Fiabilité et performance imprécises des systèmes par les réseaux de fonctions de croyance

Christophe Simon, Philippe Weber

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
Nancy Université, CNRS, 2 Rue Jean Lamour, 54519 Vandœuvre les Nancy, France
christophe.simon@cran.uhp-nancy.fr, Philippe.weber@cran.uhp-nancy.fr

Résumé − Dans cet article, nous analysons la fiabilité et la performance des systèmes en tenant compte de l'incertitude et de l'imprécision sur les paramètres élémentaires des composants. L'analyse repose sur une approche par les réseaux de fonctions de croyance et les fonctions d'utilité. Une étude de cas est réalisée sur un système 2 parmi 3 afin d'évaluer la fiabilité précise et imprécise puis la performance.

Abstract − This article deals with an analysis of probist reliability and performance of systems taking into account aleatory and epistemic uncertainties on basic component parameters. The analysis is based on evidential networks and utility functions. A study case is done on a 2 out of 3 system.

1 Introduction

Dans les études de fiabilité des systèmes, les probabilités que nous manipulons sont souvent précises parfaitement déterminables or les problèmes réels sont difficilement appréhendés par une connaissance précise des probabilités en jeu [30]. Lorsque nous disposons de suffisamment de données, il nous est possible de construire une distribution ou encore d'estimer une loi de probabilité. Cette distribution est une première forme de probabilités imprécises et peut être utilisée dans la prise en compte de l'imprécision. Parfois, nous ne disposons pas des données d'expérience et ce sont des informations statistiques descriptives qui nous sont fournies (moyenne, max-min, intervalle de confiance). Dans ce cas, l'imprécision sur la probabilité est prise en compte par une distribution ou par un intervalle et la distribution sous jacente est inconnue. De fait, faire l'hypothèse d'une loi de probabilité est un apport significatif d'information dont l'impact sur l'étude menée n'est pas négligeable (*e.g.* uniforme). C'est aussi une approche qui peut s'avérer coûteuse en temps de calcul car l'étude fait généralement appel à des simulations de Monte-Carlo. La modélisation par un intervalle de probabilités est une alternative séduisante menant vers les travaux de Walley [32] sur les probabilités supérieure et inférieure ou vers la théorie des probabilités imprécises largement développée par Utkin [30] et d'autres auteurs. Dans les études de fiabilité, il est également supposé que l'on dispose de toute l'information sur le comportement de la fiabilité du système et de ses composants. Cette complétude suppose deux conditions essentielles [30] :

- Toutes les probabilités ou les distributions de probabilités sont connues et parfaitement déterminables,
- Les composants du système sont indépendants, c'est-à-dire que toutes les variables aléatoires décrivant la fiabilité des composants sont indépendantes ou, à défaut, leur dépendance est connue précisément.

Utkin [30] précise que la première condition est rarement remplie et préconise de traiter ce problème par les intervalles de probabilités [17]. D'autres auteurs ont considéré le problème de précision à l'aide de densités de probabilités [5], d'enveloppes de probabilités [2], de probabilités imprécises [6], de nombres flous [22], de densité de possibilités [3] ou de fonctions de croyance [9].

L'incertitude sur des paramètres peut avoir deux origines. La première source d'incertitude provient du caractère aléatoire de l'information qui est dû à une variabilité naturelle résultant de phénomènes stochastiques. On parle alors d'incertitudes de variabilité ou d'incertitudes stochastiques. La seconde source d'incertitude est liée au caractère imprécis et incomplet de l'information en raison d'un manque de connaissance. On parle alors d'incertitudes épistémiques. Le principe de Laplace dit de 'raison insuffisante' (toute ce qui est équiplausible est équiprobable) ou le maximum d'entropie [11] préconise de modéliser la connaissance sur un intervalle par une loi uniforme. Ce choix est contestable dans le sens où on apporte une information supplémentaire par l'équiprobabilité. Il y a confusion entre l'ignorance (imprécision) et le hasard (variabilité) [1]. Il existe une infinité de distribution de probabilités bornées par un intervalle et la loi uniforme n'en ait qu'une d'entres elles.

La théorie de l'évidence, encore appelée la théorie des fonctions de croyance, est assez proche de la théorie des probabilités mais offre la possibilité de formaliser l'incertitude épistémique. Comme la précisé Halpern [12], une fonction de croyance peut formellement être définie comme une fonction satisfaisant des axiomes qui peuvent être vus comme des axiomes faibles de Kolmogorov qui caractérisent la théorie des probabilités. Ainsi, il semble raisonnable de considérer une fonction de croyance comme une fonction de probabilité généralisée. La théorie des fonc-

tions de croyance permet ainsi de prendre en compte l'incertitude par l'affectation de probabilités à des ensembles plutôt qu'à des singletons.

L'objet de cet article est de proposer un formalisme graphique permettant la modélisation de la fiabilité imprécise. A cette fin, nous utilisons les réseaux de fonctions de croyance basés sur la structure de Dempster-Shafer [27], les arbres de jonctions [14] et l'inférence bayésienne généralisée permettant ainsi de modéliser dans une même représentation fiabilité et imprécision. La section 2 de cet article fournit le formalisme élémentaire de la théorie des fonctions de croyance. La section 3 développe le formalisme des réseaux de fonctions de croyance pour manipuler les probabilités imprécises et introduit la notion de fonction d'utilité dans le contexte d'évaluation de la fiabilité imprécise de systèmes multi-états ou non. La section 5 est consacrée à un exemple numérique.

2 Formalisme élémentaire de la théorie de l'évidence

La théorie des fonctions de croyance a été initiée par Dempster [7] avec ses travaux sur les bornes supérieures et inférieures d'une famille de distributions de probabilités puis renforcée par Shafer [24].

Sur un espace fini discret, le modèle proposé par Dempster et Shafer peut-être interprété comme une généralisation de la théorie des probabilités où les probabilités sont assignées aux ensembles par opposition aux singletons mutuellement exclusifs [23]. Dans la théorie des probabilités, la mesure est affectée à un seul événement possible. En revanche dans la théorie de Dempster-Shafer, la mesure peut être affectée à un ensemble d'événements. Toutefois, lorsque les informations disponibles permettent l'affectation des mesures à des événements uniques (*i.e.* connaissance spécifique), le modèle de Dempster-Shafer se confond avec la formulation traditionnelle des probabilités et il s'agit d'évidences dites bayésiennes [19]. La relation étroite entre ces deux modèles renforce l'intérêt de la théorie de Dempster-Shafer pour des applications initialement traitées par la théorie des probabilités.

2.1 Allocation de masses de croyance

L'idée centrale du processus d'allocation de masse de croyance est d'allouer une mesure entre 0 et 1 afin d'indiquer le degré de croyance sur un ensemble d'événements ou d'hypothèses [24]. Si nous considérons un ensemble de q éléments mutuellement exclusifs et exhaustifs Ω :

$$\Omega = \{H_1, H_2, ..., H_q\} \tag{1}$$

Ω défini l'espace de raisonnement où chaque proposition H_i peut supporter l'information provenant de différentes sources. Les sources d'information peuvent distribuer des masses sur les sous-ensembles du cadre de discernement, $A_i \in 2^\Omega : \{\emptyset, H_1, \ldots, H_q, \{H_1, H_2\}, \ldots, \{H1, \ldots, H_q\}\}$. Une source d'information assigne une masse de croyance uniquement sur les hypothèses A_i pour lesquelles elle dispose d'une information directe, *i.e.* qu'elle n'attribue de masse de croyance à aucun sous-ensemble des A_i [15]. Ce processus appelé allocation de masses est représenté par une fonction m définie par :

$$m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1] \tag{2}$$

tel que :

$$m(\emptyset) = 0 \tag{3}$$

et

$$\sum_{A_i \in 2^\Omega} m(A_i) = 1 \tag{4}$$

Chaque A_i supportant $0 \leq m(A_i) \leq 1$ est appelé un élément focal.

2.2 Intervalles de probabilités et distribution de masses de croyance

Si l'imprécision sur une probabilité est décrite par une p-box. La relation avec les mesures de croyance et de plausibilité est immédiate par une simple identification :

$$\left[\underline{P}_{H_i}\ \overline{P}_{H_i}\right] = [Bel(\{H_i\})\ Pls(\{H_i\})] \tag{5}$$

où $\underline{P}_{H_i}$ est la probabilité inférieure de l'hypothèse H_i et $\overline{P}_{H_i}$ en est la probabilité supérieure et i allant de 1 à q le nombre total d'hypothèses. La transformation d'un ensemble d'intervalles de probabilités P_H vers une distribution de masses de croyance est alors aisée par l'intermédiaire des équations 8, 9 et 14. Si :

$$P_H = (\left[\underline{P}_{H_1}\ \overline{P}_{H_1}\right], \ldots, \left[\underline{P}_{H_q}\ \overline{P}_{H_q}\right]) \tag{6}$$

alors

$$\begin{aligned} M_H &= [m(\{H_1\}), \ldots, m(\{H_i\}), \ldots, m(\{H_1, \ldots, H_q\})] \\ &= [\underline{P}_{H_1}, \ldots, \sum_{H_j | H_j \subseteq H_i} (-1)^{|H_i| - |H_j|} \underline{P}_{H_j}, \\ &\quad \ldots, \sum_{H_j | H_j \subseteq H_q} (-1)^{|H_q| - |H_j|} \underline{P}_{H_j}] \end{aligned} \tag{7}$$

Comme le précise Smets [29], la connaissance des mesures $Bel(H_i)$ et $Pls(H_i)$ est équivalente à la connaissance de la distribution des masses de croyance du cadre de discernement.

2.3 Mesures de croyance et de plausibilité

A partir de la distribution des masses de croyance, les bornes supérieure et inférieure d'un intervalle de probabilités peuvent être définies. Cet intervalle contient la probabilité d'un ensemble d'hypothèses ou éléments focaux et, est borné par deux mesures non-additives appelées croyance (Bel) et plausibilité (Pls) [16].

La mesure de croyance $Bel(A_i)$ est la borne inférieure pour un ensemble focal A_i. Elle est définie comme la somme de toutes masses de croyances des sous-ensembles B contribuant à la réalisation de A_i tel que $B \subseteq A_i$. La borne supérieure $Pls(A_i)$ est la somme de toutes les masses de croyance des sous-ensembles B tel que $B \cap A_i \neq \emptyset$. $Pls(A_i)$ et $Bel(A_i)$ sont définies par les équations suivantes :

$$Pls(A_i) = \sum_{B | A_i \cap B \neq \emptyset} m(B) \tag{8}$$

$$Bel\left(A_i\right) = \sum_{B|B\subseteq A_i} m\left(B\right) \tag{9}$$

Il en résulte la propriété d'encadrement définie par l'équation suivante :

$$Bel\left(A_i\right) \leq P(A_i) \leq Pls\left(A_i\right) \tag{10}$$

Où $P(A_i)$ exprime la probabilité que A_i se réalise mais qui reste inconnue et peut prendre toute valeur dans l'intervalle $[Bel(A_i)\ Pls(A_i)]$. La propriété d'encadrement 10 est bien connue et a été précisée dans les travaux de Shafer dès 1976 [24]. De nombreux auteurs l'ont utilisée pour mettre en relation l'intervalle formé par $[Bel\left(A_i\right)\ Pls\left(A_i\right)]$ et la distribution de masses de croyance [10].

Les mesures de plausibilité et de croyance ne sont pas duales car elles ne sont pas additives au sens de la théorie des probabilités ($Bel\left(A\right) \neq Pls\left(A^c\right)$) où A^c est le complément de A par rapport à Ω. Toutefois, les relations ci-dessous peuvent être établies entre A et A^c :

$$Bel\left(A_i^c\right) = 1 - Pls\left(A_i\right) \tag{11}$$

et

$$Pls\left(A_i^c\right) = 1 - Bel\left(A_i\right) \tag{12}$$

avec

$$Bel\left(A_i^c\right) \leq Pls\left(A_i^c\right) \tag{13}$$

La différence $(Pls\left(A_i\right) - Bel\left(A_i\right))$ décrit l'incertitude concernant l'hypothèse A_i représentée par $[Bel\left(A_i\right) Pls\left(A_i\right)]$.

A partir des mesures de plausibilité et de croyance, il est possible d'obtenir la distribution de masses de croyance par la transformée de möbius [28] :

$$m\left(A_i\right) = \sum_{B|B\subseteq A_i} (-1)^{|A_i|-|B|} Bel\left(B\right) \tag{14}$$

où $|A_i|$ est le cardinal de l'ensemble A_i.

3 Réseaux de fonctions de croyance

Dans la modélisation des systèmes complexes pour l'analyse de la fiabilité ou des performances, les variables qui représentent le système, ses composants, ses fonctions ou des événements du système sont liés les unes aux autres. Ces relations peuvent être représentées sous la forme de dépendances conditionnelles. Nous proposons dans cette section de définir un réseau de fonctions de croyance qui permet de représenter les dépendances conditionnelles dans un espace de description intégrant l'incertitude sous la forme de masses de croyance au sens de la théorie de Dempster-Shafer.

Les réseaux de fonctions de croyance proposés sont des graphes orientés sans circuit qui représentent une connaissance incertaine vue sous une forme aléatoire et épistémique [26]. Un réseau de fonctions de croyance est défini comme un couple : $G = ((N, A), M)$, où (N, A) représente le graphe avec N l'ensemble des nœuds et A l'ensemble des arcs et, M représente l'ensemble des masses de croyance associé à chaque nœud. Lorsqu'un nœud n'est pas un nœud racine, *i.e.* lorsqu'il a des nœuds parents, sa distribution de masses de croyance est définie par une table de masses de croyance conditionnelles quantifiant la relation entre ce nœud et ses parents. Lorsqu'un nœud est racine, une distribution de masses de croyance *a priori* est définie.

Une variable aléatoire discrète X est représentée par un nœud $X \in N$ avec son cadre de discernement Ω constitué de q hypothèses mutuellement exclusives et exhaustives (eq.1). Le vecteur $M(X)$, également noté M_X, est la distribution de masses de croyance sur les $2^q - 1$ ensembles focaux A_i^X, considérant qu'aucune masse n'est attribuée à $\emptyset$. $M\left(X\right)$ est défini par l'équation ci-dessous :

$$M(X) = [m(X \subseteq A_1^X)\ \ldots m(X \subseteq A_i^X)\ \ldots\ m(X \subseteq A_{2^q}^X)] \tag{15}$$

avec

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= 0 \\ m(X \subseteq A_i^X) &\geq 0 \\ \sum_{A_i^X | A_i^X \in 2^\Omega} m\left(X \subseteq A_i^X\right) &= 1 \end{aligned} \tag{16}$$

où $m(X \subseteq A_i^X)$ est la croyance que la variable X vérifie les hypothèses de l'élément focal A_i^X et $m(\emptyset)$ est car la masse est considérée à 0.

Lorsqu'un nœud est un nœud enfant, M est représenté par une table de masses de croyance conditionnelles qui lui est propre. Chaque table de masses de croyance conditionnelles établie la relation des masses de croyance entre le cadre de discernement des variables de chaque nœud parent et celui du nœud enfant. La figure 1 montre deux nœuds X et Y définis sur les cadres de discernement 2^{Ω_X} : $\left\{A_1^X, \ldots A_M^X\right\}$, 2^{Ω_Y} : $\left\{A_1^Y, \ldots A_K^Y\right\}$ et relier à un nœud Z disposant de son propre cadre de discernement 2^{Ω_Z} : $\left\{A_1^Z, \ldots A_L^Z\right\}$. La table de masses de croyance conditionnelles de Z est définie par les masses de croyance conditionnelles $M\left(Z\,|X, Y\right)$ pour chaque hypothèse A_i^Z sachant les éléments focaux de ses parents X et Y. Pour un nœud racine, *i.e.* sans parent, la table de masses de croyance est un vecteur représentant la distribution des masses de croyance *a priori* décrivant la croyance que la variable vérifie les hypothèses du cadre de discernement.

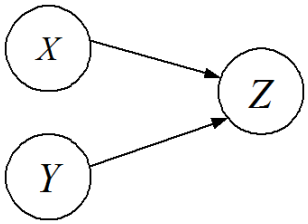


FIG. 1 – Réseau élémentaire : 2 parents, 1 enfant

Pour calculer les distributions de masses de croyance marginales de chaque nœud, nous utilisons des algorithmes d'inférence. L'inférence exacte peut-être réalisée par l'algorithme proposé par Jensen qui repose sur la construction d'un arbre de jonctions [14, pp. 76]. Cet algorithme permet de réactualiser les distributions de masses de croyance marginales sur chaque nœud en fonction des évidences représentant les connaissances introduites dans le réseau de fonctions de croyance. Le mécanisme de calcul est basé sur le théorème de Bayes qui dans notre cas est étendu à

la représentation de l'information incertaine selon le cadre de Dempster-Shafer.

3.1 Mesures de croyance et plausibilité

Pour calculer les mesures de croyance et de plausibilité dans un réseau de fonctions de croyance, il faut appliquer les équations 8 et 9. Lorsqu'un réseau de fonctions de croyance est implémenté dans un outil vérifiant l'axiome d'additivité, l'algorithme d'inférence exacte permet le calcul des mesures *Bel* et *Pls* sous certaines conditions. En effet, ces mesures ne peuvent pas être calculées dans le même nœud car elles sont non additives. Simon et Weber [25] ont donc proposé le calcul de chacune de ces mesures sur un élément focal d'une variable à partir de deux nœuds adaptés (cf. figure 2).

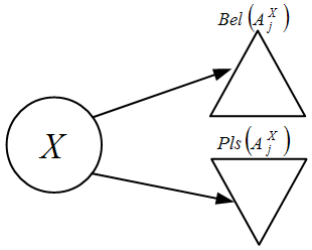


FIG. 2 – Nœud de calcul de *Bel* et *Pls*

Le nœud destiné au calcul de $Bel(A_j^X)$ est décrit par les deux hypothèses *Believe* et *Doubt* selon la table de masses de croyance conditionnelles proposée à la table 1.

$A_i^X \in 2^{\Omega_X}$	A_j^X *Bel*	A_j^X *Doubt*
...	...	...
A_i^X	$\begin{cases} 1 & \text{si } A_j^X \subseteq A_i^X ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } A_j^X \subseteq A_i^X ; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
...	...	...

TAB. 1 – Table de masses de croyance conditionnelles du nœud $Bel(A_j^X)$

Le nœud destiné au calcul de $Pls(A_j^X)$ est décrit par les hypothèses *Plausibility* et *Disbelief* selon la table 2.

$A_i^X \in 2^{\Omega_X}$	A_j^X *Pls*	A_j^X *Disbelief*
...	...	...
A_i^X	$\begin{cases} 1 & \text{si } A_j^X \cap A_i^X \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \text{si } A_j^X \cap A_i^X \neq \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
...	...	...

TAB. 2 – Table de masses de croyance conditionnelles du nœud $Pls(A_j^X)$

La structure de ces nœuds est générique. Elle est donc exploitable pour le calcul des mesures de croyance et de plausibilité de chaque nœud du réseau et pour chaque hypothèse. En outre, compte tenu de la propriété d'encadrement (eq.10), ces nœuds permettent la définition d'un intervalle de probabilité sur toute hypothèse d'une variable étudiée.

3.2 Intégration des fonctions d'utilité dans les réseaux de fonctions de croyance

Dans certains problèmes, une mesure de satisfaction d'un besoin ou d'obtention d'un service est recherchée. La notion d'utilité permet cette mesure. Ainsi, pour l'évaluation de performances à l'aide des réseaux de fonctions de croyance, il est nécessaire d'introduire la notion d'utilité.

La fonction d'utilité traduit l'attitude d'un décideur face au risque. C'est une fonction que le décideur doit définir pour chaque décision. Elle est ordinale si le décideur exprime une relation de préférence entre les décisions ou cardinale si une fonction mathématique (par exemple linéaire) est utilisée pour formaliser quantitativement la préférence. Il s'agit donc de construire une fonction U allant de l'espace des décisions dans $\mathbb{R}^+$ telle que $U(A) > U(B)$ implique que la décision A est préférée à la décision B. Plus généralement, la décision peut tenir compte de plusieurs paramètres, il s'agit donc d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, plus la valeur de la fonction U pour une décision est élevée, plus cette décision est appréciée. La fonction $U : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ représente la préférence $\succeq$ du décideur si et seulement si quels que soient $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $Z' = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n)$ nous avons :

$$U(z_1, z_2, \ldots, z_n) \geq U(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n) \Leftrightarrow Z \succeq Z' \qquad (17)$$

Si nous associons des conséquences $X : \{x_k^1, \ldots, x_k^j, \ldots, x_k^n\}$ à chaque décision $S_d : \{s_1^d, \ldots, s_k^d, \ldots, s_K^d\}$ pouvant prendre K états et des probabilités $P_k : \{p_k^1, \ldots, p_k^j, \ldots, p_k^n\}$ à chaque conséquence, le décideur choisit l'état de la décision s_k^d qui maximise l'espérance de l'utilité $EU(s_k^d)$ calculée par la relation suivante [31] :

$$EU\left(s_k^d\right) = \sum_{j=1}^{n} p_k^j . u\left(x_k^j\right) \qquad (18)$$

avec $p_k^j : P(X = x_k^j | S_d = S_k^d)$ et $u(x_k^j)$ est l'utilité de x_k^j.

Les fonctions d'utilité peuvent être utilisées dans les réseaux de décision [21] et se combinent parfaitement avec les réseaux bayésiens [14, p. 134](cf. figure 3). Pour coder la relation 18, il suffit de définir les poids u_k^j dans le nœud d'utilité associé à un nœud du réseau, *i.e.* à une variable aléatoire.

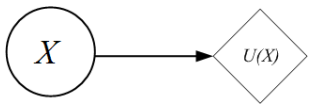


FIG. 3 – Nœud d'utilité de X

L'utilisation de la fonction d'utilité dans les réseaux de fonctions de croyance relève du même principe. Toutefois, les probabilités P_k sont remplacées par des mesures de croyance et de plausibilité dont nous déduisons les masses de croyance $M_k : \{m_k^1, \ldots, m_k^j, \ldots, m_k^{2^n}\}$ associées. En effet, le nœud du réseau de fonctions de croyance sur lequel est calculée l'utilité ne contient que des masses de croyance. Or, l'utilité a été définie sur des hypothèses spécifiques dans le cas des probabilités. Dans le cas des masses de croyance, il faut définir une utilité aux ensembles focaux du cadre de discernement lié au nœud représentant la variable étudiée, tout en respectant la logique d'attribution

des utilités du cas probabiliste [13]. Ainsi, la relation 18 se divise en deux équations liées à la mesure de croyance ou probabilité inférieure et la mesure de plausibilité ou probabilité supérieure pour définir les espérances de l'utilité inférieure (eq.19) et supérieure (eq.20).

$$\underline{EU}\left(s_k^d\right) = \sum_{j=1}^{2^n} m_k^j . \underline{u}\left(x_k^j\right) \tag{19}$$

et

$$\overline{EU}\left(s_k^d\right) = \sum_{j=1}^{2^n} m_k^j . \overline{u}\left(x_k^j\right) \tag{20}$$

Si nous considérons une hypothèse non spécifique $\{x_k^i, x_k^l\}$, signifiant qu'on ne sait pas si l'hypothèse x_k^i ou x_k^l est vérifiée sachant que x_k^i et x_k^l sont mutuellement exclusives, l'utilité correspondante $u(\{x_k^i, x_k^l\})$ doit être déterminée à partir des utilités $u(x_k^i)$ et $u(x_k^l)$. Ainsi, dans le calcul de l'espérance de l'utilité inférieure, qui est le cas pessimiste, nous utilisons l'utilité inférieure $\underline{u}$ comme la moins préférable parmi les utilités de $u(x_k^i)$ et $u(x_k^l)$ en vérifiant les propriétés de dominance entre les hypothèses [13, p.110]. Pour l'espérance de l'utilité supérieure, c'est l'utilité la plus préférable qui est choisie. Les équations 19 et 20 deviennent :

$$\underline{EU}\left(s_k^d\right) = \sum_{j=1}^{2^n} m_k^j . \underline{u}\left(x_k^j\right) \tag{21}$$

avec

$$\underline{u}(\{x_k^i, x_k^l\}) = min(u(x_k^i), u(x_k^l))$$

et

$$\overline{EU}\left(s_k^d\right) = \sum_{l=1}^{2^n} m_k^j . \overline{u}\left(x_k^l\right) \tag{22}$$

avec

$$\overline{u}(\{x_k^i, x_k^l\}) = max(u(x_k^i), u(x_k^l))$$

4 Les systèmes multi-états

Dans de nombreux cas, le système comme ses composants peuvent fonctionner dans différents états ou modes caractérisés par différents niveaux de performance. De tels systèmes font référence à des systèmes multi-états [18]. Appliquée aux systèmes multi-états, une analyse de la fiabilité permet de calculer une mesure de la capacité du système à fournir un niveau de performance requis en fonction de son niveau de dégradation.

En outre, l'hypothèse d'état binaire des composants peut être levée car elle ne permet pas de traduire convenablement la dégradation du fonctionnement des composants d'un système [4]. Nous proposons alors une description de l'état de fonctionnement des composants et du système par plusieurs états [20]. La précision de la description approche plus ou moins finement l'état réel des modes de fonctionnement et de dégradation des composants ou du système.

4.1 Modélisation de la fiabilité

Pour analyser la fiabilité ou la performance des systèmes multi-états, il est nécessaire de connaître l'ensemble des modes de fonctionnement du système et de chacun de ses composants. Nous supposons que le mode de fonctionnement de chaque composant est indépendant de celui des autres et que le système est cohérent.

Considérons un système avec $K+1$ modes de fonctionnement $S = \{s_0, \ldots, s_K\}$ et niveaux de performance $U = \{u_0, \ldots, u_k\}$ exprimés comme une utilité. Chaque niveau de performance u_i correspond à un mode de fonctionnement s_i du système. Le mode de fonctionnement s_K correspond au fonctionnement normal et est associé au niveau de performance maximum u_K. Le mode s_0 correspond à une défaillance totale du système, ce qui induit un niveau de performance minimum u_0.

Le système est composé de n composants C_i ayant chacun $K_{C_i}+1$ modes de fonctionnement $S_{C_i} = \{s_{C_i 0}, \ldots, s_{C_i K_{C_i}}\}$. Le mode de fonctionnement $s_{C_i K_{C_i}}$ est le mode de fonctionnement normal du composant et le mode $s_{C_i 0}$ correspond à l'état de défaillance totale du composant. L'état de fonctionnement du système dépend de celui de ses composants. Ainsi, la fiabilité du système s'exprime comme la fonction de structure ϕ suivante :

$$S = \phi\left(S_{C_1}, \ldots, S_{C_n}\right) : S_{C_i}^n \rightarrow S \tag{23}$$

avec

$$S_{C_i}^n = \left\{s_{C_1 0}, \ldots, s_{C_1 K_{C_1}}\right\} \times \ldots \times \left\{s_{C_n 0}, \ldots, s_{C_n K_{C_n}}\right\}$$

où $S_{C_i}^n$ est l'espace possible des combinaisons des modes de fonctionnement des composants et S l'espace des modes de fonctionnement du système.

A chaque instant, le mode de fonctionnement du système multi-états peut s'écrire comme une variable aléatoire $Y = \{y_0, \ldots, y_i, \ldots, y_K\}$. Le mode de fonctionnement de chaque composant peut également s'écrire comme une variable aléatoire $X_{C_i} = \{x_{C_{i0}}, \ldots, x_{C_{i K_{C_i}}}\}$. Nous pouvons alors écrire Y comme une combinaison des variables aléatoires X_{C_i} selon la fonction ϕ.

$$Y = \phi(X_{C_i}) \tag{24}$$

Le niveau de performance du système à chaque instant est calculé par l'espérance de l'utilité selon l'équation suivante :

$$U = \sum_{k=0}^{K} y_k . u_k \tag{25}$$

A l'instar des réseaux bayésiens [33], la prise en compte des modes de fonctionnement multiples d'un système et de ses composants dans l'analyse de fiabilité par les réseaux de fonctions de croyance est naturelle. Elle consiste à définir les tables de masses de croyance *a priori* et les tables de masses de croyance conditionnelles. L'aspect qualitatif du réseau, *i.e.* le graphe, modélise le mécanisme de propagation de l'impact des modes de fonctionnement, *i.e.* la modélisation de la fonction structure ϕ. L'intérêt d'utiliser les réseaux de fonctions de croyance est de représenter la fonction ϕ de façons synthétique sous une forme factorisée tout en tenant compte des imprécisions et incertitudes.

Nous pouvons également préciser que l'élaboration des tables de masses de croyances conditionnelles pour les systèmes multi-états est plus fastidieuse en raison de la croissance exponentielle des combinaisons. Toutefois, il est possible d'alléger cette étape, soit en réalisant un apprentissage soit en utilisant les lois de De Morgan. Les lois de De Morgan permettent de simplifier la définition de toutes les modalités non spécifiques à partir des relations établies entre modalités spécifiques.

4.2 Probabilités imprécises

Dans les systèmes multi-états, la probabilité pour chaque composant d'être dans un de ses modes de fonctionnement est donnée avec précision. Si les probabilités fournies sont entachées d'imprécision, ces probabilités peuvent être définies par des intervalles $\left[\underline{P_i^X}\ \overline{P_i^X}\right]$ où X est la variable aléatoire caractérisant le mode de fonctionnement d'un élément. Le passage des intervalles de probabilités aux distributions de masses de croyance se fait comme à la section précédente à l'aide de l'équation 7 ou du jeu d'équations 8, 9 et 14.

Considérons par exemple un système constitué de composants présentant chacun 3 modes de fonctionnement $S = \{s_2, s_1, s_0\}$ et 3 niveaux de performance associés $U = \{u_2, u_1, u_0\}$ où u_2 est le niveau le plus performant et u_0 le moins performant. Le cadre de discernement est donc :$2^\Omega = \{s_2, s_1, s_0, \{s_2, s_1\}, \{s_2, s_0\}, \{s_2, s_1, s_0\}\}$. Si nous disposons des intervalles de probabilités à un instant de mission T_i pour chaque mode définis par :

$$[P] = \left[\left[\underline{P}_{s_2}^X\ \overline{P}_{s_2}^X\right], \left[\underline{P}_{s_1}^X\ \overline{P}_{s_1}^X\right], \left[\underline{P}_{s_0}^X\ \overline{P}_{s_0}^X\right]\right] \tag{26}$$

Alors, les tables de masses de croyance *a priori* sont définies par :

$$\begin{aligned} M = [&m(s_2)\ m(s_1)\ m(s_0)\ m(s_2, s_1) \\ &m(s_2, s_0)\ m(s_1, s_0)\ m(s_2, s_1, s_0)] \end{aligned} \tag{27}$$

Selon l'équation 14, les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} m(\{s_2\}) &= Bel(\{s_2\}) = \underline{P}(\{s_2\}) \\ m(\{s_1\}) &= Bel(\{s_1\}) = \underline{P}(\{s_1\}) \\ m(\{s_0\}) &= Bel(\{s_0\}) = \underline{P}(\{s_0\}) \end{aligned}$$

De plus :

$$m(\{s_2, s_1\}) = -Bel(\{s_2\}) - Bel(\{s_1\}) + Bel(\{s_2, s_1\})$$

et d'après 8 et 9 :

$$Bel(\{s_2, s_1\}) = 1 - \overline{P}(\{s_0\})$$

La même démarche peut être réalisée pour le calcul de chaque élément focal de la table de masse de croyance *a priori* comme le précise l'équation 7.

5 Etude de cas

Cette section est dédiée à l'analyse de la méthode proposée pour le calcul de la fiabilité des systèmes. Nous étudions deux systèmes de complexité différente avec d'une part deux états de fonctionnement et d'autre part un point de vue multi-états. Deux cas seront distingués selon que les probabilités sont précises ou non. L'inférence dans le cas des réseaux de fonctions de croyance est faite par l'algorithme d'inférence exacte programmée dans Bayesialab ©. Les réseaux de fonctions de croyance sont donc directement modélisés par cet outil en utilisant son interface graphique.

5.1 Fiabilité probist d'un Système 2/3

Pour cet exemple, nous proposons de simuler un système 2 parmi 3. L'objectif est de montrer la capacité des réseaux de fonctions de croyance à calculer la fiabilité des systèmes. Le réseau de fonction de croyance d'un système 2 parmi 3 est transcrit dans Bayesialab© avec la structure présentée à la figure 4 et la table de masses de croyances conditionnelles (Tableau 3).

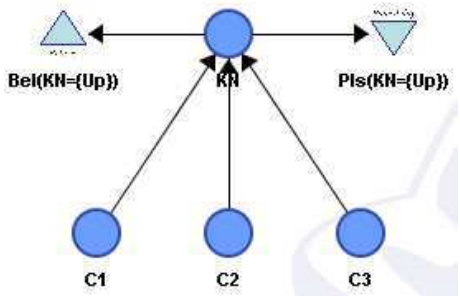


FIG. 4 – Réseau de fonctions de croyance pour un système 2 parmi 3

E_V	E_X	E_Y	E_Z {Up}	E_Z {Down}	E_Z {Up,Down}
{Up}	{Up}	{Up}	1	0	0
{Down}	{Up}	{Up}	1	0	0
{Up,Down}	{Up}	{Up}	1	0	0
{Up}	{Down}	{Up}	1	0	0
{Down}	{Down}	{Up}	0	1	0
{Up,Down}	{Down}	{Up}	0	0	1
{Up}	{Up,Down}	{Up}	1	0	0
{Down}	{Up,Down}	{Up}	0	0	1
{Up,Down}	{Up,Down}	{Up}	0	0	1
{Up}	{Up}	{Down}	1	0	0
{Down}	{Up}	{Down}	0	1	0
{Up,Down}	{Up}	{Down}	0	0	1
{Up}	{Down}	{Down}	0	1	0
{Down}	{Down}	{Down}	0	1	0
{Up,Down}	{Down}	{Down}	0	1	0
{Up}	{Up,Down}	{Down}	1	0	0
{Down}	{Up,Down}	{Down}	0	0	1
{Up,Down}	{Up,Down}	{Down}	0	0	1
{Up}	{Up}	{Up,Down}	1	0	0
{Down}	{Up}	{Up,Down}	0	0	1
{Up,Down}	{Up}	{Up,Down}	0	0	1
{Up}	{Down}	{Up,Down}	0	0	1
{Down}	{Down}	{Up,Down}	0	1	0
{Up,Down}	{Down}	{Up,Down}	0	0	1
{Up}	{Up,Down}	{Up,Down}	1	0	0
{Down}	{Up,Down}	{Up,Down}	0	0	1
{Up,Down}	{Up,Down}	{Up,Down}	0	0	1

TAB. 3 – Table de masses de croyance conditionnelles d'une porte '2/3'

5.1.1 Probabilités précises

Dans un objectif de simplification et sans perte de généralité, considérons que chaque composant dispose du même taux de défaillance λ. Les évènements élémentaires qui conduisent les composants de l'état $\{Up\}$ à l'état $\{Down\}$ sont indépendants. Le système est homogène et aucune réparation n'est considérée. La fiabilité du système $R(T_i)$

est donnée par l'équation suivante :

$$R(T_i) = \sum_{i=k}^{n} \mathtt{C}_n^i r(T_i)^i (1 - r(T_i))^{n-i} \quad \text{avec } \mathtt{C}_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \tag{28}$$

où $r(T_i)$ est la probabilité pour chaque composant d'être dans l'état $\{Up\}$ et T_i est la durée de mission.

Considérons $\lambda = 10^{-3}h^{-1}$ et $T_i = 200h$. La probabilité pour que chaque composant C_i soit dans l'état $\{Up\}$ est donnée par : $P_{C_i}(\{Up\}) = 0.81873$. La distribution de masses de croyance *a priori* du nœud C_i est :

$$M_{C_i} = [m(\{Up\})\ m(\{Down\})\ m(\{Up, Down\})] \tag{29}$$
$$= [0.8187\ 0.18127\ 0] \tag{30}$$
$$\tag{31}$$

N'ayant pas d'imprécision sur la valeur de λ, la masse de croyance $m(\{Up, Down\}) = 0$ traduit que les évidences sont bayésienne et que $Bel(C_i = \{Up\}) = P(C_i = \{Up\}) = Pls(C_i = \{Up\})$. Le problème est donc complètement bayésien et d'après l'équation 28, une fiabilité $R(T_i) = 0.9133$ doit être obtenue. La figure 5 montre que le réseau de fonctions de croyances donne la valeur exacte de la fiabilité du système.

Cet exemple rudimentaire montre que le codage des masses de croyance *a priori* avec des évidences bayésienne dans le réseau de fonctions de croyance donne le résultat exact de la fiabilité du système. Ainsi, comme l'ont précisé Simon et Weber dans [25], il y a une équivalence complète entre les réseaux de fonctions de croyance et les méthodes probabilistes telles que les réseaux bayésiens pour le calcul de la fiabilité des systèmes.

5.1.2 Probabilités imprécises

Considérons maintenant que le taux de défaillance des composants ne soit pas connu avec précision mais sous forme d'un intervalle : $[\underline{\lambda}\ \overline{\lambda}] = [0.9e^{-3}\ 1.1e^{-3}]$. La distribution de masses de croyance *a priori* explicitant l'état de chaque composant au temps de mission $T_i = 200h$ est obtenu par les équations 8, 9, et 14 :

$$M_C = [m(\{Up\})\ m(\{Down\})\ m(\{Up, Down\})] \tag{32}$$
$$= [0.80252\ 0.16473\ 0.03275] \tag{33}$$
$$\tag{34}$$

L'imprécision sur la valeur de λ induit une masse sur l'hypothèse non spécifique $m(\{Up, Down\}) > 0$ exprimant le doute sur la connaissance de la valeur exacte de λ. Cela traduit un cadre non bayésien strict et $Bel(C_i = \{Up\}) < P(C_i = \{Up\}) < Pls(C_i = \{Up\})$. La figure 6 montre le résultat obtenu par le réseau de fonctions de croyance.

La fiabilité du système est obtenu par la probabilité que le système soit dans un état de fonctionnement ($\{Up\}$) à l'instant T_i. Elle est comprise entre $[\underline{R}(T_i), \overline{R}(T_i)] = [0.8984, 0.9275]$. En comparant au résultat de la section précédente, nous constatons que la propriété d'encadrement 10 est vérifiée :

$$Bel(\{Up\}) < P(\{Up\}) < Pls(\{Up\})$$
$$\text{i.e.} 0.8984 < 0.9133 < s0.9275 \tag{35}$$

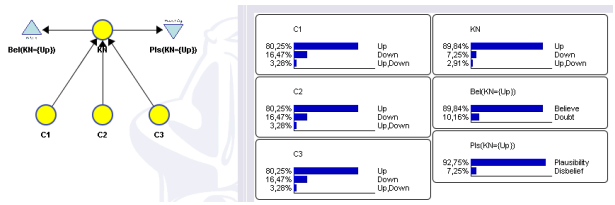


FIG. 6 – Fiabilité imprécise d'un système 2/3

avec

$$Bel(\{Up\}) = \underline{P}(\{Up\}) \text{ et } Pls(\{Up\}) = \overline{P}(\{Up\})$$

5.2 Système 2 parmi 3 multi-états

Afin de montrer le fonctionnement des réseaux de fonctions de croyance pour l'étude des performances des systèmes multi-états, nous avons repris l'exemple d'un système de redondance 2 parmi 3 fourni par Gopal [8]. Le système est composé de 3 composants disposant chacun de 3 modes de fonctionnement $S_{C_{i=1,2,3}} = \{s_{i0}, s_{i1}, s_{i2}\}$. Le système dispose également de 3 modes de fonctionnement $S = \{s_0, s_1, s_2\}$ associés à 3 niveaux de performance $U = \{u_0, u_1, u_2\}$. La fonction de structure ϕ donnant la relation entre les modes de fonctionnement des composants et les modes de fonctionnement du système est donnée par la table suivante :

S_{C_1}	S_{C_2}	S_{C_3}	$\phi(S)$	S_{C_1}	S_{C_2}	S_{C_3}	$\phi(S)$
0	0	0	s_0	1	1	2	s_1
0	0	1	s_0	1	2	0	s_1
0	0	2	s_0	1	2	1	s_1
0	1	0	s_0	1	2	2	s_2
0	1	1	s_1	2	0	0	s_0
0	1	2	s_1	2	0	1	s_1
0	2	0	s_0	2	0	2	s_2
0	2	1	s_1	2	1	0	s_1
0	2	2	s_2	2	1	1	s_1
1	0	0	s_0	2	1	2	s_2
1	0	1	s_1	2	2	0	s_2
1	0	2	s_1	2	2	1	s_2
1	1	0	s_1	2	2	2	s_2
1	1	1	s_1				

TAB. 4 – Fonction de structure du système 2 parmi 3 multi-états [8]

La fonction définissant la relation entre la performance du système U_S et les modes de fonctionnement des composants s'exprime comme l'espérance de l'utilité (eq. 18) que l'on définit par la relation suivante :

$$U_S = \sum_{s_i} (u_i.y_i) = \sum_{s_i} u_i.\phi(x_{C_i}) \tag{36}$$

où y_i est la probabilité que le système soit dans le mode de fonctionnement i, x_{C_i} est la probabilité que le composant C_i soit dans le mode de fonctionnement i et ϕ la fonction de structure donnée par la table 4.

Pour calculer la performance du système en redondance 2 parmi 3 par un réseau de fonctions de croyance, nous transcrivons la fonction de structure proposée par Gopal

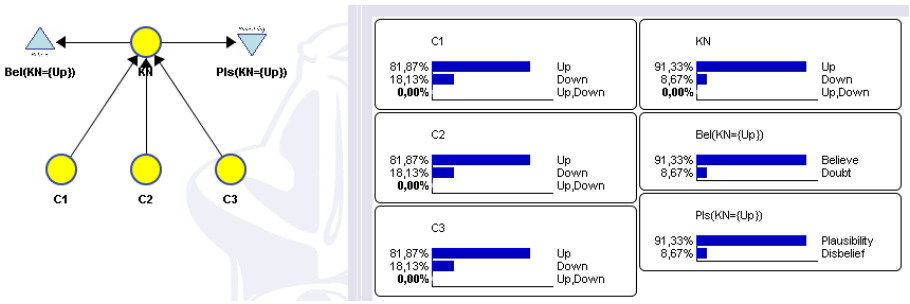


FIG. 5 – Fiabilité d'un système 2 parmi 3 avec des probabilités précises

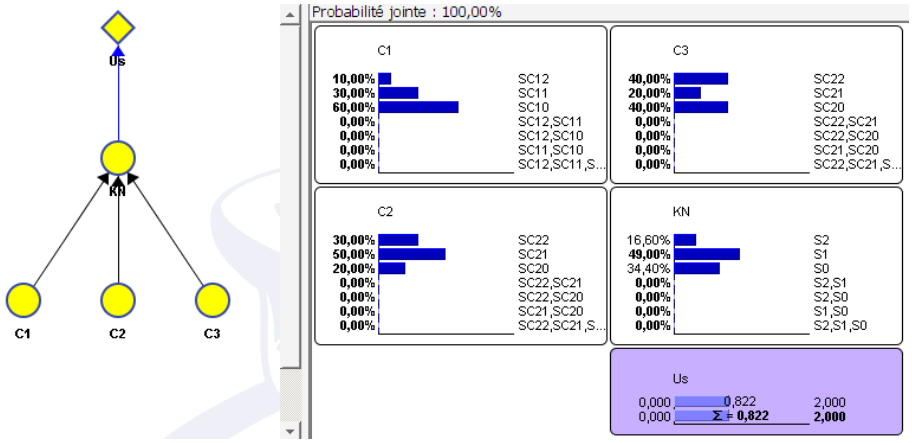


FIG. 7 – Réseau de fonctions de croyance solution de [8]

(cf. table 4) par une table de masses de croyance conditionnelles équivalente dans le nœud KN de la figure 7.

L'adjonction d'un nœud d'utilité Us permet le calcul de la performance du système selon l'équation 36. La table des utilités correspondante (cf. table 5) permet le calcul de cette performance.

Ensemble focal	utilité
s_2	2
s_1	1
s_0	0

TAB. 5 – Table des utilités

5.2.1 Probabilités précises

Selon Gopal [8], si la répartition des modes de fonctionnement des composants est : $P_{s_{C_{i1}}} = (0.6, 0.3, 0.1)$, $P_{s_{C_{i2}}} = (0.2, 0.5, 0.3)$, $P_{s_{C_{i3}}} = (0.4, 0.2, 0.4)$ alors la performance du système est de 0.822 unités. Nous constatons que le réseau de fonctions de croyance présenté à la figure 7 donne cette même valeur de l'espérance d'utilité avec des masses de croyance *a priori* conformes aux distributions de probabilités *a priori* fournies ci-dessus.

5.2.2 Probabilités imprécises

Considérons maintenant le problème de probabilités imprécises sur les états des composants. Pour exemple et sans perte de généralité, nous allons considérer que les probabilités du problème précédent sont entachées d'une incertitude de ± 0.05 sur chaque terme. Nous devons donc calculer la performance telle que définie par Gopal [8] :

$$U_S = \sum_{s_{i=1,2,3}} u_i.\phi(x_{C_i}) \tag{37}$$

avec $\phi(x_{C_i}) = \phi(([0.55\ 0.65], [0.25\ 0.35], [0.05\ 0.15]), ([0.15\ 0.25], [0.45\ 0.55], [0.25\ 0.35]), ([0.35\ 0.45], [0.15\ 0.25], [0.35\ 0.45]))$

Le réseau de fonctions de croyance de la figure 8 modélise le problème de probabilités imprécises et permet le calcul de la performance du système avec son imprécision.

Les nœuds de calcul des fonctions Bel et Pls sur les modes de fonctionnement s_1 et s_2 du système ont été ajoutés pour montrer que la propriété d'encadrement sur les valeurs de probabilités dans le cas précis (section précédente) reste valide. La fonction d'utilité intégrée dans le réseau de fonction de croyance à la figure 7 est maintenant divisée en deux fonctions d'utilité calculant une borne supérieure $\overline{U}_S$ selon la table 7 et une borne inférieure $\underline{U}_S$ selon la table 6 à l'utilité du système conformément à l'analyse de la section 3.2.

Ensembles focaux	utilité
s_2	2
s_1	1
s_0	0
s_2, s_1	1
s_2, s_0	0
s_1, s_0	0
s_2, s_1, s_0	0

TAB. 6 – Utilités $\underline{U}_S$

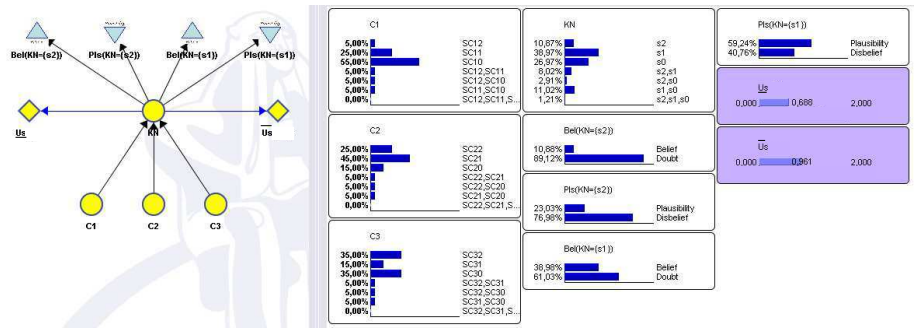


FIG. 8 – RFC d'évaluation de la performance du système multi-états [8] avec son imprécision

Ensembles focaux	utilité
s_2	2
s_1	1
s_0	0
s_2, s_1	2
s_2, s_0	2
s_1, s_0	1
s_2, s_1, s_0	2

TAB. 7 – Utilités $\overline{U}_S$

Comme nous pouvons le voir sur la figure 8, l'imprécision sur la probabilité des composants d'être dans chacun de leurs modes de fonctionnement se propage au travers du réseau et induit une distribution de masses de croyance mettant en évidence l'imprécision sur la probabilité du système d'être dans ses divers modes de fonctionnement. Compte tenu des performances associées, les nœuds d'utilité introduits donnent un encadrement de l'utilité réelle. Ainsi, l'utilité précise $U_s = 0.822$, observable à la figure 7 lorsque les masses de croyance a priori ne sont affectées qu'aux ensembles focaux spécifiques, est encadrée par les utilités inférieure et supérieure $[\underline{U}_s, \overline{U}_s] = [0.688, 0.961]$ comme nous pouvons l'observer à la figure 8. Cet encadrement est vérifié car nous avons pris soin d'encadrer chaque masse de croyance a priori du problème sans imprécision pour traiter le problème avec imprécision où nous avons pris une variation de ± 0.05. Nous pouvons remarquer que l'encadrement symétrique des masses de croyance a priori ne donne pas forcément un encadrement symétrique de l'utilité.

6 Conclusion

Les réseaux de fonctions de croyance présentent plusieurs intérêts. D'une part, ils permettent d'appréhender facilement la logique causale d'un système, *i.e.* la fonction de structure exprimant la logique de propagation des défaillances au sein d'un système ou la relation entre la performance de composants et celle du système. D'autre part, la même modélisation permet l'étude de la propagation de l'imprécision (incertitude épistémique) et l'incertitude (aléatoire). En outre, l'inférence bayésienne généralisée permet d'étudier les relations entre variables à travers le réseau de fonctions de croyance. L'intégration des fonctions d'utilité imprécises permet l'étude de la fiabilité comme celle de la performance de systèmes complexes et/ou de grande taille. Cette caractéristique des réseaux de fonctions de croyance ouvre des possibilités significatives dans les problèmes de modélisation de paramètres de sûreté de fonctionnement et plus généralement de la modélisation de connaissance.

Références

[1] C. Baudrit. *Représentation et propagation de connaissances imprécises et incertaines : application à l'évaluation des risques liés aux sites et aux sols pollués.* PhD thesis, Université de Toulouse III Paul Sabatier, France, 2005.

[2] D. Berleant and J. Zhang. Bounding the times to failure of 2-component systems. *IEEE Transactions on Reliability*, 53(4) :542–550, 2004.

[3] Asma Brini, Mohand Boughanem, and Didier Dubois. Réseaux possibilistes pour un modéle de recherche d'information,. In *Conférence francophone en Recherche d'Information et Applications, Lyon, 15/03/2006-17/03/2006*, pages 143–154, http ://www.irit.fr/ARIA, mars 2006. Association Francophone de Recherche d'Information et Applications (ARIA).

[4] Kai-Yuan Cai, Chuan-Yuan Wen, and Ming-Lian Zhang. Mixture models in profust reliability theory. *Microelectronics and Reliability*, 35(6) :985–993, June 1995.

[5] David Coit, Tongdan Jin, and Naruemon Wattanapongsakorn. System optimization with component reliability estimation uncertainty : A multicriteria approach. *IEEE Transactions on Reliability*, 53(3) :369–380, September 2004.

[6] F. Coolen and L. Utkin. Imprecise reliability : A concise overview. In T. Aven and J. Vinnem, editors, *Risk, Reliability and Societal Safety*, pages 1959–1966, Stavanger, June 2007. Taylor & Francis Group.

[7] A. P. Dempster. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. *Annals of Mathematical Statistics*, 38 :325–339, 1967.

[8] G. Gopal. Schur property of the performance function for the multistate coherent system. In Helge Langseth and Bo Lindqvist, editors, *Proceedings of the Third International conference on Mathematical Methods in Reliability*, pages 255–258, 2002.

[9] Lan Guo. *Software Quality and Reliability Prediction Using Dempster-Shafer Theory.* Ph.d in computer and information science, College of Engineering and Mineral Resources at West Virginia University, Lane Department of Computer Science and Electrical Engineering, Morgantown, West Virginia, 2004.

[10] M.A. Guth. A probability foundation for vagueness and imprecision in fault tree analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, 40(5) :563–570, 1991.

[11] H. Gzyl. *The Method of Maximum Entropy.* World Scientific Publishing, 1995.

[12] Joseph Y. Halpern and Ronald Fagin. Two views of belief : belief as generalized probability and belief as evidence. *Artif. Intell.*, 54(3) :275–317, 1992.

[13] Jean-Yves Jaffray. Linear utility theory for belief functions. *Operations Research Letters*, 8 :107–112, 1989.

[14] F.V. Jensen. *An Introduction to Bayesian Networks.* UCL Press, London, 1996.

[15] G.J. Klir and M.J. Wierman. Uncertainty-based information. elements of generalized information theory. In *Studies in Fuzziness and Soft-Computing*, page 168. Physica-Verlag, 1998.

[16] G.J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications.* NJ :Prentice Hall, 1995.

[17] Igor Kozine and Lev Utkin. Interval valued finite markov chaines. *Reliable computing*, 8 :97–113, 2002.

[18] G. Levitin. Block diagram method for analyzing multi-state systems with uncovered failures. *Reliability Engineering and System Safety*, 92 :727–734, 2007.

[19] E. Ouzounova. *Incertitude et mesure de performance : Une nouvelle approche à travers la théorie mathématique des indications.* PhD thesis, Faculté des sciences économiques et sociales, Université de Fribourg, Suisse, 2005.

[20] Olivier Pourret, Jérôme Collet, and Jean-Louis Bonouzounaova. Evaluation of the unavailability of a multistate-component system using a binary model. *Reliability Engineering and System Safety*, 64 :13–17, 1999.

[21] S. Russell and P. Norvig. *Artificial intelligence : a modern approach, 2nd Edition.* Prentice Hall., 2003. 2nd Edition.

[22] M. Sallak, C. Simon, and J-F. Aubry. A fuzzy probabilistic approach for determining safety integrity level. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2007.

[23] K. Sentz and S. Ferson. Combination of evidence in dempster-shafer theory. Technical report, Sandia National Laboratory, 2002.

[24] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence.* Princeton University Press, 1976.

[25] C. Simon, M. Sallak, and J-F. Aubry. Sil allocation of sis by aggregation of experts opinions. In *ESREL, Safety and Reliability Conference, Stavanger, Norvège*, 2007.

[26] Christophe Simon, Philippe Weber, and Alexandre Evsukoff. Bayesian networks inference algorithm to implement dempster shafer theory in reliability analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 93(7) :950–963, July 2008.

[27] Christophe Simon, Philippe Weber, and Eric Levrat. Bayesian networks and evidence theory to model complex systems reliability. *Journal of Computers*, 2(1) :33–43, February 2007.

[28] Ph. Smets. The application of the matrix calculus to belief functions. *Int. J. Approximate Reasoning*, 31 :1–30, 2002.

[29] Philippe Smets. The transferable belief model and other interpretations of dempster-shafer's model. In *UAI '90 : Proceedings of the Sixth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 375–384, New York, NY, USA, 1991. Elsevier Science Inc.

[30] Lev Utkin and Frank Coolen. *New metaheuristics, neural & fuzzy techniques in reliability*, volume 2 of *Computational intelligence in reliability engineering*, chapter Imprecise reliability : An introductory overview., pages Chapter 10, pp. 261–306. G. Levitin, 2007.

[31] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press, Princeton, 1944. Second edition in 1947, third in 1954.

[32] P. Walley. *Statistical reasoning with imprecise probabilities.* Chapman and Hall, 1991.

[33] Ph. Weber and L. Jouffe. Complex system reliability modelling with dynamic object oriented bayesian networks (doobn). *Reliability Engineering and System Safety*, 91(2) :149–162, February 2006.