



HAL
open science

Asymptotique des nombres de Betti des variétés arithmétiques

Mathieu Cossutta

► **To cite this version:**

Mathieu Cossutta. Asymptotique des nombres de Betti des variétés arithmétiques. 2008. hal-00290583

HAL Id: hal-00290583

<https://hal.science/hal-00290583>

Preprint submitted on 25 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ASYMPTOTIQUE DES NOMBRES DE BETTI DES VARIÉTÉS ARITHMÉTIQUES

par

Mathieu Cossutta

Résumé. — Nous étudions la question de la croissance des nombres de Betti de certaines variétés arithmétiques dans des revêtements de congruence. Plus précisément nos résultats portent sur les variétés de Siegel et les variétés associées à des groupes orthogonaux. Nous expliquons comment un théorème de Waldspurger permet de majorer et de minorer ces nombres. Les résultats obtenus vont dans le sens de conjectures de Sarnak et Xue [SX].

Abstract. — We study the question of the growth of Betti numbers of certain arithmetic varieties in tower of congruence coverings. In fact, our results are about Siegel varieties and varieties associated to orthogonal groups. We explain how a theorem of Waldspurger can be used to obtain lower and upper bound. Our results are in the direction of conjectures made by Sarnak and Xue [SX].

0. Introduction

Soit G^0 un groupe algébrique connexe semi-simple sur \mathbb{Q} . Soit également $K_\infty \subset G^0(\mathbb{R})$ un compact maximal, $X = G^0(\mathbb{R})/K_\infty$ est un espace symétrique. Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G^0(\mathbb{Q})$. On construit ainsi une variété arithmétique $S(\Gamma) = \Gamma \backslash X$. Soit $\Gamma(n)$ la suite des sous-groupes de congruence de Γ , nous sommes intéressés par le comportement asymptotique des nombres de Betti L^2 des variétés $S(\Gamma(n))$. Plus précisément nous cherchons des nombres α_i et β_i tels que pour tout $\epsilon > 0$:

$$(1) \quad \text{vol}(S(\Gamma(n)))^{\alpha_i - \epsilon} \ll_\epsilon \dim H^i(S(\Gamma(n)), \mathbb{C}) \ll_\epsilon \text{vol}(S(\Gamma(n)))^{\beta_i + \epsilon}$$

la notation $A_n \ll_\epsilon B_n$ veut dire qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de ϵ telle que $A_n \leq CB_n$ pour tout n . Précisons les groupes que nous allons étudier. Soit F un corps de nombres totalement réel. Soit $(E, \bar{\bullet})$ une extension de corps de F avec une involution de l'un des types suivants :

$$E = \begin{cases} F & \text{cas 1} \\ \text{une extension quadratique de } F & \text{cas 2,} \end{cases}$$
$$\bar{\bullet} = \begin{cases} \text{id} & \text{cas 1} \\ \text{l'involution de Galois de } E & \text{cas 2.} \end{cases}$$

Soit $\eta \in \{-1, 1\}$. Soit V un E -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme sesquilinéaire $(,)$ η -hermitienne. Nous faisons l'hypothèse suivante, dans le cas (1) nous supposons que la dimension de V est paire si $\eta = 1$. Soit $G = U(V)$ (resp. $G^0 = SU(V)$) le groupe des isométries de V (resp. de déterminant 1), on peut voir ces groupes comme étant définis sur \mathbb{Q} par restriction des scalaires. On se donne L un réseau entier maximal de V . Alors pour tout idéal \mathfrak{c} de E le sous-groupe de congruence $\Gamma(\mathfrak{c})$ est bien défini. Fixons un tel idéal \mathfrak{c} et \mathfrak{P} un idéal premier inerte et non ramifié. Notre résultat principal est le théorème 2.16. Par exemple, la cohomologie holomorphe fortement primitive des variétés de Siegel de rang n n'apparaît qu'en les degrés $p(2n - p)$ avec $p \leq n$, on obtient alors :

Théorème 0.1. — *Si $p < \frac{n-1}{2}$:*

$$(2) \quad \text{vol}(S(\Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k)))^{\frac{p}{n+\frac{1}{2}}(1-\frac{1}{2n})-\epsilon} \ll_{\epsilon} \dim H_2^{p(2n-p),0}(S(\Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k)), \mathbb{C}) \ll_{\epsilon} \text{vol}(S(\Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k)))^{\frac{p}{n+\frac{1}{2}}(1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n})+\epsilon}$$

La formule de Matsushima montre que :

$$(3) \quad H^i(\Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k) \backslash X) = \oplus_A m(A, \Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k)) H^i(\text{Lie}(G^0), K_{\infty}, A)$$

où A décrit les représentations unitaires de $G^0(\mathbb{R})$ et $m(A, \Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k))$ est la multiplicité de A dans $L^2(\Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k) \backslash G^0)$. Les représentations vérifiant

$$H^*(\text{Lie}(G^0), K_{\infty}, A) \neq 0$$

sont appelées les représentations cohomologiques, elles ont été déterminées dans [VZ]. Ces représentations sont construites à partir d'une algèbre parabolique θ -stable \mathfrak{q} de $\text{Lie}(G^0)$. On note $A_{\mathfrak{q}}$ la représentation associée à une algèbre \mathfrak{q} . On note $R(\mathfrak{q})$ le plus petit degré tel que $H^i(\text{Lie}(G^0), K_{\infty}, A_{\mathfrak{q}})$ est non nul, on a :

$$\dim H^{R(\mathfrak{q})}(\text{Lie}(G^0), K_{\infty}, A) = 1.$$

Soit $p(\mathfrak{q})$ la limite inférieure sur les réels $p \geq 2$ tels que les coefficients K_{∞} -finis de $A_{\mathfrak{q}}$ soient dans $L^p(G^0)$. Posons $d(\mathfrak{q}) = \frac{2}{p(\mathfrak{q})}$. Dans [SX] les auteurs conjecturent que pour tout $\epsilon > 0$:

$$(4) \quad m(A_{\mathfrak{q}}, \Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k)) \ll_{\epsilon} [\Gamma : \Gamma(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k)]^{d(\mathfrak{q})+\epsilon}$$

généralisant ainsi sous forme conjecturale le théorème de [DGW]. La formule (3) combinée à cette conjecture donne donc une prédiction sur le nombre β_i souhaité dans la formule (1). Donnons trois exemples supposons que la partie non compacte de $G^0(\mathbb{R})$ soit :

- $SU(p, q)$ avec $p > q$, alors pour la cohomologie holomorphe de degré q , on trouve $\beta_q = \frac{1}{p+q-1}$.
- $SO(n, 1)$, alors pour le $i^{\text{ième}}$ nombre de Betti, on trouve $\beta_i = \frac{2i}{n-1}$.
- Sp_{2n} alors pour la cohomologie holomorphe L^2 de degré $p(2n-p)$, on trouve $\beta_{p(2n-p)} = \frac{p}{n}$.

Signalons que dans [Li4], l'auteur donne des formules exactes dans le cas $p = 2$. On remarque que les termes d'erreur par rapport à l'exposant $\frac{p}{2n-1}$ dans la formule (2) tendent vers zéro quand $n \gg p$. En général, on donne seulement une majoration de la partie θ de la cohomologie. Nous allons maintenant définir cette partie et expliquer le schéma de notre preuve. Notre méthode est adélique, dans une première partie nous rappelons quelques faits les variétés arithmétiques dans ce cadre. Soit K_f un sous-groupe compact ouvert des adèles finies de G . On introduit la variété arithmétique :

$$S(K_f) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / (K \times K_f).$$

La formule de Matsushima adélique (on suppose que $K_f = \prod_{v \nmid \infty} K_v$) est la suivante :

$$\dim H_{\mathfrak{q}}^R(S(K_f), \mathbb{C}) = \oplus_{A=\otimes A_v} \prod_{v \nmid \infty} \dim A_v^{K_v}.$$

La somme portant sur les représentations automorphes $A \subset L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))$ de composante archimédienne $A_{\mathfrak{q}}$. Dans [Li1] l'auteur associe à toute algèbre θ -stable \mathfrak{q} dont le Levi n'a qu'un seul facteur non compact, un couple $(W_{\mathfrak{q}}, \pi_{\mathfrak{q}})$ formé d'un espace $-\eta$ -hermitien $W_{\mathfrak{q}}$ sur $E \otimes_F \mathbb{R}$ et d'une série discrète de $U(W_{\mathfrak{q}})$. Le couple vérifiant la propriété suivante :

$$\Theta_{\chi}(\pi_{\mathfrak{q}}) = A_{\mathfrak{q}}$$

Θ_{χ} désigne la correspondance theta entre la paire de groupes $U(W) \times U(V)$. Soit W un espace hermitien défini sur E de signature $W_{\mathfrak{q}}$ alors on peut définir :

$$(5) \quad \begin{aligned} H_{\mathfrak{q}, W}^R(S(K_f), \mathbb{C}) &= \oplus_{\pi, \alpha} \dim(\alpha \otimes \Theta(\pi_f))^{K_f} \\ H_{\theta}^R(S(K_f), \mathbb{C}) &= \oplus_{W, \alpha} \oplus_{\pi} \dim(\alpha \otimes \Theta(\pi_f))^{K_f} \end{aligned}$$

La somme étant indexée par les représentations automorphes cuspidales de $U(W)$ de type $\pi_{\mathfrak{q}}$ à l'infini et les caractères automorphes α de $U(1)$ de composante archimédienne nulle. Nous expliquons ces formules dans la partie 2 et 4. Dans la partie 7 on démontre que pour la suite $K(\mathfrak{c}\mathfrak{P}^k)$, les espaces W apparaissant dans la somme (5) sont en nombre finis. Il suffit donc de savoir borner pour toute place finie v de F :

$$\dim \Theta(\pi_v)^{K_v}.$$

Les parties 3 et 5 sont consacrées à la démonstration des théorèmes 2.10 et 2.14. Il s'agit de démontrer que si $\mathfrak{P}|p$ est inerte et impaire :

$$(6) \quad \dim \pi_p^{K(\mathfrak{P}^k)} N \mathfrak{P}^{\frac{k}{2}(n-2m)} \leq \dim \Theta(\pi_p)^{K(\mathfrak{P}^k)} \leq \dim \pi_p^{K(\mathfrak{P}^{k+1})} N \mathfrak{P}^{\frac{k+1}{2}nm}$$

où $n = \dim V$ et $m = \dim W$. La preuve de la majoration est basée sur des résultats de Waldspurger ([Wald1] et [Wald2]). La preuve de la minoration sur une version locale de la formule du produit scalaire de Rallis. La partie 8 démontre une majoration pour les places divisant 2. Globalement on conclut en faisant le produit sur les places finies des inégalités (6) et en utilisant le théorème de [Cl0] sur la multiplicité des séries discrètes dans le spectre cuspidal. Ces résultats peuvent se généraliser à de nombreuses autres représentations cohomologiques. Nous espérons pouvoir y revenir par la suite.

Mes plus sincères remerciements vont à mon directeur de thèse Nicolas Bergeron. Ces idées ont beaucoup influencé ce travail. Je remercie également Jean-Loup Waldspurger pour

m'avoir expliqué avec beaucoup de gentillesse la preuve de la partie 8. Enfin je voudrais remercier Benjamin Schraen pour de nombreuses relectures.

1. Variété arithmétique.

1.1. Définition. — Soit F un corps de nombre totalement réel. On note $F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{[F:\mathbb{Q}]}$. On note P l'ensemble des places de F et pour $v \in P$, F_v la complétion de F par rapport à v . On note $F_\infty = \prod_{v|\infty} F_v$. On note \mathbb{A} les adèles de F et \mathbb{A}^f les adèles finis de F . Plus généralement si T est un ensemble fini de places, on note $\mathbb{A}_T = \prod_{v \in T} F_v$ et \mathbb{A}^T le produit restreint des F_v pour $v \notin T$. On a $\mathbb{A} = \mathbb{A}_T \times \mathbb{A}^T$, en particulier $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}^f$. Rappelons que l'on a fixé dans l'introduction un couple $(E, \bar{\bullet})$ formé d'une extension de corps de F et d'une involution de l'un des types suivants :

$$E = \begin{cases} F & \text{cas 1} \\ \text{une extension quadratique de } F & \text{cas 2,} \end{cases}$$

$$\bar{\bullet} = \begin{cases} \text{id} & \text{cas 1} \\ \text{l'involution de Galois de } E & \text{cas 2.} \end{cases}$$

Dans le cas (2), on note $\epsilon_{E/F}$ le caractère de $\mathbb{A}_F^\times / F^\times$ associé à l'extension quadratique E/F par la théorie du corps de classe (on peut le décrire explicitement au moyen du discriminant et du symbole de Hilbert de E). Soit $\eta \in \{-1, 1\}$. Soit V un E -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme sesquilineaire $(,)$ η -hermitienne. Nous faisons l'hypothèse suivante, dans le cas (1) nous supposons que la dimension de V est paire si $\eta = 1$, dans le cas (2) on peut supposer sans perte de généralité que $\eta = 1$, nous le faisons. On note $n = \dim_E V$ et r la dimension d'un sous-espace isotrope maximal défini sur E de V . Soit $G = U(V)$ le groupe des isométries de V . Le groupe G est de rang déployé r . Soit K_∞ un sous-groupe compact maximal de $G(F_\infty)$. Soit K_f un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}^f)$. Nous sommes intéressés par le comportement asymptotique des nombres de Betti L^2 de la variété arithmétique suivante :

$$S_{K_f}(V) = G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / (K_\infty \times K_f)$$

quand le volume de K_f tend vers 0. Nous supposons qu'il existe une unique place archimédienne v_∞ telle que $G(F_{v_\infty})$ soit non compact, on a alors trois familles possibles pour $G(F_\infty)^{\text{nc}} = G(F_{v_\infty})$:

- Dans le cas 1 si $\eta = 1$, $O(p, q)$ avec $pq \neq 0$ et $p + q = n$
- Dans le cas 1 si $\eta = -1$, Sp_{2k} avec $2k = n$ (on a alors nécessairement $F = \mathbb{Q}$)
- Dans le cas 2, $U(p, q)$ avec $pq \neq 0$ et $p + q = n$.

1.2. Composantes connexes. — En général, par manque d'approximation forte les variétés précédentes ne sont pas connexes. Une des composantes connexes est toujours donnée par :

$$G(F) \cap K_f \backslash X_G.$$

L'ensemble des composantes connexes est décrit par les doubles classes suivantes :

$$\text{Cl}(G, K_f) = G(F) \backslash G(\mathbb{A}^f) / K_f.$$

Plus précisément si (γ_i) est un système de représentant de $\text{Cl}(G, K_f)$, on a :

$$S_{K_f}(V) = \cup_i (G(F) \cap \gamma_i K_f \gamma_i^{-1}) \backslash X_G.$$

Les ensembles $\text{Cl}(G, K_f)$ vérifient les propriétés suivantes :

- Dans le cas 1 si $\eta = -1$ le groupe G vérifie l'approximation forte, on a donc pour tout compact $\text{Cl}(G, K_f) = \{1\}$ et si $K'_f \subset K_f$:

$$[G(F) \cap K_f : G(F) \cap K'_f] = [K_f : K'_f],$$

on posera $G^0 = G$.

- Dans le cas 1 si $\eta = 1$ le groupe algébrique G n'est pas connexe, notons G^0 sa composante connexe, on a une suite exacte :

$$1 \rightarrow G^0 \rightarrow G \xrightarrow{\det} \{\pm 1\} \rightarrow 1.$$

Soit $K(1)$ un compact maximal de $G(\mathbb{A}^f)$. On vérifie aisément que $\det K(1) = \{\pm 1\}(\mathbb{A}^f)$. On suppose que $K_f = \prod_v K_v$ est distingué dans K . Posons $K_f^0 = K_f \cap G^0(\mathbb{A}^f)$. Notons S l'ensemble des places où $\det K_v = 1$. En utilisant le déterminant on vérifie que :

$$\text{card}(\text{Cl}(G, K_f)) = \text{card}(\text{Cl}(G^0, K_f^0)) 2^{\text{card}S-1}.$$

- Dans le cas 2. Soit G^0 le groupe dérivé de G . On a une suite exacte :

$$1 \rightarrow G^0 \rightarrow G \xrightarrow{\det} U(1) \rightarrow 1.$$

En utilisant que G^0 est simplement connexe on vérifie que :

$$\text{Cl}(G, K_f) = \text{Cl}(U(1), \det K_f).$$

1.3. Multiplicité des séries discrètes.— Soit $K_{f,n}$ une suite de sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}^f)$ et posons $K_{f,n}^0 = K_{f,n} \cap G^0(\mathbb{A}^f)$. Soit S un ensemble fini de places de F , on suppose que $K_{f,n} \xrightarrow{S} 1$ dans le sens de **[Clo]**. Soit π_∞^0 une série discrète de $G^0(F_\infty)$. On a alors **[Clo]** :

$$\text{vol}(K_{f,n}^0) \ll m(\pi_\infty^0, L_0^2(G^0(F) \backslash G^0(\mathbb{A}) / K_{f,n}^0)) \ll \text{vol}(K_{f,n}^0)$$

L_0^2 désigne le spectre cuspidal. Soit π_∞ une extension de π_∞^0 à $G(F_\infty)$. On remarque que :

- Cas 1 $\eta = 1$, $G^0 = G$.
- Cas 1 $\eta = -1$,

$$(7) \quad m(\pi_\infty, L_0^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_{f,n})) = 2^\alpha m(\pi_\infty^0, L_0^2(G^0(F) \backslash G^0(\mathbb{A}) / K_{f,n}^0))$$

pour un certain α .

- Cas 2,

$$(8) \quad m(\pi_\infty, L_0^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}) / K_{f,n})) = \text{card}(\text{Cl}(U(1), \det K_{f,n})) m(\pi_\infty^0, L_c^2(G^0(F) \cap K_{f,n} \backslash X_G)).$$

1.4. Formes harmoniques. — Nous allons dans cette section décrire du point de vue de la théorie des représentations les formes différentielles sur ces variétés. Selon une convention usuelle nous noterons les algèbres de Lie réelles avec un indice 0 et leur complexifié sans indice. On note Ω l'élément de Casimir du centre de l'algèbre de Lie de $G(F_\infty)$. Soit $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{g}_0$, l'algèbre de Lie de K_∞ . Notons \mathfrak{p}_0 le supplémentaire orthogonal pour la forme de Killing de \mathfrak{k}_0 dans \mathfrak{g}_0 . Alors \mathfrak{p} s'identifie au complexifié du plan tangent de $S_{K_f}(V)$ en l'identité. La forme de Killing s'identifiant à la métrique sur le plan tangent. Les formes différentielles L^2 de degré i sur $S_{K_f}(V)$ sont donc :

$$\mathrm{hom}_{K_\infty}(\bigwedge^i \mathfrak{p}, L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_f))$$

On remarque que le centre de l'algèbre de Lie de $G(F_\infty)$ agit (à droite) sur cet espace, donc en particulier l'élément de Casimir Ω . Le lemme de Kuga affirme que l'ensemble des formes différentielles harmoniques L^2 de degré i est égal à :

$$H_2^i(S_{K_f}(V)) = \mathrm{hom}_{K_\infty}(\bigwedge^i \mathfrak{p}, L^2(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / K_f))^{\Omega=0}.$$

On en déduit donc que :

$$H_2^i(S_{K_f}(V), \mathbb{C}) = \bigoplus_{\pi=\pi_\infty \otimes \pi_f} \mathrm{hom}_{K_\infty}(\bigwedge^i \mathfrak{p}, \pi_\infty) \otimes \pi_f^{K_f},$$

la somme étant indexée par les sous-représentations irréductibles sous l'action de $G(\mathbb{A})$ de :

$$L^2(G(F) \backslash G(\mathbb{A}))^{\Omega=0}.$$

Les représentations π_∞ vérifiant les deux propriétés :

- $\mathrm{hom}_{K_\infty}(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi_\infty) \neq 0$
- l'action du Casimir (une constante notée $\pi_\infty(\Omega)$) est triviale,

sont appelées les représentations cohomologiques. Elles ont été classifiées par Vogan et Zuckermann dans [VZ]. Nous nous fixons maintenant une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{t}_0 de \mathfrak{k}_0 . Les racines $\Delta(\mathfrak{t}_0, \mathfrak{g})$ sont des éléments de $i\mathfrak{t}_0^*$. On considère les sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$, où \mathfrak{l} est le centralisateur d'un élément $X \in i\mathfrak{t}_0$ et \mathfrak{u} est le sous-espace engendré par les racines positives de X dans \mathfrak{g} . Alors \mathfrak{u} est stable sous l'involution de Cartan, on a donc une décomposition $\mathfrak{u} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$. Soit $R(\mathfrak{q})$ la dimension de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$. Le sous-module engendré sous l'action de K_∞ par la droite $\bigwedge^{R(\mathfrak{q})} \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ dans $\bigwedge^{R(\mathfrak{q})} \mathfrak{p}$ est un sous-espace irréductible noté $V(\mathfrak{q})$ qui apparaît avec multiplicité 1 dans $\bigwedge^{R(\mathfrak{q})} \mathfrak{p}$. Vogan et Zuckermann démontrent qu'il existe une unique représentation unitaire irréductible π_∞ vérifiant :

- $\mathrm{hom}(V(\mathfrak{q}), \pi_\infty) \neq 0$
- $\pi_\infty(\Omega) = 0$.

Nous notons $A_{\mathfrak{q}}$ cette représentation. Elle vérifie de plus :

- $\mathrm{hom}_{K_\infty}(\bigwedge^j \mathfrak{p}, A_{\mathfrak{q}}) = 0$ si $j < R(\mathfrak{q})$
- $\mathrm{hom}_{K_\infty}(\bigwedge^j \mathfrak{p}, A_{\mathfrak{q}}) = \mathbb{C}$ si $j = R(\mathfrak{q})$.

Le sous-espace :

$$\begin{aligned} H_{\mathfrak{q}}^{R(\mathfrak{q})}(S_{K^f}(V), \mathbb{C}) &= \bigoplus_{\substack{\pi = \pi_{\infty} \otimes \pi_f \\ \pi_{\infty} = A_{\mathfrak{q}}}} \text{hom}\left(\bigwedge^{R(\mathfrak{q})} \mathfrak{p}, A_{\mathfrak{q}}\right) \otimes \pi_f^{K_f} \\ &\simeq \bigoplus_{\substack{\pi = \pi_{\infty} \otimes \pi_f \\ \pi_{\infty} = A_{\mathfrak{q}}}} \pi_f^{K_f} \end{aligned}$$

est appelé la partie fortement primitive de type $A_{\mathfrak{q}}$ de la cohomologie. La correspondance theta nous permet de créer des classes de cohomologie dans la partie fortement primitive associée à certaines algèbres paraboliques.

2. Utilisation de la correspondance theta

2.1. Rappel. — On se donne un caractère non trivial ψ de \mathbb{A}_F/F . On se donne également un caractère χ de $\mathbb{A}_E^{\times}/E^{\times}$ vérifiant $\chi|_{\mathbb{A}_F^{\times}} = \epsilon_{E/F}$. Soit W un E -espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de sorte que W soit $-\eta$ -hermitien. Nous faisons l'hypothèse suivante, dans le cas (1) nous supposons que la dimension de W est paire si $\eta = -1$. On note $m = \dim_E W$. On supposera toujours que $n > m$ et dans le cas (2) que $n > m + 1$. Le F -espace vectoriel $\mathbf{W} = W \otimes_E V$ est muni de la forme symplectique :

$$B(\cdot, \cdot) = \text{tr}_{E/F}(\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes (\cdot, \cdot)^t).$$

Soit $\text{Sp}(\mathbf{W})$ (resp. $U(W)$) le groupe des isométries de \mathbf{W} (resp. W). La paire de groupes $(U(W), U(V))$ forme une paire duale dans le sens de Howe [Howe]. Notons aussi $\text{Mp}(\mathbf{W})$ le revêtement métaplectique de $\text{Sp}(\mathbf{W})$ qui est une extension :

$$1 \rightarrow S^1 \rightarrow \text{Mp}(\mathbf{W}) \rightarrow \text{Sp}(\mathbf{W}) \rightarrow 1.$$

D'après notamment Rao, Perrin et Kudla [K], le choix de χ détermine un scindage :

$$i_{\chi} : U(W)(\mathbb{A}) \times U(V)(\mathbb{A}) \rightarrow \text{Mp}(\mathbf{W})(\mathbb{A}).$$

Nous rappelons dans la partie 6 quelques propriétés de cette application ainsi qu'un résultat de Pan [Pan1]. Ce choix détermine une représentation

$(\omega_{\chi}, S = \otimes_v S_v)$ de $U(W)(\mathbb{A}) \times U(V)(\mathbb{A})$ par restriction de la représentation métaplectique de $\text{Mp}(\mathbf{W})(\mathbb{A})$. On se donne une place v de F et π_v une représentation irréductible de $U(W)(F_v)$. Posons :

$$\Theta_{\chi}(\pi_v, V) = (\pi_v \otimes \omega_{\chi})_{U(W)(F_v)}$$

(La notation Π_G , si Π est une représentation d'un groupe G , désigne les coinvariants de Π sous l'action de G). $\Theta_{\chi}(\pi, V)$ est une représentation de $U(V)(F_v)$. Dans [Howe], il est conjecturé que :

Conjecture 2.1 (Howe). — $\Theta_{\chi}(\pi, V)$ admet un unique quotient irréductible.

La proposition a été démontrée ([Howe], [Wald1] et [Wald2]) dans presque tout les cas :

Théorème 2.2 (Howe et Waldspurger). — *La conjecture de Howe est vraie si la place v ne divise pas 2.*

On notera alors $\theta_{\chi}(\pi_v, V)$ l'unique quotient irréductible de $\Theta_{\chi}(\pi_v, V)$.

2.2. Correspondance theta archimédienne. — On choisit un compact maximal K_∞^W de $U(W)(F_\infty)$ et on notera K_∞, K_∞^V pour éviter des confusions. Soit v une place archimédienne de F . Le théorème 6.2 de [Li1] montre que les représentations $A_{\mathfrak{q}}$ sont dans l'image de la correspondance theta pour $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ de la forme suivante :

1. $U(W)_v = O(p, q)$ et $U(V)_v = \mathrm{Sp}_{2n}$. On suppose que p et q sont pairs. soit $r = \frac{p}{2}$ et $s = \frac{q}{2}$. On suppose que $r + s \leq n$. Alors $K_\infty^W \simeq U(n)$ et $K_\infty^V \simeq O(p) \times O(q)$. La forme de \mathfrak{l}_0 doit être :

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{u}(1)^r \times \mathfrak{u}(1)^s \times \mathfrak{sp}_{n-(r+s)}.$$

2. $U(W)_v = U(m, n)$ et $U(V)_v = U(p, q)$ avec $m+n \leq p+q$. On a : $K^W = U(m) \times U(n)$ et $K^V = U(p) \times U(q)$. Soit $r, s, k, l \geq 0$ tels que $r + s = m, k + l = n, r + l \leq p$ et $s + k \leq q$. La forme de \mathfrak{l}_0 doit être :

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{u}(1)^r \times \mathfrak{u}(1)^l \times \mathfrak{u}(1)^k \times \mathfrak{u}(1)^s \times \mathfrak{u}(p - r - l, q - s - k).$$

3. $U(W)_v = \mathrm{Sp}_{2n}$ et $U(V)_v = O(p, q), p + q > 2n, K^W = U(n)$ et $K^V = O(p) \times O(q), p + q > 2n$. Soit $r \leq \frac{p}{2}$ et $s \leq \frac{q}{2}$ tels que $r + s = n$. La forme de \mathfrak{l}_0 doit être :

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{u}(1)^r \times \mathfrak{u}(1)^s \times \mathfrak{so}(p - 2r, q - 2s).$$

Ainsi à toute représentation cohomologique $A_{\mathfrak{q}}$ de $U(V)(F_\infty)$ de ce type, on peut associer un unique couple $(W_{\mathfrak{q}}, \pi_{\mathfrak{q}})$ tel que $\theta_\chi(V, \pi_{\mathfrak{q}}) = A_{\mathfrak{q}}$, de plus $\pi_{\mathfrak{q}}$ est une série discrète.

Remarque 2.3. — Il existe plusieurs algèbres paraboliques ayant le même \mathfrak{l}_0 mais ne donnant pas la même représentation $A_{\mathfrak{q}}$. Cependant dans chacun de ces cas \mathfrak{l}_0 détermine le degré $R(\mathfrak{q})$ introduit précédemment :

- Dans le cas (1), $R(\mathfrak{q}) = (r + s)(2n - (r + s))$.
- Dans le cas (2) : $R(\mathfrak{q}) = pq - (p - (r + l))(q - (r + s))$.
- Dans le cas (3) : $R(\mathfrak{q}) = ps + r(q - 2s)$.

Dans les cas (1) et (3) les variétés introduites sont des variétés de Shimura et toute la cohomologie holomorphe primitive est décrite par la correspondance theta et provient de groupes compacts.

2.2.1. Paramètre $d(\mathfrak{q})$. — On peut calculer les paramètres $d(\mathfrak{q})$ à l'aide des paramètres de Langlands des représentations $A_{\mathfrak{q}}$. On peut aussi les obtenir plus simplement en utilisant que $A_{\mathfrak{q}}$ apparaît discrètement dans la représentation de Weil, il suffit alors d'utiliser le théorème 3.2 de [Li3]. Posons :

$$d = \begin{cases} 1 & \text{si } V \text{ symplectique} \\ 0 & \text{si } V \text{ orthogonal} \\ \frac{1}{2} & \text{si } V \text{ unitaire.} \end{cases}$$

On obtient que :

$$d(\mathfrak{q}) = \frac{m}{n - 2 + 2d}$$

2.3. Correspondance globale. — Globalement, on suppose que W a la même signature que W_q et on considère π une représentation automorphe cuspidale de $U(W)(F)\backslash U(W)(\mathbb{A})$ de composante archimédienne π_q . Le relèvement theta global est l'application :

$$\pi \otimes S_\chi \rightarrow \mathcal{A}(U(V)(F)\backslash U(V)(\mathbb{A}))$$

qui à $f \otimes \varphi$ associe :

$$(9) \quad \theta_{\psi, \chi}(f, \varphi)(h) = \int_{U(W)(F)\backslash U(W)(\mathbb{A})} f(g) \Theta_{\psi, \chi}(g, h, \varphi) dg$$

où $\Theta_{\psi, \chi}(g, h, \varphi)$ est le noyau theta. On note $\Theta(\pi, V)$ l'image de cette application dans les formes automorphes et $\Theta(\pi, V)_d$ la partie de carré intégrable de $\Theta(\pi, V)$, cette partie est discrète de longueur finie. Soit Θ la projection :

$$\pi \otimes S_\chi \rightarrow \Theta(\pi, V)_d.$$

Un changement de variable dans la définition (9) montre que cette application se factorise en :

$$\Theta : \otimes_v \Theta(\pi_v, V) \rightarrow \Theta(\pi, V)_d.$$

Si cette application est non nulle on obtient des représentations cohomologiques de type A_q . Nous le prouvons en précisant [KR1][prop 7.1.2].

Théorème 2.4. — *Supposons $\Theta(\pi, V)_d \neq 0$, alors :*

– *L'application Θ se factorise en une application :*

$$\otimes_{v|2} \Theta(\pi_v, V) \otimes \otimes_{v \nmid 2} \theta(\pi_v, V) \rightarrow \Theta(\pi, V)_d.$$

– *Si de plus la conjecture de Howe est vraie (conj 2.1) pour les représentations π_v pour toute place $v|2$, l'application theta se factorise en un isomorphisme :*

$$\otimes_v \theta(\pi_v, V) \rightarrow \Theta(\pi, V)_d.$$

En particulier $\Theta(\pi, V)_d$ est alors irréductible.

– *Si :*

$$(10) \quad \begin{cases} V \text{ est anisotrope ou} \\ n - r > m + 2d - 1. \end{cases}$$

Les fonctions theta sont de carré intégrables.

Démonstration. — Soit v_0 une place telle que π_{v_0} vérifie la conjecture de Howe. Soit J_{v_0} l'unique sous-espace invariant de $\Theta(\pi_{v_0}, V)$ tel que le quotient $\Theta(\pi_{v_0}, V)/J_{v_0}$ soit irréductible. Soit $x_{v_0} \in J_{v_0}$ et $x^{v_0} \in \otimes_{v \neq v_0} \Theta(\pi_v, V)$. Il s'agit de démontrer que $\Theta(x_{v_0} \otimes x^{v_0}) = 0$. Soit $\Pi \subset \Theta(\pi, V)_d$ une composante irréductible. On note p la projection orthogonale de $\Theta(\pi, V)_d$ sur Π . Supposons que $p \circ \Theta(x_{v_0} \otimes x^{v_0}) \neq 0$. Il existe alors un tenseur pur $\otimes_v \zeta_v \in \otimes \Pi_v$ tel que le produit scalaire $(p \circ \Theta(x_{v_0} \otimes x^{v_0}), \otimes_v \zeta_v)$ soit non nul. L'application :

$$\begin{array}{ccc} \Theta(\pi_v, V) & \rightarrow & \Pi_v \\ x & \mapsto & (p \circ \Theta(x^{v_0} \otimes x), \zeta^{v_0}) \end{array}$$

est non nulle (donc surjective) et $U(V)(F_v)$ -équivariante. Son noyau est donc J_v , on en déduit que $p \circ \Theta(x_{v_0} \otimes x^{v_0})$ est nul d'où une contradiction. En faisant varier Π parmi les composantes irréductibles de $\Theta(\pi, V)_d$, on en déduit les deux premiers points du théorème. La preuve du troisième point est rappelée dans la partie 4, le critère (10) sera appelé le critère de Weil. \square

Corollaire 2.5. — $\Theta(\pi, V)_d$ est constituée de représentations automorphes de type $A_{\mathfrak{q}}$ à l'infini.

Nous démontrons également dans la partie 4 un résultat d'injectivité :

Lemme 2.6. — *Sous les hypothèses de Weil :*

Soit $\pi_1 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp \pi_r \subset L_0^2(U(W)(F) \backslash U(W)(\mathbb{A}))$, une famille finie de formes automorphes cuspidales irréductibles, alors les représentations $\Theta(\pi_i, V)$ sont deux à deux orthogonales.

La preuve est une application du produit scalaire de Rallis (équation (29)). Nous noterons $H_{\theta, W}^R(S_{K^f}(V), \mathbb{C}) \subset H_{\mathfrak{q}}^R(S_{K^f}(V), \mathbb{C})$ le sous-espace engendré par la correspondance theta des formes automorphes cuspidales de $U(W)$ et $H_{\theta}^R(\dots)$ la somme de ces espaces pour les différents W possibles et de ces espaces tordus par un caractère de $U(V)$ de composante archimédienne triviale. On a d'après le lemme précédent :

$$H_{\theta}^R(S_{K^f}(V)) = \bigoplus_{W, \alpha} \bigoplus_{\pi = \pi_{\mathfrak{q}} \otimes \pi_f} (\alpha \circ \det \otimes \Theta(\pi, V))_{d, f}^{K^f}$$

la somme étant indexée par les formes automorphes cuspidales de $U(W)$ avec une composante archimédienne à l'infini isomorphe à $\pi_{\mathfrak{q}}$ et les caractères automorphes α de 1 (resp. $\{\pm 1\}$, resp. $U(1)$) de composante archimédienne triviale dans le cas (1) $\eta = -1$ (resp. dans le cas (1) $\eta = -1$, resp. dans le cas (2)).

Remarque 2.7. —

- Les relèvements theta locaux et globaux sont parfois nuls [Wald1]. Nous allons faire, pour obtenir une minoration, l'hypothèse de rang stable qui garantira que les relèvements theta locaux et globaux sont non nuls. De plus, sous cette hypothèse la conjecture de Howe est vraie.
- D'après des travaux de Kudla et Millson, pour certains choix de \mathfrak{q} , ces classes de cohomologie correspondent aux composantes primitives de combinaisons de cycles totalement géodésiques naturels.
- La première somme est bien directe, on peut le prouver en utilisant le début de la preuve de la formule du produit scalaire de Rallis.

Pour m suffisamment petit par rapport à n , il devrait y avoir égalité entre les deux espaces :

$$(11) \quad \varinjlim_{K^f} H_{\theta}^R(S(V)_{K^f}, \mathbb{C}) = \varinjlim_{K^f} H_{\mathfrak{q}}^R(S(V)_{K^f}, \mathbb{C})$$

Ce qui revient donc à un résultat de surjectivité de la correspondance theta. On parle de rang stable en une place inerte w de E si $V \otimes E_w$ contient un sous-espace isotrope définie sur E_w de dimension m . Dans le rang stable local Li prouve dans [Li3] que la conjecture de Howe pour une représentation unitaire est vraie et que de plus le relèvement theta est non nul. L'hypothèse suivante :

$$(12) \quad n > 2m + 4d - 2$$

assure que pour toutes places w de E , $V \otimes E_w$ est dans le rang stable (il y a aussi une notion de rang stable pour les places déployées cf. [Li2] page 206). Nous parlerons de rang singulier si $r > m$.

Théorème 2.8. —

- Supposons (12) alors $\Theta(\pi, V)$ est non nulle et irréductible.

– Supposons de plus le rang singulier et $W_{\mathfrak{q}}$ défini positif alors (11) est vrai.

Les deux points du théorème sont de Li, ils sont démontrés dans [Li2] et [Li5]. Le deuxième point permet de traiter de manière complète la cohomologie holomorphe de certaines variétés de Shimura unitaire et de Siegel d’après la dernière remarque du paragraphe 2.3. Remarquons que le théorème sous l’hypothèse (12) découlera certainement de la classification du spectre discret par Arthur au moins dans les cas anisotropes.

2.4. Majoration de la partie θ . — Nous supposons que $K_f = \prod_{v \nmid \infty} K_v$. On a :

$$(13) \quad \dim H_{\theta, \mathfrak{q}}^R(S_{K_f}(V), \mathbb{C}) \leq \sum_{\alpha} \sum_{\substack{W \\ W \otimes F_{\infty} \simeq W_{\mathfrak{q}}}} \sum_{\substack{\pi = \otimes \pi_v \\ \pi_{\infty} \simeq \pi_{\mathfrak{q}}}} \dim(\alpha \otimes \theta(\pi_f, V))^{K_f} \\ \leq \sum_{\alpha} \sum_{\substack{W \\ W \otimes F_{\infty} \simeq W_{\mathfrak{q}}}} \sum_{\substack{\pi = \otimes \pi_v \\ \pi_{\infty} \simeq \pi_{\mathfrak{q}}}} \prod_{v \nmid \infty} \dim(\alpha \otimes \theta(\pi_v, V))^{K_v}$$

(la première somme étant indexée sur les caractères automorphes de $U(1)$ de composante archimédienne triviale, le troisième signe somme étant indexé sur les représentations automorphes cuspidales de $U(W)$). Nous introduisons maintenant les compacts dont nous allons mener l’étude. Nous rappelons que la correspondance theta dépend du choix d’un caractère ψ de \mathbb{A}_F/F . Soit \mathfrak{f} le conducteur de $\psi \circ \text{tr}_{E/F}$, c’est un idéal de E . On considère deux idéaux \mathfrak{f}_V et \mathfrak{f}_W de E vérifiant $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_V \mathfrak{f}_W$. Pour un réseau L de W on définit :

$$L^* = \{x \in W \mid (x, y) \in \mathfrak{f}_W\}$$

On a $L \subset L^*$ si et seulement si $(L, L) \subset \mathfrak{f}_W$. On considère un réseau L_W maximal pour cette propriété, on appellera un tel réseau presque autodual (un réseau sera dit autodual si $L = L^*$). On se donne également un réseau presque autodual de L_V par rapport à \mathfrak{f}_V , on supposera dans les situations globales que $\mathfrak{f}_V = 1$ et $\mathfrak{f}_W = \mathfrak{f}$. On note si v (resp. w) est une place finie de F (resp. E) \mathcal{O}_v (resp. \mathcal{O}_w) l’anneau des entiers de F_v (resp. E_w). On note enfin :

$$\widehat{\mathcal{O}_E} = \prod_{w \nmid \infty} \mathcal{O}_w$$

Soit \mathfrak{c} un idéal de E , définissons le compact ouvert $K(\mathfrak{c})$ de $U(V)(\mathbb{A}^f)$:

$$K(\mathfrak{c}) = \{g \in U(W)(\mathbb{A}^f) \mid (g-1)L \otimes \widehat{\mathcal{O}_E} \subset \mathfrak{c}L \otimes \widehat{\mathcal{O}_E} \text{ et } gL \otimes \widehat{\mathcal{O}_E} = L \otimes \widehat{\mathcal{O}_E}\} \\ = \prod_v K\left(\prod_{w|v} \mathfrak{c}_w\right)$$

ce sont les sous-groupes de congruence standard. On notera plus simplement $X(\mathfrak{c})$ la variété $S_{K(\mathfrak{c})}(V)$. Nous noterons également $X^0(\mathfrak{c})$ l’union des composantes connexes de $X(\mathfrak{c})$ dont l’image par le déterminant est trivial (cf. paragraphe 1.2). Les formules (7) et (8) permettent d’étudier la dimension de la cohomologie de $X^0(\mathfrak{c})$. Nous notons $T_{V, \psi, \chi}$ l’ensemble des places de F telles que l’un des objets V, ψ, χ soit ramifié au dessus de v ainsi que les places divisant deux. Soit v une place de F et w une place de E au dessus de v . Nous notons ϖ_v (resp. ϖ_w) une uniformisante de l’anneau des entiers de F_v (resp. E_w). Supposons $v \notin T_{V, \psi, \chi}$, alors $K_v(1)$ est un compact maximal de $U(V_v)$.

Lemme 2.9. — Pour tout place finie $v \notin T_{V, \psi, \chi}$:

- Si $(\alpha \otimes \Theta(\pi, V))^{K(\varpi_w^k)} \neq 0$ alors $\alpha|_{\det K(\varpi_w^k)} = 1$.
- Si $\Theta_\chi(\pi, V)^{K_v(1)} \neq 0$ alors W et π sont non ramifiés.

Le premier s'obtient par une relecture minutieuse des travaux de Waldspurger. Le fait que W et $\Theta_\chi(\pi, V)$ non ramifié implique π non ramifié est du à Howe ([Howe], théorème 7.1.b). Le fait que W soit non ramifié est prouvé dans la partie 7. Ce lemme montre que :

- le nombre de caractère α apparaissant dans la somme (13) est de l'ordre de $\text{Cl}(U(1), \det K_f)$,
- le nombre de W apparaissant dans $H_{\theta, \mathfrak{q}}^R(X(\mathfrak{c}))$ est fini borné par le nombre d'espace ϵ -héritien vérifiant : W est non ramifié si $\mathfrak{c}_v = 1$ et $v \notin T_{V, \psi, \chi}$ et la signature de W à l'infini est déterminée par \mathfrak{q} .

On fixe une place inerte non archimédienne v_0 (on note w_0 la place de E au dessus de v_0) et \mathfrak{c} un idéal de E premier à v_0 . On a :

$$(14) \quad \sum_W \sum_{\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f} \dim \theta(\pi_f, V)^{K(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k)} \ll \dim H_{\theta, \mathfrak{q}}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k)) \ll \sum_W \sum_{\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f} \dim \theta(\pi_f, V)^{K(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k)}$$

(les constantes dépendent du choix de \mathfrak{c} et de v).

Théorème 2.10. — *Soit π une représentation unitaire de $U(W)_{v_0}$ alors pour k suffisamment grand :*

$$\dim \Theta(\pi, V)^{K(\varpi_{w_0}^k)} \leq (\mathbb{N}w_0)^{\frac{k+1}{2}mn} \dim \pi^{K(\varpi_{w_0}^{k+1})}$$

($\mathbb{N}w_0$ est le cardinal du corps résiduel de E_{w_0}). Pour les places divisant 2 nous prouvons également un résultat de ce type mais non explicite :

Proposition 2.11. — *Pour toute place finie u de F et tout sous-groupe compact ouvert K_u de $U(V_u)$. Il existe un sous-groupe compact ouvert K'_u de $U(W_u)$ et une constante $C > 0$ tels que pour toutes représentations irréductibles π_u de $U(W_u)$: $\dim \Theta(\pi_u, V)^{K_u} \leq C \dim \pi_u^{K'_u}$.*

Le théorème est prouvé dans la partie 3. La proposition est un corollaire du théorème pour $v \nmid 2$, pour une place au dessus de 2 la démonstration du théorème 1.4 du chapitre 5 de [MVW] s'adapte pour obtenir ce résultat, nous en donnons une preuve dans la partie 8. Soit T l'union de $T_{V, \psi, \chi}$ et des places divisant \mathfrak{c} le tout privé de v_0 . Soit \mathfrak{c}' un idéal inversible en dehors de T tel que $K(\mathfrak{c}')$ vérifie l'énoncé de la proposition 2.11 par rapport à $K(\mathfrak{c})$. Alors à partir de (13) et en combinant avec les résultats 2.9 et 2.11 on obtient :

$$\dim H_{\theta, \mathfrak{q}}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k)) \leq C' \sum_{\pi} \dim \theta(\pi_{v_0})^{K(\varpi_{w_0}^k)} \times \dim \pi_T^{K(\mathfrak{c}')} \times \prod_{u \notin T \cup \{v\}} \dim \pi_u^{K_u(1)}$$

le dernier terme vaut 0 si π est ramifié en une place $u \notin T \cup \{v_0\}$, et 1 dans le cas contraire. En utilisant le théorème 2.10, on a finalement que :

Théorème 2.12. —

$$\dim H_{W,\theta}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k)) \ll \mathbb{N}\varpi_{w_0}^{\frac{k+1}{2}mn} m(\pi_{\mathfrak{q}}, K(\mathfrak{c}'\varpi_{w_0}^{k+1}))$$

La multiplicité des séries discrètes a été étudiée dans le paragraphe 1.3. On en déduit une majoration en termes de volume dans le paragraphe 2.6. Il est aussi intéressant de considérer le cas d'une place déployée de E (cela n'a de sens que dans le cas 2) alors il existe deux places conjuguées w et \bar{w} au dessus de v . En utilisant [Min], on obtient de la même façon le résultat suivant :

$$\dim H_{\theta,\mathfrak{q}}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k \varpi_{\bar{w}_0}^k)) \ll \mathbb{N}w_0^{kmn} \text{vol} \left(K(\varpi_{w_0}^k \varpi_{\bar{w}_0}^k) \right)$$

2.5. Minoration de la partie θ . — On suppose que l'hypothèse (10) est vérifiée et que $n > \frac{5m}{2} + 1$. On se donne v_0 une place inerte n'appartenant pas à $T_{V,\psi,\chi}$ et W un espace hermitien de type $W_{\mathfrak{q}}$ à l'infini, non ramifié en v , on donne une minoration de $H_{W,\theta}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_v^k))$ pour un \mathfrak{c} assez grand explicite. Nous donnons deux résultats de minoration qui vont jouer le rôle de la proposition 2.11 et du théorème 2.10.

Proposition 2.13. — *Soit u une place finie de F . Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout k suffisamment grand :*

$$\dim \theta(\pi_u, V)^{K(\varpi^{2k+c})} \geq \dim \pi_u^{K(\varpi^k)}$$

Théorème 2.14. — *Soit π une représentation unitaire de $U(W)_{v_0}$. On a la minoration suivante pour k pair :*

$$\dim \theta(\pi, V)^{K(\varpi_{w_0}^k)} \geq \dim \pi^{K(\varpi_{w_0}^k)} \mathbb{N}w_0^{\frac{k}{2}(n-2m)m}$$

La preuve de ces deux résultats locaux est donnée dans la partie 5 (corollaire 5.2 et 5.3).

Soit T , l'union de $T_{V,\psi,\chi}$ de v et des places de ramification de W . D'après la proposition précédente, il existe deux idéaux \mathfrak{c} et \mathfrak{c}' explicites de E premier à v et aux places n'appartenant pas à $T_{V,\psi,\chi}$ tels que pour toutes places $t \in T_{V,\psi,\chi}$:

$$\dim \theta(\pi_t, V)^{K(\mathfrak{c})} \geq \dim \pi_t^{K(\mathfrak{c}')}$$

De plus on se souvient que si $u \notin T$:

$$\dim \theta(\pi_u, V)^{K(1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi_u \text{ non ramifiée.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} & \dim H_{W,\theta}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k)) \\ & \geq \sum_{\pi} \dim \theta(\pi_{v_0}, V)^{K(\varpi_{w_0}^k)} \dim \left((\otimes_{u \neq v_0} \pi_u)^{K(\mathfrak{c}') \times K^T(1)} \right) \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 2.14. On en déduit le théorème suivant :

Théorème 2.15. — *On a pour tout k :*

$$\dim H_{W,\theta}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_{w_0}^k)) \gg m(\pi_{\mathfrak{q}}, K(\mathfrak{c}'\varpi_{w_0}^k)) \mathbb{N}w_0^{\frac{k}{2}(n-2m)m}$$

Remarquons que pour obtenir le résultat pour tout k , il suffit de le faire pour le cas pair et d'utiliser les inclusions :

$$K(\varpi_0^{2k+2}) \subset K(\varpi_0^{2k+1}) \subset K(\varpi_0^{2k}).$$

Nous reformulons maintenant les théorèmes 2.12 et 2.15 en termes de volume.

2.6. Enoncé des théorèmes de minoration. — Nous donnons le calcul asymptotique des volumes des compacts considérés précédemment dans les différents cas. Posons :

$$(15) \quad e_V = \begin{cases} 1 & \text{si } V \text{ est antisymétrique} \\ -1 & \text{si } V \text{ est symétrique} \\ 0 & \text{si } V \text{ est hermitien ou anti-hermitien} \end{cases}$$

Soit v une place finie de F alors pour tout $\epsilon > 0$:

$$(\mathbb{N}v)^{k\alpha(V)-\epsilon} \ll_{\epsilon} \text{vol} \left(K_V^0(\varpi_w^k) \right) \ll_{\epsilon} (\mathbb{N}v)^{k\alpha(V)+\epsilon}$$

avec $\alpha(V)$ la dimension du groupe $SU(V)$, c'est à dire :

$$(16) \quad \alpha(V) = \begin{cases} \frac{n(n+e)}{2} & \text{dans le cas 1} \\ \frac{(n-1)(n+2)}{2} & \text{dans le cas 2 et } v \text{ ramifiée} \\ n^2 - 1 & \text{dans le cas 2.} \end{cases}$$

On a donc la reformulation en termes de volume des théorèmes précédents :

Théorème 2.16. — *Pour une place inerte non ramifiée v , et pour tout $\epsilon > 0$.*

On a :

$$\dim H_{\mathfrak{q},\theta}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_w^k)) \ll_{\epsilon} \text{vol} \left(X^0(\mathfrak{c}\varpi_w^k) \right)^{\frac{1}{|e|+1} \frac{mn+\alpha(W)+1-|e|}{\alpha(V)} + \epsilon}$$

Et, sous l'hypothèse (12) :

$$\dim H_{\mathfrak{q},\theta}^R(X^0(\mathfrak{c}\varpi_w^k)) \gg_{\epsilon} \text{vol} \left(X^0(\mathfrak{c}\varpi_w^k) \right)^{\frac{1}{|e|+1} \frac{m(n-2m)+\alpha(W)+1-|e|}{\alpha(V)} - \epsilon}$$

Par exemple, pour $O(n, 1)$ c'est à dire pour la géométrie hyperbolique, on obtient pour le $i^{\text{ième}}$ nombre de Betti les exposants de minoration et de majoration :

$$\frac{2i}{n} \left(1 - \frac{(2i-1)}{n+1} \right) \text{ et } \frac{2i}{n} \left(1 + \frac{(2i+1)}{n+1} \right).$$

Dans le cas $U(n, 1)$, c'est à dire pour la géométrie hyperbolique complexe, on obtient pour la cohomologie holomorphe de degré i les exposants :

$$\frac{i}{n-1} \left(1 - \frac{i}{n-1} \right) \text{ et } \frac{i}{n+1} \left(1 + \frac{i}{n+1} \right).$$

3. Preuve de la majoration locale

Nous prouvons le théorème 2.10. Le problème étant local non archimédien, nous supposons dorénavant, sans changer les notations, que F, \dots sont des objets locaux et que la caractéristique résiduelle de F est différente de 2.

3.1. Opérateurs de Hecke. — Soit G un groupe algébrique défini sur F . On note $\mathcal{H}(G)$ les fonctions à support compact localement constantes sur $G(F)$. Soit dg une mesure de Haar sur $G(F)$. L'opération de convolution :

$$\varphi' * \varphi(g) = \int_G \varphi'(gh^{-1})\varphi(h)dh$$

munit $\mathcal{H}(G)$ d'une structure d'algèbre à idempotents, on appelle cette algèbre l'algèbre de Hecke de G . Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(F)$, on note $\mathcal{H}(G, K)$ les éléments de $\mathcal{H}(G)$ invariants à droite et à gauche par K . L'algèbre $\mathcal{H}(G, K)$ admet comme élément neutre la fonction e_K qui est à une constante près (dépendante de la mesure de Haar) la fonction caractéristique de K (on a donc $\mathcal{H}(G, K) = e_K \mathcal{H}(G) e_K$). Soit (π, V_π) une représentation irréductible lisse de $G(F)$, alors $\mathcal{H}(G)$ agit sur π par la formule :

$$v \mapsto \pi(\varphi)(v) = \int_{G(F)} \varphi(g)\pi(g)v.$$

Nous notons V_π^K les vecteurs de V_π fixe sous l'action de K . L'idempotent e_K de \mathcal{H} est le projecteur sur l'espace V_π^K . En particulier $\mathcal{H}(G, K)$ agit sur V_π^K . Enfin, $\mathcal{H}(G)$ est muni d'une involution :

$$f \mapsto \widehat{f}(g) = f(g^{-1})$$

qui vérifie

$$(17) \quad \widehat{f * f'} = \widehat{f'} * \widehat{f}$$

et préserve les espaces $\mathcal{H}(G, K)$. Nous noterons \mathcal{H}_V (resp. \mathcal{H}_W) l'algèbre de Hecke du groupe $U(V)$ (resp. $U(W)$). Nous allons calculer l'action des opérateurs de Hecke sur les fonctions theta. Soit S un modèle lisse de la représentation de Weil de $\mathrm{Sp}(\mathbf{W}_v)$. Rappelons que l'image de π par la correspondance theta est l'unique quotient irréductible du module suivant :

$$\Theta(\pi, V) = (\pi \otimes S)_{U(W)}$$

où la notation en indice désigne les coinvariants sous l'action de $U(W)$. Nous notons p la projection de $\pi \otimes S$ dans $\Theta(\pi, V)$. L'action des opérateurs de Hecke sur les fonctions theta vérifie les relations suivantes :

Lemme 3.1. — Soit $h \in \mathcal{H}_W$, $h' \in \mathcal{H}_V$, $f \in \pi$ et $\varphi \in S$

- $p(\pi(h)f \otimes \varphi) = p(f \otimes \omega(\widehat{h})\varphi)$
- $h' \bullet p(f \otimes \varphi) = p(f \otimes \omega(h')\varphi)$

Le premier point vient de la définition des coinvariants, le deuxième de l'équivariance de la projection p sous l'action de $U(V)$.

3.2. Première majoration. — Soit K_V un compact de $U(V)$.

Proposition 3.2. — Supposons qu'il existe un sous-espace de dimension finie $S_0 \subset S$ tel que :

$$S^{1 \times K_V} = \omega_\chi(\mathcal{H}_W \times 1)S_0$$

Soit K_W un compact de $U(W)$ qui fixe les éléments de S_0 (cela existe toujours). Alors :

$$\dim \Theta(\pi, V)^{K_V} \leq \dim S_0 \times \dim \pi^{K_W}$$

Démonstration. — En appliquant l'idempotent e_{K_V} à la surjection $U(V)$ -équivariante p on obtient que :

$$\pi \otimes S^{1 \times K_V} \twoheadrightarrow \Theta(\pi, V)^{K_V}$$

(le symbole " \twoheadrightarrow " voulant dire se surjecte). L'hypothèse du lemme montre que :

$$\pi \otimes \omega_\chi(\mathcal{H}_W \times 1)S_0 \twoheadrightarrow \Theta(\pi, V)^{K_V}$$

Comme les vecteurs de S_0 sont fixes sous l'action de K_W on a :

$$\omega_\chi(\mathcal{H}_W \times 1)S_0 = \omega_\chi(\mathcal{H}_W e_{K_W} \times 1)S_0$$

Le premier point du lemme 3.1, l'égalité (17) et le fait que $\widehat{e_{K_W}} = e_{K_W}$ montrent que

$$\begin{aligned} p(V_\pi \otimes \omega_\chi(\mathcal{H}_W e_{K_W} \times 1)S_0) &= p(\pi(\widehat{e_{K_W}} \mathcal{H}_W) V_\pi \otimes S_0) \\ &= p(V_\pi^{K_W} \otimes S_0) \end{aligned}$$

On a donc une surjection :

$$V_\pi^{K_W} \otimes S_0 \twoheadrightarrow \Theta(\pi, V)^{K_V}.$$

□

3.3. Résultats de Waldspurger. — Rappelons que la représentation de Weil avant d'être une représentation de $\text{Mp}(\mathbf{W})(\mathbb{A})$ est l'unique représentation irréductible de caractère central ψ des points adéliques du groupe de Heisenberg de \mathbf{W} :

$$H(\mathbf{W}) = \{(w, t) \mid w \in \mathbf{W} \text{ et } t \in F\}$$

muni de la multiplication $(w, t)(w', t') = (w + w', t + t' + \frac{1}{2}\langle w, w' \rangle)$. On note \mathfrak{f}_ψ le conducteur de ψ , notons \mathfrak{f} le corps résiduel de F . Rappelons que la notion de dualité dans les réseaux dépend d'un choix d'idéal. Nous avons défini \mathfrak{f} (resp. \mathfrak{f}_ψ) comme le conducteur de $\psi \circ \text{tr}_E$ (resp. ψ) et choisi deux idéaux \mathfrak{f}_V et \mathfrak{f}_W vérifiant $\mathfrak{f}_V \mathfrak{f}_W = \mathfrak{f}$. L'espace vectoriel $\mathbf{W} = W \otimes_E V$ (resp. W, V) est muni d'une forme symplectique (resp. $\pm\eta$ -hermitienne) et nous considérons la dualité par rapport à \mathfrak{f}_ψ (resp. $\mathfrak{f}_V, \mathfrak{f}_W$). On vérifie que si L_1 (resp. L_2) est un réseau de W (resp. V), on a $(L_1 \otimes_{\mathcal{O}} L_2)^* = L_1^* \otimes_{\mathcal{O}} L_2^*$. Rappelons que nous avons également fixé des réseaux presque autoduaux L_V et L_W . Supposons dans un premier temps que L_V et L_W sont autoduaux alors $L = L_W \otimes_{\mathcal{O}} L_V$ l'est aussi. Soit $H(L) \subset H(\mathbf{W})$ les éléments de la forme (l, t) avec $l \in L$ l'application $\psi_L(l, t) = \psi(t)$ est un caractère de $H(L)$ et la représentation :

$$\text{ind}_{H(L)}^{H(\mathbf{W})} \psi_L$$

est un modèle de la représentation de Weil appelé modèle latticiel. Cet espace est isomorphe à :

$$S(\mathbf{W} // L) = \{f \in S(\mathbf{W}) \mid f(w + l) = \psi(-\frac{1}{2}B(l, w))f(w)\}$$

muni de l'action du groupe de Heisenberg donnée par :

$$(18) \quad \rho(w)f(w') = \psi(\frac{1}{2}B(w', w))f(w + w')$$

L'intérêt de ce modèle par rapport à un modèle de Schrödinger est que l'action du compact maximal $K(L_V)$ de $U(V)$ est très simple et donnée par :

$$(19) \quad \omega_\chi(k)\varphi(x) = \lambda_\chi(k)\varphi(k^{-1}x).$$

où λ_χ est un caractère de $K(L_V)$ calculé par Pan dans [Pan1] (cf. partie 6). On note $S[r]$ les fonctions de $S(\mathbf{W}/L)$ à support dans $\frac{1}{\varpi^r}L$. Waldspurger démontre dans [MVW] sous l'hypothèse supplémentaire que E/F est non ramifié que :

Théorème 3.3. — *On a si k est grand que le conducteur de χ :*

$$\begin{aligned} S^{1 \times K(\varpi^k)} &= \omega(\mathcal{H}_W \times 1)S\left[\frac{k}{2}\right] \text{ si } k \text{ pair} \\ S^{1 \times K(\varpi^k)} &= \omega(\mathcal{H}_W \times 1)S\left[\frac{k+1}{2}\right]^{1 \times K(\varpi^k)} \text{ si } k \text{ impair} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que si k est pair $S[k]$ est fixe par l'action de $K_W(\varpi^{2k})$, la proposition 3.2 donne le théorème 2.10 dans le cas non ramifié. Démontrons ce fait. Soit $s \in S[k]$, le support de s est bien stable par $K_W(\varpi^{2k})$. Il suffit donc de prouver que si $w \in \frac{1}{\varpi^k}L$, on a bien $\omega(k)s(w) = s(w)$. Comme $k^{-1}w = (k^{-1} - 1)w + w$ avec le premier terme de la somme qui appartient à L , on a d'après (18) :

$$\omega(k)s(w) = \psi\left(\frac{1}{2}B((k^{-1} - 1)w, w)\right)s(w)$$

La condition $k \in K_W(\varpi^{2k})$ est donc la condition qui assure que $B((k^{-1} - 1)w, w) \in \mathfrak{f}_\psi$. En général quand L_V et L_W ne sont pas autoduaux, on introduit :

$$A = L_W^* \otimes L_V \cap L_W \otimes L_V^* \text{ et } B = L_W^* \otimes L_V + L_W \otimes L_V^*$$

On a $B = A^*$ et $\varpi B \subset A \subset B$. On pose $\mathbf{b} = B/A$ qui est muni naturellement par réduction d'une forme symplectique non dégénérée sur \mathbf{f} . On choisit (c'est possible) un réseau autodual L de \mathbf{W} qui vérifie les inclusions :

$$A \subset L \subset B$$

On remarque que cela revient à choisir un sous-espace isotrope maximal de \mathbf{b} . Le problème du modèle latticiel de la partie précédente est que le stabilisateur de L ne contient pas $K(L_V) \times K(L_W)$, on change donc le modèle pour avoir à nouveau une formule explicite de l'action de $K(L_V) \times K(L_W)$. On a :

$$\text{ind}_{H(L)}^{H(\mathbf{W})} \psi_L = \text{ind}_{H(B)}^{H(\mathbf{W})} \text{ind}_{H(F)}^{H(B)} \psi_L$$

L'induite $\text{ind}_{H(F)}^{H(B)} \psi_L$ est un modèle de la représentation du groupe de Heisenberg fini $H(\mathbf{b})$ que l'on notera (ρ, \mathbb{S}) . Le modèle est alors égal à :

$$S(\mathbf{W}, \mathbb{S}) = \{f : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{S} \mid f(w + b) = \psi\left(-\frac{1}{2}B(b, w)\right)\rho(b)f(w)\}$$

L'action de $H(\mathbf{W})$ est toujours donné par la formule (18). L'avantage de ce modèle est que la représentation de Weil de $K(L_V)$ est alors explicitement donnée par la formule si $k \in K(L_V)$:

$$\omega_\chi(k)\varphi(x) = \lambda_\chi(k)\rho(k)\varphi(k^{-1}x)$$

où $\rho(k)$ désigne la représentation de Weil de $\text{Sp}(\mathbf{b})$. On note pour un réseau $L' \subset \mathbf{W}$ $S[L']$ les fonctions de $S(\mathbf{W}, \mathbb{S})$ à support dans L' .

Remarque. — On dira plus généralement qu'un réseau est bon si :

$$\varpi L^* \subset L \subset L^*$$

La construction précédente s'étend aussi si on suppose simplement que L_V et L_W sont bons plutôt que presque autoduaux. Nous nous servirons de ce fait dans la partie 7.

Waldspurger démontre alors dans l'article [**Wald2**] le résultat suivant :

Théorème 3.4. — *On a pour k suffisamment grand :*

– Si k pair,

$$S^{1 \times K(\varpi^k)} = \omega(\mathcal{H}_W \times 1) S[\varpi^{-\frac{k}{2}} B]^{1 \times K(\varpi^k)}$$

– Si k impair,

$$S^{1 \times K(\varpi^k)} = \omega(\mathcal{H}_W \times 1) S[\varpi^{-\frac{k+1}{2}} A]^{1 \times K(\varpi^k)}$$

$S[\varpi^{-k} B]$ est fixe par $K_W(\varpi^{2k+1}) \times 1$ et $S[\varpi^{-k} A]$ est fixe par $K_W(\varpi^{2k}) \times 1$. Ainsi en utilisant à nouveau la proposition 3.2, on déduit le théorème 2.12 :

Corollaire 3.5. — *Pour k suffisamment grand :*

$$\dim \Theta(\pi, V)^{K(\varpi_w^k)} \leq (\mathbb{N}w)^{\frac{k+1}{2}} \dim V \dim W \dim \pi^{K(\varpi_w^{k+1})}$$

Il est naturel de se poser la question de savoir si on peut démontrer qu'une partie des fonctions de $S[\frac{r}{2}]$ s'injecte dans $\theta(\pi, V)^{K(\varpi_w^r)}$. Nous prouvons un résultat de ce type dans la partie suivante.

4. Formule du produit scalaire de Rallis

On suppose dans la suite que les dimensions vérifient la condition 12. Nous allons donner sous ces hypothèses, pour une place v impaire la preuve de la proposition 2.13 et du théorème 2.14. Nous allons prouver une formule du produit scalaire de Rallis locale, c'est la proposition 4.3. Sous la conjecture 1.2 de [**KR2**] on peut démontrer cette formule de manière locale seulement sous l'hypothèse de rang stable. On prouve ensuite la formule de manière globale sous la condition 12.

4.1. Le groupe doublé. — Nous notons $-W$ l'espace hermitien muni de la forme sesquilinéaire $-\langle, \rangle$ et $2W = W \oplus -W$. Nous notons $\Delta^+(W)$ (resp. $\Delta^-(W)$) les sous-espaces vectoriels de $2W$ formés par les éléments de la forme (w, w) (resp. $(w, -w)$). Ce sont deux sous-espaces isotropes maximaux de $2W$ en dualité. On note P_Δ le stabilisateur de $\Delta^+(W)$, c'est le parabolique de Siegel de $U(2W)$. On note ι le plongement canonique :

$$U(W) \times U(-W) \rightarrow U(2W)$$

Le quotient $P_\Delta \backslash U(2W)$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces isotropes maximaux de $2W$ que l'on note $\Omega(2W)$, on s'intéresse aux orbites de $U(W) \times U(-W)$ dans $\Omega(2W)$. Il est connu [**GPSR**] que l'orbite d'un espace isotrope maximal Z est déterminé par l'invariant :

$$k = \dim(Z \cap (W \oplus 0)) = \dim(Z \cap (0 \oplus -W))$$

Nous notons Ω_k l'orbite correspondante. Un représentant est donné par $2X_k \oplus \Delta^+(W_k)$. Le stabilisateur, que nous noterons St_k , de $2X_k \oplus \Delta^+(X_k)$ est contenu dans $P_k \times P_k$ et vaut :

$$St_k = \mathrm{GL}(X_k) \times \mathrm{GL}(X_k) \times \Delta(U(W_k)) \times N_k \times N_k$$

(Δ désigne la diagonale d'un produit).

4.2. Intégrale zeta locale. — Soit $\tilde{\chi}$ un caractère unitaire de E^* . On considère une section de l'induite :

$$\phi(\bullet, s) \in I_{P_\Delta}^{U(2W)} | \bullet |^s \tilde{\chi}$$

On peut alors définir pour $v, v' \in V_\pi$ la fonction zeta locale :

$$Z(s, \phi, v, v') = \int_{U(W)} \phi(\iota(g, 1), s)(\pi(g)v, v') dg.$$

Vu que π et $\tilde{\chi}$ sont unitaires, cette intégrale converge absolument pour $\Re(s) \geq \frac{m+e}{2}$, elle admet de plus un prolongement méromorphe. Soit $s_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s_0) \geq \frac{m+e}{2}$ alors $Z(s_0)$ définit un élément non trivial de :

$$(20) \quad \text{hom}_{U(W) \times U(W)}(I_{P_\Delta}^{U(2W)} \tilde{\chi} | \bullet |^{s_0}, \pi \otimes \tilde{\chi} \pi^\vee)$$

En suivant Kudla et Rallis [KR2], on peut conjecturer que :

Conjecture 4.1. — On a :

$$(21) \quad \dim \text{hom}_{U(W) \times U(W)}(I_{P_\Delta}^{U(2W)} \tilde{\chi} | \bullet |^{s_0}, \pi \otimes \tilde{\chi} \pi^\vee) = 1.$$

4.3. La méthode du double. — On définit le caractère $\tilde{\chi}$ par la formule suivante :

- Cas 1 $\eta = 1$ $\tilde{\chi} = \chi_V$
- Cas 1 $\eta = -1$ $\tilde{\chi} = 1$
- Cas 2 $\tilde{\chi} = \chi^n$

Soit S un modèle de la représentation de Weil de $H(\mathbf{W})$. Vu que :

$$H(2\mathbf{W}) = H(\mathbf{W}) \times H(-\mathbf{W}) / \{(t, -t) | t \in F\}$$

$S \otimes S^\vee$ est un modèle de la représentation de Weil de $H(2\mathbf{W})$. Cependant on a introduit précédemment une polarisation naturelle $2\mathbf{W} = \Delta^+(W) \oplus \Delta^-(\mathbf{W})$ de $2\mathbf{W}$. On a donc un modèle de Schrödinger naturel de la représentation de Weil de $H(2\mathbf{W})$, donné par les fonctions de Schwarz sur $\Delta^-(\mathbf{W}) = \mathbf{W}$. L'isomorphisme entre les représentations de Weil de $H(\mathbf{W})$ est donné par l'opérateur d'entrelacement C_V :

$$(22) \quad C_V = \begin{cases} S \otimes S^\vee & \rightarrow & S(W \otimes V) \\ s \otimes s^\vee & \mapsto & (w \otimes v \mapsto (\rho(2w \otimes v)s, s^\vee)). \end{cases}$$

La représentation de Weil ω_χ de $U(2W)$ sur $S(W \otimes V)$ (c'est à dire le choix de cocycle) est défini par Kudla dans [K] et est caractérisé par le fait que le Levy P_Δ de $U(2W)$ agit par la formule suivante sur $\varphi \in S(W \otimes V)$:

$$(23) \quad \omega_\chi(a)\varphi(x) = \tilde{\chi}(\det a) |\det a|^{\frac{n}{2}} \varphi(a^{-1}x).$$

On démontre dans la partie 6 (lemme 6.1) qu'en restriction à $U(W) \times U(W)$ l'opérateur d'entrelacement C_V induit un isomorphisme :

$$(24) \quad \omega_\chi \otimes \tilde{\chi} \omega_\chi^\vee = \omega_{\chi|U(V) \times U(V)}.$$

Posons $s_0 = \frac{n-(m+e)}{2}$, d'après (23) l'application suivante que l'on notera I_V défini un opérateur d'entrelacement :

$$(25) \quad \begin{array}{ccc} S(W \otimes V) & \rightarrow & I_{P_\Delta} \tilde{\chi} | \bullet |^{s_0} \\ \varphi & \mapsto & (h \mapsto \omega_\chi(h)\varphi(0)) \end{array}$$

L'image de cette application est notée $R(\tilde{\chi}, V)$, un théorème de Kudla, Rallis et Sweet montre que cet espace est exactement $\Theta(V, \mathbf{1})$. Dans le rang stable, le résultat suivant est démontré par Kudla, Rallis et Sweet :

Proposition 4.2. — *L'application I_V est surjective et $R(\tilde{\chi}, V) = I_{P_\Delta} \tilde{\chi} | \bullet |^{s_0}$ est irréductible.*

En restriction à $U(W) \times U(-W)$ on obtient un opérateur d'entrelacement surjectif I_V :

$$S \otimes \tilde{\chi} S^\vee \rightarrow I_{P_\Delta} \tilde{\chi} | \bullet |^{s_0}$$

vérifiant d'après la formule (22) pour tout $(g, g') \in U(W) \times U(-W)$:

$$(26) \quad I_V(s \otimes \overline{s'}) (\iota(g, g')) = \tilde{\chi}(\det g') (\omega_\chi(g)s, \omega_\chi(g')s').$$

La proposition 4.2 permet de construire un deuxième élément de l'espace d'entrelacement défini par l'égalité (20). En effet, considérons la projection $p : S \otimes \pi \rightarrow \theta(\pi)$, comme les représentations sont toutes unitaires on a également une application duale $p^\vee : S^\vee \otimes \pi^\vee \rightarrow \theta(\pi)^\vee$. Introduisons une nouvelle notation, pour une représentation π nous notons $C : \pi \otimes \pi^\vee \rightarrow \mathbb{C}$ l'application coefficient. Considérons :

$$C \circ (p \otimes p^\vee) : S \otimes \tilde{\chi} S^\vee \otimes \pi \otimes \tilde{\chi} \pi^\vee \rightarrow \mathbb{C},$$

cette application se factorise en un élément de :

$$\text{hom}(R(\tilde{\chi}, V), \pi \otimes \tilde{\chi} \pi^\vee).$$

L'addition de la proposition 4.2 et de la conjecture 4.1 (puisque $s_0 > \frac{m+r+e}{2}$) montrerait qu'il existe une constante non nulle c telle que :

Proposition 4.3 (Formule du produit scalaire de Rallis locale)

Sous l'hypothèse 12

$$(p(\varphi_1 \otimes v_1), p(\varphi_2 \otimes v_2)) = c \int_{U(W)} (\omega_\chi(g) \varphi_1, \varphi_2) (\pi(g) v_1, v_2) dg.$$

Nous donnons une preuve de cette proposition dans la partie suivante.

4.4. Formule globale. — On se donne deux formes automorphes cuspidales π et π' de $U(W)$. Soit f (resp. f') un vecteur de π (resp. π'). Soit φ_1 et φ_2 deux vecteurs de S . On cherche à calculer

$$(27) \quad (\theta(f, \varphi_1), \theta(f', \varphi_2)).$$

Pour simplifier les notations nous noterons $[G]$ le quotient $G(F) \backslash G(\mathbb{A})$ pour un groupe algébrique G défini sur F . On a en développant que le produit scalaire (27) vaut :

$$\int_{[U(W)] \times [U(W)]} f(h) \overline{f'(h')} \int_{[U(V)]} \Theta(g, h, \varphi_1) \overline{\Theta(g, h', \varphi_2)} dg dh dh'$$

Les formules (22), (24) et (25) montrent que :

$$\Theta(g, h, \varphi_1) \overline{\Theta(g, h', \varphi_2)} = \Theta(g, (h, h'), C_V(\varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2})) \tilde{\chi}^{-1}(\det h')$$

On a donc que (27) vaut :

$$\int_{[U(W)] \times [U(W)]} f(h) \overline{f'(h')} \tilde{\chi}^{-1}(\det h') \int_{[U(V)]} \theta(g, (h, h'), C_V(\varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2})) dg dh dh'$$

La dernière intégrale est convergente et définit une fonction à croissance modérée dès que le critère de Weil (6) est vérifié [Weil]. Comme les représentations π et π' sont cuspidales, on en déduit le dernier point du théorème 2.4. Rappelons que l'on a posé $s_0 = \frac{n-(m+e)}{2}$. L'élément :

$$\phi = I_V \circ C_V(\varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) \in I_{P_\Delta}^{U(2W)} \tilde{\chi} | \bullet |^{s_0}.$$

On le prolonge en une famille de section :

$$\phi(s) \in I_{P_\Delta}^{U(2W)} \tilde{\chi} | \bullet |^s$$

telle que $\phi(s_0) = \phi$. On peut alors former la série d'Eisenstein :

$$(28) \quad E(g, s, \phi) = \sum_{\gamma \in P_\Delta(F) \backslash U(2W)(F)} \phi(\gamma g, s) \quad (g \in U(2W)(\mathbb{A}))$$

cette série est convergente pour $\Re(s) \gg 0$ et admet un prolongement méromorphe. On conjecture le fait suivant :

Conjecture 4.4. — *Supposons les conditions de Weil vérifiées alors :*

- La série d'Eisenstein précédente est holomorphe au voisinage de 0.
- Il existe une constante non nulle c telle que :

$$E(g, s_0, \varphi) = c \int_{[U(V)]} \Theta(g, h, \varphi_1 \otimes \overline{\varphi_2}) dh$$

Cette conjecture a été démontrée par Kudla et Rallis pour la paire orthogonale-symplectique et par Ichino pour les paires de groupes unitaires. Dans tous les cas, sous l'hypothèse (12) le résultat est vrai ([Weil]). On obtient finalement que : $(\theta(f, \varphi_1), \theta(f', \varphi_2))$ est un multiple non nul de la valeur en s_0 de l'intégrale zeta :

$$Z(s, \phi, f, f') = \int_{[U(W)] \times [U(W)]} f(h) \overline{f'(h')} \tilde{\chi}^{-1}(\det h') E((h, h'), s) dh dh'$$

La classification des $U(W) \times U(W)$ -orbites de $P_\Delta \backslash U(2W)$ (cf. paragraphe 4.1) et le fait que f et f' soient cuspidales [GPSR] montre que cette intégrale vaut :

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta(U(W)(F)) \backslash U(W)(\mathbb{A}) \times U(W)(\mathbb{A})} f(h) \overline{f'(h')} \tilde{\chi}^{-1}(\det h') \phi(h, h'), s) dh dh' \\ &= \int_{\Delta(U(W)(F)) \backslash U(W)(\mathbb{A}) \times U(W)(\mathbb{A})} f(h) \overline{f'(h')} \tilde{\chi}^{-1}(\det h') \phi(h'^{-1}h, 1), s) dh dh' \\ &= \int_{U(W)(\mathbb{A})} \int_{[U(W)]} f(h) \overline{f'(hu^{-1})} dh \phi((u, 1), s) du \end{aligned}$$

La deuxième intégrale est le produit scalaire de f et $u^{-1} \bullet f$, elle est donc nulle si $\pi \neq \pi'$. On a donc bien le lemme 2.6. Supposons que $f = \otimes f_v$, $f' = \otimes f'_v$ dans $\pi = \otimes \pi_v$ et $\phi(s) = \otimes \phi_v(s)$ alors on obtient la formule de Rallis :

$$(\theta(f, \varphi_1), \theta(f', \varphi_2)) = \text{valeur en } s_0 \text{ de : } \prod_v \int_{U(W)_v} (\pi(h) f_v, f'_v) \phi((g, 1), s) dg$$

Comme $\phi((g, 1), s_0) = (\omega_\chi(g) \varphi_1, \varphi_2)$ cette formule suggère bien la proposition 4.3.

Nous pouvons maintenant prouver la formule locale en une place v en toute généralité. Il suffit pour cela d'utiliser la factorisation du théorème 2.4 et la formule précédente (29)

en fixant des tenseurs purs en toutes places différentes de v . La proposition 4.3 est donc vraie.

5. Minoration

5.1. Construction de fonctions de Schwarz. — On considère dans cette partie la paire duale $U(W) \times U(V_0)$ où $U(V_0)$ est le groupe déployé de rang m c'est à dire que V_0 admet une décomposition de Witt $V_0 = X_0 \oplus Y_0$ avec $\dim X_0 = m$. Soit $\mathbf{W}_0 = W \otimes V_0$ et soit S_0 un modèle de la représentation de $H(\mathbf{W}_0)$. Pour tout k suffisamment grand, on construit un élément $\varphi_k \in S_0$, vérifiant pour tout $g \in U(W)$:

$$(\omega(g)\varphi_k, \varphi_k) = 1_{K(\varpi^k)}(g)$$

Donnons d'abord une idée de la construction. On peut considérer que la décomposition de Witt de V_0 est $V_0 = W \oplus W^*$, un modèle de Schrödinger est alors donné par $S(W \otimes W^*) = S(\text{End}(W))$. Le groupe $U(W)$ est inclu dans le stabilisateur de $W \otimes W^*$, l'action de $U(W)$ sur $S(\text{End}(W))$ est donc linéaire. C'est à dire qu'à un caractère près l'action de $U(W)$ est donné par :

$$\omega_\chi(g)\varphi(x) = \varphi(g^{-1} \circ x).$$

L'élément :

$$\varphi_k(x) = 1_{\text{id}_W + \varpi^k \text{End} L_W}$$

convient. Une comparaison avec le modèle latticiel S_0 de la représentation de Weil (ou une construction directe) montre qu'en dehors des places de ramification l'élément $\varphi_k \in S_0[k]$. Plus précisément, on a un isomorphisme d'espace hermitien $V_0 = W \oplus W$, avec V_0 muni de la forme :

$$(w_1 + w'_1, w_2 + w'_2) = \langle w_1, w'_2 \rangle - \langle w'_1, w_2 \rangle$$

Un réseau autodual naturel de V_0 est donné par :

$$L_{V_0} = L_W^* \oplus \varpi^{-r} L_W$$

(où r la valuation du conducteur de $\psi \circ \text{tr}$). Un bon réseau du produit tensoriel est donné par :

$$A = L_W \otimes L_{V_0}.$$

Un réseau autodual L vérifiant les inclusions :

$$A \subset L \subset A^*$$

est donné par :

$$L = L_W \otimes L_W^* \oplus \varpi^{-r} L_W^* \otimes L_W.$$

On a trois modèles possibles pour la représentation de Weil, le modèle de Schrödinger $S(W \otimes W)$, le modèle latticiel $S(\mathbf{W}_0//L)$ et le modèle latticiel généralisé $S(\mathbf{W}_0, \mathbb{S})$. L'isomorphisme entre les deux premiers modèles est donné par :

$$\begin{cases} S(W \otimes W) & \simeq & S(\mathbf{W}_0//L) \\ \varphi & \mapsto & f \end{cases}$$

avec :

$$f(w + w') = \int_{L_W \otimes L_W^*} \psi(B(w'', w')) \psi\left(\frac{1}{2}B(w, w')\right) f(w + w'') dw''$$

On a une identification de $W \otimes W$ avec $\text{End}(W)$ par la formule suivante :

$$\begin{cases} W \otimes W & \simeq & \text{End}(W) \\ w_1 \otimes w_2 & \mapsto & (w \mapsto \langle w, w_2 \rangle w_1) \end{cases}$$

On vérifie alors que par ces isomorphismes explicites la fonction φ_k est à support dans $\varpi^{-(k+rw)}L$ (ce résultat est valide en caractéristique résiduelle 2). Nous supposons maintenant que toutes les données sont non ramifiées, et que k est pair, alors d'après le théorème 3.3 et le fait que $\varphi_k \in S^{KW(\varpi^k)}$, il existe un élément $h_k \in \mathcal{H}_{V_0}$ et une fonction $\varphi_k^0 \in S[\frac{k}{2}]$ telle que :

$$(29) \quad \varphi_k = \omega_\chi(h_k)\varphi_k^0.$$

Nous posons pour la suite $\varphi_k^1 = \widehat{h_k}\varphi_k$.

5.2. Conclusion. — On a un réseau autodual L_V donné par la théorie globale. La théorie des réseaux autoduaux montre qu'il existe une décomposition de Witt de V , $V = X \oplus V_1 \oplus Y$ avec $\dim X = m$ et $L_V = X \cap L_V \oplus V_1 \cap L_V \oplus Y \cap L_V$. Posons $V_0 = X \oplus Y$. V se décompose orthogonalement en $V_0 \oplus V_1$. Soit S_0 (resp. S_1) un modèle de la représentation de Weil de $H(W \otimes V_0)$ (resp. $H(W \otimes V_1)$). Alors $S_0 \otimes S_1$ est un modèle de la représentation de Weil de $H(W \otimes V)$, de plus l'action de $U(W)$ sur S est donnée par l'action diagonale sur $S_0 \otimes S_1$. On a donc si $v, v' \in V_\pi^{KW(\varpi^k)}$ et $\varphi, \varphi' \in S_1^{KW(\varpi^k)}$:

$$\begin{aligned} & (p((\varphi_k \otimes \varphi) \otimes v), p((\varphi_k \otimes \varphi') \otimes v')) \\ &= c \int_{U(W)} (\omega(g)\varphi_k, \varphi_k)(\omega(g)\varphi, \varphi')(\pi(g)v, v') dg \\ &= (\varphi, \varphi')(v, v') \end{aligned}$$

On en déduit donc que l'application :

$$S_1^{KW(\varpi^k)} \otimes \pi^{KW(\varpi^k)} \rightarrow \theta(\pi)$$

est injective. Ainsi pour tout compact K de $U(V)$ on a :

Proposition 5.1. —

$$\dim\{\varphi \in S_1^{KW(\varpi^k)} \mid \varphi_k \otimes \varphi \in S^K\} \times \dim \pi^{K(\varpi^k)} \leq \dim \theta(\pi)^K$$

La proposition 2.13 est un corollaire de ce résultat :

Corollaire 5.2. — *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout k suffisamment grand :*

$$\dim \theta(\pi, V)^{K(\varpi^{2k+c})} \geq \dim \pi^{K(\varpi^k)}$$

Il suffit de remarquer que pour c suffisamment grand $S[\varpi^{-k}A]$ est fixe par $K(\varpi^{2k+c})$ et contient φ_k , on applique alors la proposition précédente.

Pour obtenir le théorème 2.10, il faut utiliser raffiner la proposition précédente en utilisant l'élément φ_k^0 défini en (29). Nous calculons maintenant le produit scalaire suivant

(avec encore $v, v' \in V_\pi^{KW(\varpi^k)}$ et $\varphi, \varphi' \in S_1^{KW(\varpi^k)}$) :

$$\begin{aligned} & (p((\varphi_k^0 \otimes \varphi) \otimes v), p((\varphi_k^1 \otimes \varphi') \otimes v')) \\ &= c \int_{U(W)} (\omega(g)\varphi_k^0, \widehat{h}_k\varphi_k)(\omega(g)\varphi, \varphi')(\pi(g)v, v') dg \end{aligned}$$

Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} (\omega(g)\varphi_k^0, \widehat{h}_k\varphi_k) &= (h_k\omega(g)\varphi_k^0, \varphi_k) \\ &= (\omega(g)h_k\varphi_k^0, \varphi_k) \end{aligned}$$

La deuxième ligne étant obtenue en utilisant que l'action de $U(W)$ et de \mathcal{H}_{V_0} commute. On obtient alors en continuant comme la première fois que :

$$(30) \quad (p((\varphi_k^0 \otimes \varphi) \otimes v), p((\varphi_k^1 \otimes \varphi') \otimes v')) = (\varphi, \varphi')(v, v')$$

On en déduit donc pour tout compact K :

$$\dim\{\varphi \in S_1^{KW(\varpi^k)} \mid \varphi_k^0 \otimes \varphi \in S^K\} \times \dim \pi^{K(\varpi^k)} \leq \dim \theta(\pi)^K$$

Corollaire 5.3. — *On a la minoration suivante :*

$$\dim \theta(\pi, V)^{K(\varpi^k)} \geq \dim \pi^{K(\varpi^k)} \mathbb{N}w^{\frac{k}{2}(\dim V - 2 \dim W) \dim W}$$

On applique le résultat précédent avec $K = K_V(\varpi^k)$, en utilisant que :

$$\varphi_k^0 \otimes S_1\left[\frac{k}{2}\right] \subset S^{K(\varpi^k)}.$$

6. Le problème du cocycle

6.1. La définition de la représentation ω_χ . — On se donne (S, ρ) un modèle de la représentation de Weil du groupe Heisenberg $H(\mathbf{W})$. Rappelons qu'il existe une unique représentation projective ω de $\mathrm{Sp}(\mathbf{W})$ vérifiant :

$$(31) \quad \rho(gw) = \omega(g)^{-1} \rho(w) \omega(g)$$

Le problème du cocycle est de décrire explicitement, dans le modèle S choisi, une représentation ω_χ de la paire duale $U(W) \times U(V)$ vérifiant la relation précédente. Nous rappelons la solution de ce problème donné par Kudla dans [K]. Par symétrie il suffit de le faire pour $U(W)$.

6.1.1. Construction déployée. — Considérons une paire duale $U(W) \times U(V)$ telle que l'espace W est déployé. Alors si on se donne une polarisation $W = X \oplus Y$, un modèle de la représentation de Weil de $U(W) \times U(V)$ est donné par le modèle de Schrödinger :

$$S(X \otimes V)$$

c'est à dire les fonctions de Schwarz de $X \otimes V$. L'action du Levi de W déterminé par la décomposition $X \oplus Y$, qui est isomorphe à $\mathrm{GL}(X)$ est alors donnée par :

$$\tilde{\chi}(\det a) \varphi(a^{-1}x),$$

avec $\tilde{\chi}$:

$$- \text{Cas 1 } \eta = 1 \quad \tilde{\chi} = \chi_V$$

- Cas 1 $\eta = -1$ $\tilde{\chi} = 1$
- Cas 2 $\tilde{\chi}|_{E^*} = \epsilon_{E/F}^{\dim V}$

6.1.2. *Construction générale.* — On utilise alors la méthode du double, la suite exacte :

$$1 \rightarrow \{(t, -t) \mid t \in F\} \rightarrow H(2\mathbf{W}) \rightarrow H(\mathbf{W}) \times H(-\mathbf{W}) \rightarrow 1$$

montre que la représentation $S \otimes S^\vee$ est un modèle de la représentation de Weil de $H(2\mathbf{W})$. La polarisation :

$$\mathbf{W} = \Delta^+(\mathbf{W}) \oplus \Delta^-(\mathbf{W})$$

montre que $S(\mathbf{W})$ est un autre modèle, l'isomorphisme explicite entre les deux modèles est donné par l'espace :

$$(32) \quad \begin{cases} S \otimes S^\vee & \xrightarrow{I} & S(\mathbf{W}) \\ s \otimes s^\vee & \mapsto & (w \mapsto (\rho(2w)s, s^\vee)) \end{cases}$$

On note $\widetilde{\omega}_\chi$ la représentation de $U(2W)$ définie dans la section précédente. On sait par la relation (31) que :

$$\omega_\chi = \widetilde{\omega}_\chi|_{U(W) \times 1}$$

est une représentation de S . De plus l'isomorphisme explicite (32) montre que :

$$I(\omega_\chi \otimes \omega_\chi^\vee(g, g)s \otimes s^\vee)(w) = I(s \otimes s^\vee)(g^{-1}w)$$

Or l'élément (g, g) est dans le Levi associé à la décomposition (32). On en déduit donc la formule voulue c'est à dire que :

Lemme 6.1. —

$$\widetilde{\omega}_\chi|_{U(W) \times U(W)} = \omega_\chi \otimes \widetilde{\chi}\omega_\chi^\vee$$

6.1.3. *Cas unitaire.* — Il dépend du choix d'un caractère $\tilde{\chi}$ vérifiant :

$$\tilde{\chi}|_{F^*} = \epsilon_{E/F}^{\dim V}$$

Si on se donne deux caractères χ_1 et χ_2 vérifiant la relation précédente alors, $\chi_2\chi_1^{-1}$ définit un caractère de E^* trivial sur F^* . Soit :

$$E^1 = \{z \in E \mid zz^c = 1\}$$

Si $z \in E^1$, on peut choisir $u \in E$ tel que :

$$z = \frac{u}{u^c}$$

On définit un caractère α_{χ_2, χ_1} de E^1 par :

$$\alpha_{\chi_2, \chi_1}(z) = \chi_2\chi_1^{-1}(u)$$

qui est indépendant de u . La comparaison de la famille de sections est la suivante :

$$\omega_{\chi_2} = (\alpha_{\chi_2, \chi_1} \circ \det) \otimes \omega_{\chi_1}$$

Remarquons que si l'on se donne un élément non nul $\delta \in E$ de trace nulle alors si $z \in E^1$, on peut choisir dans (33), $u = \delta(z - 1)$.

6.2. Les résultats de Pan. — On suppose l'extension E/F non ramifiée dans le cas unitaire et on choisit une unité $\delta \in E$ de trace nulle. Le paragraphe précédent rappelait la définition du cocycle de la représentation de Weil, cependant cette représentation n'était explicite que dans les modèles de Schrödinger, dans le modèle $S(\mathbf{W}, \mathbb{S})$ il existe donc un caractère $\zeta_{V, \chi}$ de $K(L_W)$ tel que :

$$\omega_\chi(g)\varphi(w) = \zeta_{V, \chi}(g)\rho(g)\varphi(g^{-1}w) \quad \forall g \in U(W)$$

pour tout $g \in K(L_W)$ le caractère $\zeta_{V, \chi}$ a été déterminé sous l'hypothèse de non ramification par Pan [Pan1], le résultat est le suivant :

$$\zeta_{V, \chi}(g) = \chi(\delta(\det g - 1))\zeta(g)$$

avec $\zeta(g)$ un caractère d'ordre 2 de $K(L_W)$ qui est trivial dès que W est non ramifié.

Lemme 6.2 ([Pan1]). — *Supposons que toutes les données soient non ramifiées exceptée peut-être V , alors le caractère $\zeta_{V, \chi}$ est trivial c'est à dire que dans le modèle $S(\mathbf{W}, \mathbb{S})$:*

$$\omega_\chi(g)\varphi(w) = \rho(g)\varphi(g^{-1}w)$$

Ce résultat sera utilisé dans la partie 7.

7. Démonstration du lemme 2.9

On est toujours dans une situation locale, il s'agit de prouver le lemme. On suppose que la place $v \notin T_{V, \psi, \chi}$ et que W est ramifié.

7.1. Réduction du problème. — En suivant Pan on considère des modèles de la représentation de Weil plus généraux que ceux du paragraphe 2. On avait imposé aux réseaux L_V et L_W d'être presque autoduaux. On dira plus généralement qu'un réseau L est bon si $\varpi L^* \subset L \subset L^*$. Si L et L' sont deux réseaux bons de V et W . On définit le réseau (bon) suivant de \mathbf{W} :

$$A(L, L') = L^* \otimes L' \cap L \otimes L'^*$$

Comme on est en caractéristique impaire c'est un sous-groupe abélien du groupe de Heisenberg $H(\mathbf{W})$. Rappelons (cf. partie 3) que l'on peut associer au choix de ces deux bons réseaux de V et de W un modèle de Waldspurger généralisé $S(\mathbf{W}, \mathbb{S})$. Les fonctions invariantes par le sous-groupe $A(L, L')$ sont exactement les fonctions à support dans $B(L, L') = A(L, L')^*$ et on a un isomorphisme de $H(\mathbf{b})$ -module :

$$\begin{cases} \mathbb{S} & \rightarrow S(\mathbf{W}, \mathbb{S})^{A(L, L')} \\ s & \mapsto \varphi_s(b) = \rho(b)s \end{cases}$$

De plus sous ces hypothèses ω_χ restreintes au compact $K(L_W)$ est bien le scindage usuel (lemme 6.2). En général, si A est un réseau bon d'un espace hermitien Z , on définit les deux espaces vectoriels sur le corps résiduel de E suivants :

$$\mathfrak{a} = A/\varpi A^* \text{ et } \mathfrak{a}^* = A^*/A$$

On a une application de réduction surjective :

$$K(L) \rightarrow U(\mathbf{1}) \times U(\mathbf{1}^*)$$

dont nous notons $G_{L,0}^+$ le noyau, sous l'hypothèse de non ramification (c'est à dire que $L = L^*$), on obtient la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow G_{L,0}^+ \rightarrow K(L) \rightarrow U(\mathbf{1}) \rightarrow 1$$

et le fait que :

$$\mathbf{b} = \mathbf{1}^* \otimes \mathbf{1}$$

On notera $\bar{\bullet}$ la flèche de réduction. A l'aide de la remarque sur le scindage on vérifie que pour tout $k \in K(L)$:

$$k \bullet \varphi_s = \varphi_{\rho(\bar{k})_s}$$

En particulier, $S(\mathbf{W}, \mathbb{S})^{A(L,L')}$ est stable par l'action de $K_V(L)$ qui agit par réduction comme la représentation de Weil finie. Un des résultats principaux de Pan est le suivant :

$$(33) \quad S^{G_{L,0}^+} = \omega(\mathcal{H}_W) \sum_{L' \text{ bon}} S^{A(L,L')}$$

Remarquons d'abord le fait suivant :

$$S^{gA} = \omega(g)S^A.$$

Il suffit donc de regarder dans la somme les réseaux modulo l'action de $U(W)$. A cette action près les réseaux bons sont faciles à décrire. Soit une décomposition de Witt $W = X \oplus W_0 \oplus Y$ et une base x_1, \dots, x_r de X , soit y_1, \dots, y_r la base duale on suppose de plus que W_0 est anisotrope. Il existe alors un unique réseau bon A de W_0 et tout réseau bon de W est à conjugaison près de la forme :

$$N_i = \varpi \mathcal{O}x_1 \oplus \dots \oplus \varpi \mathcal{O}x_i \oplus \mathcal{O}x_{i+1} \dots \oplus \mathcal{O}x_r \oplus A \oplus \mathcal{O}y_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}y_r$$

On a alors :

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{n}_i^* \otimes \mathbf{1}$$

D'après les résultats précédents il s'agit de démontrer que pour tout i , sous l'hypothèse que \mathbf{a}^* est non nul (c'est à dire que W est ramifié), la représentation \mathbb{S}_i de Weil du groupe fini $\text{Sp}(\mathbf{b}_i)$ n'admet pas d'invariants sous l'action de $U(\mathbf{1})$. Nous ne connaissons pas de référence pour ce résultat qui doit être classique nous en donnons une preuve.

7.2. Représentation de Weil finie.— Nous reprenons les notations de la partie précédente :

Lemme 7.1. — *Si \mathbf{a}^* est non nul alors \mathbb{S}_i n'a pas de vecteur invariant sous $U(\mathbf{1})$.*

Démonstration. — On a une décomposition de Witt de $\mathbf{n}_i^* = X_i \oplus \mathbf{a}^* \oplus Y_i$ avec X_i isotrope de dimension i . On utilise pour définir \mathbb{S}_i un modèle mixte. Soit \mathbb{S}_0 un modèle de la représentation de Weil de $\text{Sp}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{a}^*)$. On choisit alors pour modèle de la représentation de Weil :

$$S(\mathbf{1} \otimes X_i, \mathbb{S}_0)$$

Les fonctions de $\mathbf{1} \otimes X_i$ à valeurs dans \mathbb{S}_0 . L'action de $U(\mathbf{1})$ est donnée par :

$$k \bullet \varphi(x) = \rho_0(k)\varphi(k^{-1}x)$$

Soit $(x_j)_{j \in J}$ une famille de représentants des orbites de $\mathbf{l} \otimes X_i$ sous l'action de $U(\mathbf{l})$, on note H_j le stabilisateur de x_j . On a sous l'action de $U(\mathbf{l})$ un isomorphisme :

$$S(\mathbf{l} \otimes X_i, \mathbb{S}_0) = \bigoplus_{j \in J} \text{ind}_{H_j}^{U(\mathbf{l})} \mathbb{S}_0$$

En particulier par réciprocity de Frobenius :

$$S(\mathbf{l} \otimes X_i, \mathbb{S}_0)^{U(\mathbf{l})} = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{S}_0^{H_j}$$

Nous commençons par décrire les différents groupes H_j pouvant intervenir. Les H_j (j variant également) sont exactement les fixateurs des sous-espaces vectoriels de \mathbf{l} de dimension $\leq r$. Soit \mathbf{m} un tel sous-espace vectoriel. Notons $\mathbf{m}' = \mathbf{m} \cap \mathbf{m}^\perp$, le radical de \mathbf{m} . Soit \mathbf{m}_0 un supplémentaire de \mathbf{m}' dans \mathbf{m} . Soit \mathbf{m}'' un sous-espace isotrope de \mathbf{l} en dualité avec \mathbf{m}' . Enfin, notons \mathbf{l}_0 le supplémentaire orthogonal du sous-espace non dégénéré $\mathbf{m}' \oplus \mathbf{m}_0 \oplus \mathbf{m}''$. On a une décomposition de Witt suivante de \mathbf{l} :

$$(34) \quad \mathbf{m}' \oplus (\mathbf{m}_0 \oplus \mathbf{l}_0) \oplus \mathbf{m}''$$

La somme des deux premiers facteurs étant égale à \mathbf{m} . Notons $H(\mathbf{m})$ le fixateur de \mathbf{m} . La matrice de la forme héritienne est dans une base adaptée à la décomposition précédente :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & x_0 & & \\ & & y_0 & \\ \epsilon & & & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$H(\mathbf{m}) = \left\{ h(u, \delta, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\epsilon \, {}^t \bar{\delta} y_0 u & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

avec la condition que :

$$u \in U(\mathbf{l}_0) \text{ et } \epsilon \alpha + {}^t \bar{\alpha} + {}^t \bar{\delta} y_0 \delta = 0.$$

On peut alors à nouveau décrire \mathbb{S}_0 par un modèle mixte pour lequel la description de l'action de $H(\mathbf{m})$ est bien connu ([Li3] page 246-247 formule (37),(39) et (41)). Soit \mathbb{S}_1 un modèle de la représentation de Weil de $\text{Sp}(\mathbf{m}_0 \otimes \mathbf{a}^*)$ et \mathbb{S}_2 un modèle de la représentation de Weil de $\text{Sp}(\mathbf{l}_0 \otimes \mathbf{a}^*)$. On utilise comme modèle :

$$\mathbb{S}_0 = S(\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{m}', \mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2)$$

L'action de $H(\mathbf{m})$ est décrite de la façon suivante :

1. $\rho(h(1, 0, \alpha))\varphi(x) = \psi(\text{tr}\alpha(x_i, x_j))\varphi(x)$
2. $\rho(h(1, \delta, \frac{1}{2} {}^t \bar{\delta} y_0 \delta))\varphi(x) = \rho(\delta \circ x)\varphi(x)$
3. $\rho(h(u, 0, 0))\varphi(x) = \rho_2(u)\varphi(x)$.

Soit $\varphi \in \mathbb{S}_0^{H(\mathbf{m})}$, alors le premier point et le fait que \mathbf{a}^* soit anisotrope montre que le support de $\varphi(x) = 0$ si $x \neq 0$, le troisième point montre que $\varphi(0) \in \mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2^{U(\mathbf{l}_0)}$. On a ainsi :

$$\mathbb{S}_0^{H(\mathbf{m})} = \mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2^{U(\mathbf{l}_0)}$$

On est ramené à démontrer le fait suivant :

$$\mathbb{S}_2^{U(\mathbf{l}_0)} = \{0\}$$

Supposons dans un premier temps que $\mathbf{l}_0 = X \oplus Y$ soit déployé, alors on peut utiliser pour \mathbb{S}_2 le modèle de Schrödinger $S(X \otimes \mathbf{a}^*)$. Soit φ un vecteur de \mathbb{S}_2 invariant par $U(\mathbf{l}_0)$. L'action du radical unipotent du parabolique de Siegel associé à X est donné par la même formule que le point 1 précédent. On en déduit donc que le support de φ est concentré en 0, mais un certain élément de $U(\mathbf{l}_0)$ agit comme une transformation de Fourier. La condition de support est donc impossible sauf si $\varphi = 0$. Pour conclure, il suffit de remarquer que dans tous les cas \mathbf{l}_0 (on a supposé que dans le cas 1 (resp. le cas 2) que $m > n$ (resp. $m > n + 1$)). \square

8. Caractéristique résiduelle 2

Le but de cette partie est de démontrer en caractéristique résiduelle 2 la proposition 2.11.

8.1. Deux lemmes généraux.— On se donne W un espace ϵ -héritien par rapport à une extension E/F . Si L est un réseau de W , on note L^* le réseau dual défini par rapport à un idéal de valuation r_W . On note α la valuation de 2 dans E .

Lemme 8.1. — *On se donne L un réseau de W alors il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que pour tout sous-espace isotrope $X \subset W$, on a une décomposition de Witt de W , $W = X \oplus W_0 \oplus Y$ de sorte que :*

$$L \subset \varpi^{-d}(L \cap X \oplus L \cap W_0 \oplus L \cap Y)$$

Démonstration. — On se donne c tel que :

$$(35) \quad \varpi^c L^* \subset L \text{ et } \varpi^c L \subset L^*$$

D'après le théorème des diviseurs élémentaires appliqués aux deux réseaux $L \cap I$ et $L^* \cap I$ de I . On a une base e_1, \dots, e_r de $L \cap I$ et des entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que la famille $e_1^* = \varpi^{\alpha_1} e_1, \dots, e_r^* = \varpi^{\alpha_r} e_r$ soit une base de $L^* \cap I$. On a pour tout i , $|\alpha_i| \leq c$ d'après (35). Comme I est isotrope on a : $I \subset I^\perp$. On peut alors compléter la base e_1, \dots, e_r de $L \cap I$ en une base e_1, \dots, e_s de $L \cap I^\perp$. Les réseaux $\frac{L}{L \cap I^\perp}$ et $L^* \cap I$ sont en dualité, on peut donc trouver des éléments E_1, \dots, E_r de L vérifiant :

1. $(E_i, e_j^*) = \delta_{i,j} \varpi^{r_W}$
2. $e_1, \dots, e_s, E_1, \dots, E_r$ est une base de L

La matrice de la forme est alors dans la base $e_1, \dots, e_s, E_1, \dots, E_r$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \overline{t\beta} \\ 0 & w & \epsilon \overline{t\bar{u}} \\ \beta & u & Z \end{pmatrix}$$

Les différents coefficients de la matrice sont de valuation supérieure à $r_w - c$.

Si on fait le changement de base suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & & x \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $x = -\frac{1}{2}\beta^{-1}Z$, on obtient dans la nouvelle base comme expression pour la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \overline{t\beta} \\ 0 & w & \epsilon \overline{t\bar{u}} \\ \beta & u & 0 \end{pmatrix}$$

Et si on fait encore le changement de base :

$$\begin{pmatrix} 1 & y & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

avec $y = -\beta^{-1}u$, on a alors comme expression pour la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon \overline{t\beta} \\ 0 & w & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme les matrices x et y sont à valeurs dans $\varpi^{-c'}\mathcal{O}$ avec c' qui ne dépend que de L , on en déduit bien le résultat. \square

Lemme 8.2. — *Soit L un réseau de W et a un entier. Il existe un entier b tel que pour tout sous \mathcal{O} -module R de L vérifiant :*

$$\forall r_1, r_2 \in R \quad \langle r_1, r_2 \rangle \in \varpi^b \mathcal{O}$$

Il existe alors un sous-espace isotrope I de W tel que :

$$R \subset I \cap L + \varpi^a L$$

Démonstration. — **Fait.** — *Pour tout $a \in \mathbb{N}$, il existe $b \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $b' \geq b$ et tout vecteur e_1, \dots, e_r de L linéairement indépendant dans $L/\varpi L$ et $0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_r \leq a$ vérifiant :*

$$\langle \varpi^{\alpha_i} e_i, \varpi^{\alpha_j} e_j \rangle \in \varpi^{b'} \mathcal{O}$$

Alors il existe des vecteurs e'_1, \dots, e'_r vérifiant :

1. *Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ $e_i - e'_i \in \varpi^a L$*
2. *$\langle \varpi^{\alpha_i} e'_i, \varpi^{\alpha_j} e'_j \rangle \in \varpi^{b'+1} \mathcal{O}$*

Montrons que le fait suffit pour conclure. Soit e_1, \dots, e_n une base de L tel que : $(\varpi^{\alpha_1} e_1, \dots, \varpi^{\alpha_r} e_r)$ soit une base de R . Il est clair que l'on peut supposer que pour tout i , $\alpha_i \leq a$. On a alors :

$$\langle e_i, e_j \rangle \in \varpi^{b'-\alpha_i-\alpha_j}$$

on construit alors par récurrence des suites $e_i(k)$ de vecteurs de L vérifiant :

1. *Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ $e_i - e_i(k) \in \varpi^a L$*
2. *$\langle \varpi^{\alpha_i} e_i(k), \varpi^{\alpha_j} e_j(k) \rangle \in \varpi^{b+k} \mathcal{O}$*

En extrayant des sous-suites convergentes des suites $e_i(k)$, on peut choisir pour I le sous-espace engendré par les limites qui est isotrope et vérifie la relation voulue. \square

Il nous reste à démontrer le fait. On a :

$$\langle e_i, e_j \rangle \in \varpi^{b'-\alpha_i-\alpha_j}$$

Soit e_1^*, \dots, e_n^* la base duale de la base e_1, \dots, e_n . On cherche e'_i sous la forme suivante :

$$\varpi^{\alpha_i} e'_i = \varpi^{\alpha_i} e_i + \sum_{j=1}^r a_{i,j} e_j^*$$

avec $a_{i,j} \in \varpi^{a+c}\mathcal{O}$. On aura alors bien (1). On veut de plus que l'équation suivante soit vérifiée :

$$\langle \varpi^{\alpha_i} e'_i, \varpi^{\alpha_k} e'_k \rangle \in \varpi^{b'+1}\mathcal{O}$$

Or :

$$\langle \varpi^{\alpha_i} e'_i, \varpi^{\alpha_k} e'_k \rangle = \varpi^{\alpha_i} \overline{\varpi^{\alpha_k}} \langle e_i, e_k \rangle + \varpi^{\alpha_i} \overline{a_{k,i}} + \overline{\varpi^{\alpha_k}} \epsilon a_{i,k} + \sum_{j,l} a_{i,j} \overline{a_{k,l}} \langle e_i^*, e_j^* \rangle$$

Nous posons $a_{i,j} = -\frac{\epsilon}{2} \varpi^{\alpha_i} \langle e_i, e_j \rangle \in \varpi^{b'-\alpha_j-\alpha}$, cela élimine les trois premiers termes et on a :

$$\langle \varpi^{\alpha_i} e'_i, \varpi^{\alpha_k} e'_k \rangle = \sum_{j,l} a_{i,j} \overline{a_{k,l}} \langle e_i^*, e_j^* \rangle$$

Cet élément appartient à $\varpi^{2b'-2(a+\alpha)-c}\mathcal{O}$ et donc que si on pose $b = 2(a + \alpha) + c + 1$, on obtient le fait. \square

8.2. Démonstration du résultat de finitude. — Nous reprenons les notations de la partie 2.3. Soit r' l'entier tel que $\varpi_F^{r'}$ soit le conducteur de ψ et de même r l'indice du conducteur de $\psi \circ \text{tr}$. On considère toujours les inclusions $A \subset L \subset B$. Comme L est un réseau sympléctique autodual de \mathbf{W} . Il existe une décomposition de Witt $X \oplus Y$ de \mathbf{W} telle que $L = X \cap L \oplus Y \cap L$. On définit si $l = x + y \in L$:

$$\zeta(x + y) = \langle u, v \rangle$$

Pour tout $a \in L$, on a : $\zeta(a + a') - \zeta(a) - \zeta(a') = \langle a, a' \rangle [2\omega_F^{r'}]$. On en déduit donc que l'espace suivant :

$$S(\mathbf{W}/L) = \left\{ \varphi : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(a + w) = \psi\left(\frac{1}{2}\zeta(a) + \frac{1}{2}B(w, a)\right)\varphi(w) \quad \forall a \in L \right\}$$

est un modèle de la représentation de Weil muni de l'action de $H(\mathbf{W})$ donnée par :

$$\rho(w', t)\varphi(w) = \psi\left(\frac{1}{2}B(w, w') + t\right)\varphi(w + w')$$

Pour tout $w \in \mathbf{W}$, on note s_w l'unique fonction à support dans $w + L$ telle que $s_w(w) = 1$. Pour tout $g \in U(\mathbf{W})$ la fonction $\omega(g)s_w$ est à support dans :

$$(36) \quad g(w + L) + \frac{1}{2}(gL + L)$$

On cherche à décrire l'action des sous-groupes de congruence de $U(\mathbf{W})$. Introduisons :

$$K^1 = \{g \in K_V(L_V) \mid (g - 1)B \subset 2A\}$$

Un élément de $k \in K^1$ vérifie

$$\begin{cases} kL = L \text{ et,} \\ \zeta(k^{-1}a) = \zeta(a)[2] \text{ pour tout } a \in L \end{cases}$$

L'action du groupe K^1 sur l'espace $S(\mathbf{W}/L)$ est alors donnée comme dans le cas de caractéristique impair par :

$$\omega(k)\varphi(x) = \varphi(k^{-1}x)$$

Remarquons que $K(\varpi^k L_V) \subset K^1$ si $k \geq \alpha + 1$. Soit $k \geq \alpha + 2$, nous notons $K = K(\varpi^{2k} L_V)$. Soit $t \geq 0$, notons $S[t]$ les fonctions à support dans $\varpi^{-(t+k)} L_W \otimes L_V^*$. $S[t]$ est stable par l'action de K .

Proposition 8.3. — *Il existe $t_0 \geq 0$ tel que :*

$$S^K \subset \mathcal{H}_W S[t_0]$$

Démonstration. — Il suffit de trouver un certain t_0 , tel que pour tout $t \geq t_0 + 1$:

$$S[t]^K \subset \mathcal{H}_W S[t - 1].$$

Nous considérons un vecteur

$$\varphi \in S[t]^K$$

φ est alors combinaison linéaire de vecteurs de la forme $\int_K \omega(k) s_w dk$. On peut donc supposer que

$$\varphi = \int_K \omega(k) s_w dk$$

avec $w \in \varpi^{-(t+k)} L_W \otimes L_V^*$.

Posons :

$$K_w = \{k \in K \mid (k^{-1} - 1)w \subset 2L\}$$

On remarque que K_w est un sous-groupe de K tel que si $k \in K_w$:

$$\omega(k) s_w = \psi \left(\frac{1}{2} B(w, k^{-1}w - w) \right) s_w$$

Pour que le vecteur φ soit non nul le caractère précédent doit-être trivial. On a donc pour tout $k \in K_w$:

$$\psi \left(\frac{1}{2} B(w, k^{-1}w - w) \right) = 1$$

On va en suivant Waldspurger ([Wald1],[Wald2]) construire des éléments de K_w . Notons $\text{Herm}(V)$ l'ensemble des endomorphismes de V vérifiant :

$$(cv, v') + (v, cv') = 0 \quad \forall v, v' \in V$$

Si les éléments $1 \pm c$ sont inversibles l'automorphisme $\gamma(c) = (1 - c)(1 + c)^{-1}$ est dans $U(V)$. Pour tout $x, y \in V$. On construit un élément $c_{x,y} \in \text{Herm}(V)$ défini par :

$$c_{x,y}(w) = x(y, w) - \epsilon y(x, w)$$

Lemme 8.4. — *Supposons $t \geq 1$, $x \in \varpi^{t+k} L_V$ et $y \in \varpi^k L_V$. Alors l'élément $\gamma(c_{x,y})$ est bien défini et :*

– $\gamma(c_{x,y})$ est dans K_w

– $\psi(\frac{1}{2} B((\gamma(c)_{x,y}^{-1} - 1)w, w)) = \psi(B(w, c_{x,y}w)) = \psi(\text{tr}(wx, wy)_W)$

Où on a identifié $V \otimes W$ à $\text{hom}(W, V)$ par l'isomorphisme λ suivant :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{ll} V \otimes W & \xrightarrow{\lambda} \text{hom}(V, W) \\ v \otimes w & \mapsto (v' \mapsto (v', v)w) \end{array} \right.$$

Démonstration. — Posons $c = c_{x,y}$. Sous les hypothèses, il est clair que $\gamma(c)$ est bien défini et que le point (1) est vrai, on a de plus le développement :

$$\gamma(c)^{-1} = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} c^n$$

On a donc :

$$\psi\left(\frac{\langle (\gamma(c)^{-1} - 1)w, w \rangle}{2}\right) = \prod_{n \geq 1} \psi(\langle c^n w, w \rangle)$$

Mais d'après la définition de c , on a si $n \geq 2$:

$$\psi(\langle c^n w, w \rangle) = \psi(\langle c^{n-1} w, cw \rangle) = 1$$

vu que $c^{n-1}w \in L$ et $cw \in L$. On a donc bien le premier point. Le reste est clair. \square

Remarquons que par l'isomorphisme λ , on a :

$$\begin{cases} \lambda(gw) = g \circ \lambda(w) \quad \forall g \in U(W) \text{ et,} \\ L_W \otimes L_V^* = \text{hom}(L_V, L_W) \end{cases}$$

On a d'après le lemme précédent :

$$\langle w(\varpi^{t+k} L_V), w(\varpi^{t+k} L_V) \rangle \subset \varpi^{t+r} \mathcal{O}_E$$

Soit d vérifiant les hypothèses du lemme 8.1 pour le réseau L_W et posons $a = d + 2$. Le lemme 8.2 nous donne un nombre b par rapport à ce choix de a . On suppose que $t_0 + r \geq b + 1$. On applique ce lemme et on obtient un sous-espace isotrope I de W tel que :

$$(38) \quad w(\varpi^{t+k} L_V) \subset I \cap L_W + \varpi^{d+2} L_W$$

Appliquons le lemme (8.2) , on obtient une décomposition de Witt de W de la forme $W = I \oplus W_0 \oplus J$ vérifiant :

$$(39) \quad L_W \subset \varpi^{-d}(I \cap L_W \oplus W_0 \cap L_W \oplus J \cap L_W)$$

Posons $g = \varpi \text{id}_I \oplus \text{id}_{W_0} \oplus \varpi^{-1} \text{id}_J$. On vérifie à l'aide des relations (38) et (39) que :

$$g \circ w(\varpi^{t+k} L_V) \subset \varpi L_W$$

C'est à dire que $\omega(g)\varphi$ est à support dans $S[t - 1]$, d'après (36) et le lemme 8.2. On en déduit le résultat voulu par récurrence. \square

Références

- [Berg] Nicolas Bergeron. Sur la cohomologie et le spectre des variétés localement symétriques. *Ensaios Matematicos*, 11. *Sociedade Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro*, 2006.
- [Berg] Nicolas Bergeron, Propriétés de Lefschetz automorphes pour les groupes unitaires et orthogonaux. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S)* Nà. 106 (2006).
- [Casselman] Introduction to the theory of admissible representations of p -adic groups, notes.
- [Clo] On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of cusp forms. *Invent. Math.* 83 (1986), no.2, 265–284.

- [DGW] de George, David L. ; Wallach, Nolan R. Limit formulas for multiplicities in $L^2(\Gamma \backslash G)$. *Ann. Math. (2)* 107 (1978), no. 1, 133–150.
- [GPSR] Stephen Gelbart, Ilya Piatetski-Shapiro et Stephen Rallis. Explicit constructions of automorphic L-functions. Lecture notes in Mathematics, 1254. *Springer-Verlag, Berlin*, 1987.
- [Howe] Roger Howe, θ -series and invariant theory. *Automorphic forms, representations and L-functions, Part 1* pp. 275–285, Proc. sympos. Pure Math., XXXIII, *Amer. Math. Soc., Providence*, 1979.
- [Kneser] Martin Kneser, Strong approximation. *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* pp 187–196, *Amer. Math. Soc., Providence* 1966.
- [K] Stephen S. Kudla, Splitting metaplectic covers of dual reductive pairs. *Israel J. Math.* 87 (1994), no. 1-3, 361–401.
- [KR1] Stephen S. Kudla et Stephen Rallis, Regularized Siegel-Weil formula : the first term identity. *Ann. of Math. (2)* 140 (1994), no.1, 1–80.
- [KR2] Stephen S. Kudla et Stephen Rallis. On first occurrence in the local theta correspondence. *Automorphic representations, L-functions and applications : progress and prospects*, 273–308, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 11.
- [Li1] Jian-Shu Li, Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. *Duke Math. J.* 61 (1990), nà.3, 913–937.
- [Li2] Jian-Shu Li. Nonvanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients. *J. Reine Angew. Math.* 428 (1992), 177–217.
- [Li3] Jian-Shu Li. Singular unitary representations of classical groups. *Invent. Math.* 97 (1989), no.2, 237-255.
- [Li4] Jian-Shu Li, On the dimensions of spaces of siegel modular forms of weight one. *Geom. Funct. Anal.* 6 (1996), no.3, 521–555.
- [Li5] Li, Jian-Shu Automorphic forms with degenerate Fourier coefficients. *Amer. J. Math.* 119 (1997), no. 3, 523–578.
- [LR] Erez M. Lapid et Stephen Rallis, On the local factors of representations of classical groups, *Automorphic representations, L-functions and applications : progress and prospects*, 309–359, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., 11, 2005.
- [Min] Alberto Minguez, Correspondance de Howe l -modulaire : paires duales de type II. Orsay thesis (2006).
- [MVW] Colette Moeglin, Marie-France Vigneras et Jean-Loup Waldspurger, Correspondances de Howe sur un corps p -adique. Lectures Notes in Mathematics, 1291. *Springer-Verlag*, 1987.
- [Pan1] Shu-Yen Pan, Splittings of the metaplectic covers of some reductive dual pairs, *Pacific J. Math.* 199 (2001), no.1, 163–226.
- [Pan2] Shu-Yen Pan, Depth preservation in local theta correpondance. *Duke Math J.* 113 (2002), no.3, 531–592.
- [SX] Peter Sarnak et Xiao Xi Xue, Bounds for multiplicities of automorphic representations. *Duke Math J.* 64 (1991), no.1, 207–227.
- [Sa] Gordan Savin. Limit multiplicities of cusp forms. *Invent. Math.* 95 (1989), no.1, 149–159.
- [VZ] Vogan et Zuckerman, Unitary representations with nonzero cohomology, *Comositio Math.* 53 (1984), no.1, 51–90.

- [Xue] Xiao Xi Xue, On the Betti numbers of a hyperbolic manifolds. *Geom. Funct. Anal.* 2 (1992), no.1, 126–136.
- [Wald1] Jean-Loup Waldspurger, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie. *Compositio Math.* 54 (1985), no.2, 173–242.
- [Wald2] Waldspurger, Démonstration d’une conjecture de dualité dans le cas p -adique $p \neq 2$. *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I*, 267–324, Israel Math. Conf. Proc., 2, Weizmann, Jerusalem, 1990.
- [Weil] Weil André, Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. *Acta Math.* 113 1965 1–87.

MATHIEU COSSUTTA, Département de mathématiques et applications, 45, rue d’Ulm, F 75230 Paris cedex 05 • *E-mail* : Mathieu.cossutta@ens.fr