), \forall i \in \{t+1, \dots, p+q\}$ . On construit, après, une permutation  $\nu$  de  $S_{p+q}$  définie par:

$$\nu^{-1}(i) = \begin{cases} p+i, & \text{si } 1 \leq i \leq t \\ \eta^{-1}(i), & \text{si } t+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

On vérifie que  $\nu$  appartient à  $\text{Bat}(q, p)$ ,  $\beta_{\nu^{-1}(i)} = \alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \forall i \in \{1, \dots, p+q\}$  et que

$$\varepsilon \begin{pmatrix} b_{[1, p+q]} \\ b_{[\nu^{-1}(1), \nu^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix} = (-1)^{a_{[1, p]} a_{[p+1, p+q]}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{[1, p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix}.$$

Mais, par construction  $\nu^{-1}(k) \leq q < \nu^{-1}(k+1)$ . On construit, alors, une nouvelle permutation  $\rho$  de  $S_{p+q}$  définie par:

$$\rho^{-1}(i) = \nu^{-1}(i), \forall i \notin \{k, k+1\}, \rho^{-1}(k) = \nu^{-1}(k+1) \text{ et } \rho^{-1}(k+1) = \nu^{-1}(k).$$

On vérifie que  $\rho$  appartient à  $\text{Bat}(q, p)$ ,  $\beta_{\rho^{-1}(i)} = \alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \forall i \notin \{k, k+1\}$ ,  $\beta_{\rho^{-1}(k)} = \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}$ ,  $\beta_{\rho^{-1}(k+1)} = \alpha_{\sigma^{-1}(k)}$ ,  $\rho^{-1}(k) \leq p < \rho^{-1}(k+1)$  et que

$$\varepsilon \begin{pmatrix} b_{[1, p+q]} \\ b_{[\rho^{-1}(1), \rho^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix} = (-1)^{a_{[1, p]} a_{[p+1, p+q]}} \varepsilon \begin{pmatrix} a_{[1, p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(p+q)]} \end{pmatrix} (-1)^{a_{\sigma^{-1}(k)} a_{\sigma^{-1}(k+1)}}.$$

Enfin, le terme

$$\begin{aligned} U &\otimes \beta_{\rho^{-1}(t+1)} \otimes \dots \otimes [\beta_{\rho^{-1}(k)}, \beta_{\rho^{-1}(k+1)}] \otimes \dots \otimes \beta_{\rho^{-1}(p+q)} \\ &= \alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+t} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \otimes \dots \otimes [\alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k)}] \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)} \end{aligned}$$

apparaît dans  $(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X, Y)$  avec le signe

$$(-1)^{a_{[1,p]}+v+1} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} xuv \\ uvx \end{smallmatrix} \right) (-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} a_{[1,p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(p+q)]} \end{smallmatrix} \right) (-1)^{a_{\sigma^{-1}(k)}a_{\sigma^{-1}(k+1)}}.$$

Donc, le terme  $\alpha_{p+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{p+t} \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(t+1)} \otimes \dots \otimes [\alpha_{\sigma^{-1}(k)}, \alpha_{\sigma^{-1}(k+1)}] \otimes \dots \otimes \alpha_{\sigma^{-1}(p+q)}$  apparaît dans  $(id \otimes \ell_2) \circ \kappa(X, Y)$  avec le signe

$$\begin{aligned} &(-1)^{x+v} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} xuv \\ uvx \end{smallmatrix} \right) (-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} a_{[1,p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(p+q)]} \end{smallmatrix} \right) (-1) \\ &= (-1)^{x+v+1} (-1)^{xa_{[p+1,p+q]}} (-1)^{a_{[1,p]}a_{[p+1,p+q]}} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} a_{[1,p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(p+q)]} \end{smallmatrix} \right) = (-1)^{x+u+1} \varepsilon \left( \begin{smallmatrix} a_{[1,p+q]} \\ a_{[\sigma^{-1}(1), \sigma^{-1}(p+q)]} \end{smallmatrix} \right). \end{aligned}$$

□

### 6.3. $G_\infty$ algèbre.

On a construit deux codérivations  $m$  et  $\ell$  de degré 1 pour la comultiplication  $\Delta$  de la cogèbre cocommutative et coassociative  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta)$  et pour le cocrochet  $\kappa$  de la cogèbre de Lie  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \kappa)$  vérifiant  $m \circ m = 0$  et  $\ell \circ \ell = 0$ . De plus, la comultiplication  $\Delta$  et le cocrochet  $\kappa$  vérifie l'identité de coLeibniz

$$(id \otimes \Delta) \circ \kappa = (\kappa \otimes id) \circ \Delta + \tau_{12} \circ (id \otimes \kappa) \circ \Delta.$$

On dit que  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, \kappa)$  est une cogèbre de Gerstenhaber graduée.

Comme  $\ell + m$  est une codérivation de degré 1 de  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, \kappa)$  vérifiant l'équation maîtresse  $[\ell + m, \ell + m] = (\ell + m)^2 = 0$ . Alors,  $(S^+(\mathcal{H}[1]), \Delta, \kappa, \ell + m)$  est une cogèbre de Gerstenhaber différentielle graduée.

**Définition 6.4.** ( $G_\infty$  algèbre)

Une  $G_\infty$  algèbre est une bicogèbre de la forme  $G(\mathcal{G}) = (S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa)$  munie d'une codérivation pour les deux structures  $\Delta$  et  $\kappa$  notée  $\ell + m$  et de carré nul.

Soit  $\mathcal{G}$  une algèbre de Gerstenhaber, alors,  $G(\mathcal{G}) = (S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa, \ell + m)$  avec

$$\begin{aligned} \ell_k &= 0 \text{ si } k \neq 2, \quad \ell_2(X, Y) = (-1)^x [X, Y], \quad m_k = 0 \text{ si } k \neq 1, \quad m_1(X) = \mu(X), \\ (X, Y \in \mathcal{H} = \underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])) &\text{ s'appelle la } G_\infty \text{ algèbre enveloppante de l'algèbre } \mathcal{G}. \end{aligned}$$

**Remarque 6.5.**

Pour définir une codérivation  $Q$  de la bicogèbre  $(S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]), \Delta, \kappa)$ , il suffit de se donner une suite d'applications

$$Q_{p_1 \dots p_n}^{(N)} : \underline{\otimes}^{p_1}(\mathcal{G}[1])[1] \dots \underline{\otimes}^{p_n}(\mathcal{G}[1])[1] \longrightarrow \mathcal{G} \quad (p_1 + \dots + p_n = N).$$

(cette construction est explicitée dans la section suivante pour des morphismes de bicogèbres).

Une  $G_\infty$  algèbre est la  $G_\infty$  algèbre enveloppante d'une algèbre de Gerstenhaber si et seulement si sa codérivation  $\ell + m$  vérifie  $(\ell + m)_{p_1 \dots p_n}^{(N)} = 0$  sauf pour  $(\ell + m)_{11}^{(2)}$  et  $(\ell + m)_2^{(2)}$ .

## 7. COHOMOLOGIE DE CHEVALLEY-HARRISON DES ALGÈBRES DE GERSTENHABER

### 7.1. Morphismes de cogèbres entre $G_\infty$ algèbres.

Rappelons que si  $S^+(\mathfrak{g}[1])$  et  $S^+(\mathfrak{g}'[1])$  sont deux  $L_\infty$  algèbres, resp. si  $\underline{\otimes}^+(A[1])$  et  $\underline{\otimes}^+(A'[1])$  sont deux  $C_\infty$  algèbres, un morphisme  $F$  de  $L_\infty$  algèbre, resp. de  $C_\infty$  algèbre entre ces deux algèbres est un morphisme de cogèbre qui commute avec les codifférentielles  $\ell^{\mathfrak{g}}$  et  $\ell^{\mathfrak{g}'}$ , resp. les codifférentielles  $m^A$  et  $m^{A'}$ . De plus, les morphismes de cogèbres sont caractérisés par leurs projections  $F_n$

$$F_n : S^n(\mathfrak{g}[1]) \longrightarrow \mathfrak{h} \quad \text{resp.} \quad F_n : \underline{\otimes}^n(A[1]) \longrightarrow A'.$$

Dans le cas de  $G_\infty$  algèbres,  $S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1])$  et  $S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}'[1])[1])$ , on dispose de deux coproduits:  $\Delta$  et  $\kappa$ .

**Proposition 7.1.** (Les morphismes de cogèbres entre deux  $G_\infty$ -algèbres)

Un morphisme de cogèbre  $F : S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]) \longrightarrow S^+(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}'[1])[1])$ , c'est à dire une application linéaire telle que

$$(F \otimes F) \circ \Delta = \Delta \circ F \quad \text{et} \quad (F \otimes F) \circ \kappa = \kappa \circ F,$$

est uniquement caractérisé par ses projections dans  $\mathcal{G}'$ , que l'on note:

$$f_{p_1 \dots p_n} : \underline{\otimes}^{p_1}(\mathcal{G}[1]) \dots \underline{\otimes}^{p_n}(\mathcal{G}[1]) \longrightarrow \mathcal{G}'.$$

Nous ne démontrerons pas cette proposition annoncée dans [BGHHW] et [GH]. Nous allons seulement expliquer comment reconstruire  $F$  à partir des  $f_{p_1 \dots p_n}$ . On vient de voir qu'il suffit de retrouver les projections

$$F_n : S^n\left(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right) \longrightarrow \underline{\otimes}^+(\mathcal{G}'[1])$$

pour caractériser  $F$ . On va donc se contenter de décrire la construction des applications  $F_n$  à partir des applications  $f_{p_1 \dots p_n}$ .

Soit donc  $X_1, \dots, X_n$  un élément de  $S^n\left(\underline{\otimes}^+(\mathcal{G}[1])[1]\right)$ , avec

$$X_j = \alpha_1^j \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p_j}^j.$$

$F_n(X_1 \dots X_n)$  est une somme de produits tensoriels modulo les battements de  $f(Y_k)$  ( $1 \leq k \leq t$ ) où les  $Y_k$  sont des produit  $\cdot$  de parties des  $X_j$  de la forme:

$$U_i^j = \alpha_{r_i+1}^j \underline{\otimes} \alpha_{r_i+2}^j \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{r_i+1}^j \quad (0 \leq r_s \leq p_j).$$

On envoie donc les produits  $(U_1^1 \otimes \dots \otimes U_{r_1}^1) \dots (U_1^n \otimes \dots \otimes U_{r_n}^n)$  sur des sommes de termes de la forme

$$f(Y_1) \otimes \dots \otimes f(Y_t) = f(V_1^1 \dots V_{s_1}^1) \otimes \dots \otimes f(V_1^t \dots V_{s_t}^t).$$

Les  $V_\ell^k$  forment une permutation des  $U_i^j$ . Si un  $X_j$  n'est pas décomposé ( $r_j = 1$ ), il ne peut apparaître qu'en facteur d'au moins une vraie partie  $U_i^{j'}$  d'un autre  $X$  ( $r_{j'} > 1$ ). Si un  $X_j$  est décomposé ( $r_j > 1$ ) chacune de ses parties apparaît dans un  $Y$  différent. Enfin, il y a autant de  $\cdot$  et de  $\otimes$  dans l'expression de  $X_1 \dots X_n$  que dans celle des  $f(Y_1) \otimes \dots \otimes f(Y_t)$ .

**Etape 1:** Description des découpages des  $X_j$ .

On utilise un tableau  $T$  à  $n$  lignes. On découpe les  $X_j$ . Chaque ligne  $j$  du tableau  $T$  a  $r_j$  cases. Dans chaque case, on place les portions de  $X_j$  dans l'ordre du découpage ainsi: si on écrit  $X_j = U_1^j \otimes \dots \otimes U_{r_j}^j$ , on aura une ligne:

$$\boxed{U_1^j \mid U_2^j \mid \dots \mid U_{r_j}^j}$$

Notons  $L$  = nombre de lignes,  $C$  = nombre de colonnes,  $N$  = nombre de cases de  $T$ .

Par exemple si on envisage de décomposer  $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \cdot X_6$  en

$$X_1 \cdot (U_2 \otimes V_2) \cdot X_3 \cdot (U_4 \otimes V_4 \otimes W_4) \cdot (U_5 \otimes V_5 \otimes W_5 \otimes R_5) \cdot (U_6 \otimes V_6),$$

on posera:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1 & & & \\ \hline U_2 & V_2 & & \\ \hline X_3 & & & \\ \hline U_4 & V_4 & W_4 & \\ \hline U_5 & V_5 & W_5 & R_5 \\ \hline U_6 & V_6 & & \\ \hline \end{array}$$

Le tableau  $T$  caractérise maintenant la décomposition de  $X_1 \dots X_n$ .

**Etape 2:** Suppression des lignes de longueur 1

On appelle  $T_1$  le sous-tableau obtenu en enlevant toutes les lignes de longueur 1 de  $T$ . Il est clair que l'on peut reconstruire  $T$  à partir de  $T_1$ . Celui-ci caractérise donc aussi la décomposition de notre monôme. Dans notre exemple:

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline U_2 & V_2 & & \\ \hline U_4 & V_4 & W_4 & \\ \hline U_5 & V_5 & W_5 & R_5 \\ \hline U_6 & V_6 & & \\ \hline \end{array}$$

Notons  $L_1 =$  nombre de lignes,  $C_1 =$  nombre de colonnes,  $N_1 =$  nombre de cases de  $T_1$  et  $h = L_1 - 1$ .

**Etape 3:** Construction du coeur de  $T'$ .

On dessine tous les tableaux  $T_2$  ayant  $h$  cases vides tels que la longueur des lignes décroît de haut vers le bas. Dans notre exemple, ce nombre est 3. Dans notre exemple, il y a quatre possibilités:

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline & \square \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

On ajoute ensuite une case vide à  $T_2$  en dessous de chacune des colonnes de  $T_2$  (s'il n'y a aucune colonne, on ne fait rien). On obtient un tableaux  $T_3$ . Par exemple si on retient le second  $T_2$  ci dessus, on obtient,

$$T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \implies T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$$

**Etape 4:** Construction de  $T_4$  vide

On ajoute à la première ligne du tableau ainsi obtenu autant de cases qu'il faut pour obtenir un tableau  $T_4$  ayant le même nombre de cases que  $T_1$ , c'est à dire tel que  $N_4 = N_1$ .

**Remarque 7.2.**

On a ajouté  $N_1 - N_3 = N_1 - (h + C_2)$  cases à la première ligne de  $T_3$ . Alors,  $T_4$  a donc  $C_4$  colonnes où

$$\begin{aligned} C_4 &= C_3 + N_1 - (h + C_2) \\ &= N_1 - h = N - h - \#\{X_j \text{ non décomposés}\} \end{aligned}$$

Par exemple si on retient le second  $T_3$  ci dessus, on choisit, puisque  $T_1$  possède 11 cases:

$$T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \implies T_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & & & & & \\ \hline \square & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

**Etape 5:** Remplissage de  $T_4$

On remplit ensuite  $T_4$  en mettant dans chaque case une des lettres de  $T_1$  ainsi:

On lit  $T_1$ , ligne par ligne, de la gauche vers la droite. Pour la ligne  $j$  de  $T_1$ , de longueur  $r_j$ , on choisit  $r_j$  colonnes de  $T_4$  telles qu'il y ait dans chaque colonne au moins une case vide. Disons que ces colonnes sont  $c_{i_1}, \dots, c_{i_{r_j}}$  avec  $i_1 < \dots < i_{r_j}$ . On place la  $k^{\text{ième}}$  entrée  $U_k^j$  de la ligne  $j$  de  $T_1$  dans la première case libre de la colonne n°  $i_k$  lorsqu'on parcourt la

colonne de haut en bas. On obtient ainsi un tableau rempli  $T_4$ . Par exemple:

$$T_4 = \begin{array}{cccccccc} \boxed{U_2} & \boxed{U_4} & \boxed{V_2} & \boxed{W_4} & \boxed{V_5} & \boxed{W_5} & \boxed{R_5} & \boxed{V_6} \\ & \boxed{U_5} & \boxed{V_4} & & & & & \\ & \boxed{U_6} & & & & & & \end{array}$$

**Etape 6:** Ajout des  $X_j$  indécomposés

On ajoute des cases au tableau  $T_4$  en dessous des colonnes existante de  $T_4$  (exactement  $N - N_4$  cases). On remplit ces cases en mettant les  $X_j = U_1^j$  indécomposés de  $T$ . On obtient un tableau  $T_5$ . Par exemple:

$$T_4 \implies T_5 = \begin{array}{cccccccc} \boxed{U_2} & \boxed{U_4} & \boxed{V_2} & \boxed{W_4} & \boxed{V_5} & \boxed{W_5} & \boxed{R_5} & \boxed{V_6} \\ & \boxed{U_5} & \boxed{V_4} & \boxed{X_1} & & & & \\ & \boxed{U_6} & \boxed{X_3} & & & & & \end{array}$$

**Etape 7:** Définition de  $T'$

On range chaque colonne du tableau  $T_5$  ainsi obtenu dans l'ordre croissant du haut vers le bas. C'est à dire, on construit des colonnes  $c'_i$  de la forme:

$$\begin{array}{|c|} \hline \boxed{U_{a_1}^{j_1}} \\ \hline \boxed{U_{a_2}^{j_2}} \\ \hline \boxed{\vdots} \\ \hline \boxed{U_{a_s}^{j_s}} \\ \hline \end{array} \quad \text{avec } j_1 < \dots < j_s.$$

On obtient ainsi un tableau noté  $T'$ .

Dans notre exemple:

$$T' = \begin{array}{cccccccc} \boxed{U_2} & \boxed{U_4} & \boxed{V_2} & \boxed{X_1} & \boxed{V_5} & \boxed{W_5} & \boxed{R_5} & \boxed{V_6} \\ & \boxed{U_5} & \boxed{X_3} & \boxed{W_4} & & & & \\ & \boxed{U_6} & \boxed{V_4} & & & & & \end{array}$$

**Etape 8:** Calcul des  $F(T')$ .

A chaque colonne  $c'_i$  de  $T'$  ( $1 \leq i \leq s$ ), on associe un élément  $f(c'_i)$  de  $\mathcal{G}'$  qui est simplement l'image par  $f$  du produit . des termes de la colonne. Finalement on définit  $F(T')$  comme le produit  $\varepsilon(T, T') \otimes_{i=1}^s f(c'_i)$  modulo les battements avec le signe obtenu à partir de la permutation passant de  $T$  à  $T'$ .

Dans notre exemple, on pose donc

$$\begin{aligned} f(Y_1) &= f(U_2) \\ f(Y_2) &= f(U_4 \cdot U_5 \cdot U_6) \\ f(Y_3) &= f(V_2 \cdot X_3 \cdot V_4) \\ f(Y_4) &= f(X_1 \cdot W_4) \\ f(Y_5) &= f(V_5) \\ f(Y_6) &= f(W_5) \\ f(Y_7) &= f(R_5) \\ f(Y_8) &= f(V_6). \end{aligned}$$

Donc

$$F(T') = \varepsilon(T, T') f(Y_1) \underline{\otimes} f(Y_2) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} f(Y_8).$$

**Etape 9:** Calcul de  $F(X_1 \dots X_n)$ .

La quantité  $F(X_1 \dots X_n)$  s'obtient en faisant la somme pour des  $F(T')$  toutes les décompositions  $T$  de  $X_1 \dots X_n$  et pour chaque  $T$  pour tous les tableaux  $T'$  qu'on peut construire à partir de  $T$  :

$$F(X_1 \dots X_n) = \sum_{T, T'} \varepsilon(T, T') f(Y_1) \underline{\otimes} f(Y_2) \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} f(Y_{C_{T'}}).$$

## 7.2. Cohomologie de Chevalley-Harrison.

On a la définition naturelle:

**Définition 7.3.** (Morphismes de  $G_\infty$  algèbres)

Soit  $\left( S^+ \left( \underline{\otimes}^+ (\mathcal{G}[1])[1] \right), \Delta, \kappa, \ell + m \right)$  et  $\left( S^+ \left( \underline{\otimes}^+ (\mathcal{G}'[1])[1] \right), \Delta', \kappa', \ell' + m' \right)$  deux  $G_\infty$  algèbres. Une application  $F : S^+ \left( \underline{\otimes}^+ (\mathcal{G}[1])[1] \right) \longrightarrow S^+ \left( \underline{\otimes}^+ (\mathcal{G}'[1])[1] \right)$  est un morphisme de  $G_\infty$  algèbres si  $F$  est un morphisme de cogèbres:

$$(F \otimes F) \circ \Delta = \Delta' \circ F, \quad (F \otimes F) \circ \kappa = \kappa' \circ F,$$

de degré 0 qui préserve les codifférentielles:

$$F \circ (\ell + m) = (\ell' + m') \circ F.$$

Soient  $(\mathcal{G}, \wedge, [ , ])$  et  $(\mathcal{G}', \wedge', [ , ]')$  deux algèbres de Gerstenhaber. Comme précédemment, cherchons à construire un morphisme de  $G_\infty$  algèbres  $F$ . On a vu qu'en tant que morphisme de cogèbres,  $F$  est caractérisé par la suite des applications  $(f_{p_1 \dots p_r})$ . Donnons-nous un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber  $f_1 : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$  et cherchons à construire des applications  $f_{p_1 \dots p_n}$  suivantes. Dans cette partie, nous noterons ces applications  $f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}$  si  $\sum p_j = N$ .

Supposons connues tous les  $f_{p_1 \dots p_r}^{(k)}$  avec  $k = p_1 + \dots + p_r < N$ , on cherche les  $f_{p'_1 \dots p'_n}^{(N)}$ .

Si  $X_j$  est un élément de  $\underline{\otimes}^{p_j}(\mathcal{G}[1])[1]$ , on notera aussi  $p(X_j)$  le nombre  $p_j$ .

Si on applique  $(\ell' + m') \circ F - F \circ (\ell + m)$  à  $X_1 \dots X_n$  avec  $X_j \in \underline{\otimes}^{p(X_j)}(\mathcal{G}[1])[1]$  et  $\sum_j p(X_j) \leq N$ , aucun terme en  $f_{p'_1 \dots p'_r}^{(N)}$  n'apparaît.

Ces termes apparaissent lorsqu'on applique  $(\ell' + m') \circ F - F \circ (\ell + m)$  à  $X_1 \dots X_n$  avec  $\sum_j p(X_j) = N + 1$ . On trouve les termes suivants:

Dans  $(F \circ \ell)(X_1 \dots X_n)$ , on a:

$$\begin{aligned} & (F \circ \ell)(X_1 \dots X_n) \\ &= \sum_{j < k} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_k x_1 \dots \hat{j} \dots \hat{k} \dots x_n \end{matrix} \right) F(\ell_2(X_j, X_k) \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots \hat{k} \dots X_n) \\ &= \sum_{j < k} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_k x_1 \dots \hat{j} \dots \hat{k} \dots x_n \end{matrix} \right) f_{p(X_j) + p(X_k) - 1, p(X_1), \dots, \hat{j}, \dots, \hat{k}, \dots, p(X_n)}^{(N)} (\ell_2(X_j, X_k) \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots \hat{k} \dots X_n) \end{aligned}$$

Dans  $(F \circ m)(X_1 \dots X_n)$ , on a:

$$\begin{aligned} (F \circ m)(X_1 \dots X_n) &= \sum_{j/p(X_j) > 1} (-1)^{\sum_{i < j} x_i} F(X_1 \dots m_1(X_j) \dots X_n) \\ &= \sum_{j/p(X_j) > 1} (-1)^{\sum_{i < j} x_i} f_{p(X_1), \dots, p(X_j) - 1, \dots, p(X_n)}^{(N)} (X_1 \dots m_1(X_j) \dots X_n) \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans  $(\ell' \circ F)(X_1 \dots X_n)$ , les termes en  $f^{(N)}$  n'apparaissent que dans les termes d'ordre 2 du développement de  $F$ . Avec les notations ci-dessus, il faut, en effet, au moins un produit de deux paquets et que l'un contienne  $N$  vecteurs de  $\mathcal{G}'$ . Il reste seulement:

$$\begin{aligned} (\ell' \circ F)(X_1 \dots X_n) &= \sum_{j/p(X_j) = 1} \ell' \left( \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \end{matrix} \right) f_1(X_j) \cdot f_{p(X_1), \dots, \hat{j}, \dots, p(X_n)}^{(N)} (X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) \right) \\ &+ \sum_{r < N} \text{termes en } f^{(r)}. \end{aligned}$$

De même pour  $(m' \circ F)(X_1 \dots X_n)$ , les seuls termes en  $f^{(N)}$  apparaissant sont:

$$\begin{aligned} & (m' \circ F)(X_1 \dots X_n) \\ &= \sum_{j/p(X_j) > 1} \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_j x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \end{matrix} \right) m' \left( f_1^{(1)}(\alpha_1^j) \underline{\otimes} f_{p_j - 1, p_1, \dots, \hat{j}, \dots, p_r}^{(N)} ((\alpha_2^j \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p_j}^j) \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) \right) \\ &+ \varepsilon \left( \begin{matrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1 \dots \hat{j} \dots x_n x_j \end{matrix} \right) m' \left( f_{p_1, \dots, \hat{j}, \dots, p_r, p_j - 1}^{(N)} (X_1 \dots \hat{j} \dots X_n \cdot (\alpha_1^j \underline{\otimes} \dots \underline{\otimes} \alpha_{p_j - 1}^j)) \underline{\otimes} f_1^{(1)}(\alpha_{p_j}^j) \right) \\ &+ \sum_{r < N} \text{termes en } f^{(r)}. \end{aligned}$$



L'opérateur de cobord  $d_{CH}$  dit de Chevalley-Harrison associé à cette construction de  $F$  et à  $f_1^{(1)}$  est donc le suivant.

L'espace des cochaînes est l'espace

$$C^N = \sum_{p_1 + \dots + p_n = N} \text{Hom} \left( \bigotimes_{p_1}^{p_1} (\mathcal{G}[1])[1] \cdot \dots \cdot \bigotimes_{p_n}^{p_n} (\mathcal{G}[1])[1], \mathcal{G}'[1 - N - n] \right).$$

Le cobord  $d_{CH} : C^N \longrightarrow C^{N+1}$  est de la forme  $d_{CH} = d_m + d_\ell$  avec

$$\begin{aligned} (d_m f_{p_1 \dots p_n}^{(N)})(X_1 \dots X_n) &= (d_m f)_{p_1 \dots (p_j+1) \dots p_n}^{(N+1)}(X_1 \dots X_n) \\ &= (-1)^{\alpha_1^j \sum_{i < j} x_i} m' \left( f_1^{(1)}(\alpha_1^j) \otimes f_{p_1, \dots, p_j-1, \dots, p_n}^{(N)}(X_1 \dots (\alpha_2^j \otimes \dots \otimes \alpha_{p_j}^j) \dots X_n) \right) \\ &+ (-1)^{\alpha_{p_j}^j \sum_{i > j} x_i} m' \left( f_{p_1, \dots, p_j-1, \dots, p_n}^{(N)}(X_1 \dots (\alpha_1^j \otimes \dots \otimes \alpha_{p_j-1}^j) \dots X_n) \otimes f_1^{(1)}(\alpha_{p_j}^j) \right) \\ &- (-1)^{\sum_{i < j} x_i} f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots m(X_j) \dots X_n). \end{aligned}$$

De même,  $d_\ell : C_{p_1 \dots p_n}^N \longrightarrow \sum_{j, q_1+q_2=p_j+1} C_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{N+1}$  s'écrit

$$(d_\ell f_{p_1 \dots p_n}^N) = \sum_{\substack{j \\ q_1+q_2=p_j+1}} (d_\ell f)_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^N.$$

Avec

1. Si  $q_1 > 1$  et  $q_2 > 1$ , alors

$$\begin{aligned} (d_\ell f)_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{(N+1)}(Y_1 \cdot Y_2 \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) &= \\ - \varepsilon \left( \begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ x_1 \dots y_1 y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) (-1)^{\sum_{i < j} x_i} f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots \ell(Y_1, Y_2) \dots X_n). \end{aligned}$$

2. Si  $q_1 = 1$  et  $q_2 = p_j > 1$ , alors

$$\begin{aligned} (d_\ell f)_{q_1, q_2, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{(N+1)}(Y_1 \cdot Y_2 \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) &= \\ - \varepsilon \left( \begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ x_1 \dots y_1 y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) (-1)^{\sum_{i < j} x_i} f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots \ell(Y_1, Y_2) \dots X_n) \\ + \varepsilon \left( \begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ y_1 x_1 \dots y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) \ell' \left( f_1^{(1)}(Y_1), f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots Y_2 \dots X_n) \right). \end{aligned}$$

3. On a la même formule par symétrie si  $q_2 = 1$  et  $q_1 = p_j > 1$ .

4. Enfin, si  $q_1 = q_2 = 1$ , alors

$$\begin{aligned} (d_\ell f)_{1,1, p_1 \dots \hat{j} \dots p_n}^{(N+1)}(Y_1 \cdot Y_2 \cdot X_1 \dots \hat{j} \dots X_n) &= \\ \varepsilon \left( \begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ y_1 x_1 \dots y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) \ell' \left( f_1^{(1)}(Y_1), f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots Y_2 \dots X_n) \right) \\ + \varepsilon \left( \begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ x_1 \dots y_1 \dots x_n y_2 \end{matrix} \right) \ell' \left( f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots Y_1 \dots X_n), f_1^{(1)}(Y_2) \right) \\ - (-1)^{\sum_{i < j} x_i} \varepsilon \left( \begin{matrix} y_1 y_2 x_1 \dots \hat{j} \dots x_n \\ x_1 \dots y_1 y_2 \dots x_n \end{matrix} \right) f_{p_1 \dots p_n}^{(N)}(X_1 \dots \ell(Y_1, Y_2) \dots X_n). \end{aligned}$$

**Proposition 7.4.** ( $d_{CH}$  est un opérateur de cobord)

Soit  $f_1^{(1)} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$  un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber. Alors

- (i) Pour tout  $N$ ,  $f_1^{(1)} + \sum_{p_1+\dots+p_n=N} f_{p_1\dots p_n}^{(N)}$  définit un morphisme de  $G_\infty$  algèbres à l'ordre  $N+1$  de  $G(\mathcal{G})$  dans  $G(\mathcal{G}')$  si et seulement si:

$$d_{CH} \left( \sum_{p_1+\dots+p_n=N} f_{p_1\dots p_n}^{(N)} \right) = 0$$

- (ii) Pour tout  $g = \sum_{p_1+\dots+p_n=N-1} g_{p_1\dots p_n}^{(N-1)}$ ,  $f + d_{CH}g$  est un morphisme à l'ordre  $N+1$ .  
 (iii) On a donc

$$d_{CH} \circ d_{CH} = 0.$$

## 8. UN EXEMPLE

Dans cette section, nous allons montrer comment le premier cocycle fondamental de la cohomologie de Chevalley des champs de vecteurs à valeurs dans les fonctions survit dans la cohomologie de Chevalley-Harrison d'une sous algèbre de Gerstenhaber naturelle de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$  à valeurs dans le corps de base.

On note  $\mathcal{G} = T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$  l'espace des tenseurs totalement antisymétriques

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial_{i_k}$$

tels que chaque coefficient  $\alpha^{i_1 \dots i_k}$  est un polynôme homogène de degré  $k$ .

$T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$  est une sous algèbre de Gerstenhaber de  $T_{poly}(\mathbb{R}^d)$ . En effet, si  $\alpha, \beta \in T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$ , alors,  $\alpha \wedge \beta$  et  $[\alpha, \beta]_S$  sont encore des tenseurs homogènes et ils appartiennent à  $T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$ .

D'autre part,  $\mathcal{G}' = \mathbb{R}$  muni de la multiplication usuelle  $\alpha \wedge \beta = \alpha\beta$  et du crochet nul  $[\alpha, \beta] = 0$  est une algèbre de Gerstenhaber pour la graduation  $degré(\alpha) = 0$ , quel que soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'application

$$f_1^1 : T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \alpha \longmapsto \begin{cases} \alpha, & \text{si } \alpha \in (T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d))^0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbres de Gerstenhaber.

Ceci définit donc une cohomologie de Chevalley-Harrison sur les espaces

$$C_{p_1 \dots p_n}^N = Hom \left( \underline{\otimes}^{p_1} (\mathcal{G}[1])[1] \cdot \dots \cdot \underline{\otimes}^{p_n} (\mathcal{G}[1])[1], \mathcal{G}'[1 - N - n] \right).$$

On sait dans [AAC1] ou [AAC2], que le premier cocycle fondamental de Chevalley pour les champs de vecteurs ou les tenseurs linéaires est un 3-cocycle qui s'écrit:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \partial_{i_3} \alpha_1^{i_1} \partial_{i_1} \alpha_2^{i_2} \partial_{i_2} \alpha_3^{i_3} - \partial_{i_2} \alpha_1^{i_1} \partial_{i_1} \alpha_3^{i_3} \partial_{i_3} \alpha_2^{i_2}.$$

Considérons donc l'application  $f_{111}^3 \in C_{111}^3$  définie ainsi:

$$f_{111}^3((\alpha_1).(\alpha_2).(\alpha_3)) = \partial_{i_3} \alpha_1^{i_1} \partial_{i_1} \alpha_2^{i_2} \partial_{i_2} \alpha_3^{i_3} - \partial_{i_2} \alpha_1^{i_1} \partial_{i_1} \alpha_3^{i_3} \partial_{i_3} \alpha_2^{i_2},$$

si tous les  $\alpha_j$  sont des champs de vecteurs, 0 sinon. (On a utilisé la notation  $(\alpha)$  pour représenter un paquet contenant le seul tenseur  $\alpha$ .)

L'application  $f = f_{111}^3$  n'est pas nulle car  $f_{111}^3((x_1 \partial_2).(x_2 \partial_3).(x_3 \partial_1)) = 1$ . Elle est bien définie sur  $G(\mathcal{G})$ . De plus, elle est un cocycle car  $d_m(f) \in C_{211}^4$  mais  $f(m(\alpha \otimes \beta), \alpha_2, \alpha_3)$  est non nul seulement si  $\alpha \wedge \beta$  est un champ de vecteurs, c'est à dire si  $\alpha$  est une constante et  $\beta$  est un champ de vecteurs ou  $\beta$  est une constante et  $\alpha$  est un champ de vecteurs.

$m'(f_1^1(\alpha), f(\beta, \alpha_2, \alpha_3))$  est non nul seulement si  $\alpha$  est une constante et  $\beta$  est un champ de vecteurs.

De même,  $m'(f(\alpha, \alpha_2, \alpha_3), f_1^1(\beta))$  est non nul seulement si  $\beta$  est une constante et  $\alpha$  est un champ de vecteurs.

Il nous reste

$$(d_m f)((\alpha), (\beta), (\alpha_2), (\alpha_3)) = -f_{111}^3(\alpha\beta, \alpha_2, \alpha_3) + \alpha f_{111}^3(\beta, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

ou

$$(d_m f)((\alpha), (\beta), (\alpha_2), (\alpha_3)) = \beta f_{111}^3(\alpha, \alpha_2, \alpha_3) - f_{111}^3(\alpha\beta, \alpha_2, \alpha_3) = 0.$$

D'autre part,  $d_\ell(f) = 0$ . En effet, on a  $\ell' = 0$  et nécessairement  $d_\ell(f) \in C_{1111}^4$ .

Alors, les seuls termes restant sont de la forme  $f_{111}^3(\ell((\alpha).(\beta)).(\gamma).(\delta))$ . Ces termes sont différents de 0 seulement si  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des champs de vecteurs. Il ne reste que:

$$\begin{aligned} (d_\ell f)_{1111}^4((\alpha_1).(\alpha_2).(\alpha_3).(\alpha_4)) &= f([\alpha_1, \alpha_2]_S, \alpha_3, \alpha_4) - f([\alpha_1, \alpha_3]_S, \alpha_2, \alpha_4) \\ &+ f([\alpha_1, \alpha_4]_S, \alpha_2, \alpha_3) + f([\alpha_2, \alpha_3]_S, \alpha_1, \alpha_4) - f([\alpha_2, \alpha_4]_S, \alpha_1, \alpha_3) + f([\alpha_3, \alpha_4]_S, \alpha_1, \alpha_2) \\ &= (d_C f)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0. \end{aligned}$$

De plus,  $f$  ne peut pas être un cobord car la seule possibilité serait  $f_{111}^3 = d_\ell(g_{11}^2)$  avec  $d_m(g_{11}^2) = 0$ . Mais, puisque  $f_{111}^3$  s'annule sur les tenseurs qui ne sont pas des champs de vecteurs et puisque  $\ell((\alpha).(\beta)) = -[\alpha, \beta]_S$  n'est un champ de vecteurs que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des champs de vecteurs, on peut supposer que  $g_{11}^2$  s'annule sur tous les paquets  $(\alpha), (\beta)$  sauf si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des champs de vecteurs.

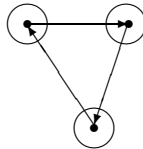
Alors, l'équation  $f_{111}^3 = d_\ell(g_{11}^2)$  s'écrit  $f = d_C(g_{11}^2)$  et on sait que  $f$  n'est pas un cobord pour la cohomologie de Chevalley.

### **Théorème 8.1.**

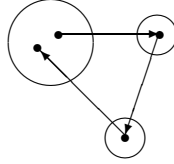
*La cohomologie de Chevalley-Harrison de  $T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  n'est pas triviale.*

### **Remarque 8.2.**

*Ce cocycle est du type des opérateurs définis par des "graphes avec paquets" introduits par Gammella et Halbout (voir [GaHa]). Il est associé au graphe:*



Le fait de se restreindre à  $T_{poly}^{hom}(\mathbb{R}^d)$  nous a permis d'éliminer dans le calcul de  $d_m(f_{111}^3)$  le graphe suivant:



## REFERENCES

- [AAC1] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Cohomologie de Chevalley des graphes vectoriels*, Pacific J of Math, vol 229, no 2, (2007) 257-292.
- [AAC2] W. Aloulou, D. Arnal, R. Chatbouri, *Chevalley cohomology for linear graphs*, Lett. Math. Phys. vol 80 (2007) 139-154.
- [AMM] D. Arnal, D. Manchon, M. Masmoudi, *Choix des signes pour la formalité de M. Kontsevich*, Pacific J of Math, vol 203, no 1 (2002), 23-66.
- [BGHHW] M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H.C. Herbig, S. Waldmann, *Formalité  $G_\infty$  adaptée et star-représentations sur des sous variétés coisotropes*, math.QA/0504276 v 1 13 Apr 2005.
- [G] G. Ginot, *Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber*, Ann. Math. Blaise Pascal, vol 11, no 1 (2004), 95-126.
- [GaHa] A. Gamella, G. Halbout,  *$G_\infty$ -Formality Theorem in Terms of Graphs and Associated Chevalley-Eilenberg-Harrison Cohomology*, Comm. in algebra Vol 33. N° 10, sep 2005, 3515-3528.
- [GH] G. Ginot, G. Halbout, *A formality theorem for Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. Vol 66 (2003), 37-64.
- [K] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. Vol 66 (2003), no. 3, 157-216.
- [L] J.L. Loday, *Cyclic Homology*, Second Edition, Volume 301, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, A series of comprehensive studies in mathematics, Springer.
- [T] D. Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich's formality theorem*, math.QA/9803025.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE BOURGOGNE, UMR CNRS 5584, UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE,  
U.F.R. SCIENCES ET TECHNIQUES B.P. 47870, F-21078 DIJON CEDEX, FRANCE  
*E-mail address:* Didier.Arnal@u-bourgogne.fr

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNITÉ DE RECHERCHE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, FACULTÉ DES  
SCIENCES DE MONASTIR, AVENUE DE L'ENVIRONNEMENT, 5019 MONASTIR, TUNISIE  
*E-mail address:* Walid.Aloulou@ipeim.rnu.tn  
*E-mail address:* Ridha.Chatbouri@ipeim.rnu.tn