



**HAL**  
open science

## La forme asymptotique du processus de contact en environnement aléatoire

Olivier Garet, Régine Marchand

► **To cite this version:**

Olivier Garet, Régine Marchand. La forme asymptotique du processus de contact en environnement aléatoire. 2008. hal-00292881v1

**HAL Id: hal-00292881**

**<https://hal.science/hal-00292881v1>**

Preprint submitted on 2 Jul 2008 (v1), last revised 7 Oct 2009 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LA FORME ASYMPTOTIQUE DU PROCESSUS DE CONTACT EN ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE

OLIVIER GARET AND RÉGINE MARCHAND

RÉSUMÉ. Le but de cet article est d'établir des thormes de forme asymptotique pour le processus de contact en environnement alatoire stationnaire, gnralisant ainsi des rsultats connus pour le processus de contact en environnement dterministe. En particulier, on montre que pour presque toute ralisation de l'environnement alatoire et pour presque toute ralisation du processus de contact telle que le processus survit, l'ensemble  $H_t$  des points qui ont t occupés avant le temps  $t$  est tel que  $H_t/t$  converge vers un compact qui ne dpend que de la loi de l'environnement. Les nouveaux objets introduits simplifient aussi la preuve du thorme de forme asymptotique en environnement dterministe. *Mots clefs* : croissance alatoire, processus de contact, environnement alatoire, thorme ergodique sous-additif, thorme de forme asymptotique

ABSTRACT. The aim of this article is to prove asymptotic shape theorems for the contact process in stationary random environment. These theorems generalize known results for the classical contact process. In particular, if  $H_t$  denotes the set of already occupied sites at time  $t$ , we show that for almost every environment, when the contact process survives, the set  $H_t/t$  almost surely converges to a compact set that only depends on the law of the environment. We introduce new objects which also simplify the proof of the shape theorem in a deterministic environment.

*Key words*: Random growth, contact process, random environment, sub-additive ergodic theorem, shape theorem

## 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est d'obtenir un thorme de forme asymptotique pour le processus de contact dans un environnement alatoire en dimension  $d$ . Dans notre cas, l'environnement est donn par une suite de variables alatoires  $(\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$ , la variable alatoire  $\lambda_e$  représentant le taux de naissance sur l'arête  $e$  tandis que les taux de mort sont tous gaux 1. Afin d'assurer que la survie du processus est possible, on suppose que les  $(\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$  prennent leurs valeurs au dessus de  $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ , le paramtre critique pour la possibilit de survie du processus de contact ordinaire sur  $\mathbb{Z}^d$ . La loi des  $(\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$  est suppose stationnaire et ergodique.

Le rsultat principal que nous nous proposons de montrer est le suivant : il existe une norme  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que, pour presque tout environnement  $\lambda$ , l'ensemble  $H_t$  des points djà infectés au moins une fois au temps  $t$  vrifie

$$\overline{\mathbb{P}}_\lambda \left( \exists T > 0; t \geq T \implies (1 - \varepsilon)A_\mu \subset \frac{H_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)A_\mu \right) = 1,$$

o  $A_\mu$  est la boule unit de la norme  $\mu$ , et  $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$  la loi du processus de contact en environnement  $\lambda$ , conditionn survivre.

Ce rsultat est assez naturel : en effet, on sait que lorsque le processus de contact sur  $\mathbb{Z}^d$  en environnement dterministe survit, l'ensemble  $H_t/t$  converge vers un convexe compact. Ce rsultat a t dmontr en 1982 par Durrett et Griffeath [15] pour les grandes valeurs du taux de naissance  $\lambda$ . Plus tard, Bezuidenhout et Grimmett [4] ont indiqu comment leur construction menant au thorme de convergence compte pouvait tre utilise pour prolonger le rsultat de Durrett et Griffeath dans toute la zone surcritique. On peut trouver une preuve plus dtaille dans l'article d'exposition de Durrett [16].

Jusqu' prsent, les travaux concernant le processus de contact en environnement alatoire sont essentiellement consacrs la dtermination de conditions assurant la survie (Liggett [28], Andjel [3], Newman et Volchan [30]), ou la mort (Klein [26]) du processus de contact. Par ailleurs, la plupart d'entre eux traitent de la dimension un. Ainsi, Bramson, Durrett et Schonman [6] montrent qu'en dimension un et en environnement alatoire, une croissance sous-linaire est possible. Au contraire, ils donnent en dimension  $d \geq 2$  des bornes infrieures montrant que la croissance est linaire, ce qui consacre la singularit de la dimension un en environnement alatoire. Ils conjecturent alors que dans leur modle, un thorme de forme asymptotique devrait pouvoir tre obtenu en dimension  $d \geq 2$ . On peut considrer que notre rsultat constitue la partie facile de la conjecture de Bramson, Durrett et Schonman [6], c'est dire le cas o les taux de naissance sont minors par  $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ . La question d'une croissance linaire sous la seule hypothse de survie du processus reste ouverte.

En gnral, les thormes de forme asymptotique pour des modles de croissance se prouvent grce la thorie des processus sous-additifs initie par Hammersley et Welsh [19], et en particulier grce au thorme ergodique sous-additif de Kingman [24] et ses diffrentes extensions. L'exemple le plus vident est certainement celui du thorme de forme asymptotique pour la percolation de premier passage sur le rseau  $\mathbb{Z}^d$  – on peut galement penser aux extensions sur rseau, comme la percolation de premier passage stationnaire de Boivin [5], la percolation de premier passage sur un amas de percolation de Garett et Marchand [17], ou continues comme le modle de Vahidi-Asl et Wierman [34], le modle Euclidien d'Howard et Newmann [22] (voir galement [21]), ou le modle de Deijfen [10].

Il convient toutefois de distinguer, parmi les modles qui relvent de la thorie sous-additive, deux familles. La premire, et la plus frquemment tudie, est celle des modles permanents : la forme occupe au temps  $t$  ne fait que crotre et il n'y a pas d'extinction possible ; c'est le cas par exemple des modles de Richardson [31], ou plus rcemment, du modle des grenouilles de Alves et al. [1, 2] et des marches alatoires branchantes de Comets et Popov [9]. Dans ces modles, la partie essentielle du travail consiste montrer que la croissance est au moins linaire, la sous-additivit permettant alors d'obtenir la convergence dsire.

La seconde famille, moins frquemment tudie, est celle des modles non permanents, autrement dit ceux o la mort est possible. Dans ce cas, c'est sous un conditionnement par la survie de l'espece que l'on espere obtenir un thorme de forme asymptotique. Les difficults induites par la possibilit de la mort ont cependant t soulignes ds la gense de la thorie sous-additive, en particulier par Hammersley lui-mme [18]. La raison de ces difficults est vidente : en effet, si l'on veut dmontrer que les temps d'atteintes  $(t(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$  des diffrents points du rseau sont tels que  $t(nx)/n$

converge, la thorie de Kingman requiert que les variables alatoires  $t(x)$  soient stationnaires (en un sens prciser) et intgrables. Bien sr, si la mort est possible, il n'y a pas intgrabilit puisque les temps d'atteinte peuvent tre infinis. En revanche, si l'on conditionne par la survie, les propriets d'indpendance, voire de sous-additivit peuvent tre perdues, ce qui ncessite la construction de nouveaux outils. Un premier lemme de presque sous-additivit est propos par Kesten dans la discussion de l'article de Kingman [24], puis tendu par Hammersley [18] (page 674). Plus tard, on trouvera d'autres types d'hypothses, par exemple chez Derriennic [11], Derriennic et Hachem [12], et chez Schrger [32, 33]. C'est sur le lemme de Kesten-Hammersley que s'appuient Bramson et Griffeath [8, 7], puis Durrett et Griffeath [15] pour dmontrer leurs thormes de forme asymptotique. On pourra galement consulter la section 11c de Durrett [14].

Dans le cas qui nous intrsse, le caractre alatoire de l'environnement induit des difficults supplmentaires. Pour parler simplement, si l'on travaille en environnement fix, toute stationnarit est perdue. En revanche, si l'on travaille en environnement moyenn, c'est le caractre markovien du processus de contact qui fait dfaut. Aussi, il est ncessaire de jouer tantt de l'environnement fix, tantt de l'environnement moyenn, pour pouvoir tirer bnfice des deux. Cependant, le lemme de Kesten et Hammersley ne peut tre utilis ici puisque ce dernier rclame la fois de la stationnarit et une forme d'indpendance. Ainsi, on introduit une nouvelle quantit  $\sigma(x)$ , qui reprsente le premier moment o le site  $x$  est occup par un individu dont la descendance est infinie. On montre alors que  $\sigma(x)$  vrifie certaines propriets de stationnarit et de sous-additivit qui permettront d'tablir un thorme sous-additif en environnement moyenn avec des techniques inspires de Liggett [27]. En contrlant l'cart entre  $t(x)$  et  $\sigma(x)$ , on verra alors que les rsultats de forme asymptotique pour  $\sigma$  peuvent aisement se transférer à  $t$ .

Si la quantit  $\sigma(x)$  peut sembler *a priori* moins naturelle que le temps d'atteinte  $t(x)$ , elle jouit cependant de propriets de sous-additivit beaucoup plus agrables. Ainsi, nous chapons la technicit que requiert la vrification d'hypothses de presque sous-additivit, et rintgrons un cadre o des arguments de thorie ergodique pure peuvent tre dplys. De fait, la stratgie que nous proposons simplifie la preuve de Durrett et Griffeath dans le cas du processus de contact en environnement dterministe. Au del, nous pensons que cette quantit  $\sigma(x)$  pourra s'avrer utile dans des tudes futures concernant le processus de contact.

## 2. MODÈLE ET RÉSULTATS

**2.1. Environnement.** Dans tout l'article, on notera  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  les normes sur  $\mathbb{R}^d$  respectivement dfinies par  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$  et  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ . La notation  $\|\cdot\|$  sera utilise pour dsigner une norme quelconque.

Soit  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$  deux rels fixes, avec  $\lambda_c(\mathbb{Z}^d) < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ , o  $\lambda_c(\mathbb{Z}^d)$  est le taux de naissance critique pour la survie du processus de contact usuel sur  $\mathbb{Z}^d$ . Dans toute la suite, on se limitera à l'tude du processus de contact en environnement alatoire avec des taux de naissance  $\lambda = (\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$  appartenant à l'ensemble des environnements  $\Lambda = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^{\mathbb{E}^d}$ . Un environnement est donc une collection  $\lambda = (\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d} \in \Lambda$ .

Soit  $\lambda \in \Lambda$  un environnement fix. Le processus de contact  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  dans l'environnement  $\lambda$  est un processus de Markov homogne qui prend ses valeurs dans

l'ensemble  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$  des parties de  $\mathbb{Z}^d$ , que l'on identifiera parfois l'ensemble  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ . Ainsi, on s'autorisera les deux critures

$$x \in \xi_t \text{ ou } \xi_t(x) = 1.$$

Si  $\xi_t(z) = 1$ , on dit que le site  $z$  est occupé, tandis que si  $\xi_t(z) = 0$ , on dit que le site  $z$  est vide. Le processus évolue de la façon suivante :

- un site occupé devient vide à taux 1,
- un site  $z$  vide devient infecté au taux  $\sum_{\|z-z'\|_1=1} \xi_t(z') \lambda_{\{z,z'\}}$ ,

ces différentes évolutions tant indépendantes les unes des autres. Dans la suite, on notera  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions cdlg de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$  : c'est l'espace canonique pour les processus de Markov admettant  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$  comme espace d'état.

Pour définir le processus de contact en environnement  $\lambda \in \Lambda$ , on utilise la construction de Harris [20] des processus de Markov additifs à valeurs dans les parties de  $\mathbb{Z}^d$ . Elle permet de coupler des processus de contact partant de configurations différentes, en les construisant à partir d'une même collection de mesures de Poisson sur  $\mathbb{R}_+$ .

**2.2. Construction de la famille de mesures de Poisson.** Sur  $\mathbb{R}_+$  muni de sa tribu borlienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ , on considère l'ensemble  $M$  constitué des mesures ponctuelles  $m = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{t_i}$  localement finies dont tous les atomes sont de masse 1. On munit cet ensemble de la tribu  $\mathcal{M}$  engendré par les applications  $m \mapsto m(B)$ , où  $B$  décrit l'ensemble des borliens de  $\mathbb{R}_+$ .

On définit alors l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{F})$  par

$$\Omega = M^{\mathbb{E}^d} \times M^{\mathbb{Z}^d} \text{ et } \mathcal{F} = \mathcal{M}^{\otimes \mathbb{E}^d} \otimes \mathcal{M}^{\otimes \mathbb{Z}^d}.$$

Sur cet espace, on considère la famille de probabilités  $(\mathbb{P}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  définies comme suit : pour tout  $\lambda = (\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d} \in \Lambda$ ,

$$\mathbb{P}_\lambda = \bigotimes_{e \in \mathbb{E}^d} \mathcal{P}_{\lambda_e} \otimes \mathcal{P}_1^{\otimes \mathbb{Z}^d},$$

où, pour chaque  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{P}_\lambda$  est la loi d'un processus ponctuel de Poisson sur  $\mathbb{R}_+$  d'intensité  $\lambda$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , on écrit plutôt  $\mathbb{P}_\lambda$  (au lieu de  $\mathbb{P}_{(\lambda)_{e \in \mathbb{E}^d}}$ ) pour la loi en environnement déterministe avec taux de naissance  $\lambda$  en chaque arête.

Pour tout  $t \geq 0$ , on note  $\mathcal{F}_t$  la tribu engendrée par les applications  $\omega \mapsto \omega_e(B)$  et  $\omega \mapsto \omega_z(B)$ , où  $e$  décrit  $\mathbb{E}^d$ ,  $z$  décrit  $\mathbb{Z}^d$ , et  $B$  décrit l'ensemble des borliens de  $[0, t]$ .

**2.3. La construction graphique du processus de contact.** Cette construction est très détaillée dans l'article de Harris [20] ; nous ne donnons ici qu'une description informelle. Soit  $\omega = ((\omega_e)_{e \in \mathbb{E}^d}, (\omega_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}) \in \Omega$ . Au-dessus de chaque site  $z \in \mathbb{Z}^d$ , on trace un axe temporel  $\mathbb{R}_+$ , et on marque une croix aux instants donnés par  $\omega_z$ . Au-dessus de chaque arête  $e \in \mathbb{E}^d$ , on trace aux instants donnés par  $\omega_e$  un segment horizontal entre les deux extrémités de l'arête. Un chemin ouvert suit les axes temporels au-dessus des sites sans pouvoir traverser les croix, et emprunte les segments horizontaux pour passer d'un axe dessin au-dessus d'un site à l'axe dessin au-dessus d'un site voisin. Si on pense le processus de contact en termes de propagation d'une infection, un chemin ouvert est un trajet possible de l'infection d'un site par un autre. Pour  $x, y \in \mathbb{Z}^d$  et  $t \geq 0$ , on dit alors que  $\xi_t^x(y) = 1$  si et

seulement si il existe un chemin ouvert de  $(x, 0)$  à  $(y, t)$ , puis on dfinit :

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi_t^x &= \{y \in \mathbb{Z}^d : \xi_t^x(y) = 1\}, \\ \text{et, pour tout } A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^d), \quad \xi_t^A &= \bigcup_{x \in A} \xi_t^x. \end{aligned}$$

En particulier, on a immdiatement  $(A \subset B) \Rightarrow (\forall t \geq 0 \quad \xi_t^A \subset \xi_t^B)$ .

Quand  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , Harris prouve que sous  $\mathbb{P}_\lambda$ , le processus  $(\xi_t^A)_{t \geq 0}$  est le processus de contact avec taux de naissance constant  $\lambda$ , partant de la configuration initiale  $A$ . Il n'est pas difficile d'adapter la preuve pour voir que, si  $\lambda \in \Lambda$ , sous  $\mathbb{P}_\lambda$ , le processus  $(\xi_t^A)_{t \geq 0}$  est ce que nous avons appel le processus de contact en environnement  $\lambda$ , partant de la configuration initiale  $A$ . Ce processus est fellrien, et jouit donc de la propriit de Markov forte.

**2.4. Translations temporelles.** Pour  $t \geq 0$ , on dfinit l'oprateur de translation  $\theta_t$  sur une mesure ponctuelle  $m = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{t_i}$  sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$\theta_t m = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t_i \geq t\}} \delta_{t_i - t}.$$

La translation  $\theta_t$  induit de manire naturelle une opration sur  $\Omega$ , que l'on note encore  $\theta_t$  : pour tout  $\omega \in \Omega$ , on pose

$$\theta_t \omega = ((\theta_t \omega_e)_{e \in \mathbb{E}^d}, (\theta_t \omega_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}).$$

Les mesures ponctuelles de Poisson tant toutes invariantes par translation, l'oprateur  $\theta_t$  laisse toutes les probabilitis  $\mathbb{P}_\lambda$  invariantes. La propriit de semi-groupe du processus de contact a ici une version plus forte trajectorielle : pour tout  $A \subset \mathbb{Z}^d$ , pour tous  $s, t \geq 0$ , pour tout  $\omega \in \Omega$ , on a l'identit

$$(2) \quad \xi_{t+s}^A(\omega) = \xi_s^{\xi_t^A(\omega)}(\theta_t \omega) = \xi_s^* (\theta_t \omega) \circ \xi_t^A(\omega),$$

qui peut s'exprimer sous la forme markovienne classique

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{D}) \quad \mathbb{P}((\xi_{t+s}^A)_{s \geq 0} \in B | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}((\xi_s^*)_{s \geq 0} \in B) \circ \xi_t^A.$$

On a l'analogie pour la propriit de Markov forte : si  $T$  est un temps d'arrêt adapt la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , alors, sur l'vnement  $\{T < +\infty\}$ ,

$$\begin{aligned} \xi_{T+s}^A(\omega) &= \xi_s^{\xi_T^A(\omega)}(\theta_T \omega), \\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{D}) \quad \mathbb{P}((\xi_{T+s}^A)_{s \geq 0} \in B | \mathcal{F}_T) &= \mathbb{P}((\xi_s^*)_{s \geq 0} \in B) \circ \xi_T^A. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\mathcal{F}_T$  dsigne la tribu des vnements dtermins au temps  $T$  dfinie par

$$\mathcal{F}_T = \{B \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0 \quad B \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

**2.5. Translations spatiales.** On peut faire agir  $\mathbb{Z}^d$  la fois sur le processus et sur l'environnement. L'action sur le processus consiste changer le point de vue de l'observateur de l'volution du processus : pour  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on dfinit l'oprateur de translation  $T_x$  par

$$\forall \omega \in \Omega \quad T_x \omega = ((\omega_{e+x})_{e \in \mathbb{E}^d}, (\omega_{z+x})_{z \in \mathbb{Z}^d}),$$

o l'on a convenu que  $x + e$  tait la translate de vecteur  $x$  de l'arte  $e$ .

Par ailleurs, pour tout environnement  $\lambda \in \Lambda$ , on considèrera l'environnement translat  $x.\lambda$  dfini par  $(x.\lambda)_e = \lambda_{x+e}$ . Ces deux actions sont duales au sens suivant : pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , on a

$$(3) \quad \begin{aligned} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}_\lambda(T_x \omega \in A) &= \mathbb{P}_{x.\lambda}(\omega \in A), \\ \text{et en particulier, } \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{D}) \quad \mathbb{P}_\lambda(\xi^x \in B) &= \mathbb{P}_{x.\lambda}(\xi^0 \in B). \end{aligned}$$

### 2.6. Temps d'atteinte essentiel, opérateur de translation spatio-temporelle.

Pour  $A \subset \mathbb{Z}^d$ , on dfinit le temps de vie  $\tau^A$  du processus issu de  $A$ ,

$$\tau^A = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^A = \emptyset\}.$$

Pour  $A \subset \mathbb{Z}^d$  et  $y \in \mathbb{Z}^d$ , on dfinit galemment l'instant  $t^A(y)$  de premiere infection du point  $y$  en partant de  $A$  :

$$t^A(y) = \inf\{t \geq 0 : y \in \xi_t^A\}.$$

On introduit ici, pour  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}^d$ , la quantit  $\sigma^x(y)$  qui s'avrera primordiale dans la suite : il s'agit du premier instant o nat au site  $y$ , dans le processus issu de  $x$ , un point dont la descendance ne s'teint pas. On le dfinit par

$$\sigma^x(y) = \inf\{t \geq 0 : y \in \xi_t^x \text{ et } \tau^y \circ \theta_t = +\infty\}.$$

Nous l'appellerons le *temps d'atteinte essentiel* de  $y$  en partant de  $x$ . Il est bien sûr plus grand que le temps d'atteinte  $t^x(y)$ . Conjointement, on dfinit l'*opérateur de translation spatio-temporelle*  $\tilde{\theta}_x$  de  $\Omega$  dans lui-mme par :

$$\tilde{\theta}_x = \begin{cases} T_x \circ \theta_{\sigma(x)} & \text{si } \sigma(x) < +\infty, \\ T_x & \text{sinon,} \end{cases}$$

ou, si l'on se veut plus explicite :

$$(\tilde{\theta}_x)(\omega) = \begin{cases} T_x(\theta_{\sigma(x)(\omega)}\omega) & \text{si } \sigma(x)(\omega) < +\infty, \\ T_x(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas que nous considèrerons le plus souvent est celui de  $x = 0$ . Pour simplifier l'écriture, on note  $\tau = \tau^0$ ,  $t(x) = t^0(x)$  et  $\sigma(x) = \sigma^0(x)$ . Nous allons travailler principalement avec le temps d'atteinte essentiel  $\sigma(x)$  qui possde, contrairement à  $t(x)$ , de bonnes proprièts de sous-additivit :

**Lemme 2.1.**  $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d \quad \sigma(x+y) \leq \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x.$

Nous verrons qu'on peut aussi contrôler la diffrence entre  $\sigma(x)$  et  $t(x)$ , ce qui permettra de transposer les rsultats obtenus pour  $\sigma(x)$  à  $t(x)$ .

**2.7. Processus de contact en environnement alatoire conditionn à survivre.** Nous allons maintenant nous placer en environnement alatoire. Pour toute la suite, on fixe une mesure de probabilit  $\nu$  sur l'ensemble des environnements  $\Lambda = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^{\mathbb{E}^d}$ . On suppose que  $\nu$  est stationnaire et ergodique sous l'action de  $\mathbb{Z}^d$ . Bien videmment, cela contient le cas d'un environnement dterministe classique avec un taux de naissance constant  $\lambda > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$  : il suffit de prendre pour  $\nu$  la masse de Dirac  $(\delta_\lambda)^{\otimes \mathbb{E}^d}$ .

Pour  $\lambda \in \Lambda$ , on dfinit la probabilit  $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  par

$$\forall E \in \mathcal{F} \quad \overline{\mathbb{P}}_\lambda(E) = \mathbb{P}_\lambda(E | \tau = +\infty).$$

C'est la loi de la famille des processus ponctuels de Poisson, conditionnés ce que le processus de contact issu de 0 survive. Sur le mme espace  $(\Omega, \mathcal{F})$ , on dfinit alors la probabilit moyenne (annealed)  $\bar{\mathbb{P}}$  par

$$\forall E \in \mathcal{F} \quad \bar{\mathbb{P}}(E) = \int_{\Lambda} \bar{\mathbb{P}}_{\lambda}(E) \, d\nu(\lambda).$$

Autrement dit, l'environnement  $\lambda = (\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$  dans lequel le processus de contact volue est une variable alatoire de loi  $\nu$ , et c'est sous cette dernire probabilit  $\bar{\mathbb{P}}$  que l'on va chercher à tablir le thorme de forme asymptotique.

**2.8. Organisation de l'article et rsultats.** Dans la section 3, on établit le lemme 2.1 de sous-additivité, ainsi que des propriétés d'invariance et d'ergodicité. On montre en particulier le théorème suivant :

**Thorme 2.2.** *Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ , le systme  $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathbb{P}}, \tilde{\theta}_x)$  est ergodique.*

Dans la section 4, on tudie les propriéts d'intégrabilit des  $(\sigma(x))_{x \in \mathbb{Z}^d}$  et on contrôle l'cart entre  $\sigma(x)$  et  $t(x)$ .

Alors, s'inspirant des mthodes de Kingman [25] et Liggett [27], on montre dans la section 5 que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\frac{\sigma(nx)}{n}$  converge  $\bar{\mathbb{P}}$  presque srement vers un rel  $\mu(x)$ . La fonctionnelle  $x \mapsto \mu(x)$  se prolonge en une norme sur  $\mathbb{R}^d$ , qui va caractriser la forme asymptotique. Dans la suite, on notera  $A_{\mu}$  la boule unit pour  $\mu$ . On dfinit

$$\begin{aligned} H_t &= \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}, \\ G_t &= \{x \in \mathbb{Z}^d : \sigma(x) \leq t\}, \\ K'_t &= \{x \in \mathbb{Z}^d : \forall s \geq t \quad \xi_s^0(x) = \xi_s^{\mathbb{Z}^d}(x)\}, \end{aligned}$$

et on dsigne par  $\tilde{H}_t, \tilde{G}_t, \tilde{K}'_t$  les versions grossies des ensembles  $H_t, G_t, K'_t$  :

$$\tilde{H}_t = H_t + [0, 1]^d, \quad \tilde{G}_t = G_t + [0, 1]^d \quad \text{et} \quad \tilde{K}'_t = K'_t + [0, 1]^d.$$

On peut alors dmontrer les rsultats suivants :

**Thorme 2.3** (Thorme de forme asymptotique). *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec probabilit 1 sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , pour tout  $t$  suffisamment grand,*

$$(4) \quad (1 - \varepsilon)A_{\mu} \subset \frac{\tilde{K}'_t \cap \tilde{G}_t}{t} \subset \frac{\tilde{G}_t}{t} \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)A_{\mu}.$$

L'ensemble  $K'_t \cap G_t$  est la zone couple du processus. Notons que comme la littérature existante n'a pas fait jouer de rle particulier  $\sigma(x)$ , les thormes de forme asymptotique considrent plutôt la quantit  $K_t \cap H_t$ , avec

$$K_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \xi_t^0(x) = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(x)\}.$$

Notre rsultat implique galement le thorme de forme asymptotique pour  $K_t \cap H_t$ , car  $K'_t \cap G_t \subset K_t \cap H_t \subset H_t$ .

Remarquons que le thorme de forme asymptotique peut se reformuler sous la forme "quenched" suivante : pour  $\nu$  presque tout environnement, on sait que sur l'vnement "le processus de contact survit", sa croissance est presque sûrement gouvernée par (4) pour tout  $t$  suffisamment grand. Dans le mme ordre d'ides, on peut retrouver pour  $\nu$  presque tout environnement le rsultat de convergence en loi suivant :



**Thorme 2.4** (Thorme de convergence complte). *Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , le processus de contact dans l'environnement  $\Lambda$  admet une mesure invariante maximale  $m_\lambda$  qui est caractrise par*

$$\forall A \subset \mathbb{Z}^d, |A| < +\infty \quad m_\lambda(\omega \supset A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^{\mathbb{Z}^d} \supset A).$$

Alors, pour toute partie finie  $A$  de  $\mathbb{Z}^d$  et pour  $\nu$  presque tout  $\lambda$ , on a

$$\mathbb{P}_{\lambda,t}^A \implies \mathbb{P}_\lambda(\tau^A < +\infty)\delta_\emptyset + \mathbb{P}_\lambda(\tau^A = \infty)m_\lambda,$$

o  $\mathbb{P}_{\lambda,t}^A$  est la loi de  $\xi_t^A$  sous  $\mathbb{P}_\lambda$  et  $\implies$  represente la convergence en loi.

La preuve de ce thorme ne demandant pas d'ides nouvelles, on se contentera d'en donner l'ingrdient principal à la fin de la section 6.

Pour montrer le thorme de forme asymptotique, on aura besoin de quelques contrôles exponentiels. Dans toute la suite, on note

$$B_r^x = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y - x\|_\infty \leq r\},$$

et on note plus simplement  $B_r$  au lieu de  $B_r^0$ .

**Proposition 2.5.** *Il existe des constantes strictement positives  $A, B, M, c, \rho$  telles que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , pour tout  $y \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $t \geq 0$*

$$(5) \quad \mathbb{P}_\lambda(\tau^0 = +\infty) \geq \rho,$$

$$(6) \quad \mathbb{P}_\lambda(\xi_t^0 \notin B_{Mt}) \leq A \exp(-Bt),$$

$$(7) \quad \mathbb{P}_\lambda(t < \tau^0 < +\infty) \leq A \exp(-Bt),$$

$$(8) \quad \mathbb{P}_\lambda\left(t^0(y) \geq \frac{\|y\|}{c} + t, \tau^0 = +\infty\right) \leq A \exp(-Bt),$$

$$(9) \quad \mathbb{P}_\lambda(0 \notin K'_t, \tau^0 = +\infty) \leq A \exp(-Bt).$$

On dispose dj des estimates de la proposition 2.5 en environnement dterministe homogène  $\lambda$ , pour  $\lambda > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ . Le rsultat pour les grands  $\lambda$  est d Durrett et Griffeath [15]. L'extension tout le rgime surcritique est rendue possible grce au travail de Bezuidenhout et Grimmett [4]. Pour les dtails de la preuve de l'ingalit (7), qui en est le point essentiel, voir par exemple l'article de revue de Durrett [16] ou la monographie de Liggett [29].

Nous avons choisi de mettre l'accent sur la preuve du thorme de forme asymptotique partir des propriets du temps d'atteinte essentiel  $\sigma$ . Nous admettons dans les parties 3, 4 et 5 les contrles uniformes de la proposition 2.5 : ils seront tablis par des arguments de redmarrage dans la section 6, qui est totalement indpendante du reste de l'article. Un appendice est consacré la preuve d'un thorme ergodique sous-additif adapt nos besoins.

### 3. PROPRIETS DES OPérateURS $\tilde{\theta}_x$

**3.1. Construction squentielle de  $\sigma(x)$ .** La premire tape consiste construire  $\sigma(x)$  en explorant les instants successifs où  $x$  est atteint depuis 0, jusqu'à trouver un point dont la descendance est infinie : c'est ce qu'on appelle couramment dans la littérature un argument de redmarrage. Le temps d'atteinte essentiel  $\sigma(x)$  n'est pas un temps d'arrt, mais on peut en donner une construction qui permet d'accder à  $\sigma(x)$  par le biais d'une suite de vrais temps d'arrt.

On pose  $u_0 = v_0 = 0$  et on dfnit par rcurrence deux suites croissantes de temps d'arrt  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  avec  $u_0 = v_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq u_2 \dots$  de la façon suivante :

- Supposons avoir construit  $v_k$ . On pose  $u_{k+1} = \inf\{t \geq v_k : x \in \xi_t^0\}$ .  
Si  $v_k < +\infty$ , alors  $u_{k+1}$  représente le premier instant après  $v_k$  où le point  $x$  est à nouveau occupé ; sinon  $u_{k+1} = +\infty$ .
- Supposons avoir construit  $u_k$ , avec  $k \geq 1$ . On pose  $v_k = u_k + \tau^x \circ \theta_{u_k}$ .  
Si  $u_k < +\infty$ , le temps  $\tau^x \circ \theta_{u_k}$  représente la durée de vie du processus de contact démarré en  $x$  à l'instant  $u_k$  ; sinon  $v_k = +\infty$ .

On pose alors  $K = \min\{n \geq 0 : v_n = +\infty \text{ ou } u_{n+1} = +\infty\}$ .

Cette quantité représente le nombre d'étapes avant que l'on arrête le procédé : on s'arrête soit parce qu'on trouve un  $v_n$  infini, ce qui correspond à trouver un instant  $u_n$  où le point  $x$  est à la fois occupé et départ d'une descendance infinie, soit parce qu'on trouve un  $u_{n+1}$  infini, ce qui correspond au fait qu'après  $v_n$ , le point  $x$  n'est plus jamais occupé.

Montrons que sous  $\mathbb{P}_\lambda$ , la loi de  $K$  est sous-géométrique :

**Lemme 3.1.**  $\forall \lambda \in \Lambda \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}_\lambda(K > n) \leq (1 - \rho)^n$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $\rho$  est la constante apparaissant dans (5). Soit  $\lambda \in \Lambda$  et  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant la propriété de Markov forte au temps  $u_{n+1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(K > n + 1) &= \mathbb{P}_\lambda(u_{n+2} < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}_\lambda(u_{n+1} < +\infty, v_{n+1} < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}_\lambda(u_{n+1} < +\infty, \tau^x \circ \theta_{u_{n+1}} < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}_\lambda(u_{n+1} < +\infty) \mathbb{P}_\lambda(\tau^x < +\infty) \\ &\leq \mathbb{P}_\lambda(u_{n+1} < +\infty) (1 - \rho), \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Nous allons maintenant établir le lien entre le temps d'atteinte essentiel  $\sigma(x)$  et le nombre  $K$  d'étapes nécessaires au succès du procédé de redmarrage.

**Lemme 3.2.** *Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , sous  $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$  on a l'identité  $\sigma(x) = u_K$ .*

*Démonstration.* Fixons  $\lambda \in \Lambda$ . Le lemme 3.1 assure que  $K$  est  $\mathbb{P}_\lambda$  presque sûrement fini. Plaçons-nous dans le cas où le processus de contact issu de 0 survit, c'est-à-dire sur  $\{\tau = +\infty\}$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$  : en appliquant la propriété de Markov forte au temps d'arrêt  $v_k$ , on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty, v_k < +\infty, u_{k+1} = +\infty | \mathcal{F}_{v_k}) \\ &= \mathbb{1}_{\{v_k < +\infty\}} \mathbb{P}_\lambda(\tau^* = +\infty, t^*(x) = +\infty) \circ \xi_{v_k}^0. \end{aligned}$$

Maintenant, soit  $A$  une partie finie non vide de  $\mathbb{Z}^d$  : avec l'hypothèse (8), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(\tau^A = +\infty, t^A(x) = +\infty) &\leq \sum_{y \in A} \mathbb{P}_\lambda(\tau^y = +\infty, t^y(x) = +\infty) \\ &\leq \sum_{y \in A} \mathbb{P}_{y, \lambda}(\tau = +\infty, t(x) = +\infty) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $\mathbb{P}_\lambda(\tau^0 = +\infty, v_k < +\infty, u_{k+1} = +\infty) = 0$ , ce qui implique que sous  $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$ ,

$$(10) \quad (K = k) \iff (u_k < +\infty \text{ et } v_k = +\infty),$$

autrement dit le procédé de redmarrage s'arrête parce qu'on a trouvé un instant  $u_K$  où la descendance de  $x$  est infinie. Il est alors facile de voir que, par construction,  $\sigma(x) = u_K$ . □

La construction que nous avons présentée ici est très semblable à celle de Durrett et Griffeath [15]. La différence essentielle est que dans leur article, il s'agit de trouver un point proche de  $x$  qui a une descendance infinie, alors qu'ici il faut toucher exactement  $x$ . Ainsi, dès lors que l'on sait que le processus partant de  $x$  redmarre, on pourra décrire précisément la loi après redmarrage et ainsi mettre en place des opérateurs laissant  $\overline{\mathbb{P}}$  invariante.

**3.2. Premières propriétés.** Commençons par la preuve de la sous-additivité :

*Démonstration du lemme 2.1.* Pour les besoins de la preuve, introduisons la quantité

$$\sigma(x, y) = \inf\{t \geq 0 : y \in \xi_t^x \text{ et } \tau^y \circ \theta_t = +\infty\} = \sigma(y - x) \circ T_x.$$

On a évidemment  $\sigma(x) = \sigma(0, x)$ . Si  $\sigma(x) = +\infty$  ou si  $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x = +\infty$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, notons  $t_0 = \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ . Nous allons vérifier qu'à l'instant  $\sigma(x) + t_0$ , le point  $x + y$  est occupé et que sa descendance est infinie, ce qui entraînera, par définition de  $\sigma(x + y)$ , que  $\sigma(x + y) \leq \sigma(x) + t_0$ . On a

$$\begin{aligned} t_0 &= \sigma(y) \circ T_x \circ \theta_{\sigma(x)} = \sigma(x, x + y) \circ \theta_{\sigma(x)} \\ &= \inf\{t \geq 0 : x + y \in \xi_t^x \circ \theta_{\sigma(x)} \text{ et } \tau^{x+y} \circ \theta_{\sigma(x)+t} = +\infty\}. \end{aligned}$$

La définition de  $t_0$  assure que  $\tau^{x+y} \circ \theta_{\sigma(x)+t_0} = +\infty$ . Par ailleurs, d'après la propriété de semi-groupe (2), on a  $\xi_{\sigma(x)+t_0}^0 = \xi_{t_0}^{\sigma(x)} \circ \theta_{\sigma(x)}$ . Mais par définition de  $\sigma(x)$ , on a  $x \in \xi_{\sigma(x)}^0$ , et donc  $\xi_{\sigma(x)+t_0}^0 \supset \xi_{t_0}^{\sigma(x)} \circ \theta_{\sigma(x)} \supset \{x + y\}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Lemme 3.3.** Soit  $A$  dans la tribu engendrée par  $\sigma(x)$  et  $B \in \mathcal{F}$ . Alors

$$\overline{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B)) = \overline{\mathbb{P}}_\lambda(A) \overline{\mathbb{P}}_{x,\lambda}(B).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\overline{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B) \cap \{K = k\}) = \overline{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap \{K = k\}) \overline{\mathbb{P}}_{x,\lambda}(B).$$

Comme  $A$  est dans la tribu engendrée par  $\sigma(x)$ , il existe un borélien  $A'$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $A = \{\sigma(x) \in A'\}$ . Le temps d'attente essentiel  $\sigma(x)$  n'est pas un temps d'arrêt, mais on peut utiliser les temps d'arrêt de la construction séquentielle.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\lambda(\{\tau^0 = +\infty\} \cap A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B) \cap \{K = k\}) \\ (11) \quad &= \mathbb{P}_\lambda(\tau^0 = +\infty, \sigma(x) \in A', T_x \circ \theta_{\sigma(x)} \in B, u_k < +\infty, v_k = +\infty) \\ (12) \quad &= \mathbb{P}_\lambda(u_k < +\infty, u_k \in A', \tau^x \circ \theta_{u_k} = +\infty, T_x \circ \theta_{u_k} \in B) \\ (13) \quad &= \mathbb{P}_\lambda(u_k \in A', u_k < +\infty) \mathbb{P}_\lambda(\tau^x = +\infty, T_x \in B) \\ (14) \quad &= \mathbb{P}_\lambda(u_k \in A', u_k < +\infty) \overline{\mathbb{P}}_{x,\lambda}(\{\tau^0 = +\infty\} \cap B). \end{aligned}$$

Pour (11), on utilise l'équivalence (10). Pour l'égalité (12), on remarque que pour tout temps d'arrêt  $T$ ,

$$(15) \quad \{T < +\infty, x \in \xi_T^0, \tau^0 \circ T_x \circ \theta_T = +\infty\} \subset \{\tau^0 = +\infty\}.$$

L'égalité (13) résulte de la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt  $u_k$ , tandis que (14) découle de la propriété de translation spatiale (3). En divisant l'identité par  $\mathbb{P}_\lambda(\tau^0 = +\infty)$ , on obtient une identité de la forme

$$\overline{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(B) \cap \{K = k\}) = \psi(\lambda, k, A) \overline{\mathbb{P}}_{x,\lambda}(B),$$

et on identifie la valeur de  $\psi(\lambda, k, A)$  en prenant  $B = \Omega$ .  $\square$

**Corollaire 3.4.** Soient  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{Z}^d$  et  $\lambda \in \Lambda$ .

- La translation  $\tilde{\theta}_x$  laisse  $\bar{\mathbb{P}}$  invariante.
- Sous  $\bar{\mathbb{P}}_\lambda$ ,  $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$  est indépendant de  $\sigma(x)$ . De plus, la loi de  $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$  sous  $\bar{\mathbb{P}}_\lambda$  est la mme que la loi de  $\sigma(y)$  sous  $\bar{\mathbb{P}}_{x,\lambda}$ .
- Si  $x \neq 0$ , alors les variables  $(\sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j)_{j \geq 0}$  sont indépendantes sous  $\bar{\mathbb{P}}_\lambda$ .

*Démonstration.* Pour montrer le premier point, il suffit d'appliquer le lemme précédent avec  $A = \Omega$ , puis d'intégrer en  $\lambda$  en utilisant la stationnarité de  $\nu$ .

Pour le second point, on considère  $A', B'$  deux borliens de  $\mathbb{R}$  et on applique le lemme 3.3 avec  $A = \{\sigma(x) \in A'\}$  et  $B = \{\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x \in B'\}$ .

Soit enfin  $n \geq 1$  et  $A_0, A_1, \dots, A_n$  des borliens de  $\mathbb{R}$ . On a :

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbb{P}}_\lambda(\sigma(x) \in A_0, \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x \in A_1, \dots, \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^n \in A_n) \\ &= \bar{\mathbb{P}}_\lambda(\sigma(x) \in A_0, (\sigma(x), \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x, \dots, \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^{n-1}) \circ \tilde{\theta}_x \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) \\ &= \bar{\mathbb{P}}_\lambda(\sigma(x) \in A_0) \bar{\mathbb{P}}_{x,\lambda}(\sigma(x) \in A_1, \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x \in A_2, \dots, \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^{n-1} \in A_n), \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du lemme 3.3. Par récurrence, on obtient

$$\bar{\mathbb{P}}_\lambda \left( \bigcap_{0 \leq j \leq n} \{\sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j \in A_j\} \right) = \prod_{0 \leq j \leq n} \bar{\mathbb{P}}_{jx,\lambda}(\sigma(x) \in A_j),$$

ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

**3.3. Ergodicité des opérateurs  $\tilde{\theta}_x$ .** Pour montrer le théorème 2.2, il est naturel de chercher à estimer, pour des événements  $A$  et  $B$ , comment évolue avec  $m$  la dépendance entre les événements  $A$  et  $\tilde{\theta}_x^{-m}(B)$ . Si  $m \geq 1$ , l'opérateur  $\tilde{\theta}_x^m$  réalise globalement une translation spatiale de vecteur  $mx$  et une translation temporelle de vecteur  $S_m(x)$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_x^m &= T_{mx} \circ \theta_{S_m(x)}, \\ \text{avec } S_m(x) &= \sum_{j=0}^{m-1} \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x^j. \end{aligned}$$

On commence par établir un lemme dans l'esprit du lemme 3.3 :

**Lemme 3.5.** Soit  $T > 0$ , soit  $A \in \mathcal{F}_T$  et soit  $B \in \mathcal{F}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $\lambda \in \lambda$ , pour tout  $m \geq 1$ ,

$$\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap \{T \leq S_m(x)\} \cap (\tilde{\theta}_x^m)^{-1}(B)) = \bar{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap \{T \leq S_m(x)\}) \bar{\mathbb{P}}_{mx,\lambda}(B).$$

*Démonstration.* Posons  $\bar{K} = (K, K \circ \tilde{\theta}, \dots, K \circ \tilde{\theta}^{m-1})$ . Il suffit de montrer que pour tout  $k \in (\mathbb{N}^*)^m$ , on a

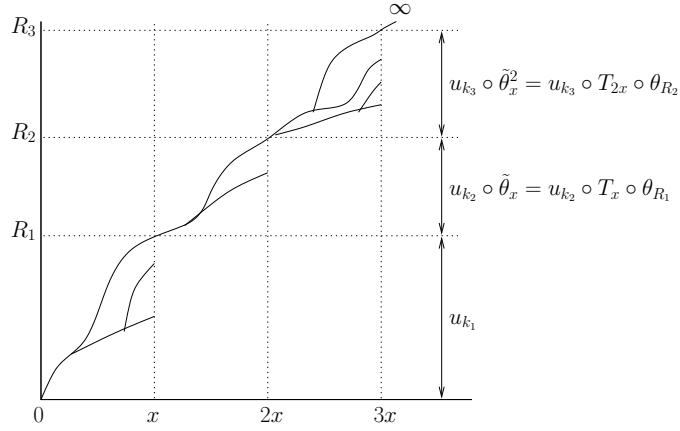
$$\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A, T \leq S_m(x), \tilde{\theta}_x^{-m}(B), \bar{K} = k) = \bar{\mathbb{P}}_\lambda(A, T \leq S_m(x), \bar{K} = k) \bar{\mathbb{P}}_{mx,\lambda}(B).$$

Soit  $k \in (\mathbb{N}^*)^m$ . On pose  $R_0 = 0$  et, pour  $l \leq m-2$ ,  $R_{l+1} = R_l + u_{k_l} \circ \theta_{R_l}$ . Grâce à la remarque (15), on a l'égalité entre les deux événements suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^0 = +\infty \\ \bar{K} = k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u_{k_1} < +\infty \\ u_{k_2} \circ T_x \circ \theta_{R_1} < +\infty, \dots, u_{k_m} \circ T_{(m-1)x} \circ \theta_{R_{m-1}} < +\infty \\ \tau \circ T_{mx} \circ \theta_{R_m} = +\infty \end{array} \right\}$$

ainsi que, sur cet événement, l'identité  $S_m(x) = R_m$ . Ainsi,

$$\bar{\mathbb{P}}_\lambda \left( \begin{array}{l} \tau^0 = +\infty, A \\ T \leq S_m(x) \\ \bar{K} = k, \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \end{array} \right) = \bar{\mathbb{P}}_\lambda \left( \begin{array}{l} A, u_{k_1} < +\infty, u_{k_2} \circ T_x \circ \theta_{R_1} < +\infty, \dots \\ u_{k_m} \circ T_{(m-1)x} \circ \theta_{R_{m-1}} < +\infty, T \leq R_m \\ \tau \circ T_{mx} \circ \theta_{R_m} = +\infty, T_{mx} \circ \theta_{R_m} \in B \end{array} \right).$$

FIG. 1 – Un exemple avec  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 2$  et  $k_3 = 4$ .

Par construction,  $R_m$  est un temps d'arrêt et l'événement

$$A \cap \{u_{k_1} < +\infty\} \cap \cdots \cap \{u_{k_m} \circ T_{(m-1)x} \circ \theta_{R_{m-1}} < +\infty\} \cap \{T \leq R_m\}$$

est dans  $\mathcal{F}_{R_m}$ . En utilisant la propriété de Markov forte et la propriété de translation spatiale (3), il vient donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda \left( \begin{array}{l} \tau^0 = +\infty, A \\ T \leq S_m(x) \\ \bar{K} = k, \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \end{array} \right) &= \mathbb{P}_\lambda \left( \begin{array}{l} A, u_{k_1} < +\infty, u_{k_2} \circ T_x \circ \theta_{u_{k_1}} < +\infty, \dots \\ u_{k_m} \circ T_{(m-1)x} \circ \theta_{R_{m-1}} < +\infty, T \leq R_m \end{array} \right) \\ &\quad \times \mathbb{P}_{m,x,\lambda}(\{\tau = +\infty\} \cap B). \end{aligned}$$

En divisant l'identité par  $\mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty)$ , on obtient une identité de la forme

$$\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A, T \leq S_m(x), \tilde{\theta}_x^{-m}(B), \bar{K} = k) = \psi(\lambda, k, m, A) \bar{\mathbb{P}}_{m,x,\lambda}(B),$$

et on identifie la valeur de  $\psi(\lambda, k, m, A)$  en prenant  $B = \Omega$ .  $\square$

Ainsi, on peut maintenant noncer une propriété de mélange.

**Lemme 3.6.** *Soit  $T > 0$  et  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Il existe une constante  $A(x, T)$  telle que pour  $A \in \mathcal{F}_T$ ,  $B \in \mathcal{F}$ ,  $\lambda \in \Lambda$  et tout  $\ell \geq 1$ , on a*

$$|\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap (\tilde{\theta}_x^\ell)^{-1}(B)) - \bar{\mathbb{P}}_\lambda(A) \bar{\mathbb{P}}_{\ell,x,\lambda}(B)| \leq A(x, T) 2^{-\ell}.$$

*Démonstration.* Soit  $\ell \geq 1$  quelconque. Avec le lemme 3.5, on a

$$\begin{aligned} &|\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap \tilde{\theta}_x^{-\ell}(B)) - \bar{\mathbb{P}}_\lambda(A) \bar{\mathbb{P}}_\lambda(\tilde{\theta}_x^{-\ell}(B))| \\ &\leq 2\bar{\mathbb{P}}_\lambda(T > S_\ell(x)) + |\bar{\mathbb{P}}_\lambda(T \leq S_\ell(x), A \cap \tilde{\theta}_x^{-\ell}(B)) - \bar{\mathbb{P}}_\lambda(T \leq S_\ell(x), A) \bar{\mathbb{P}}_\lambda(\tilde{\theta}_x^{-\ell}(B))| \\ &= 2\bar{\mathbb{P}}_\lambda(T > S_\ell(x)). \end{aligned}$$

Maintenant, fixons nous  $\alpha > 0$ .

Avec l'inégalité de Markov, on a  $\bar{\mathbb{P}}_\lambda(S_\ell(x) \leq T) \leq \exp(\alpha T) \bar{\mathbb{E}}_\lambda(\exp(-\alpha S_\ell(x)))$ . En

utilisant les deux derniers points du corollaire 3.4, il vient

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}_\lambda(\exp(-\alpha S_\ell(x))) &\leq \overline{\mathbb{E}}_\lambda \left( \exp \left( -\alpha \sum_{j=0}^{\ell-1} \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x^j \right) \right) \\ &\leq \prod_{j=0}^{\ell-1} \overline{\mathbb{E}}_\lambda \left( \exp(-\alpha \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x^j) \right) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \overline{\mathbb{E}}_{jx.\lambda}(\exp(-\alpha \sigma(x))). \end{aligned}$$

Il nous reste donc à prouver l'existence d'un  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\overline{\mathbb{E}}_\lambda(\exp(-\alpha \sigma(x))) \leq 1/2.$$

Soit  $\rho$  la constante donnée dans l'inégalité (5).

$$\overline{\mathbb{E}}_\lambda(\exp(-\alpha \sigma(x))) \leq \frac{1}{\rho} \mathbb{E}_\lambda(\exp(-\alpha \sigma(x))) \leq \frac{1}{\rho} \mathbb{E}_{\lambda_{\max}}(\exp(-\alpha \sigma(x))).$$

Comme  $\mathbb{P}_{\lambda_{\max}}(\sigma(x) = 0) = 0$ , le thorme de convergence domine permet de choisir  $\alpha$  suffisamment grand pour que  $\mathbb{E}_{\lambda_{\max}}(\exp(-\alpha \sigma(x))) \leq \rho/2$ , et conclut la preuve.  $\square$

On a maintenant le matriel ncessaire pour passer la preuve de l'ergodicité des systmes  $(\Omega, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{P}}, \tilde{\theta}_x)$ .

*Dmonstration du théorème 2.2.* On a déjà vu dans le corollaire 3.4 que, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , la probabilité  $\overline{\mathbb{P}}$  est invariante sous  $\tilde{\theta}_x$ . Pour la preuve de l'ergodicité, on a besoin de complexifier l'espace afin de pouvoir regarder conjointement un environnement alatoire et un processus de contact alatoire.

On pose ainsi  $\tilde{\Omega} = \Lambda \times \Omega$ , que l'on munit de la tribu  $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{B}(\Lambda) \otimes \mathcal{F}$  et on dfinit une mesure de probabilité  $\overline{\mathbb{Q}}$  sur  $\tilde{\mathcal{F}}$  par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{B}(\Lambda) \times \mathcal{F} \quad \overline{\mathbb{Q}}(A \times B) = \int_\Lambda \mathbb{1}_A(\lambda) \overline{\mathbb{P}}_\lambda(B) \, d\nu(\lambda).$$

Dfinissons l'opérateur  $\tilde{\Theta}_x$  sur  $\tilde{\Omega}$  en posant  $\tilde{\Theta}_x(\lambda, \omega) = (x.\lambda, \tilde{\theta}_x(\omega))$ . Il est facile de voir que l'opérateur  $\tilde{\Theta}_x$  laisse  $\overline{\mathbb{Q}}$  invariant. En effet, pour  $(A, B) \in \mathcal{B}(\Lambda) \times \mathcal{F}$ , en utilisant le lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{Q}}(\tilde{\Theta}_x(\lambda, \omega) \in A \times B) &= \overline{\mathbb{Q}}(x.\lambda \in A, \tilde{\theta}_x(\omega) \in B) \\ &= \int_\Lambda \mathbb{1}_A(x.\lambda) \overline{\mathbb{P}}_\lambda(\tilde{\theta}_x(\omega) \in B) \, d\nu(\lambda) \\ &= \int_\Lambda \mathbb{1}_A(x.\lambda) \overline{\mathbb{P}}_{x.\lambda}(B) \, d\nu(\lambda) \\ &= \int_\Lambda \mathbb{1}_A(\lambda) \overline{\mathbb{P}}_\lambda(B) \, d\nu(\lambda) = \overline{\mathbb{Q}}(A \times B). \end{aligned}$$

Remarquons que si  $g(\lambda, \omega) = f(\lambda)$ , alors  $\int g \, d\overline{\mathbb{Q}} = \int f \, d\nu$ .

De mme, si  $g(\lambda, \omega) = f(\omega)$ , alors  $\int g \, d\overline{\mathbb{Q}} = \int f \, d\overline{\mathbb{P}}$ .

Comme  $\mathcal{A} = \bigcup_{T \geq 0} \mathcal{F}_T$  est une algbre qui engendre  $\mathcal{F}$ , il suffit, pour montrer que  $\tilde{\theta}_x$  est ergodique, de montrer que pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$(16) \quad \text{la suite } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(\tilde{\theta}_x^k) \text{ converge dans } L^2(\overline{\mathbb{P}}) \text{ vers } \overline{\mathbb{P}}(A).$$

On peut voir la quantité ci-dessus comme une fonction des deux variables  $(\lambda, \omega)$ . Ainsi, il est équivalent de montrer que la suite de fonctions  $(\lambda, \omega) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(\tilde{\theta}_x^k \omega)$  converge vers  $\bar{\mathbb{P}}(A)$  dans  $L^2(\bar{\mathbb{Q}})$ .

Soit  $A \in \mathcal{A}$  et  $T > 0$  tel que  $A \in \mathcal{F}_T$ . On décompose, pour tout  $(\omega, \lambda) \in \tilde{\Omega}$ , la somme en deux termes :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(\tilde{\theta}_x^k \omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \mathbb{1}_A(\tilde{\theta}_x^k \omega) - \bar{\mathbb{P}}_{kx.\lambda}(A) \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{kx.\lambda}(A)$$

Si l'on pose  $f(\lambda) = \bar{\mathbb{P}}_\lambda(A)$ , le second terme peut s'écrire

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{kx.\lambda}(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(kx.\lambda).$$

Comme  $\nu$  est ergodique, le thorme ergodique  $L^2$  de Von Neumann dit que cette quantité converge dans  $L^2(\nu)$  vers  $\int f d\nu = \bar{\mathbb{P}}(A)$ . En la regardant comme une fonction des deux variables  $(\lambda, \omega)$ , cela dit aussi que la quantité converge dans  $L^2(\bar{\mathbb{Q}})$  vers  $\bar{\mathbb{P}}(A)$ .

Posons, pour  $k \geq 0$ ,

$$Y_k = \mathbb{1}_A(\tilde{\theta}_x^k \omega) - \bar{\mathbb{P}}_\lambda(\tilde{\theta}_x^{-k}(A)) = \mathbb{1}_A(\tilde{\theta}_x^k \omega) - \bar{\mathbb{P}}_{kx.\lambda}(A)$$

et  $L_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}$ . Il reste donc montrer que  $L_n/n$  converge vers 0 dans  $L^2(\bar{\mathbb{Q}})$ . Comme  $Y_k = Y_0 \circ \tilde{\Theta}_x^k$ , le champ  $(Y_k)_{k \geq 0}$  est stationnaire. On a donc

$$\begin{aligned} \int L_n^2 d\bar{\mathbb{Q}} &= \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \int Y_i Y_j d\bar{\mathbb{Q}} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \int Y_i^2 d\bar{\mathbb{Q}} + 2 \sum_{\ell=1}^{n-1} (n-\ell) \int Y_0 Y_\ell d\bar{\mathbb{Q}} \\ &\leq 2n \left( \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left| \int Y_0 Y_\ell d\bar{\mathbb{Q}} \right| \right) \\ &\leq 2n \left( \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_\Lambda |\bar{\mathbb{E}}_\lambda(Y_0 Y_\ell)| d\nu(\lambda) \right) \\ &\leq 2n \left( \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_\Lambda |\bar{\mathbb{E}}_\lambda(\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A \cap \tilde{\theta}_x^{-\ell}(A)) - \bar{\mathbb{P}}_\lambda(A) \bar{\mathbb{P}}_\lambda(\tilde{\theta}_x^{-\ell}(A)))| d\nu(\lambda) \right) \\ &\leq 2n \left( \sum_{\ell=0}^{+\infty} A(x, T) 2^{-\ell} \right) = 4A(x, T)n, \end{aligned}$$

grce au lemme 3.6. Ceci termine la preuve de la convergence (16) et du thorme.  $\square$

#### 4. CONTRÔLE DE L'CART $\sigma(x) - t(x)$ À ENVIRONNEMENT FIXÉ

Dans cette section, on contrle de la différence entre  $\sigma$  et  $t$ , ce dont nous aurons besoin pour dduire les rsultats de forme asymptotique pour  $t$  de ceux pour  $\sigma$ . On contrle galement certains moments de  $\sigma$ , qui seront utilisss pour appliquer un thorme ergodique sous-additif dans la section 5.

On conserve les notations de la section 3.

On va utiliser ici des arguments de redmarrage. Ce type d'argument est frquent dans l'tude des systmes de particules. Cependant, nous devons ici en employer une forme assez subtile. En effet, nous devons contrler une suite de temps de rinfektion d'un point  $x$  dfini l'avance, et chaque tape du procd de redmarrage se dcompose en deux temps.

- La dure de vie  $v_k - u_k$  de la descendance de  $x$  peut tre majore de manire indpendante de la valeur prcise de la configuration au temps  $u_k$  puisqu'on ne regarde qu'une descendance issue d'un unique point.
- En revanche, le temps  $u_{k+1} - v_k$  ncessaire la rinfektion du point  $x$  dpend videmment de la configuration au temps  $v_k$ , que l'on peine contrler prcisment. Cela explique galement que l'on obtienne malheureusement des estimates moins efficaces que dans des situations plus classiques o on peut avoir des contrles exponentiels, comme ce sera le cas dans la section 6.

La part essentielle de cette section est la preuve de la proposition suivante :

**Proposition 4.1.** – *Il existe des constantes  $A', B', \alpha$  strictement positives telles que pour tout  $z > 0$  et tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,*

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \mathbb{P}_\lambda(\sigma(x) \geq t(x) + (K - 1)(\alpha \ln(1 + \|x\|) + z)) \leq A' \exp(-B'z),$$

- o  $K$  est le nombre d'tapes ncessaires au succs du procd de redmarrage.
- Pour tout  $p \geq 1$ , il existe une constante  $C_p$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$(17) \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \overline{\mathbb{E}}_\lambda(|\sigma(x) - t(x)|^p) \leq C_p(\ln(1 + \|x\|))^p.$$

Avant de pouvoir dmontrer la proposition 4.1, on a besoin d'tablir un certain nombre de lemmes. On commence par introduire quelques notations. Posons

$$\beta = \frac{Bc}{2M + 1} \text{ et } \Psi(x) = \frac{2(d + 1)}{\beta} \ln \left( 1 + \frac{\|x\|}{c} \right),$$

o  $B, c$  et  $M$  sont les constantes qui ont t dtermines par la proposition 2.5. On dfnit, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} T_k &= \left\lceil \frac{\|x\|}{c} + (k - 1)\Psi(x) + kz \right\rceil, \\ S_k &= B_{MT_k}, \\ I_k &= [0, T_k] \cap \mathbb{N}, \end{aligned}$$

o  $\lceil x \rceil$  dsigne le plus petit entier strictement suprieur  $x$ .



Soit  $\lambda \in \Lambda$  un environnement fix. On reprend la construction sequentielle de  $\sigma(x)$  prsente dans la section 3.1. On dfnit pour  $k \geq 1$  et  $z > 0$  les vnements suivants :

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{\tau^0 = +\infty\}, \\
A_1(x, z) &= \left\{ t(x) \leq \frac{\|x\|}{c} + z \right\}, \\
A_2(x, z, k) &= \left\{ \forall i < k, \quad (v_i - u_i) \mathbb{1}_{\{v_i < +\infty\}} \leq \min\left(\frac{c}{8M}, \frac{1}{2}\right) z \right\}, \\
A_3(x, z, k) &= \{H_{T_k} \subset S_k\}, \\
A_4(x, z, k) &= \bigcap_{y \in S_k} \bigcap_{t \in I_k} \left\{ \tau^y \circ \theta_t < \frac{c}{4M}(\Psi(x) + \frac{z}{2}) \text{ ou } \tau^y \circ \theta_t = +\infty \right\}, \\
A_5(x, z, k) &= \bigcap_{y \in S_k} \bigcap_{t \in I_k} \left\{ \xi_{\frac{c}{2M}(\Psi(x) + \frac{z}{2})}^y \circ \theta_t \subset y + B_{\frac{c}{2}}(\Psi(x) + \frac{z}{2}) \right\}, \\
A_6(x, z, k) &= \bigcap_{y \in S_k} \bigcap_{t \in I_k} \left\{ (\tau^y \circ \theta_t = +\infty) \Rightarrow (y + B_{c(\Psi(x) + \frac{z}{2})} \subset \xi_{\Psi(x) + \frac{z}{2}}^y \circ \theta_t) \right\}.
\end{aligned}$$

**Lemme 4.2.** *On a l'inclusion*

$$A_0 \cap A_1(x, z) \cap \bigcap_{i=2}^6 A_i(x, z, K) \subset \bigcap_{i \geq 1} \left\{ u_i \mathbb{1}_{\{K \geq i\}} \leq t(x) + (i-1)(\Psi(x) + z) \right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $k \geq 1$ . On se place sur  $\{K = k\} \cap A_0 \cap A_1(x, z) \cap \bigcap_{i=2}^6 A_i(x, z, k)$ ,

et on procde par rcurrence sur  $1 \leq i \leq k$  :

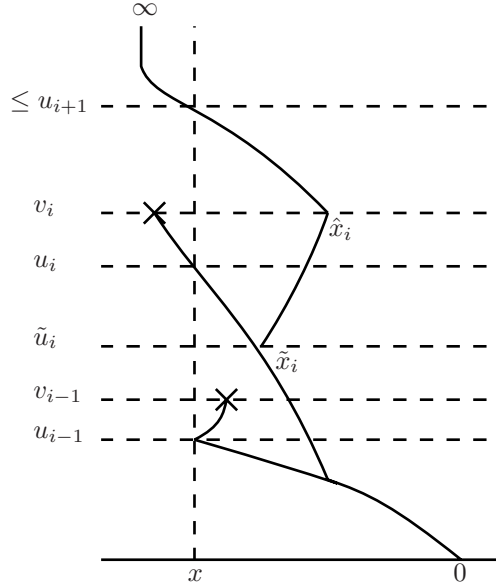
- pour  $i = 1$ , on a par dfnition  $u_1 = t(x)$ .
- Supposons que pour  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $u_i \leq t(x) + (i-1)(\Psi(x) + z)$  et montrons que  $u_{i+1} \leq t(x) + i(\Psi(x) + z)$ . Comme  $u_{i+1} = (u_{i+1} - u_i) + u_i$ , il suffit de montrer que  $u_{i+1} - u_i \leq \Psi(x) + z$ . On coupe en deux morceaux :  $u_{i+1} - u_i = (u_{i+1} - v_i) + (v_i - u_i)$ . Sur l'vnement  $A_2(x, z, k)$ ,  $v_i - u_i \leq z/2$ , donc il suffit de montrer que

$$u_{i+1} - v_i \leq \Psi(x) + z/2.$$

Sur l'vnement  $A_2(x, z, k)$ ,  $v_i - u_i \leq z/2$ , et donc, avec  $A_1(x, z)$ , on a  $\lceil v_i \rceil \leq T_k$  ; avec l'vnement  $A_3(x, z, k)$ , il vient  $H_{\lceil v_i \rceil} \subset S_k$ . Remarquons qu'à l'instant  $u_i$ , le point  $x$  est infect. Si on veut garder l'information temporelle, on utilisera les coordonnes dans l'espace-temps, et on dira que  $(x, u_i)$  est infect par  $(0, 0)$ . On dfnit alors (voir figure 2) :

$$\begin{aligned}
\gamma_i &: [0, u_i] \rightarrow \mathbb{Z}^d \text{ le chemin d'infection entre } (0, 0) \text{ et } (x, u_i), \\
\tilde{u}_i &= \sup\{t \in \mathbb{N} \cap [0, u_i] : \tau^{\gamma_i(t)} \circ \theta_t = +\infty\}, \\
\tilde{x}_i &= \gamma_i(\tilde{u}_i).
\end{aligned}$$

Remarquons que l'ensemble sur lequel on prend le sup dans la dfnition de  $\tilde{u}_i$  est non vide puisqu'il contient 0. Par construction,  $\tau^{\tilde{x}_i} \circ \theta_{\tilde{u}_i} = +\infty$  ; cela entrane qu'il existe  $\hat{x}_i \in \xi_{v_i - \tilde{u}_i}^{\tilde{u}_i} \circ \theta_{\tilde{u}_i}$  avec  $\tau^{\hat{x}_i} \circ \theta_{v_i} = +\infty$ . En effet, c'est une consequence des propriets (1) et (2). On peut galement dire qu'il y a un chemin d'infection infini partant de  $\tilde{x}_i$  et que ce chemin occupe un point  $\hat{x}_i$  au temps  $v_i$ . La ralisation de l'vnement  $A_4(x, z, k)$  assure que  $u_i - \tilde{u}_i \leq \frac{c}{4M}(\Psi(x) + \frac{z}{2})$  et donc celle de  $A_5(x, z, k)$  implique que  $\|\tilde{x}_i - x\| \leq \frac{c}{2}(\Psi(x) + \frac{z}{2})$ .


 FIG. 2 – Contrôle de  $u_{i+1} - v_i$ .

De plus, en utilisant encore  $A_2(x, z, k)$ ,  $v_i - \tilde{u}_i = (v_i - u_i) + (u_i - \tilde{u}_i) \leq \frac{c}{8M}z + \frac{c}{4M}(\Psi(x) + \frac{z}{2}) \leq \frac{c}{2M}(\Psi(x) + \frac{z}{2})$ . Grâce  $A_5(x, z, k)$ , on a alors

$$\|\hat{x}_i - x\| \leq \frac{c}{2}(\Psi(x) + \frac{z}{2}).$$

Ainsi,  $\|\hat{x}_i - \tilde{x}_i\| \leq \|\hat{x}_i - x\| + \|\tilde{x}_i - x\| \leq c(\Psi(x) + \frac{z}{2})$ . Finalement, la réalisation de  $A_6(x, z, k)$  assure que

$$u_{i+i} - v_i \leq \Psi(x) + \frac{z}{2},$$

ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 4.3.** *Il existe des constantes  $A', B'$  strictement positives telles que pour tout  $k \geq 1$ , pour tout  $z > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $i \in \{2, \dots, 6\}$ ,*

$$\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A_i(x, z, k)^c) \leq A'k^{d+1} \exp(-B'z).$$

*Démonstration.* Remarquons le choix que nous avons fait pour  $\Psi$  nous permet de choisir une constante  $L$  telle que

$$\forall k \geq 1 \quad \forall z \geq 0 \quad |I_k \times S_k| \leq Lk^{d+1}(1+z)^{d+1} \exp(\beta\Psi(x))$$

- Notons  $\alpha = \min(\frac{c}{8M}, \frac{1}{2})$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(A_2(x, z, k)^c) &= \mathbb{P}_\lambda(\exists i < k, (v_i - u_i)\mathbb{1}_{\{v_i < +\infty\}} > \alpha z) \\ &\leq \sum_{i < k} \mathbb{P}_\lambda(v_i < +\infty, v_i - u_i > \alpha z). \end{aligned}$$

Comme  $u_i$  est un temps d'arrêt, on peut appliquer la propri t de Markov forte :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(v_i < +\infty, v_i - u_i > \alpha z) &= \mathbb{P}_\lambda(u_i < +\infty, \alpha z < \tau^x \circ \theta_{u_i} < +\infty) \\ &= \mathbb{P}_\lambda(u_i < +\infty) \mathbb{P}_\lambda(\alpha z < \tau^x < +\infty) \\ &\leq A \exp(-B\alpha z), \end{aligned}$$

d'apr s l'estime (7). Finalement, on a pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}_\lambda(A_2(x, z, k)^c) \leq kA \exp(-B\alpha z).$$

- D'apr s l'estime (6), pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}_\lambda(A_3(x, z, k)^c) \leq A \exp(-BT_k) \leq A \exp(-Bz).$$

- En utilisant la propri t de Markov, et l'estime (7), on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\lambda(A_4(x, z, k)^c) \\ &= \mathbb{P}_\lambda\left(\exists y \in S_k, \exists t \in I_k, \frac{c}{4M} \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right) < \tau^y \circ \theta_t < +\infty\right) \\ &\leq \sum_{y \in B_{MT_k}} \sum_{t \in I_k} \mathbb{P}_\lambda\left(\frac{c}{4M} \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right) < \tau^y \circ \theta_t < +\infty\right) \\ &\leq |I_k \times S_k| A \exp\left(-B \left(\frac{c}{4M} \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right)\right)\right) \\ &\leq ALk^{d+1} (1+z)^{d+1} \exp(\beta\Psi(x)) \exp\left(-B \left(\frac{c}{4M} \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right)\right)\right) \\ &\leq A'k^{d+1} \exp(-B'z). \end{aligned}$$

- En utilisant la propri t de Markov, et l'estime (6), on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\lambda(A_5(x, z, k)^c) \\ &= \mathbb{P}_\lambda\left(\exists y \in S_k, \exists t \in I_k, \xi_{\frac{c}{2M}(\Psi(x) + \frac{z}{2})}^y \circ \theta_t \not\leq y + B_{\frac{c}{2}(\Psi(x) + \frac{z}{2})}\right) \\ &\leq \sum_{y \in B_{MT_k}} \sum_{t \in I_k} \mathbb{P}_\lambda\left(\xi_{\frac{c}{2M}(\Psi(x) + \frac{z}{2})}^y \circ \theta_t \not\leq y + B_{\frac{c}{2}(\Psi(x) + \frac{z}{2})}\right) \\ &\leq |I_k \times S_k| A \exp\left(-B \left(\frac{c}{2M} \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right)\right)\right) \\ &\leq ALk^{d+1} (1+z)^{d+1} \exp(\beta\Psi(x)) \exp\left(-B \left(\frac{c}{2M} \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right)\right)\right) \\ &\leq A'k^{d+1} \exp(-B'z). \end{aligned}$$

- En utilisant la propri t de Markov, et l'estime (8), on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\lambda(A_6(x, z, k)^c) \\ &= \mathbb{P}_\lambda\left(\exists y \in S_k, \exists t \in I_k, \tau^y \circ \theta_t = +\infty \Rightarrow y + B_{c(\Psi(x) + \frac{z}{2})} \not\leq \xi_{\Psi(x) + \frac{z}{2}}^y \circ \theta_t\right) \\ &\leq \sum_{y \in B_{MT_k}} \sum_{t \in I_k} \mathbb{P}_\lambda\left(\tau^y \circ \theta_t = +\infty, \exists u \in y + B_{c(\Psi(x) + \frac{z}{2})}, t^y(u) \circ \theta_t > \Psi(x) + \frac{z}{2}\right) \\ &\leq |I_k \times S_k| A \exp\left(-Bc \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right)\right) \\ &\leq ALk^{d+1} (1+z)^{d+1} \exp(\beta\Psi(x)) \exp\left(-Bc \left(\Psi(x) + \frac{z}{2}\right)\right) \\ &\leq A'k^{d+1} \exp(-B'z), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Lemme 4.4.** *Il existe des constantes  $A, B$  strictement positives telles que pour tout  $z > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,*

$$\bar{\mathbb{P}}_\lambda \left( A_0 \cap A_1(x, z) \cap \bigcap_{i=2}^6 A_i(x, z, K) \right) \geq 1 - A \exp(-Bz).$$

*Démonstration.* Il est clair que  $\bar{\mathbb{P}}_\lambda(A_0^c) = 0$ .

Ensuite, avec l'estime (8),  $\bar{\mathbb{P}}(A_1(x, z)^c) \leq A \exp(-Bz)$ .

Soit enfin  $i \in \{2, \dots, 6\}$ . En utilisant l'ingalit de Cauchy-Schwarz et le lemme 4.3, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(A_i(x, z, K)^c) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}_\lambda(\{K = k\} \cap A_i(x, z, k)^c), \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\mathbb{P}_\lambda(K = k)} \sqrt{k^{d+1} A' \exp(-B'z)}. \end{aligned}$$

Le contrle gomtrique de la queue de  $K$  donne au lemme 3.1 permet alors de conclure.  $\square$

Nous pouvons maintenant passer la preuve de proposition 4.1.

*Dmonstration de la proposition 4.1.* Pour le premier point, il suffit de collecter les rsultats des lemmes 4.2 et 4.4.

Passons la preuve du second point. Posons  $V_x = \frac{\sigma(x) - t(x)}{K-1} - \alpha \ln(1 + \|x\|)$ . D'apr le point prcdent, on peut trouver une variable alatoire  $W$  avec des moments exponentiels telle que  $W$  domine stochastiquement la loi de  $V_x$  sous  $\mathbb{P}_\lambda$  pour tout  $x$  et pour tout  $\lambda$ . De mme, d'apr le lemme 3.1,  $K$  est stochastiquement domin par une variable alatoire  $K'$  gomtrique de paramtre  $p$ .

Posons  $v(x) = \sigma(x) - t(x) = (K-1)(\alpha \ln(1 + \|x\|) + V_x)$ . Soit  $p \geq 1$ . D'apr l'ingalit de Minkowski,

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbb{E}}_\lambda v(x)^p)^{1/p} &\leq \alpha \ln(1 + \|x\|) (\bar{\mathbb{E}}_\lambda (K-1)^p)^{1/p} + (\bar{\mathbb{E}}_\lambda [(K-1)^p V_x^p])^{1/p} \\ &\leq \alpha \ln(1 + \|x\|) (\bar{\mathbb{E}}_\lambda (K-1)^p)^{1/p} + (\bar{\mathbb{E}}_\lambda (K-1)^{2p} \bar{\mathbb{E}}_\lambda V_x^{2p})^{1/(2p)} \\ &\leq \alpha \ln(1 + \|x\|) (\mathbb{E}_\lambda (K'-1)^p)^{1/p} + (\mathbb{E} (K'-1)^{2p} \mathbb{E} W^{2p})^{1/(2p)}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

La proposition 4.1 permet dans un premier temps de dmontrer que la loi du temps d'atteinte essentiel  $\sigma(x)$  est stochastiquement domine par la loi de la somme de  $\|x\|_1$  variables alatoires indpendantes dont on contrle les moments. Pour  $\lambda \in \Lambda$  et pour toute variable alatoire  $X$  dfinie sur  $\Omega$ , on note  $\mathcal{L}_\lambda(X)$  la loi de  $X$  sous  $\bar{\mathbb{P}}_\lambda$ . On note  $\preceq$  la relation de domination stochastique sur les lois à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . On peut ainsi dmontrer le rsultat suivant :

**Lemme 4.5.** *Il existe une loi  $\gamma$  sur  $\mathbb{R}_+$  et une constantes  $B > 0$  telles que*

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp(B\sqrt{x}) d\gamma(x) < +\infty \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \mathcal{L}_\lambda(\sigma(x)) \preceq \gamma^{*\|x\|_1}.$$

*Démonstration.* On note  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $x \in \{\pm e_i; 1 \leq i \leq d\}$ ,  $\lambda \in \Lambda$  et  $z > 0$ . En utilisant la proposition 4.1 et l'ingalit (5), on a

$$\overline{\mathbb{P}}_\lambda(\sigma(x) - t(x) \geq \sqrt{z}(\alpha \ln 2 + \sqrt{z})) \leq \frac{1}{\rho} (\mathbb{P}_\lambda(K - 1 \geq \sqrt{z}) + A' \exp(-B'\sqrt{z})).$$

En utilisant la queue sous-gomtrique de  $K$  (lemme 3.1) et l'estime (8), on voit qu'il existe une loi  $\gamma$  vrifiant les conditions voulues telle que

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \forall x \in \{\pm e_i; 1 \leq i \leq d\} \quad \mathcal{L}_\lambda(\sigma(x)) \preceq \gamma.$$

On sait, avec le corollaire 3.4 que  $\sigma(x)$  et  $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$  sont indpendantes sous  $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$ , et que la loi de  $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$  sous  $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$  concide avec  $\mathcal{L}_{x,\lambda}(\sigma(y))$ . Ainsi

$$\mathcal{L}_\lambda(\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x) = \mathcal{L}_\lambda(\sigma(x)) * \mathcal{L}_{x,\lambda}(\sigma(y)).$$

Cependant  $\sigma(x+y) \leq \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ , donc  $\mathcal{L}_\lambda(\sigma(x+y)) \preceq \mathcal{L}_\lambda(\sigma(x)) * \mathcal{L}_{x,\lambda}(\sigma(y))$ . La proposition demande vient alors par rcurrence sur  $\|x\|_1$ .  $\square$

On peut finalement donner les conditions d'intgrabilit pour  $\sigma$  évoques dans l'introduction de cette section.

**Proposition 4.6.** *Il existe des constantes  $A, B, C$  strictement positives, et, pour tout  $p \geq 1$ , des constantes  $C_p$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$  et tout  $\lambda \in \Lambda$ , on ait*

$$(18) \quad \overline{\mathbb{E}}_\lambda \sigma(x)^p \leq C_p(1 + \|x\|)^p,$$

$$(19) \quad \forall t \geq 0 \quad (\|x\| \leq t) \implies \left( \overline{\mathbb{P}}_\lambda(\sigma(x) > Ct) \leq A \exp(-Bt^{1/5}) \right).$$

*Démonstration.* Pour dmontrer (18), on remarque que (5) et (8) montrent que  $t(x) - \frac{\|x\|}{c}$  est stochastiquement domin sous  $\overline{\mathbb{P}}_\lambda$  par une variable alatoire avec des moments exponentiels indpendante de  $x$  et  $\lambda$ . Cela permet de contrler la norme de  $t(x)$  dans  $L^p(\overline{\mathbb{P}}_\lambda)$ , puis, avec l'ingalit de Minkowski et la proposition 4.1, celle de  $\sigma(x)$ .

Passons maintenant la preuve de (19). Posons  $n = \|x\|_1$ , et considrons des variables alatoires indpendantes  $X_1, \dots, X_n$  de loi  $\gamma$ . D'aprs le lemme 4.5, on a

$$\overline{\mathbb{P}}_\lambda(\sigma(x) > t) \leq \mathbb{P}(S_n > t),$$

avec  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . On va employer un argument de troncature qui nous a t suggr par Sana Louhichi. Notons  $S'_n = X'_1 + \dots + X'_n$ , avec  $X'_k = \inf(X_k, M)$ , o  $M$  est une constante qui sera dtermine ultrieurement. Soit  $\alpha > 0$ . L'ingalit de Markov donne facilement

$$\mathbb{P}(S_n \neq S'_n) \leq n \exp(-BM^\alpha) \mathbb{E} \exp(BX_1^\alpha).$$

Grce l'ingalit de Hoeffding, on a

$$\mathbb{P}(S_n^* - n\mathbb{E}X_1^* > t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{nM^2}\right),$$

d'o  $\mathbb{P}(S_n - n\mathbb{E}X_1^* > t) \leq \exp(-\frac{2t^2}{nM^2}) + n \exp(-BM^\alpha) \mathbb{E} \exp(BX_1^\alpha)$ . En prenant  $M = (\frac{t^2}{n})^{1/(2+\alpha)}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n - n\mathbb{E}X_1^* > t) &\leq \exp(-2M^\alpha) + n \exp(-BM^\alpha) \mathbb{E} \exp(BX_1^\alpha) \\ &\leq \exp(-2t^{\alpha/(2+\alpha)}) + t \exp(-Bt^{\alpha/(2+\alpha)}) \mathbb{E} \exp(BX_1^\alpha), \end{aligned}$$

d'o  $\mathbb{P}(S_n > t(1 + \mathbb{E}X_1)) \leq A \exp(-Bt^{\alpha/(2+\alpha)})$ . Ceci donne le rsultat voulu en prenant  $\alpha = \frac{1}{2}$ .  $\square$

## 5. THÉORÈMES DE FORME ASYMPTOTIQUE

On peut maintenant passer la preuve du thorme 2.3.

On commence par prouver l'existence de limites pour les quantits  $\frac{\sigma(nx)}{n}$ . Contrairement ce qui se passait dans la preuve de Durrett et Griffeath [15], on a une vraie sous-additivit donnée par le lemme 2.1 et un système ergodique fourni par le théorème 2.2, ce qui va nous permettre d'utiliser un thorme ergodique sous-additif dans l'esprit de Kingman plutt que la machinerie d'un thorme ergodique presque sous-additif.

Un bon candidat pour tre la limite est la quantit

$$\mu(x) = \inf_{n \geq 1} \frac{\overline{\mathbb{E}}(\sigma(nx))}{n}.$$

La proposition 4.6 donne une majoration linéaire pour  $\overline{\mathbb{E}}\sigma(nx)$ , ce qui assure que  $\mu(x) \in [0, +\infty)$ .

**Thorme 5.1.** *Pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\overline{\mathbb{P}}$  presque srement :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(nx)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overline{\mathbb{E}}\sigma(nx)}{n} = \mu(x).$$

*Cette convergence a de plus lieu dans tous les  $L^p(\overline{\mathbb{P}})$ ,  $p \geq 1$ .*

En posant, pour tous  $n, p \geq 1$ ,  $X_{n,n+p} = \sigma(px) \circ \tilde{\theta}_{nx}$ , il serait naturel de souhaiter appliquer le thorme ergodique sous-additif de Liggett. Cependant, on se rend compte que les hypothses de stationnarit ne sont pas toutes satisfaites : s'il est vrai que les processus  $(X_{m+1,m+k+1})_{k \geq 1}$  et  $(X_{m,m+k})_{k \geq 1}$  ont mme loi sous  $\overline{\mathbb{P}}$ , en revanche le processus  $(X_{n,n+1})_{n \geq 0}$  n'est pas stationnaire. De maniere heuristique, on peut penser que c'est d au fait que  $\tilde{\theta}_{nx}$  n'est pas une itre de  $\tilde{\theta}_x$ . Nous allons lui substituer le théorème suivant :

**Thorme 5.2.** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilis,  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  une famille de transformations laissant  $\mathbb{P}$  invariante, et  $(f_n)_{n \geq 1}$  une famille de fonctions positives ou nulles sur  $\Omega$  telle que*

$$(20) \quad \forall n, p \geq 1 \quad f_{n+p} \leq f_n + f_p \circ \theta_n.$$

*On suppose de plus que  $f_1$  est intgrable. On pose  $\mu = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \mathbb{E}f_n$ .*

*Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}f_n}{n} = \mu$  et  $(f_n/n)_{n \geq 1}$  converge presque srement vers une fonction  $f$ , invariante par chacun des  $\theta_n$ .*

*Si, de plus, l'un des systèmes  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta_n)$  est ergodique, alors la limite  $f$  est  $\mathbb{P}$  presque srement égale à  $\mu$ .*

*Démonstration.* La preuve de ce résultat, proche de celle de Liggett, est donnée en annexe.  $\square$

*Dmonstration du théorème 5.1.* Pour la convergence presque sûre, il suffit d'appliquer le théorème 5.2 en posant  $f_n = \sigma(nx)$  et  $\theta_n = \tilde{\theta}_{nx}$ . En effet, le théorème 2.2 garantit les propriétés d'ergodicité nécessaires, et la proposition 4.6 assure l'intgrabilit de  $\sigma(x)$  sous  $\overline{\mathbb{P}}$ .

Pour montrer qu'une suite converge dans  $L^p$ , il suffit de montrer qu'elle converge presque srement et qu'elle est borne dans  $L^q$  pour un  $q > p$ . Or, la proposition 4.6 montre que  $f_n/n$  est borne dans tous les  $L^q$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Nous allons maintenant prouver le thorme 2.3 de forme asymptotique. On commence par montrer le thorme de forme asymptotique pour le temps d'atteinte essentiel  $\sigma$ , en procédant selon les tapes dcrites ci-dessous, comme dans le schma classique :

- On prolonge  $\mu$  en une norme sur  $\mathbb{R}^d$  dans le lemme 5.3.
- On montre que la convergence directionnelle du thorme 5.1 est en fait une convergence uniforme en la direction dans le lemme 5.5.
- Ce lemme implique facilement le rsultat de forme asymptotique du lemme 5.6.

Pour montrer les rsultats du mme type pour le temps d'atteinte classique  $t$  (lemme 5.8), il suffit alors de contrôler la diffrence entre  $t$  et  $\sigma$ , ce que nous faisons dans le lemme 5.7. Finalement, le rsultat de forme asymptotique pour la zone couple est dmontr dans le lemme 5.9, en introduisant un temps de couplage  $t'$  et en contrôlant la diffrence entre ce temps  $t'$  et le temps d'atteinte essentiel  $\sigma$ .

**Lemme 5.3.** *La fonctionnelle  $\mu$  se prolonge en une norme sur  $\mathbb{R}^d$ .*

*Démonstration.* Homognit en entiers On sait que  $\mu(x) = \lim \overline{\mathbb{E}} \frac{\sigma(nx)}{n}$ , et que  $\sigma(nx)$  et  $\sigma(-nx)$  ont mme loi sous  $\overline{\mathbb{P}}$ , donc  $\mu(x) = \mu(-x)$ . À l'aide de suites extraites, on prouve alors la proprié d'homognit en entiers :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \mu(kx) = |k|\mu(x).$$

Sous-additivit On a  $\sigma(nx + ny) \leq \sigma(nx) + \sigma(ny) \circ \tilde{\theta}_{nx}$ . Comme  $\tilde{\theta}_{nx}$  laisse invariant  $\overline{\mathbb{P}}$ , il vient  $\overline{\mathbb{E}}\sigma(nx + ny) \leq \overline{\mathbb{E}}\sigma(nx) + \overline{\mathbb{E}}\sigma(ny)$ , ce qui entrane que

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \forall y \in \mathbb{Z}^d \quad \mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y).$$

Extension  $\mathbb{R}^d$  Par dfinition de  $\mu(x)$ , on a  $\mu(x) \leq \overline{\mathbb{E}}\sigma(x)$ . La proposition 4.6 donne l'existence de  $L > 0$  tel que  $\overline{\mathbb{E}}\sigma(x) \leq L\|x\|$  pour tout  $x$ . Finalement,  $\mu(x) \leq L\|x\|$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{Z}^d$ , ce qui entraîne  $|\mu(x) - \mu(y)| \leq L\|x - y\|$  : on peut alors prolonger  $\mu$  sur  $\mathbb{Q}^d$  par homognit, puis sur  $\mathbb{R}^d$  par uniforme continuit.

Positivit Soit  $M$  la constante donne dans la proposition 2.5. L'estime (6) nous donne

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}} \left( \sigma(nx) < \frac{n\|x\|}{2M} \right) &\leq \overline{\mathbb{P}} \left( t(nx) < \frac{n\|x\|}{2M} \right) \leq \overline{\mathbb{P}} \left( \xi_{\frac{n\|x\|}{M}} \notin B_{\frac{n\|x\|}{2}} \right) \\ &\leq \int \frac{\mathbb{P}_\lambda \left( \tau = +\infty, \xi_{\frac{n\|x\|}{2M}}^0 \notin B_{\frac{n\|x\|}{2}} \right)}{\mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty)} d\nu(\lambda) \\ &\leq \frac{A}{\rho} \exp \left( -B \frac{n\|x\|}{2M} \right). \end{aligned}$$

On en dduit, avec le lemme de Borel-Cantelli, que  $\mu(x) \geq \frac{1}{2M}\|x\|$ . L'ingalit, tablie pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ , se prolonge par homognit et continuit à  $\mathbb{R}^d$  tout entier, ce qui entraîne que  $\mu$  est une norme.  $\square$

Rappelons que  $C$  est donne dans la proposition 4.6.

**Lemme 5.4.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\overline{\mathbb{P}}$  presque srement, il existe  $R$  tel que*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d \quad (\|x\| \geq R \text{ et } \|x - y\| \leq \varepsilon\|x\|) \implies (|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C\varepsilon\|x\|).$$

*Démonstration.* Pour  $m \in \mathbb{N}$  et  $\varepsilon > 0$ , on dfinit l'vnement

$$A_m(\varepsilon) = \{\exists x, y \in \mathbb{Z}^d : \|x\| = m, \|x - y\| \leq \varepsilon m \text{ et } |\sigma(x) - \sigma(y)| > C\varepsilon m\}.$$

En remarquant que

$$A_m(\varepsilon) \subset \bigcup_{\substack{(1-\varepsilon)m \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)m \\ \|x-y\| \leq \varepsilon m}} \{\sigma(y-x) \circ \tilde{\theta}_{y-x} > C\varepsilon m\},$$

il vient, à l'aide de (19),

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}_\lambda(A_m(\varepsilon)) &\leq \sum_{\substack{(1-\varepsilon)m \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)m \\ \|z\| \leq \varepsilon m}} \overline{\mathbb{P}}_{x,\lambda}(\sigma(z) > C\varepsilon m) \\ &\leq (1 + 2(1 + \varepsilon m))^{2d} A \exp(-B\varepsilon m^{1/5}). \end{aligned}$$

On intgre alors cette inegalit par rapport l'environnement  $\lambda$ , et le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure.  $\square$

On peut maintenant montrer que la convergence du thorme 5.1 est uniforme par rapport à la direction.

**Lemme 5.5.**  $\overline{\mathbb{P}}$  presque sûrement,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|\sigma(x) - \mu(x)|}{\|x\|} = 0$ .

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'vnement " $|\sigma(x) - \mu(x)| > \varepsilon \|x\|$ " pour un ensemble infini de valeurs de  $x$ " a une probabilit strictement positive. Plaons nous sur cet vnement. Alors, il existe une suite alatoire  $(y_n)_{n \geq 0}$  de sommets de  $\mathbb{Z}^d$  telle que  $\|y_n\|_1 \rightarrow +\infty$  et, pour tout  $n$ ,  $|\sigma(y_n) - \mu(y_n)| \geq \varepsilon \|y_n\|_1$ . Quitte prendre une sous-suite, on peut supposer

$$\frac{y_n}{\|y_n\|_1} \rightarrow z.$$

Approchons  $z$  par un point rationnel : considrant  $\varepsilon_1 > 0$  (qui sera choisi plus tard), on peut prendre  $z' \in \mathbb{Z}^d$  tel que

$$\left\| \frac{z'}{\|z'\|_1} - z \right\|_1 \leq \varepsilon_1.$$

On peut trouver, pour chaque  $y_n$ , un point entier sur la ligne  $\mathbb{R}z'$  qui est suffisamment prs de  $y_n$  : soit  $h_n$  la partie entiere de  $\frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1}$ . On a

$$\begin{aligned} \|y_n - h_n \cdot z'\|_1 &\leq \left\| y_n - \frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1} z' \right\|_1 + \left| \frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1} - h_n \right| \|z'\|_1 \\ &\leq \|y_n\|_1 \left\| \frac{y_n}{\|y_n\|_1} - \frac{z'}{\|z'\|_1} \right\|_1 + \|z'\|_1 \end{aligned}$$

Prenons  $N > 0$  suffisamment grand pour que  $(n \geq N) \Rightarrow (\| \frac{y_n}{\|y_n\|_1} - z \|_1 \leq \varepsilon_1)$ . Grce au choix que l'on a fait pour  $z'$ , on a

$$(n \geq N) \Rightarrow \left( \left\| \frac{y_n}{\|y_n\|_1} - \frac{z'}{\|z'\|_1} \right\|_1 \leq 2\varepsilon_1 \right),$$

et par consequent,  $\|y_n - h_n \cdot z'\|_1 \leq 2\varepsilon_1 \|y_n\|_1 + \|z'\|_1$ . Ainsi, quitte à augmenter  $N$  si besoin, on a pour tout  $n \geq N$ ,  $\|y_n - h_n \cdot z'\|_1 \leq 3\varepsilon_1 \|y_n\|_1$ . Cependant, si on prend  $N$  suffisamment grand, le lemme 5.4 implique alors que l'on a

$$\forall n \geq N \quad |\sigma(y_n) - \sigma(h_n \cdot z')| \leq 3C\varepsilon_1 \|y_n\|_1.$$



Finalement, pour tout  $n$  assez grand, on a

$$\begin{aligned} |\sigma(y_n) - \mu(y_n)| &\leq |\sigma(y_n) - \sigma(h_n \cdot z')| + |\sigma(h_n \cdot z') - \mu(h_n \cdot z')| + |\mu(h_n \cdot z') - \mu(y_n)| \\ &\leq 3C\varepsilon_1 \|y_n\|_1 + h_n \left| \frac{\sigma(h_n \cdot z')}{h_n} - \mu(z') \right| + \mu_1 \|h_n \cdot z' - y_n\|_1 \\ &\leq 3C\varepsilon_1 \|y_n\|_1 + (1 + \varepsilon_1) \frac{\|y_n\|_1}{\|z'\|_1} \left| \frac{\sigma(h_n \cdot z')}{h_n} - \mu(z') \right| + 3\varepsilon_1 \mu_1 \|y_n\|_1. \end{aligned}$$

Mais la convergence presque sre dans la direction donne par  $z'$  assure que pour  $n$  assez grand

$$\left| \frac{\sigma(h_n \cdot z')}{h_n} - \mu(z') \right| \leq \varepsilon_1.$$

Si l'on prend  $\varepsilon_1$  assez petit, on obtient que pour  $n$  assez grand  $|\sigma(y_n) - \mu(y_n)| < \varepsilon \|y_n\|_1$ , ce qui amne la contradiction.  $\square$

On dduit alors de la convergence uniforme du lemme 5.5 le thorme de forme asymptotique pour la version grossie  $\tilde{G}_t$  de  $G_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \sigma(x) \leq t\}$ ; on rappelle que  $A_\mu$  dsigne la boule unit pour la norme  $\mu$ .

**Lemme 5.6.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec probabilit 1 sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , pour tout  $t$  suffisamment grand,  $(1 - \varepsilon)A_\mu \subset \frac{\tilde{G}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)A_\mu$ .*

*Démonstration.* Montrons par l'absurde que pour  $t$  assez grand, on a bien  $\frac{\tilde{G}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)A_\mu$ . Supposons qu'il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$ , avec  $t_n \rightarrow +\infty$  et  $\frac{\tilde{G}_{t_n}}{t_n} \not\subset (1 + \varepsilon)A_\mu$ : il existe donc  $x_n$  avec  $\sigma(x_n) \leq t_n$  et  $\mu(x_n)/t_n > 1 + \varepsilon$ . Ainsi  $\mu(x_n)/\sigma(x_n) > 1 + \varepsilon$ , ce qui contredit la convergence uniforme puisque, comme  $\mu(x_n) > t_n(1 + \varepsilon)$ , la suite  $(\|x_n\|)_{n \geq 1}$  tend vers l'infini.

Passons l'inclusion inverse. En raisonnant toujours par l'absurde, on a une suite  $(t_n)_{n \geq 1}$ , avec  $t_n \rightarrow +\infty$  et  $(1 - \varepsilon)A_\mu \not\subset \frac{\tilde{G}_{t_n}}{t_n}$ , ce qui veut dire qu'on peut trouver  $x_n$  avec  $\mu(x_n) \leq (1 - \varepsilon)t_n$ , mais  $\sigma(x_n) > t_n$ . La suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  ne peut pas tre borne (c'est dire ne prendre qu'un nombre fini de valeur) car  $t_n$  tend vers l'infini. Ainsi on a  $\frac{\mu(x_n)}{\sigma(x_n)} < 1 - \varepsilon$ , ce qui contredit encore une fois la convergence uniforme.  $\square$

On montre ensuite que la difference entre  $\sigma(x)$  et  $t(x)$  est asymptotiquement ngligeable devant  $\|x\|$ :

**Lemme 5.7.**  $\bar{\mathbb{P}}$  presque srement,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|\sigma(x) - t(x)|}{\|x\|} = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $p > d$ : d'aprs l'equation (17), on a

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{\mathbb{E} |\sigma(x) - t(x)|^p}{(1 + \|x\|)^p} \leq C_p \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \frac{(\ln(1 + \|x\|))^p}{(1 + \|x\|)^p} < +\infty.$$

Ainsi, presque srement,  $(\frac{|\sigma(x) - t(x)|}{(1 + \|x\|)})_{x \in \mathbb{Z}^d}$  est dans  $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$ , donc en particulier tend vers zro; ceci termine la preuve du lemme.  $\square$

On rcupre alors immdiatement la convergence uniforme pour le temps d'atteinte  $t$  et, par un argument identique celui du lemme 5.6, le thorme de forme asymptotique pour la version grossie  $\tilde{H}_t$  de  $H_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : t(x) \leq t\}$ .

**Lemme 5.8.**  $\bar{\mathbb{P}}$  presque sûrement,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{t(x) - \mu(x)}{\|x\|} = 0$ ,

et pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec probabilité 1 sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , pour tout  $t$  suffisamment grand,

$$(1 - \varepsilon)A_\mu \subset \frac{\tilde{H}_t}{t} \subset (1 + \varepsilon)A_\mu.$$

Il nous reste maintenant à prouver le thorme de forme asymptotique pour la zone couple  $\tilde{K}'_t$ , version grossie de  $K'_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : \forall s \geq t \quad \xi_s^0(x) = \xi_s^{\mathbb{Z}^d}(x)\}$  :

**Lemme 5.9.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , avec probabilité 1 sous  $\bar{\mathbb{P}}$ , pour tout  $t$  suffisamment grand,  $(1 - \varepsilon)A_\mu \subset \frac{\tilde{K}'_t \cap \tilde{G}_t}{t}$ .

*Démonstration.* Comme  $t \mapsto K'_t \cap G_t$  est croissant, on se retrouve dans le mme schma de preuve que dans le lemme 5.6. On pose, pour  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$t'(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in K'_t \cap G_t\}.$$

Il suffit alors de montrer que  $\bar{\mathbb{P}}$  presque sûrement,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{|t'(x) - \sigma(x)|}{\|x\|} = 0$ . Par dñition,  $t'(x) \geq \sigma(x)$  ; ainsi il suffit de montrer qu'il existe deux constantes  $A', B' > 0$  telles que

$$(21) \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d \quad \forall s \geq 0 \quad \bar{\mathbb{P}}(t'(x) - \sigma(x) \geq s) \leq A'e^{-B's}.$$

- On commence par remarquer que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $K_{\sigma(x)+t} \supset x + K_t \circ \tilde{\theta}_x$ .

En effet, soit  $z \in x + K_t \circ \tilde{\theta}_x$ . Considrons d'abord le cas o  $z \notin \xi_{\sigma(x)+t}^{\mathbb{Z}^d}$ . Comme, par additivit (1),  $\xi_{\sigma(x)+t}^0 \subset \xi_{\sigma(x)+t}^{\mathbb{Z}^d}$ , alors  $z \notin \xi_{\sigma(x)+t}^0$ , et donc  $z \in K_{\sigma(x)+t}$ .

Considrons maintenant le cas o  $z \in \xi_{\sigma(x)+t}^{\mathbb{Z}^d}$ . Comme  $\xi_{\sigma(x)}^{\mathbb{Z}^d} \subset \xi_0^{\mathbb{Z}^d} \circ \tilde{\theta}_x$  par additivit, on a  $y = z - x \in \xi_t^{\mathbb{Z}^d} \circ \tilde{\theta}_x$ . Mais comme  $y \in K_t \circ \tilde{\theta}_x$ , il s'ensuit, par dñition de  $K_t$ , que  $\xi_t^0(y) \circ \tilde{\theta}_x = \xi_t^{\mathbb{Z}^d}(y) \circ \tilde{\theta}_x = 1$ . Comme  $x \in \xi_{\sigma(x)}^0$  et que  $y \in \xi_t^0 \circ \tilde{\theta}_x$ , on a  $z = x + y \in \xi_{\sigma(x)+t}^0$ , d'o  $z \in K_{\sigma(x)+t}$ .

- Soit  $s \geq 0$  fix. Le point pcedent assure que

$$\left( \bigcap_{t \geq s} K_{\sigma(x)+t} \right) \supset \left( x + \bigcap_{t \geq s} (K_t \circ \tilde{\theta}_x) \right), \text{ et donc } K'_{\sigma(x)+s} \supset \left( x + (K'_s \circ \tilde{\theta}_x) \right).$$

Comme, toujours par additivit,  $G_{\sigma(x)+s} \supset (x + (G_s \circ \tilde{\theta}_x))$ , on a encore

$$\left( K'_{\sigma(x)+s} \cap G_{\sigma(x)+s} \right) \supset \left( x + (K'_s \cap G_s) \circ \tilde{\theta}_x \right).$$

Ainsi, en utilisant l'invariance de  $\bar{\mathbb{P}}$  sous l'action de  $\tilde{\theta}_x$  du corollaire 3.4, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(t'(x) > \sigma(x) + s) &= \bar{\mathbb{P}}(x \notin K'_{\sigma(x)+s} \cap G_{\sigma(x)+s}) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}}\left(x \notin (x + (K'_s \cap G_s) \circ \tilde{\theta}_x)\right) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_s) + \bar{\mathbb{P}}(0 \notin G_s) = \bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_s), \end{aligned}$$

puisque sous  $\bar{\mathbb{P}}$ ,  $\sigma(0) = 0$ . L'estime (9) permet alors de conclure.  $\square$

6. CONTRÔLE UNIFORME DE LA CROISSANCE EN ENVIRONNEMENT  $\lambda$ 

Le but de cette section est d'établir les contrôles uniformes en  $\lambda$  annoncés dans la proposition 2.5. Afin de contrôler la croissance du processus de contact, on a besoin de quelques lemmes sur le modèle de Richardson.

**6.1. Quelques lemmes sur le modèle de Richardson.** On appelle modèle de Richardson de paramètre  $\lambda$  le processus de Markov  $(\eta_t)_{t \geq 0}$ , homogène en temps, qui prend ses valeurs dans  $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^d)$  et dont l'évolution est définie comme suit : les sites  $z$  vides deviennent infectés au taux  $\lambda \sum_{\|z-z'\|_1=1} \eta_t(z')$ , ces différentes évolutions tant indépendantes les unes des autres. Grâce à la construction graphique, on peut, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , coupler le processus de contact en environnement  $\lambda$  avec le modèle de Richardson de paramètre  $\lambda_{\max}$ , de telle manière que l'espace occupé au temps  $t$  par le processus de contact est toujours contenu dans l'espace occupé par le modèle de Richardson.

Le premier lemme, dont nous omettons la preuve, découle aisément de la représentation du modèle de Richardson en terme de percolation de premier passage et d'un comptage de chemins.

**Lemme 6.1.** *Pour tout  $\lambda > 0$ , il existe des constantes  $A, B > 0$  telles que*

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(\eta_1 \not\subset B_t) \leq A \exp(-Bt).$$

**Lemme 6.2.** *Pour tout  $\lambda > 0$ , il existe des constantes  $A, B, M > 0$  telles que*

$$\forall s \geq 0 \quad \mathbb{P}(\exists t \geq 0 : \eta_t \not\subset B_{Mt+s}) \leq A \exp(-Bs).$$

*Démonstration.* La représentation en termes de percolation de premier passage du modèle de Richardson assure l'existence de  $A', B', M' > 0$  tels que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(22) \quad \mathbb{P}(\eta_t \not\subset B_{M't}) \leq A' \exp(-B't).$$

Pour plus de détails, on pourra se reporter à Kesten [23].

On commence par contrôler le processus aux temps entiers grâce à cette estime :

$$(23) \quad \begin{aligned} \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N} : \eta_k \not\subset B_{M'k+s/2}) &\leq \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N} : \eta_{k+s/(2M')} \not\subset B_{M'k+s/2}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\eta_{k+s/(2M')} \not\subset B_{M'k+s/2}) \\ &\leq \frac{A'}{1 - \exp(-B')} \exp\left(-\frac{B's}{2M'}\right). \end{aligned}$$

Contrôlons maintenant les fluctuations entre les temps entiers. Soit  $M > M'$  :

$$(24) \quad \begin{aligned} &\mathbb{P}(\{\exists t \geq 0 : \eta_t \not\subset B_{Mt+s}\} \cap \{\forall k \in \mathbb{N}, \eta_k \subset B_{M'k+s/2}\}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\exists t \in [k, k+1] : \eta_k \subset B_{M'k+s/2} \text{ et } \eta_t \not\subset B_{Mt+s}). \end{aligned}$$

Mais alors, si  $C' > 0$  est une constante telle que  $|B_t| \leq C'(1+t)^d$  et si  $A, B$  sont les constantes du lemme 6.1,

$$\begin{aligned}
(25) \quad & \mathbb{P}(\exists t \in [k, k+1] : \eta_k \subset B_{M'k+s/2} \text{ et } \eta_t \not\subset B_{Mt+s}) \\
& \leq \mathbb{P}(\eta_k \subset B_{M'k+s/2} \text{ et } \eta_{k+1} \not\subset B_{Mk+s}) \\
& \leq |B_{M'k+s/2}| \mathbb{P}(\eta_1 \not\subset B_{k(M-M')+s/2}) \\
& \leq C'(1+M'k+s/2)^d A \exp(-B(k(M-M')+s/2)) \\
& \leq AC'(1+s/2)^d \exp(-Bs/2)(1+M'k)^d \exp(-B(k(M-M'))).
\end{aligned}$$

L'ingalit (25) vient de la propriit de Markov et de l'additivit du processus de contact. Comme la srie de terme gnral  $(1+M'k)^d \exp(-B(k(M-M')))$  converge, le rsultat souhait dcoule de (23) et (24).  $\square$

**6.2. Un procd de redmarrage.** On va utiliser ici un argument dit de redmarrage, que l'on peut rsumer comme suit. On couple le systme que l'on souhaite tudier (systme fort) avec un systme qu'il domine stochastiquement (systme faible) et que l'on connat mieux. On peut alors transporter un certain nombre de propriits du systme connu à celui que l'on doit tudier : on laisse voluer les deux systmes conjointement, et chaque fois que le plus faible meurt et que le plus fort est vivant, on fait repartir une copie du plus faible toujours couple au plus fort. Ainsi, soit les deux processus meurent avant qu'on ait pu trouver un processus faible capable de survivre, et dans ce cas le contrle des grands temps de survie du faible peut se transposer sur le fort, soit le plus fort survit indfiniment et on finit par le coupler avec un faible qui survit. Dans ce cas, un contrle du temps ncessaire pour un redmarrage russi permet de transférer des propriits du processus faible lorsqu'il survit sur le processus fort.

Cette technique est dj ancienne; on la trouve par exemple chez Durrett [13], section 12, sous une forme trs pure. Elle est aussi utilise par Durrett et Griffeath [15], afin de transporter des contrles connus pour le processus de contact en dimension 1 au processus de contact en dimension suprieure. Nous allons ici l'utiliser en couplant le processus de contact en environnement inhomogène  $\lambda \in \Lambda$  avec le processus de contact avec taux de naissance constant  $\lambda_{\min}$ . C'est ici que l'hypothse  $\lambda_{\min} > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$  est importante.

Pour ce faire, nous allons coupler des familles de processus ponctuels de Poisson. Fixons  $\lambda \in \Lambda$ . On peut construire une mesure de probabilit  $\tilde{\mathbb{P}}_\lambda$  sur  $\Omega \times \Omega$  sous laquelle

- La premire coordonne  $\omega$  est une famille  $((\omega_e)_{e \in \mathbb{E}^d}, (\omega_z)_{z \in \mathbb{Z}^d})$  de processus ponctuels de Poisson, d'intensits respectives  $(\lambda_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$  pour les processus indexs par les arêtes, et d'intensit 1 pour les processus indexs par les sites.
- La seconde coordonne  $\eta$  est une famille  $((\eta_e)_{e \in \mathbb{E}^d}, (\eta_z)_{z \in \mathbb{Z}^d})$  de processus ponctuels de Poisson, d'intensit  $\lambda_{\min}$  pour les processus indexs par les arêtes, et d'intensit 1 pour les processus indexs par les sites.
- Les processus ponctuels de Poisson indexs par les sites (les temps de mort) concident : pour tout  $z \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\eta_z = \omega_z$ .
- Les processus ponctuels de Poisson indexs par les arêtes (les temps des ventuelles naissances) sont coupls : pour tout  $e \in \mathbb{E}^d$ , le support de  $\eta_e$  est inclus dans celui de  $\omega_e$ .

On note  $\xi^A = \xi^A(\omega, \eta)$  le processus de contact dans l'environnement  $\lambda$  partant de  $A$  construit avec la famille de processus de Poisson  $\omega$ , et  $\zeta^B = \zeta^B(\omega, \eta)$  le processus

de contact dans l'environnement  $\lambda_{\min}$  partant de  $B$  construit avec la famille de processus de Poisson  $\eta$ . Si  $B \subset A$ , alors on a  $\tilde{\mathbb{P}}_\lambda$  presque srement  $\zeta_t^B \subset \xi_t^A$  pour tout  $t \geq 0$ . On peut remarquer que le processus  $(\xi^A, \zeta^B)$  est un processus de Markov.

On introduit les temps de vie de ces deux processus :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \xi_t^0 = \emptyset\} \text{ et, pour } x \in \mathbb{Z}^d, \tau'_x = \inf\{t \geq 0 : \zeta_t^x = \emptyset\}.$$

Remarquons que la loi de  $\tau'_x$  sous  $\tilde{\mathbb{P}}_\lambda$  est la loi de  $\tau_x$  sous  $\mathbb{P}_{\lambda_{\min}}$  ; cette loi est en fait indépendante du point de dpart du processus, puisque le modle à taux de naissance constant est invariant par translation.

On dfinit par rcurrence une suite de temps d'arrêt  $(u_k)_{k \geq 0}$  et une suite de points  $(z_k)_{k \geq 0}$  en posant  $u_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ , et pour tout  $k \geq 0$  :

- si  $u_k < +\infty$  et  $\xi_{u_k} \neq \emptyset$ , alors  $u_{k+1} = \tau'_{z_k} \circ \theta_{u_k}$  ;
- si  $u_k = +\infty$  ou si  $\xi_{u_k} = \emptyset$ , alors  $u_{k+1} = +\infty$  ;
- si  $u_{k+1} < +\infty$  et  $\xi_{u_{k+1}} \neq \emptyset$ , alors  $z_{k+1}$  est le plus petit point pour l'ordre lexicographique de  $\xi_{u_{k+1}}$  ;
- si  $u_{k+1} = +\infty$  ou si  $\xi_{u_{k+1}} = \emptyset$ , alors  $z_{k+1} = +\infty$ .

Autrement dit, tant que  $u_k < +\infty$  et  $\xi_{u_k} \neq \emptyset$ , on prend dans  $\xi_{u_k}$  le point  $z_k$  le plus petit pour l'ordre lexicographique, et on regarde le temps de vie du processus le plus faible, c'est dire  $\zeta$ , partant de  $z_k$  au temps  $u_k$ . Le procd de redmarrage peut s'arrêter pour deux raisons : soit on trouve un  $k$  tel que  $u_k < +\infty$  et  $\xi_{u_k} = \emptyset$ , ce qui implique que le processus le plus fort (qui contient le faible) meurt exactement au temps  $u_k$  ; soit on trouve un  $k$  tel que  $u_k < +\infty$ ,  $\xi_{u_k} \neq \emptyset$ , et  $u_{k+1} = +\infty$ . Dans ce deuxime cas, on a trouv un point  $z_k$  tel que le processus faible, partant de  $z_k$  au temps  $u_k$ , survit, ce qui implique en particulier que le fort, qui le contient, survit. On pose alors

$$K = \inf\{n \geq 0 : u_{n+1} = +\infty\}.$$

Le nom de la variable  $K$  est choisi par analogie avec la section 3. Cette section tant indépendante du reste de l'article, la confusion ne devrait cependant pas tre possible. Il ressort de la discussion précédente que

$$(26) \quad (\tau = +\infty \iff \xi_{u_K}^0 \neq \emptyset) \quad \text{et si } \tau < +\infty, \text{ alors } u_K = \tau.$$

On regroupe dans le lemme suivant les estimates sur le procd de redmarrage ncessaires pour dmontrer la proposition 2.5. On rappelle que  $\rho$  est introduit dans l'equation (5).

**Lemme 6.3.** *On se place dans le cadre précédent. Alors*

- $\forall \lambda \in \Lambda \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(K > n) \leq (1 - \rho)^n$ .
- $\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{D}) \quad \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\tau = +\infty, \zeta^{z_K} \circ \theta_{u_K} \in B) = \mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty) \bar{\mathbb{P}}_{\lambda_{\min}}(\xi^0 \in B)$ .
- *Il existe  $\alpha, \beta > 0$  tel que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\tilde{\mathbb{E}}_\lambda(\exp(\alpha u_K)) < \beta$ .*

*Démonstration.* D'après la propriété de Markov forte, on a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(K \geq n + 1) &= \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_{n+1} < +\infty) \\ &= \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_n < +\infty, \xi_{u_n} \neq \emptyset, \tau'_{z_n} \circ \theta_{u_n} < +\infty) \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_n < +\infty)(1 - \rho) = \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(K \geq n)(1 - \rho). \end{aligned}$$

Ainsi,  $K$  a une queue sous-gométrique, ce qui montre le premier point. En particulier,  $K$  est presque srement fini.

En utilisant (26) et la propri t de Markov forte, on a encore

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\tau = +\infty, \zeta^{z_K} \circ \theta_{u_K} \in B) = \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\xi_{u_K} \neq \emptyset, \zeta^{z_K} \circ \theta_{u_K} \in B) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(K = k, \xi_{u_k}^0 \neq \emptyset, z_k = z, \zeta^{z_K} \circ \theta_{u_K} \in B) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_k < +\infty, \xi_{u_k}^0 \neq \emptyset, z_k = z, \tau'_{z_K} \circ \theta_{u_k} = +\infty, \zeta^{z_K} \circ \theta_{u_K} \in B) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_k < +\infty, \xi_{u_k}^0 \neq \emptyset, z_k = z) \mathbb{P}_{\lambda_{\min}}(\tau = +\infty, \xi^0 \in B) \\
&= \mathbb{P}_{\lambda_{\min}}(\tau = +\infty, \xi^0 \in B) \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_k < +\infty, \xi_{u_k}^0 \neq \emptyset).
\end{aligned}$$

En prenant pour  $B$  l'ensemble des trajectoires, on identifie :

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tau = +\infty) = \mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty) = \mathbb{P}_{\lambda_{\min}}(\tau = +\infty) \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_k < +\infty, \xi_{u_k}^0 \neq \emptyset),$$

ce qui nous donne le deuxime point

Comme  $\lambda_{\min} > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ , les rsultats de Durrett et Griffeath [15] pour les grands  $\lambda$ , tendus   tout le rgime surcritique par Bezuidenhout et Grimmett [4], assurent l'existence de  $A, B > 0$  telles que

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}_{\lambda_{\min}}(t \leq \tau < +\infty) \leq A \exp(-Bt),$$

ce qui donne l'existence de moments exponentiels pour  $\tau \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}}$ . Comme  $\mathbb{P}_{\lambda_{\min}}(\tau = +\infty) > 0$ , on peut choisir (en utilisant par exemple le thorme de convergence domine) un  $\alpha > 0$  tel que  $\mathbb{E}_{\lambda_{\min}}(\exp(\alpha\tau) \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}}) = r < 1$ .

Pour  $k \geq 0$ , on note

$$S_k = \exp\left(\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \tau'_{z_i} \circ \theta_{u_i}\right) \mathbb{1}_{\{u_k < +\infty\}}.$$

On remarque que  $S_k$  est  $\mathcal{F}_{u_k}$ -mesurable. Soit  $k \geq 0$ . On a

$$\exp(\alpha u_K) \mathbb{1}_{\{K=k\}} \leq S_k.$$

Ainsi, en appliquant la propri t de Markov forte au temps  $u_{k-1} < +\infty$ , on obtient, pour  $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_\lambda[\exp(\alpha u_K) \mathbb{1}_{\{K=k\}}] &\leq \tilde{\mathbb{E}}_\lambda(S_k) = \tilde{\mathbb{E}}_\lambda(S_{k-1}) \mathbb{E}_{\lambda_{\min}}(\exp(\alpha\tau) \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}}) \\
&\leq r \tilde{\mathbb{E}}_\lambda(S_{k-1}).
\end{aligned}$$

Comme  $r < 1$ , on en dduit que  $\tilde{\mathbb{E}}_\lambda[\exp(\alpha u_K)] \leq \frac{r}{1-r} < +\infty$ . □

**6.3. Preuve de la proposition 2.5.** Les estimes (6) et (5) dcoulent d'une simple comparaison stochastique :

*Dmonstration de (5).* Il suffit de remarquer que pour tout environnement  $\lambda \in \Lambda$  et tout  $z \in \mathbb{Z}^d$ , on a

$$\mathbb{P}_\lambda(\tau^z = +\infty) \geq \mathbb{P}_{\lambda_{\min}}(\tau^z = +\infty) = \mathbb{P}_{\lambda_{\min}}(\tau^0 = +\infty) > 0.$$

□

*Dmonstration de (6).* On utilise la domination stochastique du processus de contact en environnement  $\lambda$  par le modle de Richardson de paramtre  $\lambda_{\max}$ . Pour ce modle, la croissance au plus linire est assure par (22).  $\square$

Il nous reste donc à dmontrer (7), (8) et (9) par le procd de redmarrage.

*Dmonstration de (7).* Soit  $\alpha, \beta > 0$  donnees dans le troisieme point du lemme 6.3. Rappelons que, sur  $\{\tau < +\infty\}$ ,  $u_K = \tau$ . On a, pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , pour tout  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\lambda(t < \tau < +\infty) &= \mathbb{P}_\lambda(e^{\alpha t} < e^{\alpha \tau}, \tau < +\infty) = \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(e^{\alpha t} < e^{\alpha u_K}, \tau < +\infty) \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(e^{\alpha t} < e^{\alpha u_K}) \leq e^{-\alpha t} \tilde{\mathbb{E}}_\lambda e^{\alpha u_K} \leq \beta e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

*Dmonstration de (8).* Comme  $\lambda_{\min} > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ , les rsultats de Durrett et Griffeath [15] pour les grands  $\lambda$ , tendus à tout le rgime surcritique par Bezuidenhout et Grimmett [4], assurent l'existence de constantes  $A, B, c > 0$  telles que, pour tout  $y \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $t \geq 0$ ,

$$(27) \quad \bar{\mathbb{P}}_{\lambda_{\min}} \left( t(y) \geq \frac{\|y\|}{c} + t \right) \leq A \exp(-Bt).$$

D'autre part, le contrle par le modle de Richardson du lemme 6.2 avec  $\lambda_{\max}$  assure l'existence de  $A, B, M$  tels que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , pour tout  $s \geq 0$ ,

$$(28) \quad \mathbb{P}_\lambda(\exists t \geq 0, \xi_t^0 \not\subset B_{Mt+s}) \leq A \exp(-Bs).$$

Quitte à diminuer  $c$  ou à augmenter  $M$ , on peut en outre supposer que  $\frac{c}{M} \leq 1$ . Maintenant,

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( t(y) \geq \frac{\|y\|}{c} + t, \tau = +\infty \right) \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( u_K \geq \frac{tc}{6M} \right) + \tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( u_K \leq \frac{tc}{6M}, \xi_{u_K}^0 \not\subset B_{tc/3} \right) \\ &\quad + \tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( \tau = +\infty, u_K \leq \frac{tc}{6M}, \xi_{u_K}^0 \subset B_{tc/3}, t(y) \geq \frac{\|y\|}{c} + t \right). \end{aligned}$$

Le premier terme est bien contrôlé par l'existence de moments exponentiels pour  $u_K$  donne par le troisieme point du lemme 6.3 de redmarrage : il existe  $C, \alpha > 0$  tels que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( u_K \geq \frac{tc}{6M} \right) \leq C \exp \left( -\frac{\alpha ct}{6M} \right).$$

Le second terme est contrôlé à l'aide de (28) :

$$\tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( u_K \leq \frac{tc}{6M}, \xi_{u_K}^0 \not\subset B_{tc/3} \right) \leq \mathbb{P}_\lambda(\exists t \geq 0, \xi_t^0 \not\subset B_{Mt+\frac{tc}{6}}) \leq A \exp \left( -B \frac{tc}{6} \right).$$

Il reste à contrôler le dernier terme. On note ici

$$t'(y) = \inf \{ t \geq 0 : y \in \zeta_t^0 \}.$$

Rappelons que si  $\tau = +\infty$ , alors  $\xi_{u_K} \neq \emptyset$  et  $z_K$  est bien dfini. Comme  $t(y)$  est un temps d'entre et que  $\xi_t^0 \supset \zeta_t^0$  pour tout  $t$ , on a, sur  $\{\tau = +\infty\}$ ,

$$t(y) \leq u_K + t'(y - z_K) \circ T_{z_K} \circ \theta_{u_K}.$$

Si  $u_K \leq \frac{tc}{6M} \leq \frac{t}{6}$ , alors  $t(y) \leq \frac{t}{6} + t'(y - z_K) \circ T_{z_K} \circ \theta_{u_K}$ . Si, de plus,  $\xi_{u_K}^0 \subset B_{tc/3}$ , on a  $\|y\| \geq \|y - z_K\| - \frac{tc}{3}$ , ce qui donne, avec deuxime point du lemme 6.3,

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( \tau = +\infty, u_K \leq \frac{ct}{6M}, \xi_{u_K}^0 \subset B_{ct/3}, t(y) \geq \frac{\|y\|}{c} + t \right) \\ & \leq \tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( \tau = +\infty, t'(y - z_K) \circ T_{z_K} \circ \theta_{u_K} \geq \frac{\|y - z_K\|}{c} + \frac{t}{2} \right) \\ & \leq \mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty) \sup_{z \in \mathbb{Z}^d} \bar{\mathbb{P}}_{\lambda_{\min}} \left( t(y - z) \geq \frac{\|y - z\|}{c} + \frac{t}{2} \right) \leq A \exp(-Bt/2), \end{aligned}$$

ou la dernire galit provient de (27). Ceci termine la preuve.  $\square$

*Dmonstration de (9).* Soit  $s \geq 0$ , et notons  $n$  la partie entiere de  $s$ . Soit  $\gamma > 0$  fix, dont la valeur sera prcise ultrieurement.

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_s) = \bar{\mathbb{P}}(\exists t \geq s : 0 \notin K_t) \\ & \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \bar{\mathbb{P}}(B_{\gamma k} \not\subset K_k) + \sum_{k=n}^{+\infty} \bar{\mathbb{P}}(B_{\gamma k} \subset K_k, \exists t \in [k, k+1) \text{ tel que } 0 \notin K_t). \end{aligned}$$

Commençons par contrôler la deuxime somme. Fixons  $k \geq n$ . Supposons que  $B_{\gamma k} \subset K_k$  et considrons  $t \in [k, k+1)$  tel que  $0 \notin K_t$ . Il existe donc  $x \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $0 \in \xi_t^x \setminus \xi_t^0$ . Comme  $0 \in \xi_t^x$  et  $t \geq k$ , il existe  $y \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $y \in \xi_k^x$  et  $0 \in \xi_{t-k}^y \circ \theta_k$ . Si  $y \in B_{\gamma k} \subset K_k$ , alors  $\xi_k^0(y) = \xi_k^{\mathbb{Z}^d}(y) = 1$ , ce qui implique que  $y \in \xi_k^0$ , ce qui à son tour, vu que  $0 \in \xi_{t-k}^y \circ \theta_k$ , implique que  $0 \in \xi_t^0$ , et contredit l'hypothse  $0 \notin \xi_t^0$ . Ainsi, ncessairement,  $y \notin B_{\gamma k}$ , et donc :

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbb{P}}_\lambda(B_{\gamma k} \subset K_k, \exists t \in [k, k+1) \text{ tel que } 0 \notin K_t) \\ & \leq \frac{1}{\mathbb{P}_\lambda(\tau = +\infty)} \mathbb{P}_\lambda \left( \theta_k^{-1} \left( 0 \in \bigcup_{s \in [0,1]} \xi_s^{\mathbb{Z}^d \setminus B_{\gamma k}} \right) \right) \\ & \leq \frac{1}{\rho} \mathbb{P}_\lambda \left( 0 \in \bigcup_{s \in [0,1]} \xi_s^{\mathbb{Z}^d \setminus B_{\gamma k}} \right) \\ & \leq \frac{1}{\rho} \mathbb{P}_\lambda \left( \bigcup_{s \in [0,1]} \xi_s^0 \not\subset B_{\gamma k} \right) = \frac{1}{\rho} \mathbb{P}_\lambda(H_1^0 \not\subset B_{\gamma k}). \end{aligned}$$

Comme le modle de Richardson de paramtre  $\lambda_{\max}$  domine stochastiquement le processus de contact en environnement  $\lambda$ , on contrôle ce dernier terme à l'aide du lemme 6.1.

Pour contrôler la premiere somme, il suffit de montrer qu'il existe des constantes strictement positives  $A, B, \gamma$  telles que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , pour tout  $t \geq 0$

$$(29) \quad \mathbb{P}_\lambda(B_{\gamma t} \not\subset K_t, \tau^0 = +\infty) \leq A \exp(-Bt).$$

La constante  $\gamma$  dont nous avons report la dfinition est ainsi dtermine.

Le nombre de points contenus dans une boule tant polynomial en le rayon de la boule, il suffit de montrer qu'il existe des constantes  $A, B, c' > 0$  telles que pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$(30) \quad \|x\| \leq c't \implies \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\xi^0(t) \neq \emptyset, x \in \xi^{\mathbb{Z}^d}(t) \setminus \xi^0(t)) \leq A \exp(-Bt).$$

Pour dmontrer (30), on va s'appuyer sur le rsultat suivant, obtenu par Durrett [16] comme consequence de la construction de Bezuidenhout et Grimmett [4] : si  $\xi^0$  et  $\xi^x$



sont deux processus de contact indépendants de paramètre  $\lambda > \lambda_c(\mathbb{Z}^d)$ , partant respectivement de 0 et de  $x$ , alors il existe des constantes  $A, B, \alpha$  strictement positives telles que pour tout  $t \geq 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$(31) \quad \|x\| \leq \alpha t \implies \mathbb{P}(\xi_t^0 \cap \tilde{\xi}_t^x = \emptyset, \tilde{\xi}_t^x \neq \emptyset, \xi_t^0 \neq \emptyset) \leq A \exp(-Bt).$$

Soient  $\alpha$  et  $M$  les constantes respectivement données par les équations (31) et (6). On pose  $c' = \alpha/2$  et on choisit  $\varepsilon > 0$  tel que  $c' + 2\varepsilon M \leq \alpha$ .

Soient  $a \in B_{\alpha t/4}^0$  et  $b \in B_{\alpha t/4}^x$ . On pose

$$\alpha_{a,s} = \zeta_s^a \circ \theta_{\varepsilon t/2} \text{ et } \beta_{b,s} = \{y \in \mathbb{Z}^d : b \in \zeta_s^y \circ \theta_{t(1-\varepsilon/2)-s}\}.$$

Alors  $(\alpha_{a,s})_{0 \leq s \leq t/2(1-\varepsilon)}$  et  $(\beta_{a,s})_{0 \leq s \leq t/2(1-\varepsilon)}$  sont deux processus de contact indépendants de taux de naissance  $\lambda_{\min}$  constant, partant respectivement de  $a$  et  $b$ . Le processus  $(\beta_{a,s})_{0 \leq s \leq t/2(1-\varepsilon)}$  est un processus de contact, mais pour lequel on a retourné l'axe temporel dans la construction avec les processus de Poisson. De manière analogue, on pose

$$\hat{\xi}_s^x = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \in \xi_s^y \circ \theta_{t-s}\}.$$

La loi de  $(\hat{\xi}_s^x)_{0 \leq s \leq t/2}$  coïncide avec la loi de  $(\xi_s^x)_{0 \leq s \leq t/2}$ . On s'appuie sur les remarques suivantes :

- Si  $a \in \xi_{\varepsilon t/2}^0$ , que  $\alpha_{a,(1-\varepsilon)t/2} \cap \beta_{b,(1-\varepsilon)t/2} \neq \emptyset$  et que  $b \in \hat{\xi}_{\varepsilon t/2}^x$ , alors  $x \in \xi_t^0$ .
- Si  $x \in \xi_t^d$ , alors  $\hat{\xi}_{t/2}^x$  est non-vide.
- Si  $\xi_t^0$  est non-vide, alors  $\xi_{t/2}^0$  est non-vide.

Ainsi, en posant

$$\begin{aligned} E^0 &= \left\{ \xi_{t/2}^0 \neq \emptyset \right\} \setminus \left\{ \exists a \in B_{\alpha t/4}^0 \cap \xi_{\varepsilon t/2}^0 : \alpha_{a,(1-\varepsilon)t/2} \neq \emptyset \right\} \\ \text{et } \hat{E}^x &= \left\{ \hat{\xi}_{t/2}^x \neq \emptyset \right\} \setminus \left\{ \exists b \in B_{\alpha t/4}^x \cap \hat{\xi}_{\varepsilon t/2}^x : \beta_{b,(1-\varepsilon)t/2} \neq \emptyset \right\}, \end{aligned}$$

on obtient

$$(32) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\xi_t^0 \neq \emptyset, x \in \xi_t^d \setminus \xi_t^0) &\leq \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\xi_{t/2}^0 \neq \emptyset, \hat{\xi}_{t/2}^x \neq \emptyset, \xi_{t/2}^0 \cap \hat{\xi}_{t/2}^x = \emptyset) \\ &\leq \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(E^0) + \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\hat{E}^x) + S, \end{aligned}$$

$$\text{où } S = \sum_{\substack{a \in B_{\alpha t/4}^0 \\ b \in B_{\alpha t/4}^x}} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda \left( \alpha_{a,\frac{(1-\varepsilon)t}{2}} \neq \emptyset, \beta_{b,\frac{(1-\varepsilon)t}{2}} \neq \emptyset, \alpha_{a,\frac{(1-\varepsilon)t}{2}} \cap \beta_{b,\frac{(1-\varepsilon)t}{2}} = \emptyset \right).$$

Pour chaque couple  $(a, b)$  apparaissant dans  $S$ , on a  $\|a - b\| \leq \|a\| + \|b - x\| + \|x\| \leq \alpha t/4 + \alpha t/4 + \alpha t/2 = \alpha t$ , ce qui permet d'utiliser (31), et donne l'existence de constantes  $A, B, C' > 0$  telles que

$$S \leq C'(1 + \alpha t/4)^{2d} A \exp(-B(1 - \varepsilon)t/2).$$

En retournant nouveau le temps, on voit que  $\tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\hat{E}^x) = \tilde{\mathbb{P}}_{x,\lambda}(E^0)$ ; il suffit donc de contrôler  $\tilde{\mathbb{P}}_\lambda(E^0)$  uniformément en  $\lambda$ . Posons

$$E_1 = \left\{ \xi_{t/2}^0 \neq \emptyset \right\} \setminus \left\{ \exists a \in \mathbb{Z}^d : a \in \xi_{\varepsilon t/2}^0, \alpha_{a,(1-\varepsilon)t/2} \neq \emptyset \right\}.$$

On a  $\tilde{\mathbb{P}}_\lambda(E^0) \leq \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(E_1) + \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\xi_{\varepsilon t/2}^0 \not\subset B_{\alpha t/4}^0)$ . D'après le choix de  $\varepsilon$  et l'inégalité (6), on a

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \forall t \geq 0 \quad \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\xi_{\varepsilon t/2}^0 \not\subset B(0, \alpha t/4)) \leq A \exp(-B\varepsilon t/2).$$

À l'aide du lemme 6.3 de redmarrage, on voit que

$$\tilde{\mathbb{P}}_\lambda(u_K > \varepsilon t/2) \leq \beta \exp(-\alpha \varepsilon t/2).$$

Supposons donc que  $u_K \leq \varepsilon t/2$  et que  $\xi_{t/2}^0 \neq \emptyset$  :  $z_K$  est donc bien défini et on a  $\tau'_{z_K} \circ \theta_{u_K} = +\infty$ . Ainsi, il existe une branche d'infection infinie dans le processus couplé en environnement  $\lambda_{\min}$  partant de  $\xi_{u_K}^0$ . Cette branche contient au moins un point  $a \in \xi_{(1-\varepsilon)t/2}^0$ . Par construction  $a \in \xi_{(1-\varepsilon)t/2}^0$  et  $\alpha_{a,(1-\varepsilon)t/2} \neq \emptyset$ , ce qui achève la preuve de (29).  $\square$

**Remarque** Au cours de cette preuve, on a montré que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbb{P}}_\lambda(\xi_t^0 \neq \emptyset, \hat{\xi}_t^x \neq \emptyset, \xi_t^0 \cap \hat{\xi}_t^x = \emptyset) = 0,$$

ce qui est l'ingrédient essentiel de la preuve du théorème 2.4 de convergence complète. On pourra se reporter à l'article de Durrett [16] pour les détails de la preuve dans le cas du processus de contact classique.

#### APPENDICE : PREUVE DU THÉORÈME ERGODIQUE SOUS-ADDITIF 5.2

On va s'inspirer de la preuve de Liggett.

*Démonstration. tape 1* : Montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}f_n}{n} = \mu$ .

Remarquons que la sous-additivité, l'intégrabilité de  $f_1$  et l'invariance par  $\theta_1$  de la probabilité  $\mathbb{P}$  assurent que tous les  $(f_n)_{n \geq 1}$  sont intégrables. Maintenant, on sait que  $f_{n+p} \leq f_n + f_p \circ \theta_n$  et que  $\theta_n$  laisse  $\mathbb{P}$  invariante. Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}f_{n+p} \leq \mathbb{E}f_n + \mathbb{E}f_p.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fekete à la suite sous-additive  $(\mathbb{E}f_n)_{n \geq 0}$  pour obtenir la limite souhaitée.

*tape 2* : Montrons que  $\mathbb{E} \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n} \right) \leq \mu$ .

On fixe  $k \geq 1$ . En utilisant la sous-additivité, on a pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $0 \leq r \leq k-1$  :

$$\frac{f_{nk+r}}{nk+r} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_k \circ \theta_k^j}{k} + \frac{f_r \circ \theta_k^n}{n}.$$

Comme  $\theta_k$  laisse  $\mathbb{P}$  invariante, le théorème de Birkhoff nous donne la convergence presque sûre et dans  $L^1$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_k \circ \theta_k^j}{k} = \frac{\mathbb{E}(f_k | \mathcal{I}_k)}{k},$$

où  $\mathcal{I}_k$  est la tribu des invariants par  $\theta_k$ .

Contrôlons maintenant le terme résiduel. Comme la famille finie  $(f_r)_{0 \leq r \leq k-1}$  est intégrable et que  $\theta_k$  laisse  $\mathbb{P}$  invariant, la famille  $(\sup_{0 \leq r \leq k-1} f_r \circ \theta_k^n)_{n \geq 1}$  est équi-intégrable, ce qui assure la convergence presque sûre et dans  $L^1$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sup_{0 \leq r \leq k-1} f_r \circ \theta_k^n = 0.$$

Finalement,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f_k \circ \theta_k^j}{k} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sup_{0 \leq r \leq k-1} f_r \circ \theta_k^n,$$

et donc  $\mathbb{E} \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n} \right) \leq \frac{\mathbb{E} f_k}{k}$ . On achve la deuxime tape en prenant la borne infrieure en  $k$ .

tape 3 : Posons  $Z = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n}$ . On va montrer que  $Z$  domine stochastiquement une variable alatoire dont l'esprance est  $\mu$ .

Pour toute variable alatoire  $X$ , on note  $\mathcal{L}(X)$  sa loi sous  $\mathbb{P}$ . On note  $\mathcal{K}$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$  dont toutes les lois marginales sont stochastiquement domines par  $\mathcal{L}(f_1)$ . L'ensemble  $\mathcal{K}$  est compact pour la topologie de la convergence en loi dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ , ce dernier tant muni de la topologie produit.

On dfinit, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\Delta_k = f_{k+1} - f_k,$$

et on note  $\Delta$  le processus  $\Delta = (\Delta_k)_{k \geq 1}$ . Par sous-additivit, pour tout  $k$ ,  $\Delta_k \leq f_1 \circ \theta_k$ , qui a même loi que  $f_1$  sous  $\mathbb{P}$  : donc  $\mathcal{L}(\Delta)$  est dans  $\mathcal{K}$ .

On note  $s$  le shift :  $s((u_k)_{k \geq 0}) = (u_k)_{k \geq 1}$ . On regarde maintenant la suite de probabilités sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$  :

$$(L_n)_{n \geq 1} = \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathcal{L}(s^j \circ \Delta) \right)_{n \geq 1}.$$

Comme  $\mathcal{K}$  est convexe et invariant par  $s$ , la suite  $(L_n)_{n \geq 1}$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{K}$ . Soit  $\gamma$  un point d'accumulation de  $(L_n)_{n \geq 1}$  et  $(n_k)_{k \geq 1}$  une suite d'indices telle que  $L_{n_k} \Rightarrow \gamma$ . Par construction,  $\gamma$  est invariante par le shift  $s$ .

Maintenant, la suite des lois de la premiere coordonne  $\pi_1(x)$  sous  $(L_{n_k})_{k \geq 0}$  converge faiblement vers la loi de la premiere coordonne sous  $\gamma$ . Par dfinition de  $\mathcal{K}$ , cette famille de lois est uniformment intgrable, donc

$$\begin{aligned} \int \pi_1(x) d\gamma(x) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int \pi_1(x) dL_{n_k}(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}(\pi_1(s^j \circ \Delta)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}(f_{j+1} - f_j) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \mathbb{E}(f_{n_k}) = \mu. \end{aligned}$$

Soit  $Y = (Y_k)_{k \geq 1}$  un processus de loi  $\gamma$ . Comme  $\gamma$  est invariante par le shift  $s$ , le thorme de Birkhoff nous dit que la suite  $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k)_{n \geq 1}$  converge p.s. vers une variable alatoire relle  $Y_\infty$ , qui vrifie donc  $\mathbb{E}(Y_\infty) = \mu$ .

Il nous reste à voir que la loi de  $Y_\infty$  est stochastiquement domine par la loi de

$\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f_n$ . Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $m$ ,  $(Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + \dots + Y_m)$  est stochastiquement domin par  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ . Soit  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante borne. En utilisant la sous-additivit pour  $(*)$ , et l'invariance de

$\mathbb{P}$  sous  $\theta_j$  pour (\*\*), on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}g(Y_1, Y_1 + Y_2, \dots, Y_1 + \dots + Y_m) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}g(\pi_1(s^j \circ \Delta), \dots, \pi_1(s^j \circ \Delta) + \dots + \pi_m(s^j \circ \Delta)) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}g(f_{j+1} - f_j, f_{j+2} - f_j, \dots, f_{j+m} - f_j) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}g(f_1 \circ \theta_j, f_2 \circ \theta_j, \dots, f_m \circ \theta_j) \\
&\stackrel{(**)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbb{E}g(f_1, f_2, \dots, f_m) \\
&= \mathbb{E}g(f_1, f_2, \dots, f_m),
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de l'étape 3.

Etape 4 : Les deux étapes précédentes assurent que

$$(33) \quad \mu \leq \mathbb{E} \left( \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n} \right) \leq \mathbb{E} \left( \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n} \right) \leq \mu,$$

ce qui donne l'existence de la limite presque sûre :

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n}.$$

Passons la preuve de l'invariance. On pose  $E = \{\frac{f_p}{p} \rightarrow f\}$ . Soit  $n \geq 1$  fixé. Comme  $f_{n+p} \leq f_n + f_p \circ \theta_n$ , en divisant par  $n+p$  et en faisant tendre  $p$  vers  $+\infty$ , il vient que

$$f \leq f \circ \theta_n \quad \text{sur } E \cap \theta_n^{-1}(E).$$

Sachant que  $\mathbb{P}(E \cap \theta_n^{-1}(E)) = 1$  et que  $\theta_n$  laisse  $\mathbb{P}$  invariante, on en déduit que  $\mathbb{E}(f \circ \theta_n - f) = 0$ , et donc que  $f$  est invariante par  $\theta_n$ .

En particulier, si l'un des systèmes  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \theta_n)$  est ergodique, alors la limite  $f$  est  $\mathbb{P}$  presque sûrement gale  $\mu$  d'après l'inégalité (33).  $\square$

## REFERENCES

- [1] O. S. M. Alves, F. P. Machado, and S. Yu. Popov. The shape theorem for the frog model. *Ann. Appl. Probab.*, 12(2) :533–546, 2002.
- [2] O. S. M. Alves, F. P. Machado, S. Yu. Popov, and K. Ravishankar. The shape theorem for the frog model with random initial configuration. *Markov Process. Related Fields*, 7(4) :525–539, 2001.
- [3] Enrique D. Andjel. Survival of multidimensional contact process in random environments. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 23(1-2) :109–119, 1992.
- [4] Carol Bezuidenhout and Geoffrey Grimmett. The critical contact process dies out. *Ann. Probab.*, 18(4) :1462–1482, 1990.
- [5] Daniel Boivin. First passage percolation : the stationary case. *Probab. Theory Related Fields*, 86(4) :491–499, 1990.
- [6] Maury Bramson, Rick Durrett, and Roberto H. Schonmann. The contact process in a random environment. *Ann. Probab.*, 19(3) :960–983, 1991.
- [7] Maury Bramson and David Griffeath. On the Williams-Bjerknes tumour growth model. II. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 88(2) :339–357, 1980.

- [8] Maury Bramson and David Griffeath. On the Williams-Bjerknes tumour growth model. I. *Ann. Probab.*, 9(2) :173–185, 1981.
- [9] Francis Comets and Serguei Popov. On multidimensional branching random walks in random environment. *Ann. Probab.*, 35(1) :68–114, 2007.
- [10] Maria Deijfen. Asymptotic shape in a continuum growth model. *Adv. in Appl. Probab.*, 35(2) :303–318, 2003.
- [11] Yves Derriennic. Un théorème ergodique presque sous-additif. *Ann. Probab.*, 11(3) :669–677, 1983.
- [12] Yves Derriennic and Bachar Hachem. Sur la convergence en moyenne des suites presque sous-additives. *Math. Z.*, 198(2) :221–224, 1988.
- [13] Richard Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12(4) :999–1040, 1984.
- [14] Richard Durrett. *Lecture notes on particle systems and percolation*. The Wadsworth & Brooks/Cole Statistics/Probability Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1988.
- [15] Richard Durrett and David Griffeath. Contact processes in several dimensions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 59(4) :535–552, 1982.
- [16] Rick Durrett. The contact process, 1974–1989. In *Mathematics of random media (Blacksburg, VA, 1989)*, volume 27 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 1–18. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [17] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite Bernoulli cluster. *ESAIM Probab. Stat.*, 8 :169–199 (electronic), 2004.
- [18] J. M. Hammersley. Postulates for subadditive processes. *Ann. Probability*, 2 :652–680, 1974.
- [19] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In *Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif.*, pages 61–110. Springer-Verlag, New York, 1965.
- [20] T. E. Harris. Additive set-valued Markov processes and graphical methods. *Ann. Probability*, 6(3) :355–378, 1978.
- [21] C. Douglas Howard. Models of first-passage percolation. In *Probability on discrete structures*, volume 110 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 125–173. Springer, Berlin, 2004.
- [22] C. Douglas Howard and Charles M. Newman. Euclidean models of first-passage percolation. *Probab. Theory Related Fields*, 108(2) :153–170, 1997.
- [23] Harry Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d’été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984*, volume 1180 of *Lecture Notes in Math.*, pages 125–264. Springer, Berlin, 1986.
- [24] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probability*, 1 :883–909, 1973. With discussion by D. L. Burkholder, Daryl Daley, H. Kesten, P. Ney, Frank Spitzer and J. M. Hammersley, and a reply by the author.
- [25] J. F. C. Kingman. Subadditive processes. In *École d’été de Probabilités de Saint-Flour, V—1975*, pages 167–223. Lecture Notes in Math., Vol. 539. Springer, Berlin, 1976.
- [26] Abel Klein. Extinction of contact and percolation processes in a random environment. *Ann. Probab.*, 22(3) :1227–1251, 1994.
- [27] Thomas M. Liggett. An improved subadditive ergodic theorem. *Ann. Probab.*, 13(4) :1279–1285, 1985.
- [28] Thomas M. Liggett. The survival of one-dimensional contact processes in random environments. *Ann. Probab.*, 20(2) :696–723, 1992.
- [29] Thomas M. Liggett. *Stochastic interacting systems : contact, voter and exclusion processes*, volume 324 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [30] Charles M. Newman and Sergio B. Volchan. Persistent survival of one-dimensional contact processes in random environments. *Ann. Probab.*, 24(1) :411–421, 1996.

- [31] Daniel Richardson. Random growth in a tessellation. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 74 :515–528, 1973.
- [32] Klaus Schürger. A limit theorem for almost monotone sequences of random variables. *Stochastic Process. Appl.*, 21(2) :327–338, 1986.
- [33] Klaus Schürger. Almost subadditive extensions of Kingman’s ergodic theorem. *Ann. Probab.*, 19(4) :1575–1586, 1991.
- [34] Mohammad Q. Vahidi-Asl and John C. Wierman. A shape result for first-passage percolation on the Voronoï tessellation and Delaunay triangulation. In *Random graphs, Vol. 2 (Poznań, 1989)*, Wiley-Intersci. Publ., pages 247–262. Wiley, New York, 1992.

INSTITUT ÉLIE CARTAN NANCY (MATHÉMATIQUES), UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ NANCY 1,  
CAMPUS SCIENTIFIQUE, BP 239, 54506 VANDOEUVRE-LÈS-NANCY CEDEX FRANCE,

*E-mail address:* `Olivier.Garet@iecn.u-nancy.fr`

*E-mail address:* `Regine.Marchand@iecn.u-nancy.fr`