



**HAL**  
open science

## Étude mathématique d'un modèle stratigraphique des effets du transport marin ou éolien.

Mohamed-Salem Louly, Gérard Gagneux

► **To cite this version:**

Mohamed-Salem Louly, Gérard Gagneux. Étude mathématique d'un modèle stratigraphique des effets du transport marin ou éolien.. 2008. hal-00289004

**HAL Id: hal-00289004**

**<https://hal.science/hal-00289004>**

Preprint submitted on 19 Jun 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude mathématique d'un modèle stratigraphique des effets du transport marin ou éolien

Mohamed-Salem LOULY et Gérard GAGNEUX

18 juin 2008

*Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau, CNRS UMR 5142  
Université de Pau et des Pays de l'Adour  
mohamed.salem@etud.univ-pau.fr, gerard.gagneux@univ-pau.fr*

## Mathematical analysis of a stratigraphic model for the large scale depositional transport processes

**Abstract.**— This work deals with the study of a stratigraphic model for the formation of geological basins under a maximal erosion rate constraint. It leads to an original class of conservation laws in order to simulate the large scale depositional transport processes of sediments. The main feature of the mathematical framework is characterized by a global constraint on the time-derivative of the unknown (the theoretical topography) and a nonlinear transport term. Various theoretical results and research procedures are presented for solving the monolithologic column case : existence and uniqueness of an approximating sequence via an implicit time-discretization scheme, lack of compactness results and open problems for passing to the limits in the discretized processes (double weak convergence in the diffusive term). The locally hyperbolic behavior of the model is illustrated by constructing realistic traveling-waves solutions and by pointing out some surprising properties (barrier effects and dead-zones).

**Résumé.**— Nous étudions dans cet article un modèle mathématique de la formation et de l'évolution d'un bassin sédimentaire. Ce modèle est obtenu par l'application de la loi de conservation de la masse sur le flux des matières lors des phénomènes d'érosion, sédimentation ou transport des sédiments dans le bassin sur une échelle de plusieurs millions d'années. Plus précisément, on s'intéresse à connaître la fonction qui régit l'évolution de la hauteur des sédiments déposés au-dessus de la base du bassin, qui est supposée horizontale au niveau topographique zéro. Le plan de cette étude est le suivant : nous commençons par une présentation du modèle dans laquelle nous formulons le problème d'obstacle envisagé ; puis, nous procédons par une méthode de semi-discrétisations implicites qui nous permet de montrer l'existence et l'unicité d'une solution discrète en temps. Ensuite, nous illustrons la difficulté d'ordre mathématique qui empêche le passage à la limite lorsque le pas de discrétisation du

temps tend vers 0 ; en fait cette difficulté est due à une présence d'un produit de deux suites qui ne convergent que faiblement. Enfin, nous éclairons quelques cas particuliers en dimension un d'espace et nous donnons des solutions explicites "traveling waves" à obstacle mobile dans des scénarios de réalisation possible, attestant la nature hyperbolique du modèle.

## 1 Introduction

Le modèle étudié ici concerne la formation et l'évolution d'un bassin sédimentaire sous le triple effet des phénomènes d'érosion, sédimentation et transport dû aux vents, pluies, courant de ruissellement, *etc ...* . Il s'agit de stratigraphie, c'est-à-dire de la formation des couches géologiques sur une échelle de plusieurs millions d'années. Outre les applications en prospection pétrolière pour la localisation la plus probable des réserves d'huile et de gaz, le modèle étudié ici rend compte des modifications des reliefs de type désertique sous l'effet de vents parfois violents. Un exemple intéressant est donné par une mission de l'Unesco qui concerne l'espace désertique créé par l'assèchement de la mer d'Aral au Kazakhstan à la suite d'irrigations conduites de manière catastrophique sur le plan écologique : privée de la plus grande partie de son approvisionnement fluvial en eau, cette mer intérieure s'est retirée et sa superficie a été divisée par trois. Les vents violents de la région arrachent le sable et le sel déposé sur le fond de la mer naguère recouvert d'eau. Selon des estimations, on rapporte ("Le Monde" du 13 juillet 2007, p.3) que 200000 tonnes de sel et de sable sont ainsi chaque année transportées dans un rayon de 300 km, outre les restes de pesticides et d'engrais auparavant répandus en quantité dans les cultures irriguées en amont et charriés dans le bassin par les fleuves alimentant la mer. Ces conditions conduisent à des transformations brutales de l'écologie locale et sont causes de graves conséquences sanitaires. Des modèles mathématiques de simulation présentent donc des possibilités de prévision des évolutions et d'anticiper la prise de décision pour améliorer la situation.

Un autre exemple peut être illustré par l'action érosive de vents forts transportant du sable contre certaines parties de la Grande Muraille de Chine et qui pose le problème de la préservation du site.

La situation des transports marins reçoit une illustration actuelle par les travaux de désensablement de la baie du Mont Saint-Michel. Un barrage en construction, agissant comme un régulateur des flux et des reflux, est destiné à libérer l'endroit de la gangue des sédiments qui, jour après jour, emprisonne l'édifice, autrefois distant de quatre kilomètres du continent et désormais de quelques dizaines de mètres. Les marées, dont les courants montants sont toujours plus puissants que les jusants, ont provoqué l'accumulation de débris sableux mélangés à des débris de coquillages : la tanguerie. On construit un ouvrage hydraulique à double effet sur la rivière locale, le Couesnon dont le flux est aujourd'hui faible, pour retenir dans un premier temps l'eau dans un réservoir en amont, à marée haute ; au reflux, huit vannes généreront des chasses d'eau dans le lit du Couesnon qui repousseront les sédiments au large. Selon les expertises, en deux ans de fonctionnement, la moitié des 3 millions de mètres cubes d'alluvions qui se sont amoncelés devrait avoir été déblayée. En huit ans, les quatre-cinquièmes, et, à l'horizon du milieu du siècle, la cote moyenne des fonds devrait avoir baissé de 70 centimètres ("Le Monde" daté du 29 juillet 2007).

Ces deux situations illustrent, dans le premier cas, le transport éolien et, dans le second cas, le transport marin, naturel ou forcé.

Physiquement, on observe que

- le flux des matières est proportionnel au gradient de la hauteur  $S$  des sédiments déposés ; autrement dit, il s'agit d'un modèle gravitaire régi par la pente du relief mesurée par  $\nabla S$ , et présentant une analogie mathématique avec la loi de Darcy.

- l’environnement -comme par exemple le vent- a un effet pris en compte sur le flux des matières ; cet effet peut s’exprimer par une dépendance proportionnelle aux facteurs représentatifs du transport des sédiments (transport éolien, par exemple).

## 2 Présentation du modèle

On convient d’entreprendre ici une analyse mathématique des observations physiques précédentes en tenant compte d’une vitesse limite d’érosion  $E$  et d’une contrainte unilatérale d’asservissement instantané qui régit les variations de l’érosion à l’intérieur du domaine et sur une partie fixe de la frontière. On note  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ , figurant la base du bassin sédimentaire, supposée horizontale (au niveau topographique zéro) et de frontière  $\Gamma$  régulière ; on introduit  $T$  un réel strictement positif, fixant la durée de l’observation du phénomène. On note aussi  $S(t, x)$  la hauteur des sédiments déposés à l’instant  $t$ , au-dessus d’un point  $x$  de  $\Omega$ ,  $\vec{V}(x, S)$  un terme vectoriel non linéaire de transport éolien, appliqué à la hauteur  $S$ , au-dessus du point  $x$  de  $\Omega$  et  $a$  le coefficient de proportionnalité entre le flux des matières d’une part, et la pente et l’influence de l’environnement d’autre part, ce qui permet d’écrire la loi d’état du flux, de type darcéen :

$$\vec{q} = -a \left[ \nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \quad (1)$$

Le coefficient  $a$  dépend de  $\frac{\partial S}{\partial t}$  et de  $E$ , et son choix est guidé par la nécessité de respecter les contraintes suivantes, donnant lieu à un problème à frontière libre :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + E \geq 0, \quad 0 \leq a \leq 1 \quad \text{et} \quad (1 - a) \left( \frac{\partial S}{\partial t} + E \right) = 0 \quad \text{p. p. dans } Q, \quad (2)$$

ce qui conduit à prendre, sous réserve d’une régularité suffisante,  $a \in H\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right)$ , où  $H$  est le graphe maximal monotone lié à la fonction de Heaviside. En particulier,

- \* si en  $(t, x)$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} + E > 0$ , autrement dit, le taux d’érosion maximal n’est pas atteint ; alors,  $a = 1$  et donc la contrainte est inactive : le flux n’est pas limité.
- \* si en  $(t, x)$ ,  $\frac{\partial S}{\partial t} + E = 0$ , situation limite ; la contrainte est active ; alors  $a$  doit prendre une valeur appropriée entre 0 et 1 pour rendre possible la réalisation de l’équation de continuité.

Evidemment, les régions où la contrainte est activée ou inactive sont des inconnues implicites du problème. En outre, les contraintes unilatérales (2) présentent une réelle originalité, au sens où elles ne sont pas standard (Cf. par exemple, le livre de G. Duvaut et J.-L.Lions : les inéquations en physique et en mécanique [17]).

De sa part, l’équation de conservation de la masse, nous donne

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } \vec{q} = 0 \quad \text{p. p. dans } Q. \quad (3)$$

En substituant l’expression du flux (1) dans l’équation de conservation de la masse (3), nous obtenons :

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \text{div} \left\{ a \left( \frac{\partial S}{\partial t} + E \right) \left[ \nabla S + \vec{V}(x, S) \right] \right\} = 0.$$

Equation hyperbolique (en raison formellement, des termes  $\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial t}$ ), non-linéaire dégénérée ; sa résolution est le but de cette étude.

En respectant les contraintes (2), nous formulons le modèle de la façon suivante :

Trouver le couple  $(S, \lambda)$  tel que :

$$S \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(Q), \quad \lambda \in L^\infty(Q) \cap H\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right) \quad (4a)$$

vérifiant pour presque tout  $t$  de  $]0, T[$  et pour tout  $v$  de  $H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} \lambda [\nabla S + \vec{V}(x, S)] \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad (4b)$$

$$S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega). \quad (4c)$$

Pour résoudre ce problème, et notamment afin de trouver des estimations a priori, nous allons prendre, au lieu de  $a$ , un terme d'une suite de fonctions lipschitziennes croissantes approximatives de  $H$ , type l'approximation Yosida suivante :

$$a_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \varepsilon > 0, \\ \frac{r}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leq r \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{si } r \leq 0. \end{cases}$$

La fonction  $\vec{V}$  est  $\mathcal{L}^3$ -mesurable, définie presque partout sur  $\Omega \times \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , bornée et, uniformément par rapport à  $x$ , lipschitzienne en  $S$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \exists M > 0 \quad \text{tel que } \forall x \in \Omega \quad \forall S, \hat{S} \in \mathbb{R}, \text{ on a} \\ \left\| V(x, S) - V(x, \hat{S}) \right\|_{\mathbb{R}^2} \leq M |S - \hat{S}|; \end{aligned} \quad (5)$$

en plus, nous supposons que chacune des composantes de  $\vec{V}$  admet des dérivées partielles premières bornées.

Nous définissons une formulation faible du problème : chercher, pour une topographie initiale  $S_0 \in H_0^1(\Omega)$ , une fonction  $S_\varepsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ , tel que  $\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , vérifiant,  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ , et pour presque tout  $t$  de  $]0, T[$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon \left( \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial t} + E \right) [\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon)] \cdot \nabla v \, dx = 0, \quad (6a)$$

$$S_\varepsilon(0, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (6b)$$

D'abord, nous allons obtenir des résultats dans le cas discret en temps :

### 3 Approche par semi-discretisations implicites

Soit  $S_0$  la topographie initiale supposée dans  $H_0^1(\Omega)$ , et soit  $h > 0$  le pas de discrétisation en temps. Alors, le problème semi-discret implicite par rapport au temps, correspondant au problème (6), s'écrit, à la première itération,

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_\varepsilon \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon - S_0}{h} v \, dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \right) [\nabla S_\varepsilon + \vec{V}(x, S_\varepsilon)] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

L'étude de ce problème se divise en deux étapes : la première étape est de supposer que la fonction  $a_\varepsilon$  est strictement positive (problème non dégénéré), et la deuxième étape est de passer au problème dégénéré ( $a_\varepsilon \geq 0$ ) via le problème non dégénéré, selon une méthode de viscosité artificielle.

### 3.1 Le problème non dégénéré

Selon un procédé d'approximation classique, pour rendre le problème  $\mathcal{P}$  non dégénéré, on introduit un réel strictement positif  $\delta$ , tel qu'on aura à considérer de façon transitoire, la formulation suivante :

$$\mathcal{P}^\delta \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_\varepsilon^\delta \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \left[ a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[ \nabla S_\varepsilon^\delta + \vec{V}(x, S_\varepsilon^\delta) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce problème, on va utiliser un théorème de point fixe. Soient  $g \in H_0^1(\Omega)$  et le problème linéaire :

$$\mathcal{P}^{\delta,g} \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } S_\varepsilon^{\delta,g} \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{S_\varepsilon^{\delta,g} - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \left[ a_\varepsilon \left( \frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[ \nabla S_\varepsilon^{\delta,g} + \vec{V}(x, g) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{array} \right.$$

Ce problème possède, d'après le théorème de Lax-Milgram, une unique solution; on peut donc définir l'application :

$$\begin{aligned} \psi : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ g &\longmapsto S_\varepsilon^{\delta,g} \end{aligned}$$

pour chercher si elle possède un point fixe.

On prend comme fonction-test pour la formulation  $\mathcal{P}_\delta^g$ , la fonction  $v = S_\varepsilon^{\delta,g}$ , et on suppose que  $0 < \delta \leq 1$ , il vient alors, que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{S_\varepsilon^{\delta,g} - S_0}{h} S_\varepsilon^{\delta,g} \, dx &+ \int_\Omega \left[ a_\varepsilon \left( \frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left| \nabla S_\varepsilon^{\delta,g} \right|^2 \, dx \\ &+ \int_\Omega \left[ a_\varepsilon \left( \frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \vec{V}(x, g) \cdot \nabla S_\varepsilon^{\delta,g} \, dx = 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1}{h} \left\| S_\varepsilon^{\delta,g} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta \left\| S_\varepsilon^{\delta,g} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{C(\Omega)}{h} \left\| S_0 \right\|_{H_0^1(\Omega)} \left\| S_\varepsilon^{\delta,g} \right\|_{H_0^1(\Omega)} + 2 \left\| \vec{V} \right\|_\infty \sqrt{mes(\Omega)} \left\| S_\varepsilon^{\delta,g} \right\|_{H_0^1(\Omega)},$$

et, en particulier,

$$\left\| S_\varepsilon^{\delta,g} \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega)}{\delta h} \left\| S_0 \right\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{2}{\delta} \left\| \vec{V} \right\|_\infty \sqrt{mes(\Omega)}.$$

Donc,

$$\psi(H_0^1(\Omega)) \subset \text{une boule fermée} : B_{H_0^1(\Omega)}(0, r),$$

avec

$$r = \frac{C(\Omega)}{\delta h} \left\| S_0 \right\|_{H_0^1(\Omega)} + \frac{2}{\delta} \left\| \vec{V} \right\|_\infty \sqrt{mes(\Omega)}.$$

Cette boule étant non vide, fermée, bornée, convexe et dans un espace séparable et réflexif, alors, pour appliquer le théorème de point fixe de Schauder-Tikhonov sur la restriction de  $\psi$  sur  $B_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$ , il suffit de monter la continuité séquentielle de cette restriction. Pour cela soit  $(g_j)_j$  une suite d'éléments de  $B_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$ , telle que

$$g_j \rightharpoonup g \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

Comme, pour  $h$  et  $\delta$  fixés strictement positifs, la suite  $(S_\varepsilon^{\delta, g_j})_j$  est bornée indépendamment de  $j$ , dans  $H_0^1(\Omega)$ , alors, il existe une sous-suite  $(S_\varepsilon^{\delta, g_{j_k}})_{j_k}$  et il existe  $\chi \in H_0^1(\Omega)$ , tels que

$$S_\varepsilon^{\delta, g_{j_k}} \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).$$

et évidemment,

$$g_{j_k} \rightharpoonup g \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

et comme l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  est compacte, alors

$$g_{j_k} \rightarrow g \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

Finalement, en troisième génération, il existe une sous-suite, notée cette fois-ci,  $(g_n)_n$  pour simplifier l'écriture, telle que

$$g_n \rightarrow g \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et évidemment,

$$S_\delta^{g_n} \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \tag{7}$$

ce qui est suffisant pour passer à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  dans le problème

$$\mathcal{P}^{\delta, g_n} \begin{cases} \text{Trouver } S_\varepsilon^{\delta, g_n} \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{S_\varepsilon^{\delta, g_n} - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \left[ a_\varepsilon \left( \frac{g_n - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[ \nabla S_\varepsilon^{\delta, g_n} + \vec{V}(x, g_n) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{cases}$$

pour obtenir à la limite, le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi \text{ dans } H_0^1(\Omega), \text{ tel que pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \frac{\chi - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \left[ a_\varepsilon \left( \frac{g - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[ \nabla \chi + \vec{V}(x, g) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0. \end{cases}$$

qui n'est rien d'autre que le problème  $\mathcal{P}^{\delta, g}$ , qui admet, d'après Lax-Milgram, une unique solution et qui a déjà  $S_\varepsilon^{\delta, g}$  comme solution par construction. D'où

$$\chi = S_\varepsilon^{\delta, g}. \tag{8}$$

L'unicité en son genre du point d'accumulation assure a posteriori la convergence de toute la suite.

D'après (7) et (8), on a

$$\psi(g_n) := S_\varepsilon^{\delta, g_n} \rightharpoonup S_\varepsilon^{\delta, g} := \psi(g) \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega),$$

c'est-à-dire que  $\psi$  est faiblement-faiblement séquentiellement continue de  $B_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$  dans  $B_{H_0^1(\Omega)}(0, r)$ .

Donc, d'après le théorème de Schauder-Tikhonov de point fixe, il existe un  $g \in H_0^1(\Omega)$  tel que  $\psi(g) = g$ ; autrement dit, il existe un  $S_\varepsilon^\delta \in H_0^1(\Omega)$  solution de  $\mathcal{P}^\delta$ .

En outre, comme on le verra en détail à la proposition 3. sur un cas plus général, on peut montrer par les  $L^1$ -techniques que  $S_\varepsilon^\delta$  est unique en son genre. Donc, nous avons alors démontré le lemme suivant :

**Lemme 1.** *Soit  $S_0 \in H_0^1(\Omega)$ , et soient deux réels strictement positifs  $h$  et  $\delta$ ; alors, il existe une fonction et une seule  $S_\varepsilon^\delta \in H_0^1(\Omega)$  telle que, pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,*

$$\int_\Omega \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega \left[ a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} + E \right) + \delta \right] \left[ \nabla S_\varepsilon^\delta + \vec{V}(x, S_\varepsilon^\delta) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

On passe maintenant au problème dégénéré :

### 3.2 Le problème dégénéré

En fait, le problème dégénéré est le problème  $\mathcal{P}$  lui-même; car, dans le problème  $\mathcal{P}$ , la fonction  $a_\varepsilon$  est à valeurs positives ou nulles; et nous allons obtenir une solution de ce problème en faisant tendre  $\delta$  vers 0 dans le problème  $\mathcal{P}^\delta$ .

On prend dans le lemme 1, la fonction-test  $v = \int_0^{S_\varepsilon^\delta - S_0} \frac{du}{a_\varepsilon(\frac{u}{h} + E) + \delta}$ , pour avoir,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^\delta - S_0}{h} \left( \int_0^{S_\varepsilon^\delta - S_0} \frac{du}{a(\frac{u}{h} + E) + \delta} \right) dx &+ \int_{\Omega} \nabla S_\varepsilon^\delta \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0) dx \\ &+ \int_{\Omega} \vec{V} \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0) dx = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\nabla S_\varepsilon^\delta \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0) = |\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0|^2 + \nabla S_0 \cdot (\nabla S_\varepsilon^\delta - \nabla S_0), \quad (9)$$

alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h(1+\delta)} \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)} \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &+ \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\|S_\varepsilon^\delta - S_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)},$$

et par l'inégalité triangulaire, il vient,

$$\|S_\varepsilon^\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|S_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)}. \quad (10)$$

Cette dernière estimation nous donne l'information que la suite  $(S_\varepsilon^\delta)_{\delta>0}$  est, indépendamment de  $\delta$ , bornée dans  $H_0^1(\Omega)$ , et donc, il existe une sous-suite de  $(S_\varepsilon^\delta)_{\delta>0}$ , notée de même, et il existe un  $S_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ , tels que, lorsque  $\delta \rightarrow 0^+$ ,

$$S_\varepsilon^\delta \rightharpoonup S_\varepsilon \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \quad (11)$$

et

$$S_\varepsilon^\delta \rightarrow S_\varepsilon \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega),$$

et pour une nouvelle sous-suite,

$$S_\varepsilon^\delta \rightarrow S_\varepsilon \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Avec cette dernière sous-suite, on peut passer à la limite dans le problème  $\mathcal{P}^\delta$  lorsque  $\delta \rightarrow 0^+$ , et on trouve à la limite la formulation du problème  $\mathcal{P}$ . Donc  $S_\varepsilon$  est une solution du problème  $\mathcal{P}$ .

De plus, par le choix licite de la fonction-test  $v = \left(\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E\right)^-$ , on trouve par le fait de la non-négativité de  $E$  que :

$$\frac{S_\varepsilon - S_0}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Nous avons donc montré la proposition suivante :

**Proposition 2.** Soit  $S^0 \in H_0^1(\Omega)$ . Alors, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , tel que  $h = \frac{T}{N}$ , il existe une séquence  $(S_\varepsilon^i)_{1 \leq i \leq N}$ , telle que pour tout  $i$  et pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} v dx + \int_{\Omega} a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \left[ \nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla v dx = 0. \quad (12)$$



De plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

avec la convention que  $S_\varepsilon^0 = S^0$ .

Revenons maintenant à la question de l'unicité :

**Proposition 3.** *La solution donnée par la proposition 2 est unique à chaque itération.*

**Preuve :**

Il suffit de montrer cette propriété d'unicité pour la première itération ; et pour cela, on pose

$$w_\varepsilon = \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \quad (13)$$

et

$$A_\varepsilon(r) = \int_0^r a_\varepsilon(u) du, \quad r \geq 0.$$

Donc, quel que soit  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a, d'après (12), que :

$$\int_\Omega (w_\varepsilon - E)v dx + \int_\Omega \left\{ h \nabla A_\varepsilon(w_\varepsilon) + a_\varepsilon(w_\varepsilon) \left[ \nabla(S_0 - hE) + \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) \right] \right\} \cdot \nabla v dx = 0.$$

Soient alors,  $S_\varepsilon^1$  et  $\hat{S}_\varepsilon^1$  deux éventuelles solutions et  $w_\varepsilon$  et  $\hat{w}_\varepsilon$  les expressions associées. Il vient par soustraction membre à membre que :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon)v dx + h \int_\Omega \nabla \left[ A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \right] \cdot \nabla v dx \\ &+ \int_\Omega (a_\varepsilon(w_\varepsilon) - a_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \nabla(S_0 - hE) \cdot \nabla v dx + \int_\Omega (a_\varepsilon(w_\varepsilon) - a_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) \cdot \nabla v dx \\ &+ \int_\Omega a_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \left[ \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) - \vec{V}(x, h(\hat{w}_\varepsilon - E) + S_0) \right] \cdot \nabla v dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Prenant  $v = p_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon))$  avec

$$p_\eta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \geq \eta > 0 \\ \ln \frac{er}{\eta} & \text{si } \frac{\eta}{e} \leq r \leq \eta \\ 0 & \text{si } r \leq \frac{\eta}{e} \end{cases}$$

approximation appropriée lipschitzienne de la fonction

$$\text{sign}_0^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r \leq 0 \end{cases}$$

et remarquant que les fonctions  $A_\varepsilon^{-1}$  et  $a_\varepsilon \circ A_\varepsilon^{-1}$ , définies sur  $\mathbb{R}^+$ , sont höldériennes d'ordre  $\frac{1}{2}$ , alors,

$$|a_\varepsilon(w_\varepsilon) - a_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)| \leq C_1 \sqrt{|A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)|},$$

$$\left| \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) - \vec{V}(x, h(\hat{w}_\varepsilon - E) + S_0) \right| \leq C_2 h \sqrt{|A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)|},$$

on exploite (14) sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon) p_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) dx + h \int_{\Omega} \left| \nabla [A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)] \right|^2 p'_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) dx \\ \leq I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (15)$$

où les expressions  $I_1, I_2, I_3$  seront rappelées immédiatement et où l'on a noté

$$p'_\eta(r) = \frac{1}{r} \chi_{[\frac{\eta}{\varepsilon}, \eta]}(r)$$

et en sachant que, par dérivation à la chaîne des superpositions lipschitziennes dans  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \nabla p_\eta(v) = p'_\eta(v) \nabla v \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Il vient plus précisément

$$\begin{aligned} I_1 = \left| \int_{\Omega} (a_\varepsilon(w_\varepsilon) - a_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \nabla(S_0 - hE) \cdot \nabla v dx \right| \leq \frac{h}{3} \int_{\Omega} p'_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \left| \nabla (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \right|^2 dx \\ + \frac{3C_1^2}{4h} \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} |\nabla(S_0 - hE)|^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 = \left| \int_{\Omega} (a_\varepsilon(w_\varepsilon) - a_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) \cdot \nabla v dx \right| \leq \\ \frac{h}{3} \int_{\Omega} p'_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \left| \nabla (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \right|^2 dx + \frac{3C_1^2 \|\vec{V}\|_\infty^2}{4h} \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} dx, \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} I_3 = \left| \int_{\Omega} a_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \left[ \vec{V}(x, h(w_\varepsilon - E) + S_0) - \vec{V}(x, h(\hat{w}_\varepsilon - E) + S_0) \right] \cdot \nabla v dx \right| \leq \\ \frac{h}{3} \int_{\Omega} p'_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \left| \nabla (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \right|^2 dx + \frac{3}{4} C_2^2 \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} dx. \end{aligned}$$

Faisant la somme, il vient alors, de (15), que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon) p_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) dx \right| \leq \frac{3C_1^2}{4h} \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} |\nabla(S_0 - hE)|^2 dx \\ + \frac{3}{4} \left( \frac{C_1^2 \|\vec{V}\|_\infty^2}{h} + C_2^2 \right) \int_{\Omega \cap \{\frac{\eta}{\varepsilon} \leq A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon) \leq \eta\}} dx, \end{aligned}$$

et comme, lorsque  $\eta \rightarrow 0^+$ ,

$$\chi_{[\frac{\eta}{\varepsilon}, \eta]} \rightarrow 0 \quad \text{simplement dans } \mathbb{R},$$

alors, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers zéro par la convergence dominée de Lebesgue lorsque  $\eta \rightarrow 0^+$ . D'autre part, on a

$$\begin{aligned} p_\eta (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) &\rightarrow \text{sign}_0^+ (A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)) \quad \text{presque partout dans } \Omega. \\ \eta \rightarrow 0^+ & \end{aligned}$$

Et comme la fonction  $A_\varepsilon$  est strictement croissante, alors,  $A_\varepsilon(w_\varepsilon) - A_\varepsilon(\hat{w}_\varepsilon)$  et  $w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon$  ont le même signe. D'où, après avoir faire tendre  $\eta$  vers  $0^+$ , il vient finalement

$$\int_{\Omega} (w_\varepsilon - \hat{w}_\varepsilon)^+ dx = 0,$$

c'est-à-dire,

$$w_\varepsilon = \hat{w}_\varepsilon \text{ et donc } S_\varepsilon^1 = \widehat{S}_\varepsilon^1 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

L'unicité de  $S_\varepsilon^1$ , par celle de  $S_0$ , entraîne trivialement l'unicité de  $S_\varepsilon^i$  pour  $i \geq 2$ .  $\square$

Nous rappelons que cette solution ne respecte pas exactement les contraintes unilatérales (2), car  $a_\varepsilon \notin H$ , et donc, pour obtenir une solution en respectant les contraintes (2), on va passer à la limite sur  $\varepsilon$ .

### 3.3 Le modèle discret régi par une inclusion différentielle :

Nous résolvons dans ce paragraphe le problème envisagé (4) dans son cas discret en temps, ce qui revient à passer à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  dans (12). Nous allons alors démontrer le lemme suivant :

**Lemme 4.** *Pour  $S^0 \in H_0^1(\Omega)$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $h = \frac{T}{N}$ , il existe une unique séquence  $(S^i)_{1 \leq i \leq N}$  d'éléments de  $H_0^1(\Omega)$ , et il existe une séquence  $(\lambda^i)_i$  avec  $\lambda^i \in H\left(\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E\right)$ , telles que, pour tout  $i$  et pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on a*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S^i - S^{i-1}}{h} v dx + \int_{\Omega} \lambda^i \left[ \nabla S^i + \vec{V}(x, S^i) \right] \cdot \nabla v dx &= 0, \\ \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E &\geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

**Preuve :**

D'après (10) et (11), on a, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 2\|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\vec{V}\|_\infty \sqrt{\text{mes}(\Omega)}, \quad (16)$$

Prenant la fonction-test  $v = \int_0^{\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h}} \frac{du}{a(u+E)+\eta}$ , avec  $\eta > 0$ ; il vient, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \left( \int_0^{\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h}} \frac{du}{a(u+E)+\eta} \right) dx + \\ \int_{\Omega} \frac{a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right)}{a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) + \eta} \left[ \nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{1+\eta} \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \frac{a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right)}{a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) + \eta} \left[ \nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \leq 0.$$

En observant que, pour tout  $i$ , p.p. sur l'ensemble mesurable

$$\Lambda_\varepsilon^i = \left\{ x \in \Omega, \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} = -E \right\},$$

on a, d'après le lemme de Marcus et Mizel,

$$\nabla S_\varepsilon^i - \nabla S_\varepsilon^{i-1} = 0,$$

alors, nous avons, quand  $\eta \rightarrow 0^+$ ,

$$\frac{a_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)}{a_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right) + \eta} \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \rightarrow \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et comme nous avons, en outre, indépendamment de  $\eta$

$$\left| \frac{a_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)}{a_\varepsilon\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right) + \eta} \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right|_{\mathbb{R}^2} \leq \left| \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right|_{\mathbb{R}^2}.$$

alors, il vient par la convergence dominée de Lebesgue, lorsque  $\eta \rightarrow 0^+$ , que

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left[ \nabla S_\varepsilon^i + \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \right] \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \leq 0,$$

c'est-à-dire

$$\left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \nabla S_\varepsilon^i \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \leq - \int_{\Omega} \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx.$$

Par ailleurs,

$$2 \nabla S_\varepsilon^i \cdot (\nabla S_\varepsilon^i - \nabla S_\varepsilon^{i-1}) = |\nabla S_\varepsilon^i|^2 - |\nabla S_\varepsilon^{i-1}|^2 + |\nabla S_\varepsilon^i - \nabla S_\varepsilon^{i-1}|^2,$$

alors,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &- \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq - \int_{\Omega} \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx. \end{aligned}$$

Appliquant la formule de Green sur le membre de droite de cette inégalité (les termes de bord étant nuls), il vient,

$$- \int_{\Omega} \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \cdot \nabla \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}_x \vec{V}(x, S_\varepsilon^i(x)) \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx.$$

On sait que

$$\vec{V} = \vec{V}(x, \lambda); \quad (x, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad \text{et } \vec{V} = (V_1(x, \lambda), V_2(x, \lambda))$$

alors, on trouve que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V}(x, S_\varepsilon^i) \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \right| &= \left| \int_{\Omega} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_2} \right) \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \lambda} \frac{\partial S_\varepsilon^i}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right)^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

Comme les dérivées premières de  $\vec{V}$  sont bornées par supposition, alors, il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$ , dépendant uniquement de  $\vec{V}$ , telles qu'on aura, de (17),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &+ \frac{1}{2h} \|S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C_1 + C_2 \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Par addition terme à terme des inégalités de type (17) entre 1 et  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ , et multiplication par  $h$ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h \left\| \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ \frac{1}{2} \|S_\varepsilon^n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h \|S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|S_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_1 T + C_2 \sum_{i=1}^n h \|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

De (16) et (17), il vient

$$\|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2h(C_1 + 2C_2 \|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega)) + (1 + 8hC_2) \|S_\varepsilon^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

d'où, par le lemme de Gronwall,

$$\|S_\varepsilon^i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \left( 2T(C_1 + 2C_2 \|\vec{V}\|_\infty^2 \text{mes}(\Omega)) + \|S^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \exp(1 + 8TC_2) = cste. \quad (19)$$

C'est-à-dire que la suite  $(S_\varepsilon^i)_{\varepsilon>0}$  demeure, indépendamment de  $\varepsilon$ , dans un borné fixe de  $H_0^1(\Omega)$ . Donc, il existe  $S^i \in H_0^1(\Omega)$  et il existe une sous-suite de  $(S_\varepsilon^i)_{\varepsilon>0}$  convergeant vers  $S^i$  pour la topologie  $\sigma(H_0^1, H^{-1})$ , et fortement dans  $L^2(\Omega)$ , ce qui implique une convergence p.p. dans  $\Omega$  pour une nouvelle sous-suite. Ainsi, nous avons, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \rightarrow \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (20)$$

D'autre part, comme  $0 \leq a_\varepsilon \leq 1$  pour tout  $\varepsilon > 0$ , alors, il existe une sous-suite de  $(a_\varepsilon (\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E))_\varepsilon$  et il existe  $\lambda^i \in (L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$ , tels que

$$a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \rightharpoonup^* \lambda^i \quad \text{faiblement } * \text{ dans } L^\infty(\Omega), \quad (21)$$

En outre, on a, d'après la proposition 2 que pour tout  $i$ ,

$$\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et donc, d'après (20), on a pour tout  $i$ ,

$$\frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Posons

$$A = \left\{ x \in \Omega / \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) (x) \rightarrow \left( \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right) (x) \text{ et } \left( \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right) (x) > 0 \right\}.$$

Alors, la suite  $a_\varepsilon (\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E)$  converge, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , partout dans  $A$  vers 1 et  $\lambda^i \in H \left( \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right)$ . En effet, soit  $x \in A$ , alors  $\exists \eta_x > 0$  tel que

$$\left( \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right) (x) > \eta_x,$$

ce qui implique qu'il existe  $\varepsilon_{\eta_x} > 0$  tel que  $\forall \varepsilon < \varepsilon_{\eta_x}$

$$\left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)(x) > \eta_x.$$

Soit

$$\varepsilon'_{\eta_x} = \min(\varepsilon_{\eta_x}, \eta_x),$$

alors,

$$\forall \varepsilon < \varepsilon'_{\eta_x} \quad \left(\frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E\right)(x) > \varepsilon.$$

D'où, par construction de  $a_\varepsilon$ ,

$$\forall \varepsilon < \varepsilon'_{\eta_x} \quad a_\varepsilon \left( \left[ \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right] (x) \right) = 1. \quad (22)$$

Donc, on peut écrire

$$a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 1 \text{ partout dans } A.$$

Pour montrer que  $\lambda^i \in H \left( \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right)$ ; on remarque, d'après (21), que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\forall v \in L^1(\Omega) \quad \int_\Omega a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) v \, dx \rightarrow \int_\Omega \lambda^i v \, dx.$$

On prend  $v = 1_A$ , alors

$$\int_A a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \, dx \rightarrow \int_A \lambda^i \, dx.$$

Donc, d'après (22), on a

$$\int_A (1 - \lambda^i) \, dx = 0,$$

d'où  $1 = \lambda^i$  sur  $A$  par le fait que  $1 - \lambda^i \geq 0$  dans  $A$ . Par conséquent, et à l'aide de l'encadrement  $0 \leq \lambda^i \leq 1$  sur  $\Omega$ , il vient que  $\lambda^i \in H \left( \frac{S^i - S^{i-1}}{h} + E \right)$ .

On s'intéresse maintenant au passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  dans le terme

$$\int_\Omega a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^i - S_\varepsilon^{i-1}}{h} + E \right) \nabla S_\varepsilon^i \cdot \nabla v \, dx$$

qui fait a priori problème, faute d'un résultat de convergence forte sur l'un des deux termes. On va donc considérer l'approche suivante : partant de  $S_0$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et du coefficient de diffusion  $a_\varepsilon$ , on a d'après le lemme 1 qu'il existe un  $S_\varepsilon^1$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , solution de

$$\int_\Omega \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} v \, dx + \int_\Omega a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \left[ \nabla S_\varepsilon^1 + \vec{V}(x, S_\varepsilon^1) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0,$$

pour tout  $v$  de  $H_0^1(\Omega)$ , avec les estimations correspondantes sur  $S_\varepsilon^1$  assurant, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la convergence de  $S_\varepsilon^1$  vers un élément noté  $S^1$ .

La difficulté du passage à la limite est alors levée en écrivant :

$$\begin{aligned} a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_\varepsilon^1 &= h a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) + a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0 \\ &= h \nabla H_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) + a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0, \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour  $r \in \mathbb{R}$ ,

$$H_\varepsilon(r) = \int_0^r a_\varepsilon(s) ds$$

et

$$H_\varepsilon(r) \rightarrow r^+ \quad \text{simplement dans } \mathbb{R}, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

En conséquence, rappelant que, si  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ,

$$\int_\Omega a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_0 \cdot \nabla v dx \rightarrow \int_\Omega \lambda^1 \nabla S_0 \cdot \nabla v dx, \quad \text{avec } \lambda^1 \in H \left( \frac{S^1 - S_0}{h} + E \right)$$

et que

$$h \int_\Omega \nabla H_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \cdot \nabla v dx \rightarrow h \int_\Omega \nabla \left( \frac{S^1 - S_0}{h} + E \right)^+ \cdot \nabla v dx$$

et d'après la règle de Marcus et Mizel,

$$h \int_\Omega \nabla \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right)^+ \cdot \nabla v dx = h \int_\Omega \lambda^1 \nabla \left( \frac{S^1 - S_0}{h} \right)^+ \cdot \nabla v dx,$$

ainsi, le terme  $\int_\Omega a_\varepsilon \left( \frac{S_\varepsilon^1 - S_0}{h} + E \right) \nabla S_\varepsilon^1 \cdot \nabla v dx$  converge vers  $\int_\Omega \lambda^1 \nabla S^1 \cdot \nabla v dx$ .

On rappelle en effet que pour tout  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on peut écrire

$$\nabla(u^+) = \lambda \nabla u \quad \lambda \text{ étant pris quelconque dans } H(u)$$

par le fait que  $\nabla u = 0$  sur l'ensemble mesurable  $\{x \in \Omega / u(x) = 0\}$ .

Ainsi,  $S^1$  étant construit, on reconduit la procédure à partir de ce nouvel état initial, etc ...  $\square$

## 4 Le problème du passage au cas continu :

À l'aide des solutions approchées trouvées dans la section précédente, nous définissons les fonctions  $S^h$  et  $\tilde{S}^h$  par les relations

$$\forall t \in ]0, T] \quad S^h(t) = \sum_{i=1}^N S^i 1_{](i-1)h, ih]}(t), \quad S^h(0) = S^0,$$

et

$$\forall t \in ]0, T] \quad \tilde{S}^h(t) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{S^i - S^{i-1}}{h} (t - (i-1)h) + S^{i-1} \right] 1_{](i-1)h, ih]}(t), \quad \tilde{S}^h(0) = S_0,$$

et on note que la dérivée  $\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}$  calculée au sens de  $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$ , est la fonction étagée

$$\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} = \sum_{i=1}^N \frac{S^i - S^{i-1}}{h} 1_{](i-1)h, ih]}.$$

Alors, d'après (19) et le fait que  $S^i$  est la limite faible de  $S_\varepsilon^i$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on a, indépendamment de  $h$ , que  $S^h \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Ainsi, de (18) on trouve que la suite  $(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t})_h$  demeure, indépendamment de  $h$ , dans un borné de  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ . De plus, en remarquant que, pour tout  $t \in ](i-1)h, ih]$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\left\| \tilde{S}^h(t) - S^h(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|S^i - S^{i-1}\|_{H_0^1(\Omega)},$$

alors, on obtient l'estimation

$$\left\| \tilde{S}^h - S^h \right\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 \leq Ch, \quad (23)$$

avec  $C$  une constante indépendante de  $h$ . Cette estimation permet de montrer lors des extractions de sous-suites à venir, que l'on peut prendre, pour  $\{S^h\}$  et  $\{\tilde{S}^h\}$ , des sous-suites de même indice, et que les points d'accumulation sont identiques.

Nous avons du lemme 4 que pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ , pour tout  $t \in ](i-1)h, ih]$  et pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t)v \, dx + \int_{\Omega} \lambda^i \left[ \nabla S^h + \vec{V}(x, S^h) \right] \cdot \nabla v \, dx = 0,$$

et en utilisant l'estimation (23), on trouve que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t)v \, dx + \int_{\Omega} \lambda^i \left[ \nabla \tilde{S}^h + \vec{V}(x, \tilde{S}^h) \right] \cdot \nabla v \, dx = o(h),$$

avec  $\lambda^i \in H\left(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t, \cdot) + E\right)$ .

Finalement, en intégrant de 0 à  $T$  il vient, pour tout  $v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ ,

$$\int_Q \frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t}(t, x)v(x) \, dx \, dt + \int_Q \lambda^h(t, x) \left[ \nabla \tilde{S}^h(t, x) + \vec{V}(x, S^h(t, x)) \right] \cdot \nabla v(x) \, dx \, dt = o(h),$$

où  $\lambda^h = \sum_{i=1}^N \lambda^i 1_{](i-1)h, ih]} \in H\left(\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E\right)$  et avec

$$\frac{\partial \tilde{S}^h}{\partial t} + E \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

Ici, le problème du passage à la limite sur  $h$  vient du terme  $\lambda^h \nabla \tilde{S}^h$ , parce que les estimations que nous avons ne donnent qu'une convergence faible dans  $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  pour  $\{\tilde{S}^h\}$  et une convergence faible  $*$  dans  $L^\infty(Q)$  pour  $\{\lambda^h\}$ .

## 5 Le cas de dimension un d'espace

Dans le cas de dimension un d'espace, le problème est résolu grâce au fait que la suite  $\lambda^h$  est, indépendamment de  $h$ , bornée dans l'espace des fonctions à variations bornées sur  $Q$ . En effet, cette appartenance donne la convergence presque partout pour une sous-suite de  $\lambda^h$ , ce qui est suffisant pour passer à la limite dans le terme qui fait problème, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (Cf G. Vallet [6]).

Dans ce qui suit, nous éclairons quelques cas particuliers en dimension un d'espace.



## 5.1 Le cas des phénomènes de sédimentation en transport marin

### Le comportement hyperbolique et ses conséquences :

zones mortes, effet de cloisonnement, etc .....

#### 5.1.1 Une observation liminaire

On se limite ici aux seuls effets de sédimentation sous l'action gravitaire dans la prise en compte de courants marins ; en conséquence, on prend en neutralisant le processus d'érosion :

$$E = 0$$

ce qui induit désormais la contrainte

$$\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0 \quad \text{p.p. dans } Q$$

et la propriété sur le terme de transport

$$\vec{V}(x, S) = 0 \quad \text{pour } S \geq 0$$

(pas de terme de transport aérien, au-dessus de la cote zéro).

Le caractère hyperbolique de l'équation qui régit la topographie  $S$  peut être vu en écrivant l'équation de continuité sous la forme ( la fonction d'état limitant le flux  $a$  étant supposée suffisamment régulière) :

$$a \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + d \frac{\partial S}{\partial t} + e \frac{\partial S}{\partial x} = g, \quad (t, x) \in ]0, T[ \times \Omega \quad (24)$$

où  $a, b, c, d, e$  et  $g$  sont des fonctions des variables indépendantes  $x$  et  $t$ , avec plus précisément :

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -\frac{1}{2} a' \left( \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) \right) \left[ \frac{\partial S}{\partial x}(t, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right] \\ c &= -a \left( \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) \right) \\ d &= 1 \\ e &= -a \left( \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) \right) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_2}(x, S) \\ g &= a \left( \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) \right) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1}(x, S). \end{aligned}$$

On sait que l'équation linéaire (24) est dite hyperbolique si

$$b^2 - ac > 0,$$

hyperbolique dégénérée si

$$b^2 - ac \geq 0.$$

Ici, il vient

$$b^2 - ac = \frac{1}{4} \left( a' \left( \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) \right) \left[ \frac{\partial S}{\partial x}(t, x) + \vec{V}(x, S(t, x)) \right] \right)^2 \geq 0$$

d'où le comportement hyperbolique par la présence du terme  $\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x}$ , alors qu'on pourrait penser faussement que l'équation est de type parabolique de diffusion-transport.

### 5.1.2 Illustration du caractère hyperbolique

Soit  $S$  une solution forte dans  $H^1(Q) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$  du problème. Alors, les premières propriétés qualitatives témoignant du caractère hyperbolique peuvent être résumées dans la proposition suivante :

**Proposition 5.** *Toute solution  $S$  du problème est telle que*

- i)  $a(\frac{\partial S}{\partial t}) \nabla S^+ = 0$  p.p. dans  $Q$
- ii)  $\forall t \geq 0, S^+(t, \cdot) = S_0^+$  p.p. dans  $\Omega$

et en conséquence,

- iii)  $\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0$  p.p. sur  $\{x \in \Omega, S_0(x) \geq 0\}$ ,
- $\forall t \geq 0, S(t, \cdot) \leq S_0$  p.p. sur  $\{x \in \Omega, S_0(x) \leq 0\}$

ce qui traduit un effet de propagation hyperbolique. En effet, certaines régions restent indéfiniment hors d'atteinte du phénomène physique.

#### Preuve

Pour le choix licite de la fonction-test  $v = S^+$  il vient, p.p en  $t$ ,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S}{\partial t} S^+ dx + \int_{\Omega} a(\frac{\partial S}{\partial t}) |\nabla S^+|^2 dx = 0 \quad (25)$$

par le fait que p.p. en  $t$ ,  $\vec{V}(x, S) \cdot \nabla S^+ = 0$ , d'où  $i$ ).

Par la régularité de la solution, on a presque partout dans  $Q$ ,

$$\frac{\partial S}{\partial t} S^+ = \frac{\partial S^+}{\partial t} S^+, \quad \text{car } \frac{\partial S^+}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} 1_{[S \geq 0]},$$

de sorte qu'on déduit de (25) que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial S^+}{\partial t} (S^+ - S_0^+) dx + \int_{\Omega} a(\frac{\partial S}{\partial t}) |\nabla S^+|^2 dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial S^+}{\partial t} S_0^+ dx.$$

Or la contrainte  $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$  p.p. dans  $Q$  et la régularité de  $S$  impliquent que  $\frac{\partial S^+}{\partial t} \geq 0$  dans  $Q$ , d'où,

$$\text{p.p. en } t, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial (S^+ - S_0^+)}{\partial t} (S^+ - S_0^+) dx \leq 0,$$

et donc pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |S^+(t, \cdot) - S_0^+|^2 dx \leq 0$$

d'où  $ii$ ), ainsi que les conséquences annoncées, par le fait que  $\forall t \geq 0, S(t, \cdot) \geq S_0$  p.p. dans  $\Omega$  par la contrainte de sédimentation. En particulier, l'ensemble  $\mathcal{L}^1$ -mesurable  $\{x \in \Omega, S_0(x) \geq 0\}$  est une zone sans activité, *i.e.* une zone morte.

## 5.2 Effet de cloisonnement ou effet barrière

Nous allons mettre en évidence qu'une zone entourée d'un cordon sédimentaire élevé au-dessus du niveau topographique zéro est isolée complètement des effets du phénomène ; il s'agit d'un effet barrière.

**Proposition 6.** *On suppose qu'il existe un ensemble compact  $K$ , d'intérieur non vide et un ouvert lipschitzien  $w$  tels que*

$$K \subset w \subset \Omega \text{ et } w \setminus K \subset \{S_0 \geq 0\}.$$

*Alors, pour tout  $t \geq 0$ ,  $S(t, \cdot) = S_0$  p.p. dans  $K$ , et donc, par la proposition précédente,  $\forall t \geq 0$ ,  $S(t, \cdot) = S_0$  p.p. dans  $w$ .*

### Preuve

Par le lemme d'Urysohn, on peut construire une fonction-test  $\tilde{v}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , telle que  $0 \leq \tilde{v} \leq 1$  dans  $\Omega$ ,  $\tilde{v}|_K = 1$  et  $\tilde{v} \in H_0^1(w)$ . Pour ce choix, il vient, p.p. en  $t \in ]0, T[$ ,

$$\int_{w \setminus K} \frac{\partial S}{\partial t} \tilde{v} \, dx + \int_K \frac{\partial S}{\partial t} \tilde{v} \, dx + \int_{w \setminus K} a\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) (\nabla S + \vec{V}(x, S)) \cdot \nabla \tilde{v} \, dx + \int_K a\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) (\nabla S + \vec{V}(x, S)) \cdot \nabla \tilde{v} \, dx = 0$$

Or, d'après les résultats de la proposition précédente et leurs conséquences, p.p. en  $t$ ,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0 \text{ et } a\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) (\nabla S + \vec{V}(x, S)) \cdot \nabla \tilde{v} = 0 \text{ p.p. dans } w \setminus K,$$

ce qui annule les intégrales sur  $w \setminus K$ . En outre, par construction,  $\nabla \tilde{v} = 0$  p.p. dans  $K$ , d'où finalement, p.p. en  $t$ ,

$$\int_K \frac{\partial S}{\partial t} \tilde{v} \, dx = 0, \quad \text{i.e.} \quad \int_K \frac{\partial S}{\partial t} \, dx = 0$$

ce qui implique, par le fait que  $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$  p.p. dans  $K$ , que  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$  p.p. dans  $K$ , et donc,

$$\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } K.$$

Puisque  $w \setminus K \subset \{S_0 \geq 0\}$ , on a par la proposition précédente que

$$\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } w \setminus K,$$

d'où la conclusion : la zone "piégée" par la barrière  $w \setminus K$  est inactive, et, en conséquence, la région  $w$  toute entière est une zone morte.  $\square$

Cette proposition est surtout intéressante lorsque

$$S_0 \leq 0 \text{ p.p. dans } \overset{\circ}{K},$$

car alors, on sait que ce sous-bassin sédimentaire ne va pas se combler et reste à l'état d'origine, hors d'influence.

### 5.3 Cas de non-unicité

Considérons un ouvert  $w$  sur lequel  $S_0$  est positive ou nulle. On a vu (proposition 5) qu'alors

$$\forall t \geq 0, S(t, \cdot) = S_0 \quad \text{p.p. dans } w$$

et de la proposition 5, propriété  $i$ ), il s'ensuit que

$$a\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)\nabla S_0 = 0 \quad \text{p.p. dans } w.$$

Donc, en toute région de  $w$  non plane, *i.e.* là où  $\nabla S_0 \neq 0$ , le limiteur de flux est nécessairement nul et l'équation est complètement dégénérée. Sur toute région plane de  $w$ , le limiteur de flux est indéterminé et peut prendre toute valeur entre 0 et 1, ce qui pose la difficulté de l'étude de l'unicité sans introduire, le cas échéant, un critère discriminant.

Pour clarifier ce point, on va s'intéresser à des solutions particulières, dites solutions "traveling waves".

### 5.4 Construction de solutions explicites particulières Les solutions "traveling waves" avec obstacle mobile

On se propose de construire des solutions explicites, dites "traveling waves", en examinant les possibilités de rechercher les solutions sous la forme (selon une idée de (S.N. Antontsev [16]) :

$$S(t, x) = h(\xi), \quad \lambda(x, t) = \lambda(\xi) \quad \text{où } \xi = x + \mu t, \quad \mu > 0,$$

$$x \in ]0, L[, \quad L > 0, \quad t \in ]0, T[, \quad T > 0, \quad Q = ]0, T[ \times ]0, L[,$$

soumises à un obstacle mobile de la forme

$$E(t, x) = E^* 1_{Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\}}(t, x) + E^{**} 1_{Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\}}, \quad \text{avec } E^{**} > E^* > 0 \text{ et } 0 < \xi_0 < \xi_1.$$

Omettant provisoirement les conditions de bord sur la frontière parabolique, le problème du limiteur de flux modélisé par le graphe maximal monotone associé à l'échelon de Heaviside, s'énonce :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } (S, \lambda) \text{ avec } \lambda \in H\left(\frac{\partial S}{\partial t} + E\right) \text{ et vérifiant :} \\ \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda \left( \frac{\partial S}{\partial x} + V(S) \right) \right] = 0, \quad \text{dans } Q, \\ S(0, \cdot) = S_0 \quad \text{dans } ]0, L[, \end{array} \right.$$

et s'écrit dans la technique "traveling waves" :

Chercher  $\xi \mapsto h(\xi)$ ,  $\lambda \mapsto \lambda(\xi)$  vérifiant :

$$\mu h'(\xi) - \left\{ \lambda(\xi) \left[ h'(\xi) + V(h(\xi)) \right] \right\}' = 0, \quad \xi > 0, \quad (26)$$

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq 1, \quad \mu h'(\xi) + E(\xi) \geq 0, \quad (1 - \lambda(\xi))(\mu h'(\xi) + E(\xi)) = 0, \quad \xi > 0 \quad (27)$$

$$h(0) = S_0(0). \quad (28)$$

Ici, on a supposé que la fonction  $V(x, S(t, x))$  modélisant l'effet de transport marin ou éolien ne dépend que de l'altitude ou la profondeur du point considéré, et on observe que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \mu h'(\xi), \quad \frac{\partial S}{\partial x} = h'(\xi) \text{ etc ...}$$

L'équation (26) montre immédiatement que, après une quadrature,

$$\exists C_0 \in \mathbb{R} / \forall \xi > 0, \quad \mu h(\xi) - \lambda(\xi) \left[ h'(\xi) + V(h(\xi)) \right] = C_0. \quad (29)$$

On propose alors de mettre en évidence des données qui permettent de réaliser le scénario suivant :

\* dans la région

$$Q_0 = Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\},$$

la contrainte est inactive, c'est-à-dire que

$$\lambda(\xi) = 1$$

avec le respect de la relation d'érosion limitée :

$$\mu h'(\xi) + E^* \geq 0.$$

\* dans la région

$$Q_1 = Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\},$$

la contrainte du limiteur de flux est activée, c'est-à-dire que

$$0 \leq \lambda(\xi) \leq 1 \text{ et } \mu h'(\xi) + E^{**} = 0.$$

La question est donc de montrer que ce scénario est réalisable et d'expliciter les solutions  $h(\xi)$  et  $\lambda(\xi)$ .

Pour aller à l'essentiel, on va supposer que l'effet de transport se traduit par

$$V(S) = aS, \quad (30)$$

où  $a$  est un réel de signe positif ou négatif, selon le sens de l'effet convectif, avec

$$|a| < \mu$$

(hypothèse signifiant que le transport est une "petite" perturbation de l'effet gravitaire).

On remarquera pour la suite que la fonction  $\xi \mapsto h(\xi)$  est continue nécessairement, que les fonctions  $\xi \mapsto \lambda(\xi)$  et  $\xi \mapsto h'(\xi)$  peuvent présenter des discontinuités mais que le produit  $\xi \mapsto \lambda(\xi) \left[ h'(\xi) + ah(\xi) \right]$  est continu.

#### 5.4.1 Première phase : contrainte inactive dans $Q_0 = Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\}$

On va montrer que l'on peut construire une solution dans  $Q_0$  telle que plus précisément

$$\mu h'(\xi) + E^* > 0 \text{ pour } \xi \in [0, \xi_0[, \quad \mu h'(\xi_0) + E^* = 0 \text{ et } \lambda(\xi) = 1 \text{ pour } \xi \in [0, \xi_0[. \quad (31)$$

Il vient donc, d'après (29) et (30),

$$h'(\xi) = (\mu - a)h(\xi) - C_0,$$

d'où

$$h(\xi) = C_1 e^{(\mu-a)\xi} + \frac{C_0}{\mu - a}$$

avec

$$\begin{aligned} h(0) &= C_1 + \frac{C_0}{\mu - a}, \quad \text{par calcul} \\ &= S_0(0), \quad \text{par définition .} \end{aligned}$$

Par ailleurs, la condition désirée

$$\mu h'(\xi_0) + E^* = 0$$

implique que

$$\mu C_1(\mu_a) e^{(\mu-a)\xi_0} + E^* = 0 \text{ d'où } C_1 = -\frac{E^*}{\mu(\mu-a)} e^{-(\mu-a)\xi_0}$$

et, finalement, pour  $\xi \in [0, \xi_0]$ ,

$$\begin{aligned} h(\xi) &= -\frac{E^*}{\mu(\mu-a)} e^{(\mu-a)(\xi-\xi_0)} + \frac{E^*}{\mu(\mu-a)} e^{-(\mu-a)\xi_0} + S_0(0) \\ &= S_0(0) + \frac{E^*}{\mu(\mu-a)} e^{-(\mu-a)\xi_0} \left[ 1 - e^{(\mu-a)\xi} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Il reste à vérifier que ce choix est compatible avec la relation (31); or, pour  $\xi \in [0, \xi_0]$ ,

$$\begin{aligned} \mu h'(\xi) + E^* &= -E^* e^{(\mu-a)(\xi-\xi_0)} + E^* \\ &= E^* \left( 1 - e^{(\mu-a)(\xi-\xi_0)} \right) > 0 \text{ par le fait qu'ici } \xi - \xi_0 \leq 0 \text{ et } \mu - a > 0. \end{aligned}$$

On retiendra pour la suite que

$$C_0 = (\mu - a)h(\xi_0) + \frac{E^*}{\mu} \quad (33)$$

et on prendra des données compatibles avec la relation :

$$\frac{E^*}{\mu} - ah(\xi_0) > 0,$$

ce qui est possible pour  $|a|$  assez petit. On note la cohérence de cette expression en précisant les unités :

$$E^* = \frac{L}{T}, \quad \mu = \frac{L}{T}, \quad a = \frac{1}{L}, \quad h = L, \quad C_0 = \frac{L^2}{T}, \quad \lambda = \frac{L^2}{T}$$

et donc, l'expression  $\mu - a$  doit être lue comme  $\mu - \lambda a$  avec  $\lambda = 1$  et  $a$  pour dimension

$$\frac{L}{T} + \frac{L^2}{T} \times \frac{1}{L} = \frac{L}{T}$$

c'est-à-dire une vitesse, alors que

$$\frac{E^*}{\mu} - ah(\xi_0)$$

est un scalaire adimensionné.

### 5.4.2 Deuxième phase : activation de la contrainte pour limiter le flux diffusif et convectif

Dans cette phase on doit réaliser les conditions simultanées :

$$\mu h'(\xi) + E^{**} = 0, \quad 0 \leq \lambda(\xi) \leq 1 \quad \text{pour } \xi \in [\xi_0, \xi_1].$$

Il vient donc

$$\begin{cases} \mu h(\xi) - \lambda(\xi) \left[ -\frac{E^{**}}{\mu} + ah(\xi) \right] = C_0, \\ \mu h'(\xi) + E^{**} = 0, \quad \text{pour } \xi \in ]\xi_0, \xi_1[, \end{cases}$$

d'où

$$h(\xi) = -\frac{E^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + h(\xi_0)$$

avec

$$h(\xi_0) = h(\xi_0^-) = h(\xi_0^+) = S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} \left[ 1 - e^{-(\mu-a)\xi_0} \right],$$

d'après (32) et la nécessaire continuité de  $h$ , c'est-à-dire

$$h(\xi) = -\frac{E^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} \left[ 1 - e^{-(\mu-a)\xi_0} \right], \quad \text{pour } \xi \in [\xi_0, \xi_1]$$

puis,

$$\lambda(\xi) = \frac{\mu h(\xi) - C_0}{ah(\xi) - \frac{E^{**}}{\mu}},$$

ou encore

$$\lambda(\xi) = \frac{-E^{**}(\xi - \xi_0) + \mu h(\xi_0) - C_0}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + ah(\xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu}}, \quad \text{pour } \xi > \xi_0.$$

On observe alors que la fonction  $\lambda$  est homographique sur  $]\xi_0, \xi_1[$  et que selon (33), on peut encore écrire :

$$\lambda(\xi) = \frac{-E^{**}(\xi - \xi_0) - \frac{E^*}{\mu} + ah(\xi_0)}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + ah(\xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu}},$$

et en particulier,

$$\lambda(\xi_0^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - ah(\xi_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - ah(\xi_0)}, \quad \text{avec } E^{**} > E^* > 0,$$

d'où le fait important que  $\lambda(\xi_0^+) \in ]0, 1[$  et donc par la continuité de la fonction  $\lambda$ , on peut choisir  $\xi_1 > \xi_0$  tel que  $\lambda(\xi) \in [0, 1]$  pour  $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$ . Plus précisément, ici,

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{E^{**} - E^*}{E^{**}} \frac{1}{\mu - a},$$

dimensionné à une longueur.

En résumé, on a construit une solution explicitement définie par

$$S(t, x) = S_0(0) + \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} e^{-(\mu-a)\xi_0} \left[ 1 - e^{(\mu-a)(x+\mu t)} \right], \quad \lambda(t, x) = 1$$

pour  $(t, x) \in ]0, T[ \times ]0, L[ \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\}$

$$S(t, x) = \frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} \left[ 1 - e^{-(\mu-a)\xi_0} \right],$$

$$\lambda(t, x) = \frac{-E^{**}(x + \mu t - \xi_0) - \frac{E^*}{\mu} + aH_0}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu} + aH_0},$$

pour  $(t, x) \in ]0, T[ \times ]0, L[ \cap \{\xi_0 \leq x + \mu t \leq \xi_1\}$ , où

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{E^{**} - E^*}{E^{**}} \frac{1}{\mu - a},$$

et où l'on note

$$H_0 = S_0(0) - \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} \left[ 1 - e^{-(\mu - a)\xi_0} \right].$$

La donnée initiale est ici

$$S(0, x) = S_0(0) + \frac{E^*}{\mu(\mu - a)} e^{-(\mu - a)\xi_0} \left[ 1 - e^{(\mu - a)x} \right], \quad \text{pour } x \in ]0; L[,$$

$S_0(0)$  étant un réel strictement positif, à discrétisation.

Les conditions de bord associées, de Dirichlet ou de Neumann selon la modélisation choisie, découlent du calcul de  $S(t, 0)$ ,  $S(t, L)$ ,  $\lambda(t, 0) \frac{\partial S}{\partial x}(t, 0)$ ,  $\lambda(t, L) \frac{\partial S}{\partial x}(t, L)$ , etc ... . On note la nécessité pour ce scénario que  $E^{**} > E^*$  (relâchement de la contrainte) pour que l'on ait

$$\xi_1 > \xi_0 \quad \text{et} \quad \lambda(\xi_0^+) \leq 1.$$

Pour commenter cette situation, posons pour fixer les idées que  $0 < L < \xi_0$ . Il s'ensuit que jusqu'à l'instant

$$t^* = \frac{\xi_0 - L}{\mu}$$

le graphe de la fonction  $x \mapsto S(t, x)$  est très régulier, puis, pour  $t > t^*$ , le graphe, lipschitzien seulement, présente un point anguleux mobile parcourant l'intervalle  $]0, L[$  de droite à gauche, en

$$\hat{x}(t) = \xi_0 - \mu t,$$

les pentes en  $\hat{x}(t)$  étant respectivement :

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^-) = -\frac{E^*}{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^+) = -\frac{E^{**}}{\mu}, \quad S(t, \hat{x}(t)) = H_0,$$

là où le limiteur de flux présente une discontinuité :

$$\lambda(t, (\hat{x}(t))^-) = 1 \quad \text{et} \quad \lambda(t, (\hat{x}(t))^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - aH_0}{\frac{E^{**}}{\mu} - aH_0} \in ]0, 1[$$

Vérification : le produit

$$\lambda(t, \hat{x}(t)) \left[ S'(t, \hat{x}(t)) + aS(t, \hat{x}(t)) \right]$$

est continu :

$$1 \times \left[ -\frac{E^*}{\mu} + aH_0 \right] = \frac{\frac{E^*}{\mu} - aH_0}{\frac{E^{**}}{\mu} - aH_0} \times \left[ -\frac{E^{**}}{\mu} + aH_0 \right].$$

D'autres scénarios peuvent facilement être construits par ce procédé. Prenons le cas où  $E^* = 0$  et  $E^{**} > 0$  qui correspond à une seule procédure de sédimentation + transport dans un premier temps,



puis ensuite, un processus de sédimentation + érosion + transport.  
Il vient alors, sous la condition de cohérence  $S_0(0) > 0$  et  $a < 0$ ,

$$S(t, x) = S_0(0), \quad \lambda(t, x) = 1 \quad \text{pour } (t, x) \in ]0, T[ \times ]0, L[ \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\},$$

$$S(t, x) = -\frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + S_0(0), \quad \lambda(t, x) = \frac{-E^{**}(x + \mu t - \xi_0) + aS_0(0)}{-\frac{aE^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) - \frac{E^{**}}{\mu} + aS_0(0)},$$

pour  $(t, x) \in Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\}$ , où

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{1}{\mu - a}.$$

$$S(0, x) = S_0(0) \quad \text{pour } x \in ]0, L[.$$

Prenant encore  $0 < L < \xi_0$ , on voit apparaître un point anguleux après l'instant  $t^* = \frac{\xi_0 - L}{\mu}$  en l'abscisse  $\hat{x}(t) = \xi_0 - \mu t$ , les pentes valant à gauche et à droite respectivement 0 et  $-\frac{E^{**}}{\mu}$ , les limiteurs de flux présentent un saut, puisque, pour  $t > \frac{\xi_0 - L}{\mu}$

$$\lambda(t, (\hat{x}(t))^-) = 1, \quad \lambda(t, (\hat{x}(t))^+) = \frac{aS_0(0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - aS_0(0)} \in ]0, 1[.$$

On vérifie encore, pour  $t > \frac{\xi_0 - L}{\mu}$ , la continuité de la fonction

$$t \mapsto \lambda(t, \hat{x}(t)) \left[ \frac{\partial S}{\partial x}(t, \hat{x}(t)) + aS(t, \hat{x}(t)) \right]$$

par le calcul :

$$1 \times [0 + aS_0(0)] = \frac{aS_0(0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - aS_0(0)} \times \left[ -\frac{E^{**}}{\mu} + aS_0(0) \right].$$

Pour le choix :  $0 < \xi_0 < L$ , l'état initial est donné par

$$S_0(x) = \begin{cases} S_0(0) & \text{pour } x \in ]0, \xi_0[ \\ -\frac{E^{**}}{\mu}(x - \xi_0) + S_0(0) & \text{pour } x \in [\xi_0, L], \end{cases}$$

de sorte qu'ici, le point anguleux est présent dans la topographie initiale et va se déplacer immédiatement à la vitesse  $\mu$  de droite à gauche. Là encore, on est en présence d'un phénomène de propagation à vitesse finie, déformant une région plate continuée par un plan incliné.

On peut observer que l'on peut obtenir la même solution  $(t, x) \mapsto S(t, x)$  que précédemment avec la même condition initiale et les mêmes conditions de Dirichlet non homogènes, pour le choix de  $\lambda$  différent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t, x) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in ]0, T[ \times ]0, L[ \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\} \\ \lambda(t, x) = \frac{E^{**}(x + \mu t - \xi_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} + \frac{aE^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) - aS_0(0)} \\ \text{pour } (t, x) \in ]0, T[ \times ]0, L[ \cap \{\xi_0 \leq x + \mu t \leq \xi_1\}, \text{ avec } \xi_1 = +\infty, \end{array} \right.$$

la fonction  $\lambda$  étant ici continue en  $\hat{x}(t) = \xi_0 - \mu t$ ; en fait par réalisme, on doit avoir

$$S(t, x) \geq 0, \quad \text{i.e.} \quad \xi_1 = \xi_0 + \frac{\mu}{E^{**}}S_0(0);$$

cela pointe des possibilités de non-unicité, pour les couples  $(S, \lambda)$ , avec  $\lambda \in H(\frac{\partial S}{\partial t} + E)$ . Ces cas de non-unicité sont rencontrés a priori lorsqu'on impose une condition de sédimentation sans érosion ( $E(t, x)$  nul sur une certaine région  $\Lambda$  de  $Q = ]0, T[ \times \Omega$ ), autrement dit,  $\frac{\partial S}{\partial t} \geq 0$  dans  $\Lambda$ . En ce sens, les problèmes associés à un obstacle qui reste strictement positif ou à un obstacle pouvant s'annuler semblent de nature très différente.

Le cas général où le terme de transport est modélisé par un terme non linéaire  $V(S(t, x))$  peut être abordé de la même façon. Considérons la phase de contrainte désactivée (avec  $E^* > 0$ ), il vient, pour  $\xi \in [0, \xi_0]$ ,

$$\begin{aligned} \mu h(\xi) - [h'(\xi) + V(h(\xi))] &= C_0, \quad \lambda(\xi) = 1 \\ \mu h(\xi) + E^* &\geq 0, \quad \mu h'(\xi_0^-) + E^* = 0. \end{aligned}$$

On suppose comme précédemment que l'influence gravitaire est prépondérante, ce qui se traduit par

$$\mu - \|V'\|_{L^\infty(0, L)} > 0.$$

On note

$$\psi_\mu = \mu Id - V,$$

fonction strictement croissante, et on prend pour grandeur de calage  $H_0 = h(\xi_0)$ . Il vient, en  $\xi_0^-$ ,

$$\mu H_0 - \left[ -\frac{E^*}{\mu} + V(H_0) \right] = C_0$$

d'où

$$C_0 = \psi_\mu(H_0) + \frac{E^*}{\mu},$$

l'équation différentielle s'écrit donc

$$h'(\xi) = \psi_\mu(h(\xi)) - \psi_\mu(H_0) - \frac{E^*}{\mu}, \quad \xi \in ]0, \xi_0[ \text{ et } h(\xi_0) = H_0 > 0. \quad (34)$$

Prenant pour simplifier un peu (la constante  $\mu$  est petite, ce qui légitime ce qui est fait), la situation où

$$\frac{E^*}{\mu} \geq \text{oscillation } \psi_\mu, \quad \frac{E^*}{\mu} \geq V(H_0).$$

On sait par des résultats généraux sur les équations différentielles que (34) admet une unique solution  $h$  décroissante, de sorte qu'ipso facto,

$$\mu h'(\xi) + E^* = \mu[\psi_\mu(h(\xi)) - \psi_\mu(H_0)] \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu h'(\xi_0^-) + E^* = 0.$$

Le traitement de la deuxième phase (activation de la contrainte) conduit à prendre, lorsque le taux d'érosion maximale est  $E^{**} > E^*$ ,

$$h(\xi) = -\frac{E^{**}}{\mu}(\xi - \xi_0) + H_0, \quad \xi \in [\xi_0, \xi_1]$$

et donc

$$\lambda(\xi) = \frac{\mu h(\xi) - \psi_\mu(H_0) - \frac{E^*}{\mu}}{V(h(\xi)) - \frac{E^{**}}{\mu}}, \quad \xi \in ]\xi_0, \xi_1].$$

En particulier,

$$\lambda(\xi_0^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - V(H_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - V(H_0)} \text{ et donc } \lambda(\xi_0^+) \in ]0, 1[,$$

ce qui permet par un argument de continuité de choisir  $\xi_1$  le plus grand possible, de sorte que les valeurs de  $\lambda$  sur  $[\xi_0^+, \xi_1]$  restent dans  $[0, 1]$ .

En résumé, la solution construite par le procédé “travelling waves” est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} S(t, x) = h(x + t\mu), \lambda(t, x) = 1 \quad \text{pour } (t, x) \in Q \cap \{0 \leq x + \mu t \leq \xi_0\} \\ \text{où } h \text{ est la solution de l'équation différentielle ordinaire :} \\ h'(\xi) = \psi_\mu(h(\xi)) - \psi_\mu(H_0) - \frac{E^*}{\mu}, \psi_\mu = \mu Id - V, H_0 = h(\xi_0), \xi \in ]0, \xi_0[, \\ \\ S(t, x) = -\frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + H_0, \lambda(t, x) = \frac{-E^{**}(x + \mu t - \xi_0) + V(H_0) - \frac{E^*}{\mu}}{V\left[-\frac{E^{**}}{\mu}(x + \mu t - \xi_0) + H_0\right] - \frac{E^{**}}{\mu}} \\ \text{pour } (t, x) \in Q \cap \{\xi_0 < x + \mu t \leq \xi_1\}, \end{array} \right.$$

avec la même remarque sur les discontinuités des fonctions  $\frac{\partial S}{\partial x}$  et  $\lambda$  le long de la droite

$$x + \mu t = \xi_0,$$

c'est-à-dire en les points

$$\hat{x}(t) = \xi_0 - \mu t \text{ lorsque } \hat{x}(t) \in [0, L].$$

Il vient, par exemple,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t, (\hat{x}(t))^-) = 1, \quad 0 < \lambda(t, (\hat{x}(t))^+) = \frac{\frac{E^*}{\mu} - V(H_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - V(H_0)} < 1, \\ \\ \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^-) = -\frac{E^*}{\mu}, \quad \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^+) = -\frac{E^{**}}{\mu}, \end{array} \right.$$

où

$$\xi_1 = \xi_0 + \frac{\mu}{E^{**}} H_0 - \frac{\mu}{E^{**}} \psi_\mu^{-1} \left[ \psi_\mu(H_0) + \frac{E^* - E^{**}}{\mu} \right],$$

avec le fait que la propriété  $\xi_1 > \xi_0$  est assurée par l'hypothèse :  $E^{**} > E^* > 0$ , et la stricte croissance de la fonction  $\psi_\mu$ .

En outre, on vérifie aisément que la fonction de “flux”

$$t \longmapsto \lambda(t, \hat{x}(t)) \left[ \frac{\partial S}{\partial x}(t, \hat{x}(t)) + V(S(t, \hat{x}(t))) \right]$$

est continue alors que certains termes de ce produit sont discontinus : en effet,

$$\lambda(t, (\hat{x}(t))^-) \left[ \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^-) + V(S(t, (\hat{x}(t))^-)) \right] = 1 \times \left[ -\frac{E^*}{\mu} + V(H_0) \right]$$

et

$$\begin{aligned} \lambda(t, (\hat{x}(t))^+) \left[ \frac{\partial S}{\partial x}(t, (\hat{x}(t))^+) + V(S(t, (\hat{x}(t))^+)) \right] &= \frac{\frac{E^*}{\mu} - V(H_0)}{\frac{E^{**}}{\mu} - V(H_0)} \times \left[ -\frac{E^{**}}{\mu} + V(H_0) \right] \\ &= -\frac{E^*}{\mu} + V(H_0). \end{aligned}$$

**Conclusion :**

Le modèle présenté pour simuler les effets du transport éolien ou marin lors de la formation des bassins sédimentaires est bien posé au sens de Hadamard dans sa formulation implicite semi-discrétisée par rapport au temps. Il met en évidence des propriétés descriptives du phénomène géologique qui révèlent le caractère localement hyperbolique dégénéré de l'équation de conservation de masse. Cependant, le passage à la formulation continue fait apparaître des produits de deux convergences faibles et soulève des difficultés théoriques non surmontées ; il s'agit, à notre connaissance, de problèmes originaux, largement ouverts.

## Références

- [1] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE AND G. VALLET. A Non-Standard Free Boundary Problem Arising from Stratigraphy, *Analysis and Applications*, Vol. 4, N° 3, 2006, 209 - 236.
- [2] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE AND G. VALLET. Weather limited constraint in stratigraphy (International conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics", section 5, Mathematical Geophysics, Moscow, 2006)
- [3] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, AND G. VALLET. Analyse Mathématique d'un modèle d'assèchement stratigraphique. Approche gravitationnelle d'un processus de sédimentation sous contrainte d'érosion maximale ( Publication interne du Laboratoire de Mathématiques Appliquées UMR-CNRS 5142, Université de Pau, N° 01/23, 2001)
- [4] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, AND G. VALLET. On some stratigraphic control problem, *Prikladnaya Mekhanika Tekhnicheskaja Fisika (novosibirsk)* **44**(2003) 85-94 (in Russian). and *Journal of applied Mechanics and Technical physics (New York)* **44** (2003) 821-828.
- [5] P. BÉNILAN, M. G. GRANDALL AND A. PAZY. Bonnes solutions d'un problème d'évolution semi-linéaire; *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*(306) (1988) 527-530.
- [6] C. CUESTA, C. J. VAN DUJN AND J. HULSHOF. Infiltration in porous media with dynamic capillary pressure : Travelling waves. *Eur. J. Appl. Math.* **11** (2000) 381-397.
- [7] D. ETIENNE. Contribution à l'analyse mathématique de modèles stratigraphiques. Thèse de l'Université de Pau, France (2004).
- [8] R. EYMARD, T. GALLOUËT, D. GRANJEON, R. MASSON AND Q. H. TRAN. *Multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint*. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **60** (2004) 527 - 548.
- [9] G. GAGNEUX AND M. MADAUNE-TORT. *Analyse Mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*. Mathématiques et Applications, Vol **22**, Springer, Paris (1996).
- [10] G. GAGNEUX AND G. VALLET . A result of existence for an original convection-diffusion equation. *Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie A : Matemáticas (RACSAM)* **99**, (2005) 125-131.
- [11] T. GALLOUËT. Equations satisfaites par des limites de solutions approchées. Conférence plénière, 34ème congrès d'analyse numérique, Anglet (Pyrénées Atlantiques) in *Canum* (2002) 87-96.
- [12] V. GERVAIS AND R. MASSON. Mathematical and numerical analysis of a stratigraphic model. *ESAIM : M2AN* **38** (2004) 585 - 611.
- [13] J.-L. LIONS. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris (1969).
- [14] G. VALLET. Sur une loi de conservation issue de la géologie. *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.* (**337**) (2003) 559-564.
- [15] S. N. ANTONTSEV, G. GAGNEUX, R. LUCE AND G. VALLET. New unilateral problems in stratigraphy (ESAIM, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, N° 4, 2006, 765 - 784).
- [16] BENSOUSSAN A, LIONS J. L. AND PAPANICOLAOU G. *Asymptotic analysis for periodic structures* (studies in Mathematics and its applications, Editors 5, North Holland), 1978.
- [17] G. DUVAUT ET J. L. LIONS *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [18] S. CLAIN. *Elliptic Operators of divergence type with Hölder coefficients in fractional Sobolev spaces*. *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, Vol. **17**, Roma 1997, 207-236.
- [19] H. BRÉZIS. *Opérateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* (Mathematics Studies, Editors 5, North Holland, 1973)
- [20] J. NEČAS. *Écoulements de fluide - compacité par entropie*. Collection RMA, Vol. 10, Masson, 1989.