



HAL
open science

Une classe d'applications holomorphes qui généralisent les fonctions d'une variable complexe

Atallah Affane

► **To cite this version:**

Atallah Affane. Une classe d'applications holomorphes qui généralisent les fonctions d'une variable complexe. 2008. hal-00286983

HAL Id: hal-00286983

<https://hal.science/hal-00286983>

Preprint submitted on 10 Jun 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE CLASSE D'APPLICATIONS HOLOMORPHES QUI GÉNÉRALISENT LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

ATALLAH AFFANE

ABSTRACT. Starting with a natural ring structure on \mathbf{C}^n , we introduce and study the notion of \mathbf{C}^n differentiability. Analogous properties with both of functions theories in one and several complex variables are observed.

1. INTRODUCTION

En considérant \mathbf{C}^n comme un quotient de l'algèbre des polynômes $\mathbf{C}[z]$, on le munit d'une structure d'algèbre normée avec une norme multiplicative pour les puissances. Ce sera l'objet la Section 2. Ensuite, dans la Section 3, on introduit la notion de \mathbf{C}^n -différentiabilité pour les applications de n variables complexes à valeurs dans \mathbf{C}^n . En fait, les applications \mathbf{C}^n -différentiables sont holomorphes et l'on observe pour elles beaucoup de propriétés analogues à celles des fonctions d'une variable: équations de Cauchy-Riemann, Principe du Maximum, analyticité par rapport à la structure d'algèbre de \mathbf{C}^n , Théorème de Moréra, l'expression des automorphismes de \mathbf{C}^n et de la boule unité \mathbf{D}_n associée à la norme introduite auparavant. Dans la Section 4, on mettra à profit la \mathbf{C}^n -analyticité pour obtenir de surprenants phénomènes de prolongements. Par exemple, on verra que toute application \mathbf{C}^n -différentiable sur le demi-espace $\{\operatorname{Re} z^0 > 0\}$ se prolonge à l'espace \mathbf{C}^n tout entier. Ainsi, les notions de domaine de \mathbf{C}^n -holomorphie et de domaine \mathbf{C}^n -holomorphiquement convexe viennent naturellement. Grâce au fait que la norme utilisée est multiplicative pour les puissances, il est possible de prouver de manière classique l'équivalence de ces deux notions. C'est en quelque sorte un théorème du type Cartan-Thullen. Quelques exemples sont exhibés: le demi-espace $\{\operatorname{Re}(z^0 + iz^1) > 0\}$ en dimension 2, la boule unité \mathbf{D}_n et plus généralement les domaines de la forme $\{Z \in \Omega / |f(Z)| < 1\}$ où f est une application \mathbf{C}^n -différentiable sur un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphie. Par contre, le polydisque $\mathbf{P}_n = \left\{ \sup_{i=1, \dots, n} |z^i| < 1 \right\}$ et le demi-espace $\{\operatorname{Re} z^0 > 0\}$ sont des contre exemples. Ainsi, dans cette section apparaissent des phénomènes et des notions propres à la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes. Enfin, dans la Section 5, on aborde la question de savoir si les transformations \mathbf{C}^n -différentiables d'un ouvert constituent un groupe de Lie. A ce propos, on donnera quelques arguments qui plaident pour une réponse positive à cette question.

Date: Mai 2008.

1991 Mathematics Subject Classification. 32 A07, 32 A10, 32 M15.

Key words and phrases. holomorphic mappings, Hartogs phenomena.

2. PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

2.1. Une structure d'algèbre sur \mathbf{C}^n . Soit I l'idéal de $\mathbf{C}[z]$ engendré par le polynôme $P(z) = 1+z^n$. L'anneau quotient $E = \mathbf{C}[Z]/I$ possède alors une structure naturelle d'algèbre de dimension n sur \mathbf{C} et l'on notera π la projection canonique. Puis on choisit la base naturelle $\{\pi(1), \dots, \pi(z^{n-1})\}$ de E pour identifier \mathbf{C}^n à E . Par ce procédé, \mathbf{C}^n devient une algèbre associative, commutative, unitaire de dimension n sur \mathbf{C} . De plus, à partir de la base naturelle de E , on obtient pour \mathbf{C}^n une base $\mathcal{B} = \{e_k\}_{k=0}^{n-1}$ avec la table de multiplication

$$e_k e_l = \begin{cases} e_{k+l} & \text{if } k+l \leq n-1 \\ -e_{k+l-n} & \text{if } k+l \geq n \end{cases}$$

L'on observe que tous les éléments de cette base sont inversibles et que dans \mathcal{B} , la multiplication m_A par un élément $A = a^0 e_0 + \dots + a^{n-1} e_{n-1}$ se représente par la matrice

$$(2.1) \quad M_A = \begin{pmatrix} a^0 & -a^{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a^1 \\ a^1 & a^0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -a^{n-1} \\ a^{n-1} & a^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & a^1 & a^0 \end{pmatrix}$$

On désigne par $\mathcal{M}(\mathbf{C}^n)$ la sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ constituée des matrices de ce type. La remarque suivante sera très utile plus loin.

Remarque 2.1. Une matrice $A = (A_j^i)_{0 \leq i, j \leq n-1}$ est dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^n)$ si et seulement s'il existe des constantes C_k pour $k = -(n-1), \dots, n-1$ telles que

$$A_j^i = C_{i-j} \\ C_k = -C_{n+k} \text{ pour } k < 0.$$

L'on aura aussi besoin de la

Proposition 2.1. $\mathcal{M}(\mathbf{C}^n)$ est stable par le produit et l'inversion des matrices.

Preuve:

L'associativité de la multiplication de \mathbf{C}^n donne $m_A m_B = m_{AB}$. Par ailleurs, si $\det M_A \neq 0$, soit f l'application réciproque de m_A . Par commutativité, on a l'identité $m_A \circ m_B = m_B \circ m_A$. Après composition à droite et à gauche par f on obtient l'identité $m_B \circ f = f \circ m_B$. Donc par commutativité, on a $Bf(Z) \equiv f(BZ) \equiv f(ZB)$. En prenant $Z = e_0$, on obtient $f(B) \equiv Bf(e_0)$ et ainsi, $f = m_{f(e_0)}$. \square

À partir des zéros du polynôme $P(z)$

$$\xi_k = e^{i\frac{\pi}{n}(1+2k)} \text{ pour } k = 0, \dots, n-1,$$

on construit les éléments

$$\theta_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \xi_k^j e_j \text{ pour } k = 0, \dots, n-1.$$

On vérifie à l'aide de la formule de Vandermonde que $\mathcal{A} = (\theta_k)_{k=0}^{n-1}$ est une base de \mathbf{C}^n . En outre, on a la

Proposition 2.2. *Les θ_k sont idempotents et orthogonaux deux à deux, c, à, d que*

$$\theta_k \theta_k = \theta_k \text{ et } \theta_k \theta_l = 0 \text{ pour } k \neq l.$$

Preuve:

D'après les définitions, on a

$$\begin{aligned} \theta_k \theta_l &= \frac{1}{n^2} \sum_{\alpha, \beta=0}^{n-1} \xi_k^\alpha \xi_l^\beta e_\alpha e_\beta = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{\alpha+\beta \leq n-1} \xi_k^\alpha \xi_l^\beta e_{\alpha+\beta} - \sum_{\alpha+\beta \geq n} \xi_k^\alpha \xi_l^\beta e_{\alpha+\beta-n} \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{\gamma=0}^{n-1} \left[\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \xi_k^\alpha \xi_l^\beta - \sum_{\alpha+\beta=n+\gamma} \xi_k^\alpha \xi_l^\beta \right] e_\gamma = \frac{1}{n^2} \sum_{\gamma=0}^{n-1} \left[\sum_{\alpha=0}^{\gamma} \xi_k^\alpha \xi_l^{\gamma-\alpha} - \sum_{\alpha=\gamma+1}^{n-1} \xi_k^\alpha \xi_l^{n+\gamma-\alpha} \right] e_\gamma \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \xi_k^\alpha \xi_l^{\gamma-\alpha} e_\gamma. \end{aligned}$$

Dans le cas $k = l$, on a $\sum_{\alpha=0}^{n-1} \xi_k^\alpha \xi_l^{\gamma-\alpha} = n \xi^\gamma$ et pour $k \neq l$, cette somme vaut

$$\xi^\gamma \sum_{\alpha=0}^{n-1} \exp \left[2i \frac{\pi}{n} \alpha (k-l) \right] \text{ et s'annule donc. } \square$$

2.2. L'algèbre normée \mathbf{C}^n

• Soit $\mathcal{A}^* = (\theta^k)_{k=0}^{n-1}$ la base duale de \mathcal{A} . De la Proposition 2.2, on déduit que ces formes θ^k sont multiplicatives, c', à, d que

$$\theta^k(ZZ') = \theta^k(Z)\theta^k(Z'), \theta^k(e_0) = 1.$$

Il s'ensuit que

$$(2.2) \quad Z \in \mathbf{C}_*^n \iff \forall k, \theta^k(Z) \neq 0 \text{ et } \theta^k(Z^{-1}) = (\theta^k(Z))^{-1}.$$

Ainsi, si l'on pose

$$|Z| = \max_k \left| \theta^k(Z) \right|,$$

\mathbf{C}^n devient une algèbre normée et multiplicative pour les puissances i.e

$$(2.3) \quad |Z^k| = |Z|^k \quad \forall Z \in \mathbf{C}^n, k \in \mathbf{N}.$$

On notera *dist* la métrique associée à cette norme. De la formule (2.3) on déduit la caractérisation suivante de la boule unité \mathbf{D}_n :

$$(2.4) \quad \mathbf{D}_n = \left\{ Z \in \mathbf{C}^n / \lim_{m \rightarrow +\infty} Z^m = 0 \right\}.$$

Puisque toutes les suites $\{e_j^k\}_{k \geq 0}$ sont cycliques, on a

$$|e_j| = 1 \quad \forall j = 0, \dots, n-1$$

si bien que

$$\mathbf{D}_n \cap \mathbf{C}e_j = \Delta e_j \quad \forall j = 0, \dots, n-1$$

où Δ est le disque unité de \mathbf{C} .

3. \mathbf{C}^n -DIFFÉRENTIABILITÉ, \mathbf{C}^n -ANALYTICITÉ

Dans tout ce qui suit, Ω est un ouvert connexe de \mathbf{C}^n .

3.1. La \mathbf{C}^n -différentiabilité.

Définition 3.1. On dit qu'une application $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^n$ est \mathbf{C}^n -différentiable sur Ω si pour tout u dans Ω , il existe $f'(u) \in \mathbf{C}^n$ telle que

$$f(u+h) = f(u) + f'(u)h + o(|h|)$$

Cet élément $f'(u)$ est appelé dérivée de f au point u . L'espace des applications \mathbf{C}^n -différentiables sur Ω est noté $\mathcal{O}^n(\Omega)$.

La \mathbf{C}^n -différentiabilité s'exprime aussi à l'aide d'équations de Cauchy-Riemann généralisées.

Proposition 3.1. Soit f une application de Ω dans \mathbf{C}^n . Alors $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ si et seulement si f est holomorphe et satisfait aux équations de Cauchy-Riemann généralisées.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^i}{\partial z^j} &= \frac{\partial f^0}{\partial z^{j-i}} \quad \forall i < j, \\ \frac{\partial f^i}{\partial z^j} &= \frac{\partial f^{i-j}}{\partial z^0} \quad \forall i \geq j, \\ \frac{\partial f^k}{\partial z^0} &= -\frac{\partial f^0}{\partial z^{n-k}} \quad \forall k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

De plus, la dérivée d'une application \mathbf{C}^n -différentiable est aussi \mathbf{C}^n -différentiable.

Preuve:

Soit $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$; on donne à l'accroissement h les valeurs particulières τe_k où $\tau \in \mathbf{C}$ et $k = 0, \dots, n-1$. On obtient alors que f est holomorphe et que

$$(3.1) \quad f' = \frac{1}{e_k} \frac{\partial f}{\partial z^k} \quad \forall k = 0, \dots, n-1.$$

Or les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes au fait que la matrice jacobienne $\frac{\partial f^i}{\partial z^j}$ représente, dans la base \mathcal{B} la multiplication par $\frac{\partial f}{\partial z^0}$. Cette équivalence assure la première partie de la Proposition.

Enfin, si $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$, sa dérivée $f' = \frac{\partial f}{\partial z^0}$ est holomorphe sur Ω et vérifie de manière triviale les conditions de Cauchy-Riemann. \square

Corollaire 3.1. (Un principe du maximum)

Soit $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$. Si pour un point W de Ω , on a l'inégalité

$$\sup_{\substack{i=0, \dots, n-1 \\ Z \in \Omega}} |f^i(Z)| \leq \sup_{i=0, \dots, n-1} |f^i(W)|,$$

Alors f est constante sur Ω .

Preuve:

Supposons que

$$\sup_{i=0, \dots, n-1} |f^i(W)| = |f^j(W)|$$

pour un certain indice j . Par le Principe du Maximum pour les fonctions holomorphes, la fonction f^j est constante. Mais les équations de Cauchy-Riemann entraînent que les autres composantes de f sont aussi constantes. \square

En fait, pour une application f de classe C^1 , la \mathbf{C}^n -différentiabilité équivaut à la " \mathbf{C}^n -linéarité" c, à, d

$$df(\lambda h) = \lambda df(h) \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}^n, \forall h \in \mathbf{C}^n$$

Mais cette " \mathbf{C}^n -linéarité" équivaut à la condition que la jacobienne $\frac{\partial f}{\partial z}$ appartienne à $\mathcal{M}(\mathbf{C}^n)$. Il s'ensuit que l'ensemble des applications \mathbf{C}^n -différentiables est stable par la somme, le produit, l'inversion, la composition et le passage à la réciproque. De plus, les règles usuelles du calcul de dérivée y sont valables. Enfin, on définit les dérivées d'ordre supérieur par la formule de récurrence $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

La \mathbf{C}^n -différentiabilité peut aussi être formulée en termes de formes différentielles. Pour cela, on associe à toute application $f \in C^0(\Omega, \mathbf{C}^n)$ la forme différentielle $f(Z)dZ$ à valeurs dans \mathbf{C}^n et définie par $f(Z)dZ(H) = f(Z)H$. Les coordonnées de cette formes dans la base \mathcal{B} sont:

$$\omega_f^r = \sum_{0 \leq i \leq r} f^{r-i} dz^i - \sum_{r < i} f^{n+r-i} dz^i, \quad r = 0, \dots, n-1.$$

Comme dans la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe, la \mathbf{C}^n -différentiabilité pour une application f équivaut à la condition que la forme $f(Z)dZ$ soit fermée. De manière plus précise, on a la

Proposition 3.2. *Une application $f \in C^1(\Omega, \mathbf{C}^n)$ est dans $\mathcal{O}^n(\Omega)$ si et seulement si les formes ω_f^r sont fermées.*

Preuve:

Pour $f \in C^1(\Omega)$, le terme de bidegré $(2, 0)$ dans $d\omega_f^r$ est $\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} H_{ij}^r dz^i \wedge dz^j$

où

$$\begin{aligned} H_{ij}^r &= \frac{\partial f^{r-j}}{\partial z^i} - \frac{\partial f^{r-i}}{\partial z^j} \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq r, \\ H_{ij}^r &= -\frac{\partial f^{n+r-j}}{\partial z^i} - \frac{\partial f^{r-i}}{\partial z^j} \quad \text{pour } 0 \leq i \leq r < j, \\ H_{ij}^r &= -\left(\frac{\partial f^{n+r-j}}{\partial z^i} - \frac{\partial f^{n+r-i}}{\partial z^j}\right) \quad \text{pour } 0 \leq r < i < j. \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$, les formes $d\omega_f^r$ sont de type $(2, 0)$. L'annulation de leurs coefficients découle immédiatement de la Remarque 2.1.

Réciproquement, supposons les ω_f^r fermées. Le coefficient de $dz^0 \wedge d\bar{z}^k$ dans $d\omega_f^r$ est exactement $\frac{\partial f^r}{\partial \bar{z}^k}$. Ainsi, l'application f est holomorphe et les coefficients H_{ij}^r sont nuls. Pour $0 \leq s \leq n-1$ et $k \geq 1$ tels que $s+k \leq n-1$, l'annulation de H_{0k}^{s+k} donne

$$\frac{\partial f^s}{\partial z^0} = \frac{\partial f^{s+k}}{\partial z^k} \quad \text{pour } 0 \leq s \leq n-1 \text{ et } s+k \leq n-1.$$

Par ailleurs, l'annulation des H_{ij}^j donne

$$\frac{\partial f^0}{\partial z^i} = \frac{\partial f^{j-i}}{\partial z^j} \quad \text{for } 0 \leq i \leq j \leq n-1.$$

On voit donc que $\frac{\partial f^i}{\partial \bar{z}^j}$ ne dépend que de la différence $i-j$. Enfin l'annulation des H_{0j}^0 donne

$$\frac{\partial f^0}{\partial z^j} = -\frac{\partial f^{n-j}}{\partial z^0} \quad \text{for } 1 \leq j \leq n-1.$$

Donc, par la Remarque 2.1, la jacobienne $\frac{\partial f}{\partial z}$ est dans $\mathcal{M}(\mathbf{C}^n)$. ♣

Voici à présent un résultat du type Théorème de Moréra.

Proposition 3.3. *Soit $f \in C^0(\Omega, \mathbf{C}^n)$ et supposons, que pour toute courbe fermée de classe C^1 par morceaux, on ait*

$$\int_{\gamma} f(Z) dZ = 0 .$$

Alors, $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$.

Preuve:

Il s'agit simplement de reprendre la démonstration du Théorème de Moréra. Choisissons donc un point $\omega \in \Omega$ et considérons l'application F définie sur Ω par

$$F(Z) = \int_{\gamma_Z} f(W) dW$$

où γ_Z est un chemin de classe C^1 par morceaux et reliant ω à Z . On vérifie alors que F est de classe C^1 et que l'on a les identités

$$\frac{\partial F}{\partial z^k}(Z) = f(Z) e_k \text{ pour } k = 0, \dots, n-1.$$

On en déduit que dF est " \mathbf{C}^n -linear" et que $F' = f$. \square

On sait que toute fonction harmonique réelle sur \mathbf{C} est la partie réelle d'une fonction holomorphe. Il est alors naturelle de se poser la question suivante: étant donnée une fonction holomorphe sur Ω , existe-t-il une application $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ telle que $g = f^0$. En d'autres termes, on voudrait résoudre l'équation

$$f^0 = g$$

La Proposition 3.1 donne l'unicité de la solution à une constante additive près. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence est un certain système d'équations aux dérivées partielles du second ordre pour g .

Proposition 3.4. *A toute fonction holomorphe g sur Ω , on associe l'application holomorphe à valeurs dans \mathbf{C}^n par*

$$G(z) = \frac{\partial g}{\partial z^0}(z) e_0 - \frac{\partial g}{\partial z^{n-1}}(z) e_1 - \dots - \frac{\partial g}{\partial z^1} e_{n-1}.$$

Alors, au voisinage de chaque point ω de Ω existe une application $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ telle que $g = f^0$ si et seulement si les formes ω_G^r sont fermées.

Preuve:

Si $g = f^0$ avec $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$, on doit avoir $f'(z) = G(z)$ et on applique la Proposition 3.2.

Réciproquement, au voisinage de chaque point, on peut trouver $n-1$ fonctions holomorphes $\{f^r\}_{r=1}^{n-1}$ telles que $df^r = \omega_G^r$. On aura alors

$$\frac{\partial f^r}{\partial z^i} = G^{r-i} \text{ for } 0 \leq i \leq r \text{ and } \frac{\partial f^r}{\partial z^i} = -G^{n+r-i} \text{ for } r < i \leq n-1.$$

On voit alors que l'application holomorphe $f = (g, f^1, \dots, f^{n-1})$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann. \square

On utilisera plus loin, que dans le cas $n=2$, l'hypothèse $d\omega_G^r = 0$ se réduit à

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z^0 \partial z^0} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^1 \partial z^1} = 0.$$

3.2. La \mathbf{C}^n -analyticité.

Définition 3.2. On dira qu'une application $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}^n$ est \mathbf{C}^n -analytique sur Ω si, pour tout point $U \in \Omega$, il existe un voisinage Γ de U et une suite $(A_m)_{m \geq 0}$ dans \mathbf{C}^n telle que

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m (Z - U)^m \text{ sur } \Gamma$$

avec convergence normale sur les compacts.

Dans ce qui suit, on va établir que cette notion est équivalente à la \mathbf{C}^n -différentiabilité. Pour cela, on a besoin du

Lemme 3.1. Pour $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ $W \in \Omega$, $Z \in \mathbf{C}^n$ et $m \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(W) Z^m = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n / |\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^m f}{\partial z^\alpha}(W) Z^\alpha.$$

Preuve:

On raisonne par récurrence sur l'entier m . On pose

$$g_m(W, Z) = \frac{1}{m!} f^{(m)}(W) Z^m.$$

Cette application est \mathbf{C}^n -différentiable par rapport à chacune des variables Z, W et on a la relation

$$\frac{1}{m+1} \frac{\partial g_m}{\partial W}(W, Z) Z = g_{m+1}(W, Z).$$

D'après la formule (3.1) et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\frac{\partial g_m}{\partial W}(W, Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n / |\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{m+1} f^k}{\partial z^{t_0(\alpha)}}(W) Z^\alpha \right] e_k$$

où $t_j(\alpha)$ est le multi-indice obtenu à partir de $\alpha = (\alpha^0, \dots, \alpha^{n-1})$ par addition de 1 à α^j . Après multiplication par Z et tenant compte de la formule de représentation (2.1), on obtient

$$g_{m+1}(W, Z) = \frac{1}{m+1} \sum_{r=0}^{n-1} \left[\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n / |\alpha|=m} \frac{Z^\alpha}{\alpha!} G_{\alpha,r} \right] e_r$$

où

$$G_{\alpha,r} = \sum_{k=0}^r z^{r-k} \frac{\partial^{m+1} f^k}{\partial z^{t_0(\alpha)}}(W) - \sum_{k=r+1}^{n-1} z^{r+n-k} \frac{\partial^{m+1} f^k}{\partial z^{t_0(\alpha)}}(W).$$

Or les équations de Cauchy-Riemann entraînent

$$\frac{\partial f^k}{\partial z^0} = \frac{\partial f^r}{\partial z^{r-k}} \text{ pour } 0 \leq k \leq r$$

$$\frac{\partial f^k}{\partial z^0} = -\frac{\partial f^r}{\partial z^{r+n-k}} \text{ pour } r+1 \leq k \leq n-1.$$

Après substitution, on aboutit à

$$G_{\alpha,r} = \sum_{k=0}^r z^{r-k} \frac{\partial^{m+1} f^r}{\partial z^{t_{r-k}(\alpha)}}(W) + \sum_{k=r+1}^{n-1} z^{r+n-k} \frac{\partial^{m+1} f^r}{\partial z^{t_{r+n-k}(\alpha)}}(W).$$

Ensuite, on fait $r - k = l$ dans la première somme et $r + n - k = l$ dans la seconde pour obtenir

$$G_{\alpha,r} = \sum_{l=0}^{n-1} z^l \frac{\partial^{|\alpha|+1} f^r}{\partial z^{t_l(\alpha)}}.$$

Ainsi, nous avons

$$g_{m+1}(W, Z) = \frac{1}{m+1} \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n / |\beta|=m+1} H_\beta \frac{\partial^{m+1} f}{\partial z^\beta}(W) Z^\beta$$

avec

$$H_\beta = \sum_{(\alpha,l) / t_l(\alpha)=\beta} \frac{1}{\alpha!} = \sum_{i / \beta^i \neq 0} \frac{\beta^i}{\beta!} = \frac{m+1}{\beta!}.$$

D'où le lemme à l'étape $m+1$. \square

Lemme 3.2. *Une application \mathbf{C}^n -différentiable f sur un polydisque P de centre W admet le développement*

$$f(Z) = \sum_{m \in \mathbf{N}} \frac{1}{m!} f^{(m)}(W) (Z - W)^m$$

avec convergence normale sur les compacts de P .

Preuve:

Puisque f est holomorphe, elle admet un développement de Taylor

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(W) (Z - W)^\alpha$$

avec convergence normale sur les compacts. On peut donc sommer par paquets et le Lemme précédent donne

$$f(Z) = \sum_{m \in \mathbf{N}} \frac{1}{m!} f^{(m)}(W) (Z - W)^m.$$

Comme toutes les normes sur \mathbf{C}^n sont équivalentes, cette série converge normalement sur les compacts de P . \square

On peut alors énoncer le

Théorème 3.1. *Une application est \mathbf{C}^n -différentiable si et seulement si elle est \mathbf{C}^n -analytique.*

Preuve:

D'après le Lemme précédent, la \mathbf{C}^n -différentiabilité implique la \mathbf{C}^n -analyticité.

La réciproque découle du Théorème de Vitalli et des équations de Cauchy-Riemann. \square

Dans la section suivante, on aura besoin d'une espèce d'inégalités de Cauchy.

Proposition 3.5. *Il existe une constante $M_n > 0$ telle que*

$$\left| f^{(k)}(0) \right| \leq M_n \sup_{|Z| \leq r} |f(Z)| \frac{k!}{r^k} \quad \forall k \geq 0, \forall r > 0, \forall f \in \mathcal{O}^n(r\mathbf{D}_n) \cap L^\infty(r\mathbf{D}_n).$$

Preuve:

On a deux constantes $c_n > 0$ et $C_n > 0$ telles que

$$c_n \sup_{j=0, \dots, n-1} |z^j| \leq |Z| \leq C_n \sup_{j=0, \dots, n-1} |z^j| \quad \forall Z \in \mathbf{C}^n.$$

Alors, pour $r > 0$, et $f \in \mathcal{O}^n(r\mathbf{D}_n) \cap L^\infty(r\mathbf{D}_n)$, on aura successivement

$$\left| f^{(k)}(0) \right| \leq C_n \sup_{j=0, \dots, n-1} \left| \frac{\partial^k f^j}{(\partial z^0)^k}(0) \right| \leq C_n \sup_{j=0, \dots, n-1} \sup_{t \in r\Delta} |f^j(te_0)| \frac{k!}{r^k},$$

la dernière inégalité provenant des égalités usuelles de Cauchy pour les fonctions $t \rightsquigarrow f^j(te_0)$. Finalement, on obtient

$$\left| f^{(k)}(0) \right| \leq \frac{C_n}{c_n} \frac{k!}{r^k} \sup_{|Z| \leq r} |f|. \square$$

4. PHÉNOMÈNES DE PROLONGEMENT, DOMAINE DE \mathbf{C}^n -HOLOMORPHIE, \mathbf{C}^n -CONVEXITÉ HOLOMORPHE

4.1. Prolongement d'applications, domaine de \mathbf{C}^n -holomorphie. On introduit le polydisque

$$\mathbf{P}_n = \left\{ Z \in \mathbf{C}^n / \sup_k |z^k| < 1 \right\}$$

et les éléments

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j e_j; \beta_n = e_0 - \alpha_n, \text{ pour } n \text{ impair},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(e_0 + ie_k); \beta_n = \frac{1}{2}(e_0 - ie_k) \text{ pour } n = 2k.$$

Un calcul direct donne

$$(4.1) \quad \alpha_n \alpha_n = \alpha_n, \beta_n \beta_n = \beta_n, \alpha_n \beta_n = 0.$$

Puis, on pose

$$W_n = t(\alpha_n + i\beta_n), Z_n = -\frac{1}{t}(\alpha_n - i\beta_n)$$

où t est un réel choisi tel que

$$1 < t < \frac{n}{\sqrt{1 + (n-1)^2}} \text{ dans le cas } n > 1, \text{ impair et } t \in]1, \sqrt{2}[\text{ si } n \text{ est pair.}$$

Les phénomènes de prolongements que l'on va exhiber se réalisent grâce à la décomposition

$$-e_0 = W_n Z_n \quad \text{with } W_n \in \mathbf{P}_n \text{ and } Z_n \in \mathbf{C}_*^n \cap \mathbf{D}_n.$$

En fait, $W_n Z_n = -(\alpha_n^2 + \beta_n^2) = -(\alpha_n + \beta_n) = -e_0$. De plus, les relations (4.1) donnent $Z_n^k = (-\frac{1}{t})^k (\alpha_n + (-i)^k \beta_n)$. Il s'ensuit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Z_n^k = 0$ et donc $Z_n \in \mathbf{C}_*^n \cap \mathbf{D}_n$ d'après la caractérisation (2.4) de la boule unité. Par ailleurs, on a

$$W_n = \frac{t}{n} \left((1 + i(n-1))e_0 + (1-i) \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j e_j \right) \text{ pour } n > 1 \text{ impair},$$

$$W_n = \frac{t}{2}(1+i)(e_0 + e_k) \text{ pour } n = 2k.$$

Le choix de t assure que $W_n \in \mathbf{P}_n$.

On introduit à présent l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{WZ; W \in \mathbf{P}_n, Z \in \mathbf{C}_*^n \cap \mathbf{D}_n\}.$$

Proposition 4.1. *\mathcal{H} est un ouvert étoilé par rapport à 0 et contenant strictement le polydisque \mathbf{P}_n . De plus, toute application $f \in \mathcal{O}^n(\mathbf{P}_n)$ se prolonge en une application $\tilde{f} \in \mathcal{O}^n(\mathcal{H})$.*

Preuve:

Observons tout d'abord que $\mathcal{H} = \bigcup_{Z \in \mathbf{C}_*^n \cap \mathbf{D}_n} Z\mathbf{P}_n$ et que chaque ouvert $Z\mathbf{P}_n$ est étoilé par rapport à l'origine. Puis, tout $W \in \mathbf{P}_n$ s'écrit $W = \frac{1}{1+\varepsilon}((1+\varepsilon)W)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Enfin, par l'exemple ci-dessus, on voit que $-e_0 \in \mathcal{H} - \mathbf{P}_n$ et ainsi, on a la première partie de la Proposition.

Soit maintenant $f \in \mathcal{O}^n(\mathbf{P}_n)$; par le Lemme 3.2, cette application admet un développement $f(z) = \sum_{m \in \mathbf{N}} A_m Z^m$ sur \mathbf{P}_n avec convergence normale sur les compacts. Il suffit donc de prouver la convergence normale de cette série au voisinage de chaque point de \mathcal{H} . Pour cela, étant donné WZ dans \mathcal{H} avec $W \in \mathbf{P}_n$ et $Z \in \mathbf{C}_*^n \cap \mathbf{D}_n$, on choisit un voisinage de la forme $H\mathbf{D}_n$ où H est un voisinage compact de W contenu dans \mathbf{P}_n . Pour $W' \in H$ et $Z' \in \mathbf{D}_n$, on a l'inégalité $|A_m(W'Z')^m| \leq |A_m W'^m|$ qui assure la convergence normale sur $H\mathbf{D}_n$. \square

Le résultat suivant est un surprenant phénomène de prolongement.

Théorème 4.1. *Soit \mathbf{F}^n le demi-espace $\mathbf{F}^n = \{\operatorname{Re} z^0 > 0\}$; alors toute application $f \in \mathcal{O}^n(\mathbf{F}^n)$ est la restriction d'une certaine application $\tilde{f} \in \mathcal{O}^n(\mathbf{C}^n)$.*

Preuve:

Pour $m \geq 1$, on pose $\mathbf{P}_m = m e_0 + m\mathbf{P}_n$ et $\mathcal{H}_m = m e_0 + m\mathcal{H}$. On remarque que $0 \in \mathcal{H}_m$, que \mathcal{H}_m est étoilé par rapport à $m e_0$ et que

$$W \in \mathbf{P}_m \iff [(\operatorname{Re} w^0)^2 + (\operatorname{Im} w^0)^2 < 2m \operatorname{Re} w^0 \text{ et } |w^k| < m \text{ pour } k = 1, \dots, n-1].$$

On en déduit que $\mathbf{F}^n = \lim_{m \uparrow} \mathbf{P}_m$.

D'un autre côté soit B une boule centrée en 0 et contenue dans \mathcal{H}_1 . Puisque chaque ensemble \mathcal{H}_m est borné, on construit une suite strictement croissante d'entiers en posant $m_1 = 1$ et pour $j \geq 1$, m_{j+1} sera le plus petit m tel que $m > m_j$ et $\overline{\mathcal{H}_{m_j}} \subseteq mB$. Par construction, on a $\mathbf{C}^n = \lim_{j \uparrow} \mathcal{H}_{m_j}$.

Considérons alors une application $f \in \mathcal{O}^n(\mathbf{F}^n)$. La Proposition 4.1 donne un prolongement h_{m_2} de f du polydisque \mathbf{P}_{m_2} à l'ouvert \mathcal{H}_{m_2} . Comme $\mathbf{F}^n \cap \mathcal{H}_{m_2}$ est étoilé par rapport à $m_2 e_0$ et contient \mathbf{P}_{m_2} , f est la restriction à \mathbf{F}^n d'une application $f_{m_2} \in \mathcal{O}^n(\mathbf{F}^n \cup \mathcal{H}_{m_2})$.

A cette étape, on suppose que f est la restriction à \mathbf{F}^n d'une application $f_{m_j} \in \mathcal{O}^n(\mathbf{F}^n \cup \mathcal{H}_{m_j})$ avec $j \geq 2$. Comme dans le point précédent, on a un prolongement $h_{m_{j+1}}$ de f du polydisque $\mathbf{P}_{m_{j+1}}$ à l'ouvert $\mathcal{H}_{m_{j+1}}$. Pour continuer ce processus, on a besoin seulement de prouver que les $(\mathbf{F}^n \cup \mathcal{H}_{m_j}) \cap \mathcal{H}_{m_{j+1}}$ sont connexes. Mais en fait, un tel ensemble s'écrit aussi $(\mathbf{F}^n \cap \mathcal{H}_{m_{j+1}}) \cup \mathcal{H}_{m_j}$ et sa connexité résulte des points suivants:

- $\mathbf{F}^n \cap \mathcal{H}_{m_{j+1}}$ est étoilé par rapport à $m_{j+1} e_0$,
- \mathcal{H}_{m_j} est étoilé par rapport à $m_j e_0$,
- le segment $[m_j e_0; m_{j+1} e_0]$ est contenu dans $\mathbf{P}_{m_{j+1}}$ et donc dans $\mathbf{F}^n \cap \mathcal{H}_{m_{j+1}}$.

En posant $\tilde{f}(Z) = f_{m_j}(Z)$ lorsque $Z \in \mathcal{H}_{m_j}$, on obtient un prolongement \mathbf{C}^n -différentiable de f à \mathbf{C}^n . \square

Le cas $n = 2$ est particulièrement intéressant. En fait, notre algèbre \mathbf{C}^2 peut être considérée comme l'algèbre de Clifford complexe associée à la forme quadratique $z \rightsquigarrow -z^2$ sur \mathbf{C} . Pour cette algèbre, on dispose de l'opérateur de Dirac

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z^0} & \frac{\partial}{\partial z^1} \\ \frac{\partial}{\partial z^1} & -\frac{\partial}{\partial z^0} \end{pmatrix}$$

($\mathcal{D}^2 = \Delta$). Pour toute application holomorphe $f = (f^0, f^1)$, posons $\widehat{f} = (f^0, -f^1)$; on voit alors que f est \mathbf{C}^n -différentiable si et seulement si $\mathcal{D}\widehat{f} = 0$. On peut donc énoncer le

Corollaire 4.1. *Toute application holomorphe sur le demi-espace \mathbf{F}^2 et solution de l'équation de Dirac $\mathcal{D}f = 0$ se prolonge à \mathbf{C}^2 tout entier.*

Corollaire 4.2. *Toute fonction holomorphe g sur le demi-espace \mathbf{F}^2 telle que*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^0 \partial z^0} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^1 \partial z^1} = 0.$$

se prolonge à tout l'espace \mathbf{C}^2 .

Preuve:

Découle de la Proposition 3.4□.

Ces phénomènes de prolongement appellent naturellement à la notion de domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic. Comme dans la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, on pose la

Définition 4.1. *Un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic est un ouvert Ω de \mathbf{C}^n tel qu'il n'existe pas de couple d'ouverts Ω_1, Ω_2 de \mathbf{C}^n satisfaisant aux conditions*

- i) Ω_2 est connexe et non contenu dans Ω ,*
- ii) Ω_1 est non vide et contenu dans $\Omega \cap \Omega_2$,*
- iii) $\forall f \in \mathcal{O}^n(\Omega), \exists g \in \mathcal{O}^n(\Omega_2)$ telle que $f = g$ sur Ω_1 .*

D'après la Proposition 4.1 et le Théorème 4.1, les polydisques \mathbf{P}^n et les demi-espaces \mathbf{F}^n ne sont pas des domaines de \mathbf{C}^n -holomorphic bien qu'ils soient convexes.

Voici une condition suffisante pour qu'un ouvert soit un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic. Un ouvert Ω est un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic si

$$\forall \xi \in \partial\Omega, \exists f \in \mathcal{O}^n(\Omega) / \lim_{z \rightarrow \xi} |f(z)| = +\infty.$$

Comme application de cette remarque, on peut donner le premier exemple de domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic.

Proposition 4.2. *Le demi-espace*

$$\mathbf{F}_2 = \{Z \in \mathbf{C}^2 / \operatorname{Re}(z^0 + iz^1) > 0\}$$

est un domaine de \mathbf{C}^2 -holomorphic.

Preuve:

Pour $\xi \in \partial\mathbf{F}_2$, la fonction holomorphe g sur \mathbf{F}_2 par

$$g(Z) = \operatorname{Log}((z^0 - \xi^0) + i(z^1 - \xi^1))$$

vérifie la condition (3.2). Par la Proposition 3.4, il existe $f \in \mathcal{O}^n(\mathbf{F}_2)$ telle que $f^0 = g$. Par construction, on a $\lim_{Z \rightarrow \xi} |f(Z)| = +\infty$.□

Dans la section suivante, on verra que la boule \mathbf{D}^n est aussi un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic.

4.2. \mathbf{C}^n -convexité holomorphic. Soit Ω un ouvert de \mathbf{C}^n et un compact $K \subset\subset \Omega$; on définit l'enveloppe $\mathcal{O}^n(\Omega)$ de K par:

$$K_\Omega = \left\{ Z \in \Omega / |f(Z)| \leq \sup_{W \in K} |f(W)| \quad \forall f \in \mathcal{O}^n(\Omega) \right\}$$

Bien que K_Ω soit fermé dans Ω , il n'est en général pas compact.

Définition 4.2. *On dit qu'un ouvert Ω de \mathbf{C}^n est \mathbf{C}^n -holomorphiquement convexe lorsque l'enveloppe $\mathcal{O}^n(\Omega)$ de tout compact $K \subset\subset \Omega$ est compact.*

Dans ce qui suit, nous allons établir un "Théorème de Cartan-Thullen" selon lequel un ouvert est \mathbf{C}^n -holomorphiquement convexe si et seulement si c'est un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphie. Pour cela, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 4.1. *Soit Ω un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphie, $\partial\Omega$ sa frontière et un compact $K \subset\subset \Omega$. On a alors*

$$\text{dist}(K, \partial\Omega) = \text{dist}(K_\Omega, \partial\Omega).$$

Preuve:

L'inclusion $K \subseteq K_\Omega$ entraîne l'inégalité $\text{dist}(K, \partial\Omega) \geq \text{dist}(K_\Omega, \partial\Omega)$. Si cette inégalité était stricte, il existerait $A \in K_\Omega$ et un réel η tels que $\text{dist}(K, \partial\Omega) > \eta > \text{dist}(A, \partial\Omega)$. Ainsi, Ω contiendrait le compact $K_\eta = \{Z \in \mathbf{C}^n / \text{dist}(K, Z) \leq \eta\}$ mais non la boule $A + \eta\mathbf{D}_n$. Prenons alors une application $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ et posons $M = \sup_{Z \in K_\eta} |f(Z)|$. La Proposition 3.5 donne alors

$$\sup_{Z \in K} |f^{(k)}(Z)| \leq MM_n \frac{k!}{\eta^k}, \quad \forall k \geq 0.$$

Mais comme A est dans K_Ω , on aura aussi

$$\frac{|f^{(k)}(A)|}{k!} \leq \frac{MM_n}{\eta^k}, \quad \forall k \geq 0.$$

Il s'ensuit que le développement $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(A)}{k!} (Z - A)^k$ converge sur la boule $A + \eta\mathbf{D}_n$.

Donc l'application arbitraire f se prolonge à l'ouvert $\Omega \cup (A + \eta\mathbf{D}_n)$ qui contient strictement Ω . Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de \mathbf{C}^n -holomorphie sur Ω . \square

Lemme 4.2. *Soit K un compact contenu dans un ouvert Ω de \mathbf{C}^n . Alors, pour $\xi \notin K_\Omega$, $M > 0$, $\varepsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ telle que*

$$\sup_{W \in K} |f(W)| < \varepsilon \text{ et } |f(\xi)| > M.$$

Preuve:

Soit $\xi \in K_\Omega$. Il existe $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ telle que $\sup_{w \in K} |f(W)| < |f(\xi)|$. Quitte à multiplier par une constante convenable, on peut supposer que $\sup_{W \in K} |f(W)| < 1 < |f(\xi)|$. Mais comme la norme $|\cdot|$ est multiplicative pour les puissances (voir la formule (2.3), il suffira de prendre une puissance adéquate de f . \square

Théorème 4.2. *Pour un ouvert Ω de \mathbf{C}^n les conditions suivantes:*

- i) Ω est un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphie,
- ii) $\text{dist}(K, \partial\Omega) = \text{dist}(K_\Omega, \partial\Omega)$ pour tout compact $K \subseteq\subseteq \Omega$,
- iii) Ω est \mathbf{C}^n -convexe,
- iv) il existe une application $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$ telle que pour tout couple d'ouverts Ω_1, Ω_2 satisfaisant aux conditions i) et ii) de la Définition 4.1, il n'existe pas d'application $\tilde{f} \in \mathcal{O}^n(\Omega_2)$ such that $\tilde{f} = f$ on Ω_1 ,
sont équivalentes.

Preuve:

Il s'agit de reprendre mutadis mutandis la démonstration du Théorème de Cartan-Thullen donnée dans [2]. En fait, le Lemme 4.1 permet les implications $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$ et l'implication $iii) \Rightarrow iv)$ s'obtient par le Lemme 4.2. \square

Corollaire 4.3. *Tout domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic est un domaine d'holomorphic.*

Jusqu'à présent, nous n'avons donné qu'un seul exemple de domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic, à savoir le demi-espace \mathbf{F}_2 de \mathbf{C}^2 . Heureusement, le Théorème précédent permet d'en produire d'autres. En effet, en reprenant encore les arguments de [2], on peut établir les deux résultats suivants.

Proposition 4.3. *L'intersection de toute famille de domaines de \mathbf{C}^n -holomorphic est encore un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic.*

Proposition 4.4. *Si Ω est un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic et $f \in \mathcal{O}^n(\Omega)$, l'ouvert*

$$\{Z \in \Omega \mid |f(Z)| < 1\}$$

en est un autre.

En particulier, on a le

Corollaire 4.4. *La boule \mathbf{D}_n est un domaine de \mathbf{C}^n -holomorphic.*

5. LE GROUPE DES TRANSFORMATIONS \mathbf{C}^n -DIFFÉRENTIABLES

Etant donné un ouvert Ω , on note $Aut(\Omega)$ le groupe des transformations f de Ω qui soient \mathbf{C}^n -analytiques ainsi que leurs réciproques f^{-1} . C'est un sous-groupe du groupe $\mathcal{H}(\Omega)$ des transformations biholomorphes de Ω . Il y est même fermé pour la topologie compacts-ouverts. On sait par un théorème de H. Cartan que lorsque Ω est borné, $\mathcal{H}(\Omega)$ est un groupe de Lie de transformations. Malheureusement, ce n'est plus le cas si Ω n'est pas borné. Par exemple, il est prouvé dans [1], que pour $n > 1$, $\mathcal{H}(\mathbf{C}^n)$ n'est pas un groupe de Lie. Aussi est il naturel de se poser la question suivante: est ce que $Aut(\Omega)$ est "assez petit" pour être un groupe de Lie. Quelques arguments laissent croire à une réponse positive.

5.1. Le groupe $Aut(\mathbf{C}^n)$. Les transformations \mathbf{C}^n -analytiques de \mathbf{C}^n ont la même formes que celles de \mathbf{C} .

Proposition 5.1. *Toute élément de $Aut(\mathbf{C}^n)$ est de la forme*

$$f(Z) = AZ + B$$

avec $A \in \mathbf{C}_^n$ et $B \in \mathbf{C}^n$.*

Preuve:

Il suffit de voir que toute transformation $f \in Aut(\mathbf{C}^n)$ telle que $f(0) = 0$ est de la forme $f(Z) = AZ$ avec $A \in \mathbf{C}_*^n$. En fait, par \mathbf{C}^n -analyticité, pour un élément $f \in Aut(\mathbf{C}^n)$ qui laisse fixe l'origine, on a les développements $f(Z) = \sum_{n \geq 1} A_n Z^n$ et

$f^{-1}(Z) = \sum_{n \geq 1} B_n Z^n$ avec convergence sur tout \mathbf{C}^n . On va voir que $A_1 \in \mathbf{C}_*^n$ et

$A_n = 0$ for $n \geq 2$. Pour ce faire, on applique les formes multiplicatives θ^k à ces deux développements, il vient que

$$\theta^k(f(Z)) = \sum_{n \geq 1} \theta^k(A_n)(\theta^k(Z))^n \text{ et } \theta^k(f^{-1}(Z)) = \sum_{n \geq 1} \theta^k(B_n)(\theta^k(Z))^n.$$

On peut alors considérer les deux fonctions holomorphes définies sur \mathbf{C} par

$$\lambda_k(u) = \sum_{n \geq 1} \theta^k(A_n) u^n ; \mu_k(u) = \sum_{n \geq 1} \theta^k(B_n) u^n \text{ pour } k = 0, \dots, n-1.$$

La Proposition 2.2 donne alors $f(u\theta_k) = \lambda_k(u)\theta_k$ and $f^{-1}(u\theta_k) = \mu_k(u)\theta_k$ et il s'ensuit que $\lambda_k^{-1} = \mu_k$. Donc les λ_k sont des transformations biholomorphes de \mathbf{C} qui laissent invariant l'origine. Nécessairement, on doit avoir, pour tout $k = 0, \dots, n-1$, $\theta^k(A_1) \neq 0$ et $\theta^k(A_n) = 0$ pour $n \geq 2$. Finalement, on a bien $A_n = 0$ pour $n \geq 2$ et d'après (2.2), $A_1 \in \mathbf{C}_*^n$. \square

5.2. Le groupe $Aut(\mathbf{D}_n)$. Ici aussi, on observe une grande similarité avec la théorie des fonctions holomorphes d'une variable. Pour $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{n-1}) \in \mathbf{R}^n$, on pose $e^{i\tau} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\tau_j} \theta_j$. On introduit une conjugaison sur \mathbf{C}^n définie par $Z \rightsquigarrow Z^* = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\theta^j(Z)} \theta_j$. Puis, on associe à chaque W dans \mathbf{D}_n l'application

$$T_W(Z) = \frac{W - Z}{e_0 - W^* Z}.$$

Par les propriétés des formes θ^k , on obtient que

$$\theta^k(T_W(Z)) = \frac{\theta^k(W) - \theta^k(Z)}{1 - \overline{\theta^k(W)} \theta^k(Z)}.$$

Tenant compte de la forme des transformations biholomorphes du disque unité, on obtient que les T_W sont involutives et appartiennent à $Aut(\mathbf{D}_n)$.

Proposition 5.2. $Aut(\mathbf{D}_n) = \{m_{e^{i\tau}} \circ T_W; \tau \in \mathbf{R}^n, W \in \mathbf{D}_n\}$.

Preuve:

Il est clair que T_W échange W et 0. Par ailleurs, soit $f \in Aut(\mathbf{D}_n)$ telle que $f(0) = 0$. Comme \mathbf{D}_n est cerclé par rapport à l'origine, par un résultat classique (voir [3]) f est \mathbf{C} linéaire. Mais, par \mathbf{C}^n -différentiabilité, f doit être de la forme m_A avec A dans \mathbf{C}_*^n . Enfin la condition $f(\mathbf{D}_n) = \mathbf{D}_n$ donne $|\theta^k(A)| = 1$ pour $k = 0, \dots, n-1$. \square

On termine cette section par une dernière raison d'espérer que les transformations \mathbf{C}^n -différentiables constituent un groupe de Lie. Dans le cas $n = 2$, la jacobienne d'une application \mathbf{C}^2 -différentiable est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

dans la base $\{e_0, e_1\}$. On voit alors que les transformations \mathbf{C}^2 -différentiables sont des transformations conformes relativement à la métrique holomorphe $dz^0 \otimes dz^0 + dz^1 \otimes dz^1$.

REFERENCES

- [1] KOBAYASHI, S., *Transformations groups in Differential Geometry*. Springer Verlag, (1972).
- [2] LAURENT-THIEBAULT, C., *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables*, C.N.R.S Editions, 1997.
- [3] LOOS, O., *Bounded symmetric domains and Jordan Pairs*, Univ. of California at Irvine (1977).

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES, U.S.T.H.B, B.P. 32 EL ALIA. BAB EZZOUAR. ALGER.
E-mail address: atallahaffane@gmail.com