



**HAL**  
open science

# Fibrés vectoriels de rang deux sur $P^2$ provenant d'un revêtement double

Jean Vallès

► **To cite this version:**

Jean Vallès. Fibrés vectoriels de rang deux sur  $P^2$  provenant d'un revêtement double. Annales de l'Institut Fourier, 2009, 59 (5), pp.1897-1916. hal-00289307v2

**HAL Id: hal-00289307**

**<https://hal.science/hal-00289307v2>**

Submitted on 21 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fibrés vectoriels de rang deux sur $\mathbb{P}^2$ provenant d'un revêtement double

Jean Vallès

19/06/08

## Résumé

Depuis Schwarzenberger et son célèbre article intitulé “Vector bundles on the projective plane”, on sait que tout fibré de rang deux sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  peut-être défini comme l'image directe d'un faisceau inversible sur une surface recouvrant doublement le plan. Ce théorème suggère d'étudier les fibrés de rang deux en fonction de la courbe de ramification du revêtement dont ils proviennent.

Ainsi, dans la première partie on démontre que, étant donné un revêtement ramifié le long d'une courbe irréductible  $C_{2r}$  de degré  $2r$ , les droites sauteuses d'ordre fixé (ordre dépendant de  $r$  et de la parité du fibré de rang deux) des fibrés images directes sont nécessairement  $r$ -tangentes à la courbe  $C_{2r}$ .

Dans la seconde partie nous nous penchons plus particulièrement sur le cas  $r = 2$ . Nous donnons alors une liste de fibrés pour lesquels les droites sauteuses sont exactement les bitangentes de la quartique de ramification.

## Abstract

Since Schwarzenberger and his celebrated paper called “Vector bundles on the projective plane” we know that any rank two vector bundle on  $\mathbb{P}^2$  is a direct image of a line bundle on a double covering of the plane. This theorem suggests to study the rank two vector bundles according to the branch curve of the covering which they come from.

Thus, in the first part we prove that, given a double covering ramified over an irreducible curve  $C_{2r}$  with degree  $2r$ , the jumping lines of fixed order (order depending on  $r$  and on the parity of the rank two vector bundle) of the direct images vector bundles are necessarily  $r$ -tangent to  $C_{2r}$ .

In the second part we concentrate on the case  $r = 2$ . Then we give a list of vector bundles for which the jumping lines are exactly the bitangent lines to the branch quartic.

Mots clés : fibrés de rang deux, droites de saut, courbe de ramification, bitangentes

## 1 Introduction

Tout fibré de rang deux sur  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  peut-être défini comme l'image directe d'un faisceau inversible sur une surface recouvrant doublement le plan ([8], thm 3). Ce théorème est le point de départ de cet article et son fil rouge. Reprenant donc l'idée de Schwarzenberger, on se propose d'étudier les fibrés de rang deux comme images de faisceaux inversibles d'un revêtement donné. Plus précisément ce dernier étant caractérisé par sa ramification, on étudiera les images directes pour une courbe de ramification fixée.

Considérons donc  $\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$  un revêtement double du plan projectif complexe ramifié le long d'une courbe lisse  $C_{2r}$  de degré  $2r$ ,  $L$  un fibré inversible sur  $X_r$  et  $E = \pi_*L$  son image directe dans  $\mathbb{P}^2$ . Schwarzenberger montre, pour les cas  $r = 1$  et  $r = 2$ , les deux propositions suivantes (on définit les notions de droites de saut et d'ordre de saut dans la section qui suit cette introduction)

**Proposition**([8], prop.8,  $r = 1$ ) *Une droite est une droite de saut de  $E$  si et seulement si elle est tangente à la conique de ramification, que  $c_1(E)$  soit paire ou impaire.*

**Proposition**([8], prop.10,  $r = 2$ ) *Lorsque  $c_1(E)$  est impaire toute droite de saut de  $E$  est tangente à la quartique de ramification. Lorsque  $c_1(E)$  est paire, ce n'est pas nécessairement le cas.*

Une vingtaine d'années plus tard Ottaviani généralisera ce résultat en reprenant l'idée de la démonstration de la prop. 10 de [8],

**Proposition**([6], prop.6,  $r \geq 1$ )

$$l \text{ est une droite } (\lceil \frac{r+\epsilon}{2} \rceil + 1)\text{-sauteuse de } E \implies l \text{ est tangente à } C_{2r}.$$

où  $\epsilon = 0$  si  $c_1(E)$  est paire et vaut  $-1$  sinon.

Si l'on évoque les tangentes d'une quartique lisse, on pense obligatoirement à ses 28 bitangentes (celles-ci déterminent la quartique, d'après [2], qui à son tour détermine le revêtement). Quelle ne fut pas ma surprise en découvrant que, dans le cas  $r = 2$  et lorsque  $c_1(E)$  est impaire, toute droite de saut de  $E$  est non seulement tangente mais même bitangente à la quartique, concentrant le schéma des droites de saut sur un ensemble fini! Plus généralement, on montre

**Théorème** (thm 3.2, section 3)

$$l \text{ est une droite } (\lceil \frac{r+\epsilon}{2} \rceil + 1)\text{-sauteuse de } E \implies l \text{ est } r\text{-tangente à } C_{2r}.$$

où  $\epsilon = 0$  si  $c_1(E)$  est paire et vaut  $-1$  sinon.

**Remarque :** De plus, pour prouver ce dernier résultat, l'hypothèse d'irréductibilité de la courbe de ramification (au lieu de la lissité) suffit.

Une conséquence intéressante de ce théorème est que pour  $r = 3$ , lorsque la sextique de ramification est générale, en particulier lorsqu'elle ne possède pas de tritangente, les fibrés images directes n'ont pas de droites bisauteuses. Ce théorème permet aussi de dresser une liste des fibrés instables (corollaire 3.6) ou décomposés (corollaire 3.5) pouvant s'écrire comme images directes. La preuve, d'inspiration différente de celle de Schwarzenberger, exploite l'existence de la section non nulle d'un décalé de  $S^2E$  qui donne le plongement  $X_r \hookrightarrow \mathbb{P}E$  (lemme 3.1).

Dans une deuxième partie (cf section 4), dévolue plus particulièrement au cas  $r = 2$ , on donne une liste de fibrés stables de première classe de Chern impaire dont l'ensemble des droites de saut est exactement l'ensemble des bitangentes de la quartique (théorème 4.4 et la remarque 4.5). Pour décrire les schémas de droites de saut, notamment les ordres de saut, nous introduisons des suites exactes courtes naturelles reliant les images directes entre elles. Cette seconde partie, notamment le calcul explicite des images directes, s'appuie sur une description détaillée de l'involution bien connue de Geiser (plus exactement il s'agit de la transformation appelée (1, 2) par Bateman dans [1]) : le revêtement double est construit à partir de 7 points en position générale du plan et du système linéaire des cubiques ayant ces points comme lieu de base.

Je remercie chaleureusement les membres de l'équipe de géométrie algébrique de l'université Ulisse Dini de Florence qui m'ont accueilli et tout particulièrement Elena Rubei pour son invitation et Giorgio Ottaviani pour son soutien permanent. Si j'ai eu le loisir de travailler à Florence et d'y écrire ce texte en ayant le sentiment que (...) "tout ce que je fis durant mon séjour ne fut en effet que l'occupation délicate et nécessaire d'un homme qui s'est dévoué à l'oisiveté"<sup>1</sup> c'est aussi grâce à l'obtention d'une délégation au CNRS dont je tiens à souligner combien elle est bienvenue dans la carrière d'un maître de conférences.

## 2 Rappels généraux et notations principales

1) **Droites de saut.** Soit  $E$  un fibré vectoriel de rang deux sur le plan projectif complexe  $\mathbb{P}^2$ . Sur toute droite  $l \in \mathbb{P}^{2\vee}$  le fibré restreint  $E_l$  est une somme directe de faisceaux inversibles : il existe  $a_l, b_l \in \mathbb{Z}$  vérifiant

$$E_l = O_l(a_l) \oplus O_l(b_l), \quad a_l + b_l = c_1(E)$$

Afin de limiter les tournures un peu lourdes on appellera parfois *fibrés pairs* (respectivement *impairs*) les fibrés vectoriels de rang deux dont la première classe de Chern est paire (respectivement impaire). On associe au fibré  $E$  l'entier  $\epsilon := \epsilon(E)$  qui vaut 0 lorsque  $E$  est pair et  $-1$  lorsque  $E$  est impair.

**Définition 2.1.** Soit  $i$  un entier strictement positif. Une droite  $l$  est une droite  $i$ -sauteuse de  $E$  si et seulement si  $|a_l - b_l| \geq 2i - \epsilon$ . On note  $S_i(E)$  l'ensemble de ses droites  $i$ -sauteuses et  $S(E)$  le schéma de ses droites de saut.

Habituellement on réserve cette appellation aux fibrés vectoriels de rang deux stables ou semi-stables, c'est à dire essentiellement (on excepte  $O_{\mathbb{P}^2}^2$ ) les fibrés vectoriels de rang deux pour lesquels l'implication suivante est vérifiée :

$$c_1(E(n)) < 0 \Rightarrow h^0(E(n)) = 0$$

Dans ce cas, conformément au théorème de Grauert-Mulich, la droite générale n'est pas sauteuse. De plus lorsque  $E$  est pair  $S(E)$  est un diviseur (une courbe de  $\mathbb{P}^{2\vee}$ ) et lorsque  $E$  est impair le schéma est en général fini mais peut aussi dans des cas particuliers contenir une courbe ; lorsqu'il est fini sa longueur vaut  $\binom{c_2(E)}{2}$ .

Cependant, tout comme dans l'article originel de Schwarzenberger, c'est la décomposition du fibré  $E$  en fonction du fibré en droite dont il provient qui nous intéresse, pas sa stabilité. C'est pourquoi garder la même terminologie pour tous semblait moins déroutant que d'en introduire une différente (elles sont appelées exceptionnelles par Schwarzenberger). Ainsi, pour les fibrés instables on aura (voir ci-dessous le rappel)  $S_1(E) = \mathbb{P}^{2\vee}$  et  $S_i(E)$  pour un  $i > 1$  sera supporté par une réunion de droites de  $\mathbb{P}^{2\vee}$ . Pour les fibrés décomposés en somme directe de fibrés inversibles sur  $\mathbb{P}^2$  le saut est constant.

2) **Fibrés instables non décomposés.** Rappelons maintenant quelques résultats classiques concernant les fibrés instables sur le plan projectif.

Soit  $E$  un fibré de rang deux sur  $\mathbb{P}^2$ , non décomposé comme somme directe de fibrés en droites et tel que que  $c_1(E) = -1$  ou  $-2$ . Alors  $E$  est instable si et seulement s'il existe

<sup>1</sup>Les rêveries du promeneur solitaire (J.J. Rousseau)

$k \geq 0$  tel que  $H^0(E(-k)) \neq 0$  et  $H^0(E(-1-k)) = 0$ . De plus  $h^0(E(-k)) = 1$  et cette unique section s'annule en codimension 2 le long d'un schéma non vide (sinon le fibré est décomposé) de longueur  $c_2(E(-k))$ . Ainsi l'on peut écrire

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow E(-k) \longrightarrow J_Z(-2k + c_1) \longrightarrow 0$$

On constate que sur la droite générale  $E_l = O_l \oplus O_l(c_1 - 2k)$  tandis que sur les droites rencontrant  $Z$  en degré  $i$  on a  $E_l = O_l(i) \oplus O_l(c_1 - 2k - i)$ .

### 3 Puissance symétrique associée au revêtement

Commençons par un résultat presque tautologique mais très utile.

**Lemme 3.1.** *Soit  $\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$  un revêtement double ramifié le long d'une courbe irréductible de degré  $2r$  de  $\mathbb{P}^2$ . Soient  $L$  un faisceau inversible sur la surface  $X_r$  et  $E = \pi_* L$  fibré de rang deux sur  $\mathbb{P}^2$ . Alors il existe une section non nulle  $s \in H^0((S^2 E)(r - c_1(E)))$  et plus précisément un homomorphisme symétrique  $\phi_s \in \text{Hom}(E^\vee, E(r - c_1(E)))$  dont le conoyau est un faisceau de rang 1 supporté par la courbe de ramification*

*Démonstration.* On note  $h$  la classe de  $O_{\mathbb{P}^2}(1)$ ,  $\eta$  la classe du relativement ample sur le fibré projectif  $\mathbb{P}E$ ,  $\pi$  le morphisme canonique  $\pi : \mathbb{P}E \rightarrow \mathbb{P}^2$  et  $c_1$  la première classe de Chern de  $E$ .

Une section non nulle  $s \in H^0(S^2 E(r - c_1)) = H^0(O_{\mathbb{P}E}(2\eta + (r - c_1)h))$  définit un diviseur  $X_r$  de  $\mathbb{P}E$  qui est un revêtement double de  $\mathbb{P}^2$ . En effet considérons la suite exacte définissant le diviseur  $X_r$

$$0 \rightarrow O_{\mathbb{P}E}(-2\eta + (c_1 - r)h) \rightarrow O_{\mathbb{P}E} \rightarrow O_{X_r} \rightarrow 0$$

Le faisceau dualisant relatif est  $\omega_{\mathbb{P}E/\mathbb{P}^2} = O_{\mathbb{P}E}(-2\eta + c_1 h)$  ([5], ex. 8.4). On en déduit que  $R^1 \pi_* O_{\mathbb{P}E}(-\eta) = 0$  et  $R^1 \pi_* O_{\mathbb{P}E}(-2\eta) = O_{\mathbb{P}^2}(-c_1)$ , ce qui implique

$$E = \pi_* O_{X_r}(\eta) \text{ et } \pi_* O_{X_r} = O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-r)$$

Réciproquement, notons  $f = 0$  l'équation de la courbe de ramification. Alors, dans un sens plus imagé que précis (pour plus de précision on consultera, par exemple, les pages 173-174 de [7]), on peut considérer que la racine carrée  $\sqrt{f}$  existe en tant que diviseur  $D$  sur  $X_r$  et qu'elle induit une suite exacte, canonique (où  $D$  est la courbe de ramification "en haut")

$$0 \rightarrow \pi^* O_{\mathbb{P}^2}(-r) \rightarrow O_{X_r} \rightarrow O_D \rightarrow 0$$

Cette dernière suite exacte, tensorisée par un fibré en droite  $L$  de  $X_r$ , descend sur  $\mathbb{P}^2$

$$0 \rightarrow \pi_* L(-r) \rightarrow \pi_* L \rightarrow K \rightarrow 0 \tag{1}$$

où  $K$  est un faisceau de rang 1 supporté par la courbe de ramification  $\{f = 0\}$ . Par ailleurs cette application est symétrique, puisque la ramification est le lieu des points fixes sous l'action du groupe de Galois  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Pour se convaincre de la symétrie on utilisera la décomposition suivante des fibrés

$$E \otimes E = \bigwedge^2 E \oplus S^2 E$$

où  $E = \pi_*L$ . La suite exacte (1) correspond à une section non nulle de  $E \otimes E(r - c_1)$ . La décomposition canonique en parties symétrique et antisymétrique s'écrit

$$E \otimes E(r - c_1) = O_{\mathbb{P}^2}(r) \oplus S^2E(r - c_1)$$

Ceci donne sur les espaces de sections

$$H^0(E \otimes E(r - c_1)) = H^0(O_{\mathbb{P}^2}(r)) \oplus H^0((S^2E)(r - c_1))$$

Soit  $P$  une forme non nulle de degré  $r$ . Elle induit une section  $s_P \in H^0(E \otimes E(r - c_1))$  décrite ci-dessous

$$0 \longrightarrow E(-r) \xrightarrow{s_P} E \longrightarrow E_{\{P=0\}} \longrightarrow 0$$

Le conoyau est un faisceau de rang deux sur la courbe  $\{P = 0\}$  de degré  $r$  et non pas un faisceau de rang 1 supporté par une courbe de degré  $2r$ . Ceci montre que la section de  $H^0(E \otimes E(r - c_1))$  obtenue via la racine carrée de  $f$  provient de la partie symétrique  $H^0((S^2E)(r - c_1))$ .  $\square$

Grâce à ce rappel nous prouvons,

**Théorème 3.2.** *Soient  $\pi : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$  un revêtement double ramifié le long d'une courbe irréductible  $C_{2r}$  de degré  $2r$ ,  $L$  un fibré inversible sur  $X_r$  et  $E = \pi_*L$  son image directe dans  $\mathbb{P}^2$ . Alors,*

$$l \text{ est une droite } (\lceil \frac{r+\epsilon}{2} \rceil + 1)\text{-sauteuse de } E \implies l \text{ est } r\text{-tangente à } C_{2r}.$$

où  $\epsilon = 0$  si  $c_1(E)$  est pair et vaut  $-1$  sinon.

**Remarque 3.3.** *En d'autres termes, quitte à supposer que  $c_1(E) = 0$  ou  $-1$ , cet énoncé affirme qu'une droite  $l$  au dessus de laquelle :*

$$E_l = O_l(s+1) \oplus O_l(-s-1) \text{ lorsque } r = 2s \text{ et } c_1(E) = 0 \text{ ou}$$

$$E_l = O_l(s) \oplus O_l(-s-1) \text{ lorsque } r = 2s \text{ et } c_1(E) = -1 \text{ ou}$$

$$E_l = O_l(s+1) \oplus O_l(-s-1) \text{ lorsque } r = 2s+1 \text{ et } c_1(E) = 0 \text{ ou}$$

$$E_l = O_l(s+1) \oplus O_l(-s-2) \text{ lorsque } r = 2s+1 \text{ et } c_1(E) = -1$$

est nécessairement  $r$ -tangente à la courbe  $C_{2r}$ .

*Démonstration.* Considérons la section non nulle de  $H^0((S^2E)(r - c_1))$  donnée par le lemme précédent. Elle induit une application symétrique

$$\phi_s : E^\vee \longrightarrow E(r - c_1)$$

Si  $E_l = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$  (avec  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  fibrés inversibles sur  $l$ ) nous pouvons écrire

$$(\phi_s)_l : \mathcal{A}^\vee \oplus \mathcal{B}^\vee \rightarrow \mathcal{A}(r) \oplus \mathcal{B}(r)$$

ou bien

$$(\phi_s)_l : \mathcal{B}^\vee \oplus \mathcal{A}^\vee \rightarrow \mathcal{A}(r) \oplus \mathcal{B}(r)$$

— Montrons que le premier cas ne peut se produire. En effet, compte tenu de la symétrie de  $\phi_s$ , il mène à

$$E_l^\vee = O_l(-i) \oplus O_l(i - c_1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & F_l \end{pmatrix}} E_l(r - c_1) = O_l(r - i) \oplus O_l(r + i - c_1)$$

Avec  $E_l, F_l$  des polynômes de degrés égaux à  $r$ .

Soit alors,  $f(x_0, x_1, x_2) = 0$  l'équation de la courbe de ramification. Plaçons-nous sur un ouvert de Zariski  $U$ , disons pour simplifier, sur l'ouvert  $U = \{x_0 \neq 0\}$ . Sur cet ouvert, l'application  $\phi : E \rightarrow E(r)$  est représentée par une matrice

$$M_U = \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix}$$

où  $E, F, G$  sont des polynômes (non homogènes) en les variables affines  $(x_1, x_2)$ . Son déterminant vaut  $EF - G^2 = f(x_1, x_2)$ , où l'on note encore  $f(x_1, x_2) = 0$  l'équation affine de la courbe de ramification.

On remarque que, excepté lorsque  $E = O_{\mathbb{P}^2}^2$ , il existe toujours, pour  $E$  semi-stable, stable, instable ou décomposé, au moins un diviseur de droites (i.e. une famille une dimensionnelle de droites) et un entier  $i > 0$  tels que

$$E_l = O_l(i + c_1) \oplus O_l(-i)$$

Par exemple, si  $E$  est stable c'est vrai, sur la droite générale pour  $i = 1, c_1 = -1$  et sur un diviseur pour  $i = 1, c_1 = 0$ .

On considère donc la restriction aux droites  $l \subset U$  sur lesquelles

$$E_l = O_l(i + c_1) \oplus O_l(-i), \quad i > 0$$

(elles forment un diviseur de  $U$ ). On a

$$E_l = O_l(i + c_1) \oplus O_l(-i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} E_l & G_l \\ G_l & F_l \end{pmatrix}} E_l(r) = O_l(r + i + c_1) \oplus O_l(r - i)$$

Mais alors  $\deg(G_l) = r - 2i - c_1$  et  $\deg(G_l) = r + 2i + c_1$ . Ceci implique  $G_l \equiv 0$  sur la famille une-dimensionnelle de droites de l'ouvert  $U$ , par conséquent  $G \equiv 0$  sur l'ouvert  $U$ . On en déduit que  $f(x_1, x_2) = 0$  n'est pas irréductible ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

— Ce premier cas s'avérant impossible, considérons la seconde écriture. L'application  $\phi_s$  restreinte à la droite  $l$ , compte tenu de la symétrie, est donc

$$E_l^\vee = O_l(i - c_1) \oplus O_l(-i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} A_l & B_l \\ B_l & C_l \end{pmatrix}} E_l(r - c_1) = O_l(r - i) \oplus O_l(r + i - c_1)$$

Avec  $A_l, B_l, C_l$  des polynômes sur  $l$  de degrés respectivement égaux à  $r - 2i + c_1$ ,  $r$  et  $r + 2i - c_1$ .

L'hypothèse " $l$  est une droite ( $\lceil \frac{r+c}{2} \rceil + 1$ )-sauteuse de  $E$ " implique que  $r - 2i + c_1 < 0$ . Mais alors cette inégalité impose que  $A_l \equiv 0$ . Par conséquent le schéma supporté par l'intersection  $l \cap C_{2r}$  est défini par l'équation  $B_l^2 = 0$ . Et le théorème est prouvé.  $\square$

**Remarque 3.4.** *Ainsi dans le cas  $r = 1$  les droites de saut coïncident avec les droites tangentes à la conique  $C_2$  que  $E$  soit pair ou impair. Lorsque  $r = 2$  les droites de saut, pour  $E$  impair, et les droites bisauteuses, pour  $E$  pair, sont obligatoirement bitangentes à la quartique de ramification  $C_4$  (et donc, ensemblistement, elles sont au plus 28 droites distinctes!) Enfin pour  $r = 3$ , une sextique générale  $C_3$  n'ayant pas de tritangente, les fibrés associés, pairs ou impairs, n'ont pas de bisauteuses.*

Ce théorème valant pour toutes les images directes de faisceaux inversibles sans considération de stabilité, il permet de dresser une liste des fibrés instables et décomposés provenant d'en haut.

**Corollaire 3.5.** *Soit  $L$  un faisceau inversible sur  $X_r$  tel que  $E = \pi_*L$  est décomposé. Alors au décalage près on a  $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i)$  avec  $0 \leq i \leq r$ .*

*Démonstration.* Si  $i$  vérifiait  $i > r$  toutes les droites de  $\mathbb{P}^2$  devraient être  $r$ -tangentes à la ramification, ce qui n'est pas.  $\square$

**Corollaire 3.6.** *Soit  $L$  un faisceau inversible sur  $X_r$  tel que  $E = \pi_*L$ . On suppose qu'il n'est pas décomposé. Alors*

$$i > \lceil \frac{r}{2} \rceil + \epsilon \Rightarrow h^0(E(-i)) = 0$$

**Remarque 3.7.** 1) *Pour  $r \geq 3$ , lorsque  $C_{2r}$  n'a pas de tritangente, l'unique section non nulle de  $h^0(E(-\lceil \frac{r}{2} \rceil - \epsilon))$  s'annule sur un point lisse, en d'autres termes les seuls cas, après normalisation, sont*

$$(c_1, c_2) = (-1, 1 - \frac{(r-3)(r-1)}{4}) \text{ ou } (c_1, c_2) = (0, 1 - \frac{r^2}{4})$$

2) *Pour  $r = 1$  et  $r = 2$  les seules images directes (de faisceaux inversibles) instables sont décomposées.*

*Démonstration.* La preuve pour  $c_1 = -1$  et  $r$  pair suffit à se convaincre de la validité du corollaire. Plaçons nous directement sur le bord et considérons l'unique section non nulle associée

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow E(-\frac{r}{2} + 1) \longrightarrow J_Z(-r + 1) \longrightarrow 0$$

Pour une droite  $l$  générale on a  $E_l(-\frac{r}{2} + 1) = \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-r + 1)$ . Si une droite  $l$  intersecte le schéma des zéros  $Z$  (nécessairement non vide par hypothèse) en degré  $i$ , la restriction du fibré est  $E_l(-\frac{r}{2} + 1) = \mathcal{O}_l(i) \oplus \mathcal{O}_l(-r + 1 - i)$ . Si  $i > 1$  la droite  $l$  est  $r$ -tangente à la courbe de ramification en vertu du théorème précédent. Par conséquent, s'il n'existe pas de  $r$ -tangente à la courbe, le schéma  $Z$  est supporté par un point et il est lisse (de longueur égale à 1).  $\square$

### 3.1 Théta-caractéristiques sur $C_{2r}$

Soit  $E$  un fibré de rang deux obtenu comme image directe d'un faisceau inversible sur  $X_r$ . Considérons l'homomorphisme symétrique correspondant à la section non nulle  $s \in H^0((S^2E)(r - c_1(E)))$ . On note  $\theta$  le faisceau de rang 1 qui apparait comme conoyau de cet homomorphisme. À la suite exacte

$$0 \longrightarrow E(-r) \longrightarrow E \longrightarrow \theta \longrightarrow 0$$

on applique le foncteur  $\underline{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3))$  pour avoir

$$0 \longrightarrow E^\vee(-3) \longrightarrow E^\vee(r-3) \longrightarrow \underline{Ext}^1(\theta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) \longrightarrow 0$$

ce qui prouve  $\underline{Ext}^1(\theta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) = \theta(r - c_1 - 3) = \theta^* \otimes \omega_{C_{2r}}$ . Comme  $\omega_{C_{2r}} = \mathcal{O}_{C_{2r}}(2r - 3)$  on trouve  $\theta^2 = \mathcal{O}_{C_{2r}}(r + c_1)$ , i.e le faisceau conoyau est une racine carrée de  $\mathcal{O}_{C_{2r}}(r + c_1)$ . Quand  $c_1 = r - 3$  c'est une théta-caractéristique sur  $C_{2r}$ . On la retrouvera dans la deuxième partie.



## 4 En famille, autour d'une quartique plane

Dans cette partie nous nous concentrons sur le cas  $r = 2$  dont Schwarzenberger a commencé l'étude dans [8]. On rappelle tout d'abord la construction du revêtement double comme éclatement de sept points de  $\mathbb{P}^2$ ; on explique comment obtenir les courbes de ramification "en haut" et "en bas" ainsi que le moyen de récupérer les 28 bitangentes à partir des sept points de départ (voir section 4.1). Puis on décrit l'éclaté du plan projectif le long de sept points par le système de cubiques comme hypersurface de bidegré  $(2, 1)$  de la variété d'incidence "points-droites" de  $\mathbb{P}^2$ . Ceci permet de calculer les images directes des fibrés structuraux  $O_{\mathbb{P}^2}(n)$ , que l'on notera  $E_n$ , ainsi que leur résolutions et quelques suites exactes dignes d'intérêt (voir la section 4.2). Dans la section 4.3, avant d'énoncer le théorème concernant les droites de saut des fibrés  $E_n$ , on rappelle le calcul des classes de Chern de toutes les images directes (c'est le thm 5 de [8]) des faisceaux inversibles sur  $X_2$ , préalablement définis à partir du groupe de Picard de cette surface. Déterminer les faisceaux inversibles qui ont même image (au décalage près) ne semble pas très simple. La proposition que Schwarzenberger donne paraît inexacte. Nous y revenons dans la dernière section 4.4.

### 4.1 Retour sur l'involution de Geiser

Étant donnés sept points en position assez générale dans le plan projectif, on considère l'application rationnelle qui associe, à un huitième point du plan, l'unique pinceau de cubiques passant par les huit points. Si on note  $Z = \{x_1, \dots, x_7\}$  et  $(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)$  une base du réseau de cubiques passant par les sept points  $x_i$ , l'application est tout simplement

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, x \mapsto ((\Delta_0(x), \Delta_1(x), \Delta_2(x)))$$

Deux cubiques se coupant en 9 points  $\{x, y, x_1, \dots, x_7\}$ , les points  $x$  et  $y$  ont même image et l'application rationnelle est de degré deux (l'involution de Geiser, proprement dite, échange  $x$  et  $y$ ). Décrivons précisément l'éclatement du plan le long de ce groupe de points  $Z$ .

On pose  $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V$  et  $W = H^0 J_Z(3)$ . Écrivons une résolution minimale de cet idéal

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-2) \xrightarrow{M} W \otimes O_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{(\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2)} J_Z(3) \longrightarrow 0$$

où, quitte à fixer des bases,  $M = \begin{pmatrix} X_0 & C_0 \\ X_1 & C_1 \\ X_2 & C_2 \end{pmatrix}$ . On a donc le plongement suivant

$$\mathbb{P}J_Z \hookrightarrow \mathbb{P}W \times \mathbb{P}V = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$$

L'éclatement de  $\mathbb{P}^2$  le long de  $Z$  est défini dans ce produit par les équations

$$\sum \Delta_i X_i = 0 \text{ et } \sum \Delta_i C_i = 0$$

L'image d'un point  $x \in \mathbb{P}V$  est le pinceau de cubiques passant par ce point  $x$  et par  $Z$ . La courbe des cubiques singulières du réseau  $\langle \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2 \rangle$  vue dans l'espace des cubiques

est une douzique. Cette douzique possède 28 points doubles correspondant aux 7 cubiques doubles en un des  $x_i$  mais aussi aux 21 cubiques décomposées en une droite passant par deux des sept points et une conique passant par les cinq autres. Cette cubique, doublement singulière donne un point double. Chaque point double de la douzique correspond à une bitangente de la courbe duale dans le  $\mathbb{P}^2$  des pincesaux de cubiques. On trouve ainsi notre quartique de ramification et ses 28 bitangentes, dont les sept de départ forment un système d'Aronhold, puisqu'elles engendrent les 21 autres (voir [3] chap.6, pour une définition plus précise d'un système d'Aronhold).

On notera  $l_i, i = 1, \dots, 7$  les bitangentes correspondantes aux points  $x_i, i = 1, \dots, 7$  et  $l_{ij}$  celles associées au choix de deux points  $x_i$  et  $x_j$  parmi les sept.

La fibre  $q^{-1}(\underline{\alpha})$  est définie dans  $\mathbb{P}V$  par les équations

$$\sum \alpha_i X_i = 0 \text{ et } \sum \alpha_i C_i = 0$$

La ramification “en bas” (dans  $\mathbb{P}W$ ) correspond aux points  $\underline{\alpha}$  pour lesquels :

$$\sum \alpha_i X_i = 0 \text{ est tangente à la conique d'équation } \sum \alpha_i C_i = 0.$$

Soit  $A = (l_{ij})$  la matrice associée à la conique  $\sum \alpha_i C_i = \sum l_{ij}(\underline{\alpha}) X_i X_j$  et  $\tilde{A}$  sa matrice transposée des cofacteurs. La droite  $\sum \alpha_i X_i = 0$  touche la conique d'équation  $\sum \alpha_i C_i = 0$  si et seulement si  $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  appartient à la conique duale i.e.  $\langle \tilde{A}\underline{\alpha}, \underline{\alpha} \rangle = 0$ . C'est l'équation de la quartique de ramification. Cette quartique est lisse en général (i.e. quand les sept points sont en position générale). Bateman ([1], page 360) précise qu'elle a un point double lorsque trois points sont alignés ou six sur une conique, qu'elle est formée de deux coniques lorsque six points sont les sommets de quatre droites etc.

Dans  $\mathbb{P}V$ , ou encore “en haut”, la ramification est définie ensemblistement par

$$\{x \in \mathbb{P}^2 \mid H^0(J_Z \otimes \mathfrak{m}_x^2(3)) \neq 0\}$$

C'est la sextique d'équation

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_0}{\partial X_0} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_0} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_0} \\ \frac{\partial \Delta_0}{\partial X_1} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \Delta_0}{\partial X_2} & \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial X_2} \end{pmatrix} = 0$$

Elle est, par définition, birationnelle à la ramification “en bas”, c'est à dire à la quartique ; elle est donc irréductible et possède 7 points doubles d'après Hurwitz.

## 4.2 Premiers calculs d'images directes

L'éclaté  $X = \mathbb{P}J_Z$  est défini dans  $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  par deux équations  $\sum X_i \Delta_i = 0$  et  $\sum C_i \Delta_i = 0$ . La première des deux, identifiant  $W$  à  $V^*$  réalise une dualité. On peut alors considérer que  $\mathbb{P}J_Z$  est une hypersurface de bidegré  $(2, 1)$  de la variété d'incidence point-droite de  $\mathbb{P}V$  où les droites de  $\mathbb{P}V$  sont les cubiques passant par les sept points base du départ.

On note  $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$  la variété d'incidence "points-droites" de  $\mathbb{P}^2$ ,  $p$  et  $q$  les projections,  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  leurs restrictions à la sous-variété  $\mathbb{P}J_Z$ .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^{2V} = \mathbb{P}W & \xleftarrow{\bar{q}} & \mathbb{P}J_Z \subset \mathbb{F} & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{2V} = \mathbb{P}W \\ & & \bar{p} \downarrow p & & \\ & & \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}V & & \end{array}$$

Grâce à la suite exacte ci-dessous, exprimant que  $\mathbb{P}J_Z$  est une hypersurface de  $\mathbb{F}$

$$0 \longrightarrow p^*O_{\mathbb{P}^2}(-2) \otimes q^*O_{\mathbb{P}^2}(-1) \xrightarrow{\sum C_i \Delta_i} O_{\mathbb{F}} \longrightarrow O_{\mathbb{P}J_Z} \longrightarrow 0$$

on résout les fibrés images directes  $\bar{q}_* \bar{p}^* O_{\mathbb{P}^2}(n)$ . Ces images directes sont de rang deux car elles proviennent de fibrés inversibles sur la surface  $\mathbb{P}J_Z$  qui est un revêtement double de notre plan.

**Proposition 4.1.** *On pose  $E_n := \bar{q}_* \bar{p}^* O_{\mathbb{P}^2}(n)$ . Pour  $n \geq 2$  on a des résolutions*

$$0 \longrightarrow [S^{n-2}\Omega^\vee(-1)](-1) \longrightarrow S^n\Omega^\vee(-1) \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$$

*De plus,  $E_0 = O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-2)$ ,  $E_1 = \Omega^\vee(-1)$  et  $E_{-n} = (E_n)^\vee(-2) = E_n(-3n)$ . Lorsque  $n > 0$ , on a  $H^0(E_n(1-n)) = 0$ , en particulier les fibrés  $E_n$  sont stables.*

*Démonstration.* La variété d'incidence est une sous-variété du produit  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2V}$  définie par une équation de bidegré  $(1, 1)$  plus suitexactement,

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2V}}(-1, -1) \xrightarrow{\sum X_i \Delta_i} O_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2V}} \longrightarrow O_{\mathbb{F}} \longrightarrow 0$$

On calcule l'image directe de  $p^*O_{\mathbb{P}^2}(n)$  par le morphisme  $q$

$$0 \longrightarrow H^0(O_{\mathbb{P}^2}(n-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^{2V}}(-1) \longrightarrow H^0(O_{\mathbb{P}^2}(n-1)) \otimes O_{\mathbb{P}^{2V}}(-1) \longrightarrow q_* p^* O_{\mathbb{P}^2}(n) \longrightarrow 0$$

Ce qui prouve que  $q_* p^* O_{\mathbb{P}^2}(n) = S^n \Omega^\vee(-1)$ . C'est ainsi que s'obtient la résolution type.

Le calcul via l'espace produit  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{2V}$  du faisceau  $R^1 q_* p^* O_{\mathbb{P}^2}(-n)$  permet de montrer  $E_{-n} = (E_n)^\vee(-2)$ . Quant au dernier point, on tensorise la résolution de  $E_n$  par  $O_{\mathbb{P}^2}(1-k)$  pour  $k \geq 1$

$$0 \longrightarrow [S^{n-2}\Omega^\vee(-1)](-k) \longrightarrow [S^n\Omega^\vee(-1)](1-k) \longrightarrow E_n(1-k) \longrightarrow 0$$

et, en prenant la longue suite exacte de cohomologie, il vient

$$0 \longrightarrow H^0(E_n(1-k)) \longrightarrow H^1([S^{n-2}\Omega^\vee(-1)](-k)) \longrightarrow H^1([S^n\Omega^\vee(-1)](1-k))$$

En outre, on vérifie facilement que

$$0 \longrightarrow H^1([S^{n-2}\Omega^\vee(-1)](-k)) \longrightarrow S^{n-3}V \otimes S^{k-2}V^* \longrightarrow S^{n-2}V \otimes S^{k-3}V^*$$

et que cette dernière flèche est un isomorphisme quand  $k = n$ , c'est à dire

$$H^1([S^{n-2}\Omega^\vee(-1)](-n)) = 0$$

D'où  $H^0(E_n(1-n)) = 0$  □

- Pour  $n = 1$  on retrouve  $\Omega^\vee(-1)$ .
- Pour  $n = 2$  on trouve le fibré

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow S^2\Omega^\vee(-1) \longrightarrow \bar{q}_*\bar{p}^*O_{\mathbb{P}^2}(2) \longrightarrow 0$$

dont la courbe de saut est une courbe de degré 6 qui est naturellement isomorphe à la sextique définie ci-avant (la ramification “en haut”). Une résolution minimale de ce fibré est la suivante

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^4(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^6 \longrightarrow \bar{q}_*\bar{p}^*O_{\mathbb{P}^2}(2) \longrightarrow 0$$

C'est le fibré logarithmique (voir [4]) associé aux sept droites  $l_i, i = 1, \dots, 7$ .

— Pour  $n = 3$  le fibré  $E_3$  a pour classes de Chern  $(-1, 15)$ . Son schéma des droites de saut, bien que supporté par les bitangentes à la quartique de ramification, est de longueur égale à 105. Je ne sais pas s'il n'a que les 7 droites  $l_i, i = 1, \dots, 7$  comme droites de saut ou si toutes les 28 bitangentes sont des droites de saut (dans le thm. 4.4 on montre qu'elles sont toutes de saut pour  $E_n$  à partir de  $n > 3$ ).

**Proposition 4.2.** *Soit  $l$  une droite générale de  $\mathbb{P}^2$ . Son image  $\mathcal{L}_n = \bar{q}_*\bar{q}^*O_l(n)$  est un faisceau de rang un supporté par la cubique singulière  $\{(\Delta_0(x), \Delta_1(x), \Delta_2(x)), x \in l\}$ . Pour tout  $n$  il existe des suites exactes*

$$0 \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow E_n \longrightarrow \mathcal{L}_n \longrightarrow 0$$

*Démonstration.* Les suites canoniques

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(n-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(n) \longrightarrow O_l(n) \longrightarrow 0$$

remontées par  $\bar{p}$  et descendues par  $\bar{q}$  deviennent

$$0 \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow E_n \longrightarrow \mathcal{L}_n \longrightarrow 0$$

Explicitons, pour  $n \geq 1$ , le faisceau  $\mathcal{L}_n$ . Soit  $x$  tel que  $x^\vee = l$ . Remontons la suite exacte

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(n-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(n) \longrightarrow O_l(n) \longrightarrow 0$$

à la variété d'incidence et descendons la

$$0 \longrightarrow S^{n-1}\Omega^\vee(-1) \xrightarrow{l=x^\vee} S^n\Omega^\vee(-1) \longrightarrow \mathfrak{m}_x^n(n) \longrightarrow 0$$

Maintenant, utilisons la résolution de  $\mathbb{P}J_Z$  pour trouver

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_x^{n-2}(n-3) \longrightarrow \mathfrak{m}_x^n(n) \longrightarrow \mathcal{L}_n \longrightarrow 0$$

qui définit concrètement le faisceau  $\mathcal{L}_n$ . □

### 4.3 Tous les faisceaux inversibles et leurs images

Plus généralement nous pouvons, suivant Schwarzenberger, décrire les faisceaux inversibles sur  $X_2 = \mathbb{P}J_Z$  en rappelant que  $\text{Pic}(\mathbb{P}J_Z) = \mathbb{Z}.l_1 + \dots + \mathbb{Z}.l_7 + \mathbb{Z}.h$  où les  $l_i$  sont les droites (diviseurs exceptionnels) images inverses des sept points  $x_i$ , et  $h = p^*H$  avec  $H$  qui est une section hyperplane générale de  $\mathbb{P}V$ . Les relations entre les générateurs du groupe de Picard sont  $h^2 = 1, h.l_i = 0, l_i.l_j = 0$  et  $l_i^2 = -1$ . Le diviseur  $nh + \sum t_i l_i$  induit un fibré en droites noté  $L^{n,t_i}$ . Ses classes de Chern valent

**Proposition 4.3.** ([8], thm. 6)

$$c_1(\bar{q}_* L^{n,t_i}) = \sum t_i + 3n - 2$$

$$c_2(\bar{q}_* L^{n,t_i}) = 4n^2 - 3n + (3n - 1)(\sum t_i) + (\sum t_i^2) + (\sum_{i < j} t_i t_j)$$

Comme nous l'avons rappelé dans la partie consacrée à l'involution de Geiser, les sept points  $x_i$  ont pour images les droites bitangentes  $l_i$  tandis que chaque couple de points  $(x_i, x_j)$  définit une unique droite  $d_{i,j}$  dont l'image est aussi une droite, notée  $l_{i,j}$  qui est une des 21 bitangentes restantes. Ces 28 droites apparaissent dans les schémas de droites de saut comme décrit dans le théorème ci-dessous.

**Théorème 4.4.** Soit  $n \geq 2$ , les 28 bisécantes sautent de la manière suivante,

- 1) La droite  $l_i$  "image" du point  $x_i$  est une droite de saut d'ordre  $\lceil \frac{3n-2}{2} \rceil$  pour le fibré  $E_n$ .
- 2) La droite  $l_{i,j}$  "image" de la droite joignant  $x_i$  et  $x_j$  est une droite de saut d'ordre  $\lceil \frac{n-2}{2} \rceil$  pour le fibré  $E_n$ .

**Remarque 4.5.** Lorsque  $n \geq 4$ , les 28 bisécantes sont des droites sauteuses des fibrés  $E_n$ , et elles sont les seules lorsque  $n$  est impair.

La démonstration de ce théorème repose sur l'existence de suites exactes, que l'on nommera *suites de liaison*, provenant des suites exactes canoniques sur  $\mathbb{P}^2$  liant les faisceaux  $\mathbf{m}_{x_i}(n)$ ,  $J_{x_i, x_j}(n)$  et  $O_{\mathbb{P}^2}(n)$  entre-eux. En passant on montrera que la droite  $l_{i,j}$  image de la droite joignant  $x_i$  et  $x_j$  est une droite de saut d'ordre  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  pour le fibré  $\bar{q}_* \bar{p}^* J_{x_i, x_j}(n)$  et d'ordre de saut  $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$  pour les fibrés  $\bar{q}_* \bar{p}^* \mathbf{m}_{x_i}(n)$  et  $\bar{q}_* \bar{p}^* \mathbf{m}_{x_j}(n)$ . Avec les mêmes techniques on peut montrer que la droite  $l_i$  est une droite de saut d'ordre  $\lceil \frac{3n-3}{2} \rceil$  pour le fibré  $\bar{q}_* \bar{p}^* \mathbf{m}_{x_j}(n)$ .

*Démonstration.* La suite canonique

$$0 \longrightarrow \mathbf{m}_{x_i}(n) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(n) \longrightarrow O_{x_i} \longrightarrow 0$$

aura pour image directe la suite

$$0 \longrightarrow \bar{q}_* \bar{p}^* \mathbf{m}_{x_i}(n) \longrightarrow E_n \longrightarrow \bar{q}_* \bar{p}^* O_{x_i} \longrightarrow 0$$

Le dernier faisceau est supporté par  $\bar{q}\bar{p}^{-1}(x_i) = l_i$ ; ce dont on s'assure en vérifiant que  $c_1(E_n) = c_1(\bar{q}_* \bar{p}^* \mathbf{m}_{x_i}(n)) + 1$ . Enfin le calcul de la seconde classe de Chern donne le décalage, i.e  $\bar{q}_* \bar{p}^* O_{x_i} = O_{l_i}$ . Par conséquent  $E_n|_{l_i} = O_{l_i} \oplus O_{l_i}(3n - 2)$ , ce qui prouve le premier point.

En ce qui concerne le second point on reprend les mêmes idées et techniques : suites de liaison et calcul des classes de Chern afin de connaître le degré du support et le décalage. Ainsi les suites

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}(n - 1) \longrightarrow J_{x_i, x_j}(n) \longrightarrow O_{d_{i,j}} \longrightarrow 0$$

auront pour images directes les suites

$$0 \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \bar{q}_* \bar{p}^* J_{x_i, x_j}(n) \longrightarrow O_{l_{i,j}}(n-2) \longrightarrow 0$$

Ce qui implique  $[\bar{q}_* \bar{p}^* J_{x_i, x_j}(n)]|_{l_{i,j}} = O_{l_{i,j}}(n-2) \oplus O_{l_{i,j}}(2n-2)$ .

Les suites,

$$0 \longrightarrow J_{x_i, x_j}(n) \longrightarrow \mathfrak{m}_{x_i}(n) \longrightarrow O_{x_j} \longrightarrow 0$$

auront pour images directes les suites

$$0 \longrightarrow \bar{q}_* \bar{p}^* J_{x_i, x_j}(n) \longrightarrow \bar{q}_* \bar{p}^* \mathfrak{m}_{x_i}(n) \longrightarrow O_{l_j} \longrightarrow 0$$

Après tensorisation des faisceaux de cette suite exacte par  $O_{l_{i,j}}$  on observe que

$$\bar{q}_* \bar{p}^* \mathfrak{m}_{x_i}(n) \otimes O_{l_{i,j}} = O_{l_{i,j}}(n-2) \oplus O_{l_{i,j}}(2n-1) \text{ ou } O_{l_{i,j}}(n-1) \oplus O_{l_{i,j}}(2n-2)$$

Enfin pour conclure on restreint la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bar{q}_* \bar{p}^* \mathfrak{m}_{x_i}(n) \longrightarrow E_n \longrightarrow O_{l_i} \longrightarrow 0$$

à la droite  $l_{i,j}$ . □

Ces dévissages via les suites de liaison permettent d'étudier les fibrés images directes pas à pas, la connaissance de l'un fournissant des renseignements sur le suivant. Ainsi pour tout  $n$ , le fibré  $E_n$  vient avec sa cohorte de sept compagnons,  $E_n^k := q_* p^* J_{x_1, \dots, x_k}(n)$  vérifiant

$$0 \longrightarrow E_n^k \longrightarrow E_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=k} O_{l_i} \longrightarrow 0$$

Détaillons un ou deux exemples.

**Exemple 1)** Pour  $E_2$  qui est le fibré logarithmique (voir [4]) associé aux sept droites  $l_i$  on trouve  $E_2^1 \in M(-1, 4)$  qui est le fibré logarithmique associé aux six droites restantes,  $E_2^2 \in M(0, 2)$  dont les droites de saut sont les droites tangentes à la conique définie par les cinq droites restantes,  $E_2^3 = \Omega^\vee(-1)$ ,  $E_2^4 = O_{\mathbb{P}^2}^2$ ,  $E_2^5 = O_{\mathbb{P}^2} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(-1)$ ,  $E_2^6 = O_{\mathbb{P}^2}^2(-1)$  et enfin  $E_2^7 = \Omega$ . Ainsi les résolutions minimales se déduisent les unes des autres et pour  $k \leq 4$  on peut écrire

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{4-k}(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{6-k} \longrightarrow E_2^k \longrightarrow 0$$

**Exemple 2)** Comme deuxième exemple regardons le cas de  $E_3$ . Il admet une résolution minimale du type

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^6(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^7 \oplus O_{\mathbb{P}^2}(1) \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

Considérons l'unique section non nulle de  $E_3(-1)$ . Elle donne

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow E_3(-1) \longrightarrow J_\Gamma(5) \longrightarrow 0$$

où  $\Gamma$  est un groupe de points de longueur égale à 21. En la symétrisant il vient

$$0 \longrightarrow E_3(-1) \longrightarrow (S^2 E_3)(-2) \longrightarrow J_\Gamma^2(10) \longrightarrow 0$$

À la section non nulle de  $H^0((S^2E_3)(-5)) \neq 0$ , donnée par la quartique de ramification, correspond une courbe de degré 7 qui possède les 21 points de  $\Gamma$  comme points doubles. Ce ne peut-être qu'une configuration de sept droites. Celles-ci étant évidemment les droites  $l_i$ . Alors  $E_3^1 \in M(0, 11)$  et  $h^0(E_3^1(-1)) = 1$  et les sommets des six droites restantes sont les zéros de son unique section. De même  $E_3^2 \in M(-1, 8)$ ,  $h^0(E_3^2(-1)) = 1$  et les sommets des cinq droites restantes sont les zéros de son unique section, etc. Le dernier fibré étant  $\bar{q}_*\bar{p}^*J_Z(3) = O_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus O_{\mathbb{P}^2}(1)$ . Ainsi les résolutions se déduisent les unes des autres et pour  $k \leq 6$  on peut écrire

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{6-k}(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{7-k} \oplus O_{\mathbb{P}^2}(1) \longrightarrow E_3^k \longrightarrow 0$$

À chaque pas la section de  $S^2E_3^k(2 - c_1)$  provenant de la quartique de ramification se traduit par l'existence d'une configuration de droites. Il faut remarquer que la quartique n'est parfaitement définie, ou encore  $h^0(S^2E_3^k(2 - c_1)) = 1$  que pour  $E_3$ , après il n'y a plus assez de droites.

Disons aussi un mot de la théta-caractéristique associée dans le cas de  $E_3$ . On a une suite exacte canonique provenant du revêtement

$$0 \longrightarrow E_3(-2) \longrightarrow E_3 \longrightarrow \theta \longrightarrow 0$$

avec  $\theta(-8) = \theta^* \otimes O_{C_4}(1)$ . Soit encore  $\theta^2 = O_{C_4}(9)$ . L'unique section de  $E_3(-1)$  correspond à une section de  $\theta(-1)$ , ou encore à une racine carrée de  $O_{C_4}(7)$  dont les zéros sont les quatorze points de contact des 7 droites bitangentes.

**Remarque 4.6.** *Tandis que tous les fibrés de Schwarzenberger possèdent une résolution minimale par une matrice de formes linéaires, il n'y a pas, pour les fibrés  $\bar{q}_*L^{n,t_i}$ , ni même pour les fibrés  $E_n$  de résolution type. Ainsi on semble avoir*

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^7(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^3(1) \oplus O_{\mathbb{P}^2}^6 \longrightarrow E_4 \longrightarrow 0$$

tandis que

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^7(-1) \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^6(1) \oplus O_{\mathbb{P}^2}^3 \longrightarrow E_5 \longrightarrow 0$$

et encore

$$0 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^6(-1) \oplus O_{\mathbb{P}^2}^2 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^2}^{10}(1) \longrightarrow E_6 \longrightarrow 0$$

#### 4.4 Ceux qui ont la même image

Soucieux d'étudier les restrictions des fibrés  $\bar{q}_*L^{n,t_i}$  aux droites du plan, Schwarzenberger affirme à juste titre qu'il est nécessaire, au préalable, de reconnaître les fibrés en droites donnant le même fibré de rang deux. Il donne sur ce point un énoncé (prop 9, page 633) qui semble inexact puisqu'il impliquerait, par exemple,  $\bar{q}_*L^{1,0} = \bar{q}_*L^{0,-3}$ ; or le premier est le fibré tangent tandis que le deuxième a pour classes de Chern,  $c_1 = -1, c_2 = 631$  après normalisation.

On se contentera ici, dans la proposition 4.9, d'identifier les faisceaux inversibles avec le même poids  $t$  sur chaque  $x_i$  ayant au décalage près la même image directe sur le plan projectif. Pour cela, nous cherchons dans un premier temps à écrire  $\bar{q}^*O_{\mathbb{P}^2}(m)$  dans la base de  $Pic(X_2)$  c'est à dire à trouver  $t_i$  et  $n$  tels que  $\bar{q}^*O_{\mathbb{P}^2}(m) = L^{n,t_i}$ ; ceci permettra connaissant  $L$  et son image  $E$  d'en déduire le faisceau inversible sur  $X_2$  dont l'image est un décalé  $E(m)$  de  $E$  (proposition 4.9 ci-dessous)

**Lemme 4.7.** *Pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  on a  $\bar{q}^*O_{\mathbb{P}^2}(m) = L^{3m, -m}$*

*Démonstration.* Comme  $\bar{q}_*\bar{q}^*O_{\mathbb{P}^2}(m) = O_{\mathbb{P}^2}(m) \oplus O_{\mathbb{P}^2}(m-2)$  on cherche à résoudre les équations

$$\begin{cases} 2m - 2 = 3n - 2 + \sum t_i \\ m^2 - 2m = 4n^2 - 3n + (3n - 1)(\sum t_i) + (\sum t_i^2) + (\sum_{i < j} t_i t_j) \end{cases}$$

Aucun des sept points n'étant privilégié tous les  $t_i$  sont égaux et on note  $t = t_i$  la valeur commune. Alors le système d'équation ci-dessus équivaut à

$$\begin{cases} 2m = 3n + 7t \\ m^2 = 4n^2 + 21nt + 28t^2 \end{cases}$$

En faisant la différence de 4 fois la deuxième et du carré de la première on se ramène à

$$n^2 + 6nt + 9t^2 = (n + 3t)^2 = 0$$

En remontant il vient  $t = -m$  et  $n = 3m$ . □

**Remarque 4.8.** *Avec les mêmes techniques on montre qu'il n'existe pas de fibré  $L^{n, t_i}$  avec tous les  $t_i$  égaux tel que les classes de Chern du normalisé soit  $c_1 = -1$  et  $c_2 = 8$ . C'est dommage car un tel fibré possédant un schéma de droites de saut de longueur égale à 28, aurait pu avoir pour droites de saut exactement (sans multiplicité) les 28 bitangentes offrant ainsi une méthode pour reconstruire la quartique à partir des bitangentes.*

Cette lemme et la formule de projection ont pour conséquence immédiate

**Proposition 4.9.**  $\bar{q}_*L^{n+3m, t_i-m} = [\bar{q}_*L^{n, t_i}](m)$

Par exemple  $[\bar{q}_*\bar{p}^*\mathfrak{m}_{x_1}(2)](1) = \bar{q}_*\bar{p}^*[J_{Z \setminus \{x_1\}} \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^2]$  et plus généralement

$$E_{n-3}(1) = \bar{q}_*\bar{p}^*J_Z(n)$$

## Références

- [1] H. Bateman, *The quartic curve and its inscribed configurations*, American Journal of Mathematics, **36**, n4, (1914), 357-386
- [2] L.Caporaso, E.Sernesi, *Recovering plane curves from their bitangents*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 2, 225-24
- [3] I.Dolgachev, *Topics in Classical Algebraic Geometry Part I*, sur sa page web personnelle.
- [4] I.Dolgachev et M.Kapranov, *Arrangements of hyperplanes and vector bundles on  $\mathbf{P}_n$* , Duke Math.J. **71**, (1993), 633-664.
- [5] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics 52 Springer-Verlag 1977.
- [6] G.M.Ottaviani, *Alcune proprietà dei 2-fibrati su  $\mathbb{P}^2$* , Bolletino U.M.I, Algebra e geometria, S. VI, Vol.III-D,N.1 (1984)
- [7] U. Persson, *Double coverings and surfaces of general type*, Lecture Notes in Math., **687** (Tromsø, 1977), 168-195



- [8] R.L.E. Schwarzenberger, Vector bundles on the projective plane, Proc. London Math. Soc. **11**, (1961), 623-640.
- [9] Vallès, J., *Nombre maximal d'hyperplans instables pour un fibré de Steiner*, Math. Zeit., **233**, (2000), 507-514.

Vallès Jean  
Laboratoire de Mathématiques appliquées  
de Pau et de Pays de l'Adour,  
Avenue de l'Université  
64000 Pau(France)  
email : jean.valles@univ-pau.fr