



Comparaison de Différents Outils de Calcul pour la Modélisation des Supraconducteurs

Kévin Berger, Christophe Guérin, Gérard Meunier, Jean Lévêque, Pascal
Tixador

► To cite this version:

Kévin Berger, Christophe Guérin, Gérard Meunier, Jean Lévêque, Pascal Tixador. Comparaison de Différents Outils de Calcul pour la Modélisation des Supraconducteurs. MGE 2008 : Matériaux du Génie Electrique, May 2008, Toulouse, France. hal-00284714

HAL Id: hal-00284714

<https://hal.science/hal-00284714>

Submitted on 7 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comparaison de Différents Outils de Calcul pour la Modélisation des Supraconducteurs

K. Berger¹, C. Guérin², J. Lévêque³, G. Meunier¹ et P. Tixador¹

¹G2Elab, UMR 5269 Grenoble INP/Université Joseph Fourier - CNRS, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex

²CEDRAT Groupe, 15, Chemin de Malacher - inovallée, 38246 Meylan Cedex

³GREEN, UMR 7037 INPL/ Université Henri Poincaré - CNRS, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy

* E-mail : Kevin.Berger@G2Elab.inpg.fr

Résumé : Les outils numériques apparaissent comme indispensables à la modélisation et la conception de dispositifs supraconducteurs. Dans cet article, nous avons comparé le logiciel de calcul par éléments finis Flux® à un code de calcul en C++ maison. Le problème traité est un problème 2D de courants induits dans une pastille supraconductrice (comportement fortement non linéaire). Il s'agit d'étudier l'aimantation de cette dernière lors d'une impulsion de champ magnétique. Les distributions de courant obtenues par les 2 outils numériques sont comparées à un instant donné du processus d'aimantation. Le problème est résolu à la fois en 2D et en 3D dans Flux®. Nous regardons notamment l'influence de plusieurs paramètres (pas de temps, maillage...) afin de donner les points clefs d'une modélisation efficace des supraconducteurs.

INTRODUCTION

Les supraconducteurs possèdent une loi de comportement électrique E - J fortement non linéaire. Le modèle de la loi en puissance tel que E est proportionnel à J^n montre bien cette non linéarité. Hormis quelques cas d'école, il est quasiment impossible de résoudre analytiquement les problèmes électromagnétiques utilisant des supraconducteurs. C'est pourquoi, les outils numériques sont indispensables à la modélisation et la conception de dispositifs supraconducteurs. Il existe actuellement de nombreuses méthodes de

résolution numérique parmi lesquelles la Méthode des Différences Finies (MDF) et la Méthode des Eléments Finis (MEF) sont probablement les plus connues.

Un code de calcul en C++, développé au GREEN, utilisant un maillage régulier et la MDF a permis de réaliser une des premières études en 2D de phénomènes couplés magnétothermiques dans les Supraconducteurs à Haute Température [1]. Le logiciel de calcul par éléments finis Flux® développé conjointement par Cedrat et le G2Elab n'est plus à présenter. Il permet notamment la simulation de dispositifs électromagnétiques et thermiques en 2D et 3D.

DESCRIPTION DU PROBLEME

Processus d'aimantation

Une pastille massive en YBCO (Fig. 1) est aimantée par une impulsion de champ magnétique, en utilisant une bobine en cuivre qui mise en parallèle avec une capacité forme un circuit résonnant. Le champ appliqué résultant $B_a(t)$ suivant la direction z peut s'exprimer ainsi :

$$B_a(t) = B_m \frac{t}{\tau} \exp\left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \quad (1)$$

avec B_m l'induction magnétique maximale à $t = \tau$, et τ la constante de temps du système. Afin de simuler un champ pulsé rapide, une constante de temps de 1 ms a été choisie. Fig. 2 montre l'évolution temporelle du champ appliqué $B_a(t)$. Les résultats seront donnés à $t = \tau$ avec $B_m = 2,6$ T.

Modèle et formulations

Le comportement du supraconducteur est régi par les équations de Maxwell. Lorsque l'approximation quasi-statique est faite (pas de déplacement de courants et $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$), l'ajout de la loi constitutive du matériau $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ donne :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{J} / \partial t \quad (2)$$

Le code de calcul en différences finies utilise directement (2) pour la résolution tandis que Flux® introduit des variables d'état supplémentaires afin de simplifier le nombre d'inconnues (en 3D), d'améliorer la convergence et de permettre plus facilement le couplage avec les équations des circuits [3].

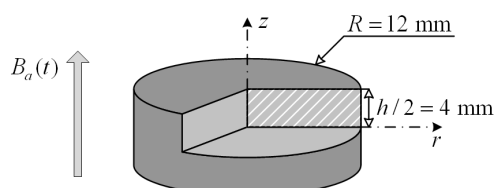


Fig. 1. Géométrie de l'échantillon : pastille cylindrique de 12 mm de rayon sur 8 mm de haut. Etant données les symétries, seule une moitié de l'échantillon est modélisée (zone hachurée).

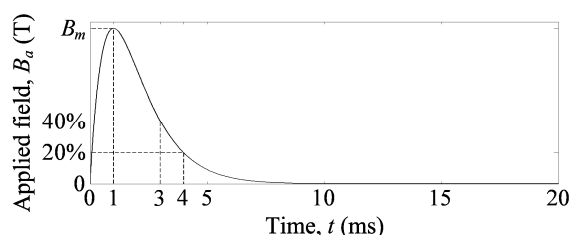


Fig. 2. Evolution temporelle du champ magnétique appliqué $B_a(t)$.

Les deux formulations utilisées par le logiciel en éléments finis pour les supraconducteurs sont $\mathbf{A} - V$ et $\mathbf{T} - \mathbf{T}_0 - \Phi$ [2]. $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur magnétique ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) et V le potentiel scalaire électrique :

$$\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla V \quad (3)$$

$\mathbf{T}$ est le potentiel vecteur électrique ($\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}$) et Φ le potentiel scalaire magnétique :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \Phi \quad (4)$$

Un courant de transport peut être ajouté à travers le terme $\mathbf{T}_0$. Afin d'obtenir une unique solution, une condition de jauge est ajoutée :

$$\nabla \times \mathbf{T} = 0, \quad (5)$$

ce qui améliore notamment la convergence.

Quelle que soit la formulation choisie, une loi de comportement électrique $\mathbf{E}(\mathbf{J})$ est également nécessaire. Le modèle de la loi en puissance est couramment utilisé pour représenter le comportement non linéaire des supraconducteurs à haute température. Dans le cas isotropique, la relation est :

$$E = E_c (J / J_c)^n, \quad (6)$$

où J_c est la densité de courant critique, E_c est le champ électrique critique et n l'index de la loi en puissance. Les paramètres J_c et n peuvent également dépendre de l'induction magnétique $\mathbf{B}$ et de la température T .

Dans le code en différences finies, nous utilisons une loi $\mathbf{E}(\mathbf{J})$, c'est donc la résistivité qui est utilisée. A partir de (6), une résistivité équivalente $\rho(\mathbf{J}, \mathbf{B}, T)$ peut être définie :

$$\rho(\mathbf{J}, \mathbf{B}, T) = \frac{E_c}{J_c(\mathbf{B}, T)} \left(\frac{\|\mathbf{J}\|}{J_c(\mathbf{B}, T)} \right)^{n(\mathbf{B}, T)-1} \quad (7)$$

Historiquement dans Flux®, c'était plutôt la conductivité qui était utilisée. Ce qui se traduit pour le supraconducteur par :

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{B}, T) \cdot \mathbf{E} \quad (8)$$

Une résistivité équivalente fonction de $\mathbf{E}$ peut ainsi être définie :

$$\rho(\mathbf{E}, \mathbf{B}, T) = \frac{E_c}{J_c(\mathbf{B}, T)} \left(\frac{\|\mathbf{E}\|}{E_c} \right)^{\frac{n(\mathbf{B}, T)-1}{n(\mathbf{B}, T)}} + \rho_0 \quad (9)$$

ρ_0 est une résistivité résiduelle qui a été ajoutée dans le logiciel pour des raisons de convergence.

Les équations d'état dans le supraconducteur pour chaque formulation sont :

$$\nabla \times \nabla \times (\rho(\mathbf{J}, \mathbf{B}, T) \cdot \mathbf{J}) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{\mu_0}{\rho(\mathbf{E}, \mathbf{B}, T)} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \quad (11)$$

$$\nabla \times (\rho(\mathbf{E}, \mathbf{B}, T) \nabla \times \mathbf{T}) + \mu_0 (\mathbf{T} + \mathbf{T}_0 - \nabla \Phi) = 0 \quad (12)$$

(10) correspond à l'équation résolue par le code en différences finies, (11) et (12) aux équations résolues par Flux® en 2D et 3D respectivement.

Seules les dépendances en champ magnétique seront actives dans notre étude. D'après le modèle de Kim, la dépendance en champ magnétique de J_c peut s'écrire :

TABLE I
PARAMETRES DU SUPRACONDUCTEUR

Symbole	Désignation	Valeur
E_c	Champ électrique critique	1 $\mu\text{V/cm}$
J_{c0}	Densité de courant critique pour $\ \mathbf{B}\ = 0$	500 A/mm ²
n_0	Exposant de la loi en J^n pour $\ \mathbf{B}\ = 0$	20
B_0	Constante utilisée dans la loi $J_c(\mathbf{B})$	0.5 T
B_1	Constante utilisée dans la loi $n(\mathbf{B})$	1.57 T
β_1	Constante utilisée dans la loi $n(\mathbf{B})$	2.14

$$J_c(\mathbf{B}) = J_{c0} \frac{1}{1 + \|\mathbf{B}\| / B_0}, \quad (13)$$

où J_{c0} est la valeur de J_c pour $\|\mathbf{B}\| = 0$ et B_0 une constante. La dépendance en champ magnétique de l'exposant n est définie ainsi :

$$n(\mathbf{B}) = \frac{n_0}{1 + \beta_1 - \beta_1 \exp(-\|\mathbf{B}\| / B_1)}, \quad (14)$$

où n_0 représente la valeur de n lorsque $\|\mathbf{B}\| = 0$, β_1 et B_1 sont des constantes du modèle.

Etant données les symétries et périodicités du problème posé, les vecteurs $\mathbf{J}$ et $\mathbf{A}$ n'ont qu'une seule composante suivant θ . Le potentiel vecteur électrique $\mathbf{T}$ se réduit à 2 composantes T_x et T_y .

Paramètres de simulation

La pastille supraconductrice étudiée (Fig. 1) est caractérisée par les paramètres résumés dans la Table I, qui correspondent à des valeurs typiques pour un cristal mono-domaine en $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$.

Code de calcul en C++ Ce code de calcul utilise un maillage régulier avec un pas d'espace de 0.5 mm suivant les directions r et z . Le domaine est formé de 100x100 points soit 25x8 pour modéliser un quart de pastille (partie hachurée de la Fig. 1).

Le champ magnétique est calculé par intégration temporelle de $\mathbf{E}$, donc plus le pas de temps sera petit, plus la précision sur $\mathbf{B}$ sera grande. Nous avons choisi un pas de temps Δt égale à 10 μs .

Le champ source $B_a(t)$ est imposé sur la frontière du domaine en utilisant la relation :

$$e_\theta(t, r = R_d) = \frac{R_d}{2} \times \frac{dB_a(t)}{dt} \quad (15)$$

où R_d est la valeur du rayon du domaine axisymétrique.

Flux® en 2D Dans le logiciel, le domaine est également réduit à un quart en tenant compte des symétries. Le champ source est imposé à partir d'un inducteur, suffisamment éloigné du supraconducteur, de sorte que la valeur du champ appliqué soit identique à celle du code de calcul en C++. La région supraconductrice est maillée en utilisant des triangles. Des pas de temps de 10 μs et 100 μs ont été testés.

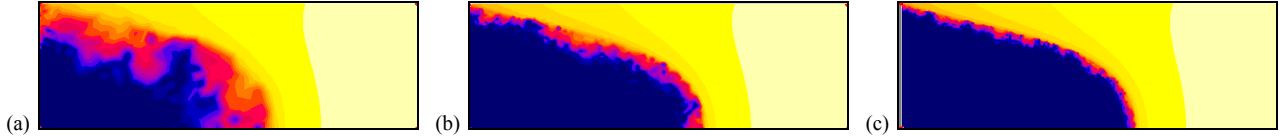


Fig. 3. Influence du maillage en 2D pour une loi $E(J)$ avec J_c et n constants : amplitude de la densité de courant dans la pastille à $t = 1$ ms avec 20 points de discrétisation sur le rayon (a), 50 pts (b), 100 pts (c). En jaune (valeur max.) 850 A / mm² et 0 en bleu.

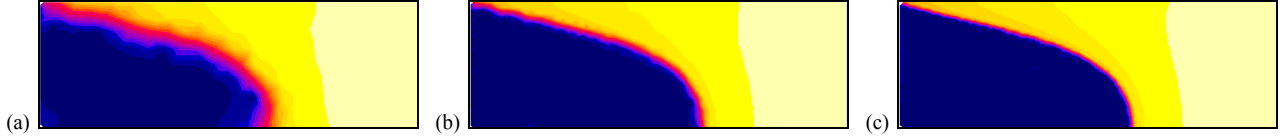


Fig. 4. Influence du maillage en 3D pour une loi $E(J)$ avec J_c et n constants : amplitude de la densité de courant dans la pastille à $t = 1$ ms avec 20 points de discrétisation sur le rayon (a), 50 pts (b), 100 pts (c). En jaune (valeur max.) 850 A / mm² et 0 en bleu.



Fig. 5. Influence du maillage en 2D pour une loi $E(J)$ avec des paramètres $J_c(B)$ et $n(B)$: amplitude de la densité de courant dans la pastille à $t = 1$ ms avec 20 points de discrétisation sur le rayon (a), 50 pts (b), 100 pts (c). En jaune (valeur max.) 650 A / mm² et 0 en bleu.

Flux® en 3D En 3D, seule une portion de la pastille est modélisée (angle de 10°) en imposant des conditions de périodicité. La région surfacique supraconductrice est maillée en utilisant des triangles puis extrudée afin de créer un volume au maillage régulier. Un seul élément est présent dans la tranche de cette portion de pastille afin de ne pas surcharger inutilement le maillage. Le champ source est imposé à l'aide d'une bobine non maillée qui produit un champ homogène dans le domaine d'étude et d'amplitude identique au code de calcul en C++. Le pas de temps est défini à 100 μ s.

RESULTATS

Influence du maillage

Le maillage a une influence directe sur la précision des résultats. En 2D (Fig. 3 et 5), un supraconducteur peu maillé entraîne une propagation plus rapide de la densité de courant et des instabilités numériques au niveau du front. En effet, le passage d'une valeur de densité de courant nulle à une valeur très grande (proche de J_{c0}) nécessite un maillage très fin au niveau de ce front. Un maillage auto-adaptatif serait idéal. Ce type de maillage

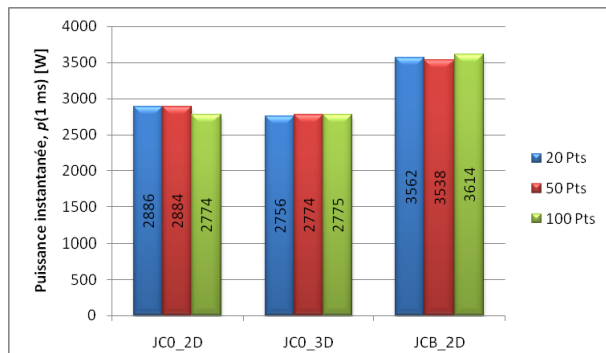


Fig 6. Influence du maillage : puissance instantanée à $t = 1$ ms avec des paramètres J_c et n constants en 2D et 3D (JCO_2D et JCO_3D) et des lois $J_c(B)$ et $n(B)$ en 2D (JCB_2D) pour différents raffinements du maillage (nombre de points suivant le rayon).

n'est pas encore possible avec le logiciel testé.

En 3D (Fig. 4), l'influence du maillage est moins flagrante. Seule Fig. 4 (a) montre un maillage qui ne permet pas une variation suffisamment rapide de J au niveau du front.

D'un point de vue puissance (Fig. 6), les résultats sont néanmoins très similaires quel que soit le raffinement de maillage choisi.

Influence du paramètre ρ_0

[4] définit un critère concernant le paramètre ρ_0 , à savoir $\rho_0 \leq 10^{-2} E_c / J_{c0}$. Nous avons donc choisi $\rho_0 = 10^{-3} E_c / J_{c0}$ et fait varier ce paramètre. Pour le problème traité, l'influence de ρ_0 sur la puissance dissipée (Fig. 7) et le temps de calcul n'est pas significative. Notamment, le fait d'augmenter ρ_0 au-delà du critère donné par [4] n'augmente pas plus la puissance que si on le diminuait.

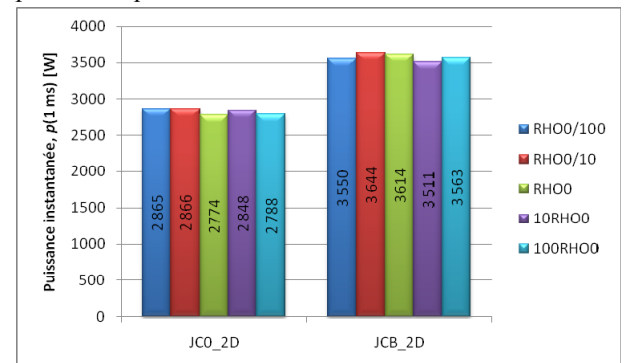


Fig 7. Influence de ρ_0 : puissance instantanée à $t = 1$ ms avec des paramètres J_c et n constants en 2D (JCO_2D) et des lois $J_c(B)$ et $n(B)$ en 2D (JCB_2D), pour différentes valeurs de ρ_0 . La valeur de référence ρ_0 étant égale à $10^{-3} E_c / J_{c0}$ soit $2.10^{-16} \Omega.m$.

Influence du pas de temps

Le pas de temps a une forte influence sur la puissance

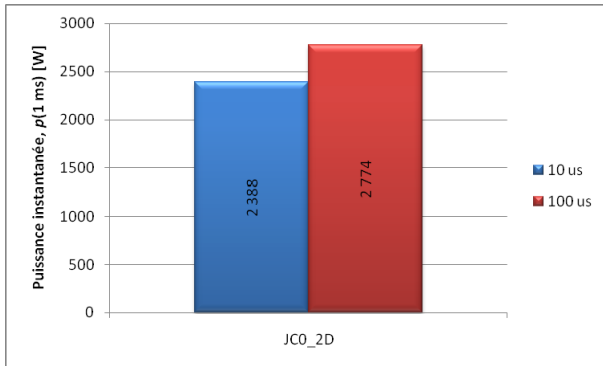


Fig. 8. Influence du pas de temps : puissance instantanée à $t = 1 \text{ ms}$ avec des paramètres J_c et n constants en 2D (JC0_2D).

instantanée. Diminuer Δt de $100 \mu\text{s}$ à $10 \mu\text{s}$ engendre une diminution de la puissance instantanée à $t = 1 \text{ ms}$ de 2774 W à 2388 W (Fig. 8) mais paradoxalement fait passer les pertes (intégrale de $p(t).dt$ sur 1 ms) de $6,73 \text{ W}$ à $6,97 \text{ W}$ soit 3% d'augmentation, ce qui reste raisonnable finalement. Cependant, le calcul avec $\Delta t = 10 \mu\text{s}$ prend 10 fois plus de temps qu'avec $100 \mu\text{s}$.

Comparaison MDF et MEF

Les résultats obtenus par les 2 méthodes MDF et MEF sont comparés pour un pas de temps de $10 \mu\text{s}$ (Fig. 9). Malgré une échelle de couleur différente, on observe bien la concordance des résultats, i.e. la pénétration du courant est quasi identique. Cependant, il semble que dans les 2 cas (J_{c0} et $J_c(\mathbf{B})$) le front se propage moins vite avec la Méthode des Différences Finies. Cette différence peut s'expliquer par le faible nombre de points présents dans le supraconducteur avec la MDF. Le front ne peut se déplacer que d'un pas d'espace soit $0,5 \text{ mm}$. Un pas d'espace 10 fois plus petit que celui utilisé engendrerait une matrice 100 fois plus grosse, ce qui augmenterait le temps de calcul de façon considérable.

La différence sur la puissance instantanée est de 14% (Fig. 10). Le calcul de la puissance étant fait par intégrale volumique du produit scalaire de $\mathbf{E}$ par $\mathbf{J}$, la précision sur ce calcul dépend directement du nombre de points à l'intérieur du matériau. L'utilisation de la MDF avec un pas d'espace relativement grand a donc pour conséquence de sous-estimer la puissance et les pertes.

La résolution du problème en 3D avec Flux® et des lois $J_c(\mathbf{B})$ et $n(\mathbf{B})$ pour le supraconducteur (JCB_3D) pose encore quelques difficultés. Les résultats obtenus en 3D ne coïncident pas avec ceux obtenus avec le même logiciel en 2D ni avec les résultats du code MDF. De plus, les résultats varient suivant la formulation retenue dans le matériau (MT3TSCHRJ ou MT3TOM). Plusieurs hypothèses sont actuellement étudiées, e.g. la condition de jauge $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ est inadaptée ou l'induction magnétique $\mathbf{B}$ est erronée car le calcul de $\nabla \Phi$ dans le supraconducteur est imprécis, dans le cas particulier de l'utilisation des dépendances $J_c(\mathbf{B})$ et $n(\mathbf{B})$

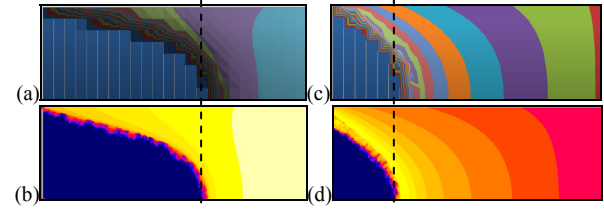


Fig. 9. Comparaison des méthodes de calcul MDF et MEF : amplitude de la densité de courant dans la pastille à $t = 1 \text{ ms}$ avec J_c et n constants (a) MDF et (b) MEF, avec des lois $J_c(\mathbf{B})$ et $n(\mathbf{B})$ en (c) MDF et (d) MEF.

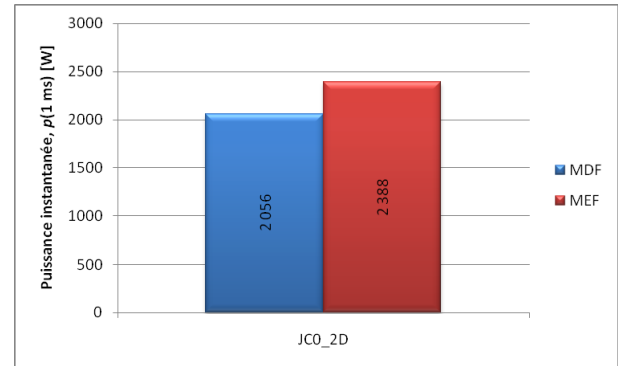


Fig. 10. Comparaison des méthodes de calcul MDF et MEF : puissance instantanée à $t = 1 \text{ ms}$ avec des paramètres J_c et n constants en 2D (JC0_2D) et un pas de temps Δt de $10 \mu\text{s}$.

du matériau.

CONCLUSION

Nous avons utilisé deux méthodes de calcul pour étudier la répartition du courant dans une pastille supraconductrice lors d'une aimantation pulsée. Le problème à traiter est fortement non linéaire. Néanmoins, la MDF et la MEF ont montré des résultats très similaires et donc une bonne représentation du comportement du matériau. De manière générale, des résultats plus précis sont obtenus en maillant plus finement. Le choix du pas de temps est apparu comme un paramètre essentiel étant donné les variations rapides du champ magnétique appliqué.

REFERENCES

- [1] K. Berger, "Etudes des phénomènes couplés magnétothermiques dans les Supraconducteurs à Haute Température", Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2006.
- [2] E. Vinot, G. Meunier, and P. Tixador, "Different formulations to model superconductors," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 36, pp. 1226–1229, July 2000.
- [3] E. Vinot, V. Leconte, G. Meunier, and P. Tixador, "Superconducting model with circuit coupling in 2D or axisymmetrical cases", presented at the CEFC'2000, Milwaukee, WI, June 4-7, 2000.
- [4] S. Stavrev *et al.*, "Comparison of numerical modelling methods for modelling superconductors", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 38 (2), pp-849-852, March 2002.