HAL open science

Formulation en Coupe/Rounds pour le Routage dans les réseaux radio maillés

Christelle Molle, Fabrice Peix, Stéphane Pérennes, Hervé Rivano

To cite this version:

Christelle Molle, Fabrice Peix, Stéphane Pérennes, Hervé Rivano. Formulation en Coupe/Rounds pour le Routage dans les réseaux radio maillés. 10èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques de Télécommunications, May 2008, St Malo, France. pp.97–100. hal-00293288

HAL Id: hal-00293288

https://hal.science/hal-00293288v1

Submitted on 4 Jul 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formulation en Coupes/Rounds pour le Routage dans les Réseaux Radio Maillés†

C. Molle‡and F. Peix and S. Pérennes and H. Rivano

Projet MASCOTTE, INRIA-I3S(CNRS/UNSA), *Sophia-Antipolis, France*

Un des problèmes au cœur de l'optimisation des réseaux radio maillés est le routage et l'ordonnancement d'appels. Dans cet article, nous étudions une relaxation classique de ce problème qui consiste à répartir la capacité entre les ensembles d'appels simultanés de manière à garantir un débit suffisant à chaque routeur du réseau.

Nous introduisons une nouvelle formulation s'affranchissant du routage pour se concentrer sur la capacité de transport disponible sur les coupes du réseau. Nous prouvons son équivalence avec les formulations existantes et présentons un processus efficace de résolution par génération croisée de lignes et de colonnes.

Keywords: Round Weighting, Génération de colonnes, Génération de lignes, Routage, Réseau radio maillé

1 Introduction

Les réseaux radio maillés sont composés d'un ensemble de routeurs sans fil, interconnectés à travers une infrastructure radio de manière à fournir un accès à Internet à des clients mobiles. Pour cela, certains de ces routeurs, appelés *passerelles* ou *points d'accès*, sont directement reliés à un réseau filaire d'accès à Internet.

Les interférences radio posent des problèmes de capacité qui ont motivé de nombreuses études concordantes : toutes montrent une chute des performances du réseau en fonction de sa taille [GK00, JS03].

Etant donnée la topologie du réseau, le problème que nous regardons consiste à router les demandes des clients connectés aux routeurs jusqu'aux points d'accès à un débit maximum, tout en évitant les interférences entre transmissions grâce à un ordonnancement [BGK$^+$06, BKMS06, GR07, CFGM07].

Dans le cas des réseaux fonctionnant en régime permanent, une relaxation de ce problème a été introduite. En effet, la périodicité du réseau permet de s'affranchir de l'ordonnancement, algorithmiquement coûteux, et de ne calculer qu'une pondération des appels, appelée *round weighting problem* [KMP08]. Pour résoudre efficacement ce problème, des techniques de génération de colonnes peuvent être mises en œuvre [GR07, CFGM07, MPR08].

Dans cet article nous introduisons une nouvelle formulation du problème d'optimisation des réseaux maillés. Cette formulation permet de s'affranchir du routage pour se concentrer sur la capacité de transport disponible sur les coupes du réseau. Nous prouvons que cette formulation est équivalente aux précédentes grâce à une variante du théorème connu de *flot max./coupe min.* Cela implique, non intuitivement, que le choix précis des routes n'est pas un facteur prépondérant dans la capacité des réseaux radio. Nous développons ensuite un processus efficace de résolution par génération croisée de lignes et de colonnes.

Le problème du round weighting est présentée dans la section 3 dans les hypothèses de fonctionnement du réseau données en section 2. La section 3.1 décrit ensuite notre formulation linéaire. La méthode de résolution et les résultats obtenus le sont en section 4.

2 Modélisation du réseau

Le réseau radio maillé est modélisé par un graphe de transmission $G = (V,E)$, où V est l'union disjointe des ensembles de routeurs V_r et de points d'accès V_g, et E est l'ensemble des transmissions possibles entre tout couple de sommets de V.

†Ce travail a été partiellement financé par le projet IST-FET IP AEOLUS, l'ANR-JC OSERA et l'ARC CARMA

‡Thèse financée par la DGA

Nous considérons un réseau synchrone, fonctionnant en régime permanent, donc périodique. Durant une période, chaque routeur v de V_r envoie un trafic $t(v)$ vers les point d'accès. Le problème consiste à router l'ensemble du trafic sur des chemins multi-sauts dont chaque lien doit être activé suffisamment de fois durant la période du réseau : la capacité d'un lien est proportionnelle à sa fréquence d'activation. En minimisant l'amplitude de la période, le trafic est ainsi transporté à un débit maximal.

Afin d'assurer l'activation des liens du réseau, il est nécessaire de prendre en compte les contentions dues aux interférences radio. Des transmissions pouvant s'effectuer simultanément doivent être deux à deux sans interférence. Un tel ensemble s'appelle un *round* [BGK+06, KMP08, MPR08]. Déterminer l'activation des liens du réseau consiste alors à affecter une durée d'activation à chaque round, la période du réseau étant égale à la somme de ces durées.

3 Routage et round weighting

Etant donné le graphe de transmission G, le problème du round weighting consiste à déterminer deux fonctions de poids. La première, w est définie sur l'ensemble des rounds $\mathcal{R} \subset 2^E$ et représente leur temps d'activation. La seconde, Φ, est le flot représentant le trafic envoyé sur les ensembles $\mathcal{P}_v$ des chemins reliant chaque routeur v aux points d'accès (on note $\mathcal{P} = \cup_{v \in V_r} \mathcal{P}_v$). Chaque arc e hérite de l'ensemble des rounds auquel il appartient une capacité $C_w(e) = \sum_{R \in \mathcal{R}, e \in R} w(R)$. L'objectif est alors de minimiser le poids total des rounds, tout en satisfaisant les contraintes de flot, comme suit.

$$(1) \begin{cases} Min \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R) & \\ C_w(e) \geq \sum_{P \in \mathcal{P}, e \in P} \Phi(P) & \forall e \in E \\ \sum_{P \in \mathcal{P}_v} \Phi(P) = t(v) & \forall v \in V_r \\ w(R) \geq 0, \Phi(P) \geq 0 & \forall R \in \mathcal{R}, P \in \mathcal{P} \end{cases}$$

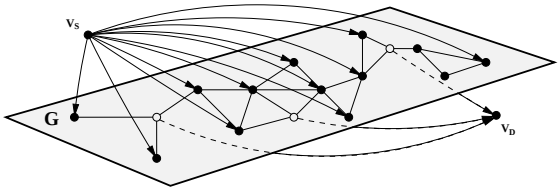

Fig. 1 : Graphe associé (G', w).

Notons qu'étant donnée une pondération des rounds, le problème de routage se réduit à un flot maximum avec une seule paire (source, destination) par une transformation classique vers le graphe (G', w) illustré dans la figure 1 et défini ci-dessous.

Définition 1 (Graphe associé (G', w)) *Soit $G' = (V', E')$ le graphe construit à partir de G et C_w de la façon suivante :*

- *Une "*super *source" v_S est ajoutée ainsi que les liens (v_S, v) $\forall v \in V_r$ avec capacité $t(v)$,*
- *Une "*super *destination " v_D est ajoutée ainsi que les liens (v, v_D) $\forall v \in V_g$ avec capacité infinie,*
- *Pour tout les liens de E, la capacité reste $C_w(e)$.*

Donc $V' = V \cup \{v_S, v_D\}$ et $E' = E \cup \{(v_S, v), v \in V_r\} \cup \{(v, v_D), v \in V_g\}$.

Cette transformation n'est pas exactement nécessaire mais permet de manipuler plus aisément le théorème flot max/coupe min. Ainsi les contraintes de flot de (1) sont respectées si et seulement si la (v_S, v_D)-coupe minimum de G' est supérieure à $\sum_{v \in V_r} t(v)$, le trafic total devant être transporté vers les points d'accès.

3.1 Formulation en coupe et round

En programmation linéaire, le dual du flot est un problème de couverture des coupes. A partir de cette remarque, nous développons ici une nouvelle formulation du problème qui se concentre sur la question de la capacité de transport du réseau.

Dans la suite, nous notons $\mathcal{S} \subset 2^V$ l'ensemble des coupes du graphe G isolant les points d'accès : une coupe est un ensemble S de sommets ne contenant aucun point d'accès. Le bord de S, noté $(S, \overline{S})$, est l'ensemble des arcs sortant de S vers son complémentaire $\overline{S}$. On définit alors le trafic d'une coupe $t(S) = \sum_{v \in S} t(v)$ comme le trafic total devant traverser son bord. De même, la capacité induite par w d'une coupe est la somme des capacités des liens de son bord : $C_w(S) = \sum_{e \in (S, \bar{S})} C_w(e)$.

La capacité des liens étant donnée par la pondération des rounds, on obtient la relation suivante : $C_w(S) = \sum_{R\in\mathcal{R}} \delta(R,S)w(R)$, où $\delta(R,S) = |R \cap (S,\bar{S})|$ correspond au nombre de fois où le round R couvre le bord de S.

Dès lors, s'assurer qu'il existe une capacité suffisante dans le réseau pour écouler le trafic consiste à couvrir les coupes du réseau isolant les points d'accès par les rounds. Une fois la solution optimale obtenue, le théorème flot max/coupe min assure alors que l'on sait trouver un routage satisfaisant les demandes des routeurs (cf Th 1, section suivante).

Ce problème de couverture s'exprime de la manière suivante.

$$(2)\begin{cases} Min \sum_{R\in\mathcal{R}} w(R) \\ \sum_{R\in\mathcal{R}} \delta(R,S)w(R) \geq t(S) \qquad \forall S \in \mathcal{S} \\ w(R) \geq 0 \qquad \forall R \in \mathcal{R} \end{cases}$$

3.2 Preuve de validité

Le programme linéaire (2) calcule une pondération des rounds de sorte à ce que la capacité de chaque coupe soit supérieure à la quantité de trafic qui doit en sortir. Le théorème 1 assure que ces capacités sont nécessaires et suffisantes à l'existence d'un routage du trafic.

Théorème 1 *Les formulations (1) et (2) calculent des pondérations des rounds équivalentes.*

Preuve : Soit w_1 une solution réalisable du programme (1). Il existe donc un flot ϕ réalisable dans G et, pour toute coupe S isolant les points d'accès, la conservation du flot assure que la capacité de S est supérieure au flot émis par les sommets de S car il doit nécessairement sortir :

$$C_{w_1}(S) = \sum_{e\in(S,\bar{S})} C_{w_1}(e) \geq \sum_{e\in(S,\bar{S})} \sum_{P\in\mathcal{P},e\in P} \Phi(P) \geq \sum_{v\in S} t(v).$$

En injectant w_1 dans le programme (2), on obtient donc une solution réalisable puisque

$$\forall S, \sum_{R\in\mathcal{R}} \delta(R,S)w_1(R) = C_{w_1}(S) \geq t(S).$$

En particulier, les pondérations optimales de (1) sont des bornes supérieures pour (2).

Inversement, soit w_2 une solution réalisable de la formulation (2). Soit S^* une coupe (de capacité) minimale séparant v_S de v_D dans le graphe modifié (G', w_2). Il existe une unique coupe S de G telle que $S^* = \{v_S\} \cup S$ et $(S^*, \overline{S^*}) = \{(v_S, v), v \in \bar{S}\} \cup (S, \bar{S})$. Notons que les points d'accès sont nécessairement dans $\bar{S}$ puisque la capacité des arcs les reliants à v_D est infinie.

La capacité de S^* est alors $C_{w_2}(S^*) = \sum_{v\in\bar{S}} C_{w_2}((v_S, v)) + \sum_{e\in(S,\bar{S})} C_{w_2}(e) = \sum_{v\in\bar{S}} t(v) + C_{w_2}(S)$.

La contrainte de (2) assure que $C_{w_2}(S) \geq t(S) = \sum_{v\in S} t(v)$, et donc $C_{w_2}(S^*) \geq \sum_{v\in V_r} t(v)$. Le théorème flot max/coupe min garantit alors l'existence d'un flot dans (G', w_2), donc d'une solution de (1).

En particulier, les pondérations optimales de (2) bornent supérieurement celles de (1), ce qui complète l'équivalence entre (1) et (2). □

4 Génération croisée de lignes et colonnes

La formulation (2) compte un nombre exponentiel de variables (une par round) et de contraintes (une par coupe). Pour manipuler de telles tailles efficacement, nous développons un processus de génération croisée de lignes et colonnes. Le principe de ces processus consiste, à partir d'une solution optimale au problème restreint à un sous-ensemble de lignes et de colonnes, à chercher à chaque itération une ligne ou une colonne à rajouter pour améliorer la solution. Une ligne correspond à une contrainte violée par la solution courante alors qu'une colonne correspond à une variable forcée à 0 que l'on voudrait changer.

Dans la formulation (2), une contrainte est violée si une coupe est de capacité trop faible : la génération d'une ligne peut donc se faire par un calcul de coupe minimale (en capacité).

Le programme (3) est le dual de la formulation précédente. Il consiste à empaqueter les coupes pondérées par $p(S)$ dans les rounds de capacité 1 de manière à maximiser un profit orienté par le trafic des coupes. En d'autres termes, une contrainte n'est pas satisfaite si un round a un poids induit supérieur à 1. Générer une colonne de (2) se fait en identifiant la contrainte la plus violée de (3) lorsque $p(S)$ est donné par les coûts réduits issus de la solution courante. C'est donc un calcul de round de poids maximal .

$$(3)\begin{cases} Max \sum_{S\in\mathcal{S}} p(S)t(S) \\ \sum_{S\in\mathcal{S}} \delta(R,S)p(S) \leq 1 \qquad \forall R \in \mathcal{R} \\ p(S) \geq 0 \qquad \forall S \in \mathcal{S} \end{cases}$$

Le processus de génération croisée se fonde sur un algorithme primal-dual. Il consiste à opérer une génération de lignes classique, à ceci près que le calcul d'un optimum intermédiaire se fait grâce à la génération des colonnes. A la fin de ce processus la solution optimale est trouvée en application du théorème $SEP = OPT$ sur le dual (3) puis sur le primal (2) [GLS81]. Nous avons implémenté ce processus et validé son équivalence à (2) sur un grand nombre de réseaux de test, réguliers ou aléatoires.

5 Conclusion et perspectives

Des expérimentations sur des grands réseaux maillés montrent que les formulations (2) et (3) sont d'une efficacité comparable. Comme cela a déjà été remarqué [MPR08], il semble que, dans les cas pratiques, les calculs soient de complexité polynomiale, tant en nombre d'itérations qu'en temps de calcul. Des résultats théoriques devraient valider ces constatations empiriques.

Un des intérêts majeurs de la formulations présentée ici est qu'elle donne une nouvelle approche des questions de capacité, indépendante du routage. En particulier, il devient de plus en plus clair que l'essentiel de l'optimisation se joue à proximité des points d'accès, et cette formulation devrait nous permettre de le prouver. Dans un second temps, il devrait être possible de restreindre la famille des coupes considérées et, ainsi, d'accélérer sensiblement l'optimisation de la capacité des réseaux maillés, de sorte à pouvoir ensuite envisager des critères de qualité de service plus complexes à modéliser, tels que le délai ou la tolérance aux pannes, ainsi que des couches MACS plus réalistes sur des réseaux de grande taille (CSMA/CA en particulier).

Références

[BGK+06] J.-C. Bermond, J. Galtier, R. Klasing, N. Morales, and S. Pérennes. Hardness and approximation of gathering in static radio networks. *Parallel Processing Letters*, 16(2) :165–183, 2006.

[BKMS06] V. Bonifaci, P. Korteweg, A. Marchetti-Spaccamela, and L. Stougie. An approximation algorithm for the wireless gathering problem. In *SWAT*, pages 328–338, 2006.

[CFGM07] G. Carello, I. Filippini, S. Gualandi, and F. Malucelli. Scheduling and routing in wireless multi-hop networks by column generation. In *INOC*, 2007.

[GK00] P. Gupta and P.R. Kumar. The capacity of wireless networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(2) :388–404, 2000.

[GLS81] M. Grotschel, L. Lovasz, and A. Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1(2) :169–197, 1981.

[GR07] C. Gomes and H. Rivano. Fair joint routing and scheduling problem in wireless mesh networks. Research Report 6198, INRIA, 2007.

[JS03] J. Jun and M.L. Sichitiu. The nominal capacity of wireless mesh networks. *IEEE Wireless Communications*, 10(5) :8–14, 2003.

[KMP08] R. Klasing, N. Morales, and S. Perennes. On the complexity of bandwidth allocation in radio networks with steady traffic demands. *Theoretical Computer Science*, 2008. To appear.

[MPR08] C. Molle, F. Peix, and H. Rivano. Génération de colonnes pour le routage et l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés. In *CFIP*, 2008.